République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par :

Hemamda Nour el houda

Intitulé

Etude de quelques inégalités intégrales et leurs applications

Dirigé par : Lakhal Fahim

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.	Ayachi Asma	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.	Lakhal Fahim	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.	Zenkoufi Lilia	MCB	Univ-Guelma

Session Juillet 2019

REMERCIEMENTS

أحمد الله الذي أنار لي درب العلم و المعرفة، و أعانني على أداء هذا الواجب ووفقني إلى انجاز هذا العمل …

اللّهم لك الحمد

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je voudrais tout d'abord adresser ma gratitude à Mr. Lakhal Fahim d'avoir accepté d'encadrer ce travail, je le remercie pour ses conseils judicieux, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Mes remerciements vont également aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer, discuter et examiner mon modeste travail.

Mes derniers remerciements, et pas les moindres, vont à ma mère et à mon père qui m'ont tant apporté d'amour, d'encouragement et sans eux je n'aurais pas pu aller au bout de ce travail, à mon chère frère et ma belle sœur, qui m'ont toujours apporté leur support moral, ainsi que toute ma famille,

à mes chères amies qui m'ont accompagné, poussé, encouragé tout au long de l'élaboration de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail:

À mon grand-père « Nous lui souhaitons la longévité »

À mes parents

A ma très chère Mère pour ses sacrifices

De tous les instants.

À mon frère et sœur

À mon fiancé Houssam

À Toute ma famille

A tous Mes enseignants sans Exception

Hemamda Nour el Houda

Résumé :

Le présent mémoire a pour objectif d'étudier quelques nouvelles extensions et raffinements établies au cours du temps de l'inégalité de Hermite-Hadamard pour certains types de fonctions convexes et η-convexes via des intégrales fractionnaires. Ainsi quelques généralisations des inégalités de type Pachpatte-Bihari-Ou-Iang et leurs applications.

الملخص:

إن الهدف من هاته الأطروحة هو دراسة بعض التحسينات والتوسيعات المنجزة خلال الفترات الزمنية المتعاقبة لمتراجحة هارميت-هادامار للتوابع المحدبة و المحدبة بالنسبة للتابع ايتا من خلال التكاملات الكسرية .

وكذلك بعض التعميمات لمتراجحات باشبات-بيهاري-هويانغ وتطبيقاتها.

Table des matières

Introduction

Les inégalités intégrales jouent un rôle important dans le développement de toutes les branches des mathématiques et occupent une place centrale dans l'attention de nombreux mathématiciens. En particulier les inégalités intégrales ont connues un grand développement et des nouvelles idées et techniques sont apparues ce qui a contribué à la résolution de nombreux problèmes importants en théorie de l'approximation et en analyse numérique où l'estimation des erreurs d'approximation est exigée. Par ailleurs l'importance de ces inégalités intégrales intervient en grande partie dans l'étude des équations intégrales et plus généralement dans le cadre des équations différentielles ordinaires au point de vue existence des solutions et stabilité des point d'équilibres. La littérature dans ce sens est trés riche et connait une croissance explosive en théorie et aux applications. Pour plus de détails voir les travaux de Pachpatte [6], Bainov et Simeonov [1], S. S. Dragomir [2].

Dans notre mémoire on s'interesse à quelques inégalités de type Hermite-Hadamard et Ou-Iang-Pachpatte-Bihari qui ont été appliquées presque à tous les types de fonctions c'est à dire aux fonctions dérivables, absolument continues, Lipchitziennes, monotones et aux fonctions à variation bornée. Elles sont utilisées aussi dans plusieurs domaines tels que les statistiques, l'intégration numérique et en analyse non linéaire.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres. Dans le premier et le deuxième chapitre nous présentons un certain nombre d'inégalités de type Hermite-Hadamard qui peuvent étre obtenues pour deux type de convexité pour les intégrales normales et les intégrales fractionnaires (voir $[2, 4, 5, 8]$). Le troisième chapitre contient certaines inégalités intégrales de type Ou-Iang-

Pachpatte-Bihari [6]. Ces résultats sont ensuite utilisés dans le Chapitre 4 pour étudier quelques exemples d'applications. On termine cette mémoire par une petite bibliographie.

Chapitre 1

Inégalités de type Hermite-Hadamard

Dans ce chapitre, on va rappeler certaines inégalités de type Hermite-Hadamard pour deux type de convexité.

1.1 Cas des fonctions convexes

Définition 1.1 *Soit* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est dite convexe si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \tag{1.1}$$

pour tous $x, y \in I$ *et* $t \in [0,1]$.

Exemple 1.1 1/ $f(x) = x^2$ *est une fonction convexe dans* $\mathbb{R}$.

2/ $f(x) = e^x$ *est convexe dans* $\mathbb{R}$.

3/ $f(x) = |x|$ *est convexe dans* $\mathbb{R}$.

En 1893 Hermite-Hadamard ont démontré l'inégalité suivante

Lemme 1.1 [2]. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe, alors l'inégalité d'Hermite-Hadamard est définie comme suit*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{1.2}$$

Preuve. *On suppose que f est convexe sur $[a,b]$, alors on a*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2}(a+b-x)+\frac{x}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f(a+b-x)+\frac{1}{2}f(x) \ . \end{aligned} \tag{1.3}$$

On pose $x = ta+(1-t)b$ avec $t\in[0,1]$ on obtient

$$\begin{aligned} f(a+b-x)+f(x) &= f(a+b-ta-(1-t)b)+f(ta+(1-t)b) \\ &= f((1-t)a+tb)+f(ta+(1-t)b) \\ &\leq [(1-t)f(a)+tf(b)]+[tf(a)+(1-t)f(b)] \\ &\leq f(a)+f(b). \end{aligned} \tag{1.4}$$

D'aprés (1.3) *et* (1.4) *on a*

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(a+b-x)+f(x) \leq f(a)+f(b).$$

On intègre les deux côtés de cette inégalité sur $[a,b]$ on trouve

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

■

Remarque 1.1 *En 1906, L-Féjer a démontré le Théorème suivant*

soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction convexe alors

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,dx, \tag{1.5}$$

où $g:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ intégrable et symétrique par rapport à $x=\dfrac{a+b}{2}$

$(g(x) = g(a+b-x),\ \forall x\in[a,b])$.

Remarque 1.2 *Si on pose $g = 1$ dans (1.5) on retrouve l'inégalité d'Hermite-Hadamard*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

En 1998, S.S.Dragomir et R.P.Agarwal ont démontré quelques inégalités intéressantes en utilisant le Lemme suivant

Lemme 1.2 [2]. *Soit $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I°, soit $a, b \in I^\circ$ avec $a \leq b$. Si $f' \in L_1[a,b]$ alors on a l'égalité suivante*

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)\, f'(ta+(1-t)\,b)\,dt. \tag{1.6}$$

Preuve. On pose

$$I = \int_0^1 (1-2t)\, f'(ta+(1-t)\,b)dt.$$

On intègre I par parties

$$\begin{aligned} I &= \frac{f(ta+(1-t)\,b)}{a-b}(1-2t)\bigg|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{f(ta+(1-t)\,b)}{a-b}dt \\ &= \frac{-f(a)-f(b)}{a-b} + \frac{2}{a-b}\int_0^1 f(ta+(1-t)\,b)\,dt. \end{aligned}$$

Posons $x = ta + (1-t)\,b$, avec $t \in [0,1]$, alors on obtient

$$I = \frac{f(a)+f(b)}{b-a} - \frac{2}{b-a}.\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Donc

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)\, f'(ta+(1-t)\,b)\,dt.$$

■

Théorème 1.1 [2]. *Soit $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur $I^\circ, a, b \in I^\circ$ avec $a < b$. Si $\left|f'\right|$ est convexe sur $[a,b]$, alors on a l'inégalité suivante*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{(b-a)\left(\left|f'(a)\right| + \left|f'(b)\right|\right)}{8}. \tag{1.7}$$

Preuve. D'aprés le Lemme 1.2 on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| &= \left|\frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)\, f'(ta+(1-t)\,b)dt\right| \\
&\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t| \left|f'(ta+(1-t)\,b)\right| dt \\
&\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t| \left[t\left|f'(a)\right| + (1-t)\left|f'(b)\right|\right] dt, \quad \left(\text{car } \left|f'\right| \text{ est convexe}\right) \\
&\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t|\, t\left|f'(a)\right| dt + \int_0^1 |1-2t|\,(1-t)\left|f'(b)\right| dt \\
&\leq \frac{(b-a)\left(\left|f'(a)\right| + \left|f'(b)\right|\right)}{2}\left[\int_0^1 |1-2t|\, tdt + \int_0^1 |1-2t|\,(1-t)\,dt\right].
\end{aligned}$$

Et comme

$$\int_0^1 |1-2t|\,(1-t)\,dt = \int_0^1 |1-2t|\, tdt = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)\, tdt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)\, tdt = \frac{1}{4}.$$

Donc

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{(b-a)\left(\left|f'(a)\right| + \left|f'(b)\right|\right)}{8}.$$

■

Théorème 1.2 [2]. *Soit $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur $I^\circ, a, b \in I^\circ$ avec $a < b$, et soit $p > 1$. Si $\left|f'\right|^{p/(p-1)}$ est convexe sur $[a,b]$, alors on a l'inégalité suivante*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{(b-a)}{2(p+1)^{1/p}}\left[\frac{\left|f'(a)\right|^{p/(p-1)}+\left|f'(b)\right|^{p/(p-1)}}{2}\right]^{(p-1)/p}. \quad (1.8)$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.2 et l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| &\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t|\left|f'(ta+(1-t)b)\right|dt \\ &\leq \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_0^1 \left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q\right)^{1/q} \quad (1.9)\end{aligned}$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, (i.e, $q=p/(p-1)$).
D'aprés la convexité de $\left|f'\right|^q$, on a

$$\int_0^1 \left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt \leq \int_0^1 \left[t\left|f'(a)\right|^q+(1-t)\left|f'(b)\right|^q\right]dt = \frac{\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q}{2}. \quad (1.10)$$

De plus

$$\int_0^1 |1-2t|^p\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)^p\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)^p\,dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)^p\,dt = \frac{1}{p+1}. \quad (1.11)$$

Utilisons (1.10) et (1.11) dans (1.9) on déduit l'inégalité (1.8). ■

1.2 Cas des fonctions $\eta-$convexes

Gordji et al.[4], ont introduit la fonction $\eta-$convexe comme suit

Définition 1.2 *Une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est dite η-convexe (ou convexe par rapport à η) si*

$$f(tx+(1-t)y) \leq f(y)+t\eta(f(x),f(y)), \quad (1.12)$$

pour tous $x,y\in[a,b]$, $t\in[0,1]$, et η est définie par $\eta: f([a,b])\times f([a,b])\to\mathbb{R}$.

Remarque 1.3 *Dans la définition ci-dessus si on prend $\eta = x - y$, alors nous pouvons directement obtenir la définition classique d'une fonction convexe.*

Maintenant, nous donnons quelques exemples concernant la fonction η-convexe

Exemple 1.2 *1/ Pour une fonction convexe f, on peut trouver une autre fonction η autre que la fonction $\eta(x,y) = x - y$ tel que f est η-convexe. Considérons $f(x) = x^2$ et $\eta(x,y) = 2x + y$, alors on a*

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda) y) &= (\lambda x + (1-\lambda) y)^2 \leq y^2 + \lambda x^2 + \lambda (1-\lambda) 2xy \\ &\leq y^2 + \lambda x^2 + \lambda (1-\lambda) \left(x^2 + y^2\right) \\ &\leq y^2 + \lambda \left(x^2 + x^2 + y^2\right) = y^2 + \lambda \left(2x^2 + y^2\right) \\ &= f(y) + \lambda \eta (f(x), f(y)) \end{aligned}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in (0,1)$. Ainsi le fait que $x^2 \leq y^2 + (2x^2 + y^2)$ et $y^2 \leq y^2$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ montre la véridité de l'inégalité pour $\lambda = 1$ et $\lambda = 0$ respectivement, ce qui signifie que f est η-convexe. Notons que la fonction $f(x) = x^2$ est η-convexe pour tous $\eta(x,y) = ax + by$ avec $a \geq 1$, $b \geq -1$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

2/ Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \geq 0 \\ x, & x < 0, \end{cases}$$

et on définit une bifonction η par $\eta(x,y) = -x - y$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^- = (-\infty, 0]$. Il n'est pas difficile de vérifier que f est une fonction η-convexe mais pas convexe.

3/ Définir la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1, \end{cases}$$

et une bifonction $\eta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ par

$$\eta(x,y) = \begin{cases} x + y, & x \leq y \\ 2(x+y), & x > y. \end{cases}$$

Alors f est η-convexe mais n'est pas convexe.

Le premier résultat de cette section est un Lemme qui est la généralisation du Lemme 1.2.

Lemme 1.3 [4]. *Supposons que* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est une fonction différentiable,* $g : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ *une fonction continue et* f' *est une fonction intégrable sur* $[a,b]$, *Alors*

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^x g(u)\,f'(x)\,dudx - \frac{1}{2}\int_a^b\int_x^b g(u)\,f'(x)\,dudx. \tag{1.13}$$

Preuve. Par la règle de dérivation de Leibniz et l'intégration par parties, on a

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\left(\int_a^x g(u)\,du\right)' dx = f(b)\int_a^b g(u)\,du - \int_a^b\int_a^x g(u)\,f'(x)\,dudx. \tag{1.14}$$

De même on a

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\left(-\int_x^b g(u)\,du\right)' dx = f(a)\int_a^b g(u)\,du + \int_a^b\int_x^b g(u)\,f'(x)\,dudx. \tag{1.15}$$

En ajoutant les inégalités (1.14) et (1.15), on obtient alors

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(u)\,du - \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^x g(u)\,f'(x)\,dudx - \frac{1}{2}\int_a^b\int_x^b g(u)\,f'(x)\,dudx.$$

■

Le Lemme suivant est une conséquence du Lemme 1.3

Lemme 1.4 [4]. *Supposons que* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est une fonction différentiable,* $g : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ *une fonction continue et symétrique par rapport à* $\frac{a+b}{2}$ *et* f' *est une fonction intégrable sur* $[a,b]$. *Alors*

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=\frac{(b-a)}{4}\left\{\int_0^1\left(\int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b}g(u)\,du\right)f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)dt+\right.$$

$$\left.\int_0^1\left(\int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b}g(u)\,du\right)f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)dt\right\}. \tag{1.16}$$

Preuve. Du Lemme 1.3 on peut avoir

$$\begin{aligned} I &= \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left\{\int_a^{\frac{a+b}{2}}\int_a^x g(u)\,f'(x)\,dudx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\int_a^x g(u)\,f'(x)\,dudx-\right. \qquad (1.17)\\ &\qquad \left.\int_a^{\frac{a+b}{2}}\int_x^b g(u)\,f'(x)\,dudx-\int_{\frac{a+b}{2}}^b\int_x^b g(u)\,f'(x)\,dudx\right\}. \end{aligned}$$

En utilisant le chengement de varaible $x=\dfrac{1+t}{2}a+\dfrac{1-t}{2}b$ et $x=\dfrac{1-t}{2}a+\dfrac{1+t}{2}b$ dans (1.17), on aura

$$\begin{aligned} I &= \frac{b-a}{4}\left\{\int_0^1\int_a^{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b} g(u)\,f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)dudt+\right. \qquad (1.18)\\ &\qquad \int_0^1\int_a^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)\,f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)dudt- \qquad (1.19)\\ &\qquad \int_0^1\int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^b g(u)\,f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)dudt- \qquad (1.20)\\ &\qquad \left.\int_0^1\int_{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b}^b g(u)\,f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)dudt\right\}. \qquad (1.21) \end{aligned}$$

Considérons (1.18) avec (1.20) et (1.19) avec (1.21) , alors

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{b-a}{4}\left\{\int_0^1\left[2\int_a^{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b} g(u)\,du-\int_a^b g(u)\,du\right] f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)dt+\right.\\
&\left.\int_0^1\left[2\int_a^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)\,du-\int_a^b g(u)\,du\right] f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)dt\right\}. \qquad (1.22)
\end{aligned}
$$

Puisque g est symétrique par rapport à $\dfrac{a+b}{2}$ alors on a

$$
2\int_a^{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b} g(u)\,du-\int_a^b g(u)\,du=\int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)\,du, \qquad (1.23)
$$

et

$$
2\int_a^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)\,du-\int_a^b g(u)\,du=\int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)\,du. \qquad (1.24)
$$

Impliquant (1.23) et (1.24) dans (1.22) on trouve

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{(b-a)}{4}\left\{\int_0^1\left(\int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)\,du\right) f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)dt+\right.\\
&\left.\int_0^1\left(\int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)\,du\right) f'\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)dt\right\}.
\end{aligned}
$$

D'où le résultat. ■

Remarque 1.4 *Si on pose $g=1$, alors le Lemme 1.3 et le Lemme 1.4 sont équivalents au Lemme 1.2.*

Théorème 1.3 [4]. *Supposons que* $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ *est une fonction différentiable,* $g:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}^{+}$ *une fonction continue et symétrique par rapport à* $\frac{a+b}{2}$ *et* $\left|f^{'}\right|$ *est une fonction* η*-convexe, où* η *est bornée sur* $[a,b]$. *Alors*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right|\leq$$

$$\frac{(b-a)}{4}\left[2\left|f^{'}(b)\right|+\left|\eta\left(f^{'}(a),f^{'}(b)\right)\right|\right]\int_0^1\int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)\,dudt. \tag{1.25}$$

Preuve. À partir du Lemme 1.4 et du fait que $\left|f^{'}\right|$ est η-convexe où η est bornée, alors on a

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right|\\
&\leq\frac{(b-a)}{4}\int_0^1\int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)\left[\left|f^{'}\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|+\left|f^{'}\left(\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b\right)\right|\right]dudt\\
&\leq\frac{(b-a)}{4}\int_0^1\int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)\left[\left|f^{'}(b)\right|+\frac{1+t}{2}\eta\left(\left|f^{'}(a)\right|,\left|f^{'}(b)\right|\right)+\left|f^{'}(b)\right|+\frac{1-t}{2}\eta\left(\left|f^{'}(a)\right|,\left|f^{'}(b)\right|\right)\right]dudt\\
&=\frac{(b-a)}{4}\left[2\left|f^{'}(b)\right|+\left|\eta\left(f^{'}(a),f^{'}(b)\right)\right|\right]\int_0^1\int_{\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b}^{\frac{1-t}{2}a+\frac{1+t}{2}b} g(u)\,dudt\,.
\end{aligned}$$

■

Chapitre 2

Inégalités d'Hermite-Hadamard pour les intégrales fractionnaires

2.1 Cas des fonctions convexes

Définition 2.1 *Soit $f \in L_1[a,b]$, l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville $J^{\alpha}_{a+}f$ et $J^{\alpha}_{b-}f$ d'ordre $\alpha > 0$, où $a \geq 0$ est définie par*

$$J^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt,\ x > a$$

et

$$J^{\alpha}_{b-}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)\,dt,\ x < b$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt$, *est la fonction Gamma et* $J^{0}_{a+}f(x) = J^{0}_{b-}f(x) = f(x)$.

En 2013, M.Z.Sarikaya et al. ont prouvé une variante des inégalités d'Hermite-Hadamard sous forme d'intégrale fractionnaire comme suit

Théorème 2.1 [8]. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive avec $0 \leq a \leq b$ et $f \in L_1[a,b]$. Si f est convexe sur $[a,b]$, alors on a l'inégalité suivante*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha} f(b)+J_{b-}^{\alpha} f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \text{ avec } \alpha>0. \tag{2.1}$$

Preuve. Puisque f est une fonction convexe sur $[a,b]$, alors pour $x, y \in [a,b]$ et $\lambda = \frac{1}{2}$ on a

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{2.2}$$

On pose $x = ta + (1-t)b$, $y = (1-t)a + tb$, on obtient

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb). \tag{2.3}$$

En multipliant l'inégalité (2.3) par $t^{\alpha-1}$, puis on intègre par rapport à t sur $[0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{2}{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b)\,dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} f((1-t)a+tb)\,dt \\ &= \int_b^a \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(u) \frac{du}{a-b} + \int_a^b \left(\frac{v-a}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(v) \frac{dv}{b-a} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha} f(b)+J_{b-}^{\alpha} f(a)\right], \end{aligned}$$

i.e,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha} f(b)+J_{b-}^{\alpha} f(a)\right],$$

donc la première inégalité est prouvée.

Pour la deuxième inégalité de (2.1) et puisque f est convexe alors pour tout $t \in [0.1]$,on a

$$f(ta+(1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

et

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

En ajoutant ces inégalités membre à membre, on obtient

$$f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb) \leq tf(a)+(1-t)f(b)+(1-t)f(a)+tf(b). \tag{2.4}$$

Puis en multipliant l'inégalité (2.4) par $t^{\alpha-1}$ et on intègre par rapport à t sur $[0,1]$, on a

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b)\,dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} f((1-t)a+tb)\,dt \leq [f(a)+f(b)] \int_0^1 t^{\alpha-1}dt$$

ce qui implique que

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha} f(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{\alpha}.$$

Donc

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha} f(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

D'où le résultat. ■

Remarque 2.1 *Dans le Théorème* 2.1*, si on pose* $\alpha = 1$ *alors l'inégalité* (2.1) *est devenue l'inégalité* (1.2) *du Lemme* 1.1.

Lemme 2.1 [8]. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une application différentiable sur* (a,b) *avec* $a < b$. *Si* $f' \in L_1[a,b]$, *alors on a l'égalité suivante*

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha} f(b) - J_{b-}^{\alpha} f(a)\right] = \frac{b-a}{2}\int_0^1 \left[(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}\right] f'(ta+(1-t)b)\,dt. \tag{2.5}$$

Preuve. Il suffit de noter que

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}\right] f'(ta+(1-t)b)\,dt \\ &= \left[\int_0^1 (1-t)^{\alpha} f'(ta+(1-t)b)\,dt\right] + \left[-\int_0^1 t^{\alpha} f'(ta+(1-t)b)\,dt\right] \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

On intègre par parties, on obtient

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 (1-t)^{\alpha} f'(ta+(1-t)b)\,dt \\
&= (1-t)^{\alpha} \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\bigg|_0^1 + \int_0^1 \alpha (1-t)^{\alpha-1} \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b} dt \\
&= \frac{f(b)}{b-a} - \frac{\alpha}{b-a} \int_b^a \left(\frac{a-x}{a-b}\right)^{\alpha-1} \frac{f(x)}{a-b} dx \\
&= \frac{f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} J_{b-}^{\alpha} f(a) \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

de même on obtient,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -\int_0^1 t^{\alpha} f'(ta+(1-t)b)\,dt \\
&= -t^{\alpha} \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\bigg|_0^1 + \alpha \int_0^1 t^{\alpha-1} \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b} dt \\
&= \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\alpha}{b-a} \int_b^a \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha-1} \frac{f(x)}{a-b} dx \\
&= \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} J_{a+}^{\alpha} f(b). \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

En utilisant (2.7) et (2.8) dans (2.6) , on trouve

$$
I = \frac{f(a)+f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} \left[J_{a+}^{\alpha} f(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)\right].
$$

Ainsi, en multipliant les deux côtés par $\frac{b-a}{2}$, on obtient le résultat souhaîté. ∎

Remarque 2.2 *Dans le Lemme* 2.1, *si on prend* $\alpha = 1$ *alors l'égalité* (2.5) *donne l'égalité* (1.6) *du Lemme* 1.2.

Théorème 2.2 [8]. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une application différentiable sur* (a,b) *avec* $a < b$. *Si* $|f'|$ *est convexe sur* $[a,b]$, *alors on a l'inégalité suivante*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b-}^{\alpha}f(a)\right]\right| \leq \frac{b-a}{2(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left[f^{'}(a)+f^{'}(b)\right]. \quad (2.9)$$

Preuve. En utilisant le Lemme 2.1 et la convexité de $\left|f^{'}\right|$, on trouve

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b-}^{\alpha}f(a)\right]\right| \\
&\leq \frac{b-a}{2}\int_{0}^{1}\left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|\left|f^{'}(ta+(1-t)b)\right|dt \\
&\leq \frac{b-a}{2}\int_{0}^{1}\left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|\left[t\left|f^{'}(a)\right|+(1-t)\left|f^{'}(b)\right|\right]dt \\
&= \frac{b-a}{2}\left\{\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]\left[t\left|f^{'}(a)\right|+(1-t)\left|f^{'}(b)\right|\right]dt\right. \\
&\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}\right]\left[t\left|f^{'}(a)\right|+(1-t)\left|f^{'}(b)\right|\right]dt\right\} \\
&= \frac{b-a}{2}\left(K_1+K_2\right). \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Calculons K_1 et K_2, nous avons

$$\begin{aligned}
K_1 &= \left|f^{'}(a)\right|\left[\int_{0}^{\frac{1}{2}}t(1-t)^{\alpha}dt-\int_{0}^{\frac{1}{2}}t^{\alpha+1}dt\right]+\left|f^{'}(b)\right|\left[\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha+1}dt-\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-t)t^{\alpha}dt\right] \\
&= \left|f^{'}(a)\right|\left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]+\left|f^{'}(b)\right|\left[\frac{1}{(\alpha+2)}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
K_2 &= \left|f^{'}(a)\right|\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}t^{\alpha+1}dt-\int_{\frac{1}{2}}^{1}t(1-t)^{\alpha}dt\right]+\left|f^{'}(b)\right|\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)t^{\alpha}dt-\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{\alpha+1}dt\right] \\
&= \left|f^{'}(a)\right|\left[\frac{1}{(\alpha+2)}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]+\left|f^{'}(b)\right|\left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Donc, si on utilise (2.11) et (2.12) dans (2.10), alors on obtient

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b-}^{\alpha}f(a)\right]\right|\leq\frac{b-a}{2(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left[f'(a)+f'(b)\right].$$

D'ou le résultat. ■

Remarque 2.3 *Si on prend $\alpha=1$ dans le Théorème* 2.2, *alors l'inégalité* (2.9) *donne l'inégalité* (1.7) *du Théorème* 1.1.

2.2 Cas des fonctions $\eta-$convexes

En 2015, M.E.Gordji, M.R.Delavar et S.S.Dragomir ont prouvé l'inégalité suivante

Théorème 2.3 [4]. *Supposons que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction η-convexe telle que η est bornée sur $f([a,b])\times f([a,b])$. Alors on a l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{M_\eta}{2} &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ &\leq \frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right]+\frac{1}{4}\left[\eta(f(a),f(b))+\eta(f(b),f(a))\right] \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{M_\eta}{2}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

où M_η est la borne supérieure de η.

Preuve. Pour le côté droit de l'inégalité (2.13), considérons un point arbitraire $x=ta+(1-t)b$ avec $t\in[0,1]$. Alors $f(x)\leq f(b)+t\eta(f(a),f(b))$ où $t=\dfrac{x-b}{a-b}$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b\left[f(b)+\frac{x-b}{a-b}\eta(f(a),f(b))\right]dx \\ &= \frac{1}{b-a}\left(f(b)(b-a)+\frac{\eta(f(a),f(b))}{b-a}.\frac{(b-a)^2}{2}\right) \\ &= f(b)+\frac{1}{2}\eta(f(a),f(b)). \end{aligned}$$

par la même méthode, on a

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq f(a)+\frac{1}{2}\eta(f(b),f(a)).$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &\leq \min\left\{f(b)+\frac{1}{2}\eta(f(a),f(b)),f(a)+\frac{1}{2}\eta(f(b),f(a))\right\}\\ &\leq \frac{1}{2}[f(a)+f(b)]+\frac{1}{4}[\eta(f(a),f(b))+\eta(f(b),f(a))]\\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{1}{2}M_\eta.\end{aligned}$$

Pour le côté gauche de l'inégalité (2.13), la $\eta-$convexité de f implique que

$$\begin{aligned}f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{a+b}{4}-\frac{t(b-a)}{4}+\frac{a+b}{4}+\frac{t(b-a)}{4}\right)\\ &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right)\\ &\leq f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)+\frac{1}{2}\eta\left(f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right),f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right)\\ &\leq f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)+\frac{1}{2}M_\eta,\end{aligned}$$

pour tout $t\in[0,1]$, alors

$$f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{2}M_\eta.$$

De même on a

$$f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right)\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{2}M_\eta.$$

En utilisant le changement de variable, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx\right]\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\left[f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right)+f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right]dt\\ &\geq \frac{1}{2}\int_0^1\left[2f\left(\frac{a+b}{2}\right)-M_\eta\right]dt=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{2}M_\eta.\end{aligned}$$

Donc

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{2}M_{\eta}\leq\frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b}f\left(x\right)dx.$$

D'où le résultat. ■

Remarque 2.4 *Notez que*

(1) *Selon le Théoréme 2.3, si nous considérons $\eta\left(x,y\right)=x-y$ alors nous avons l'inégalité classique d'Hermite-Hadamard pour la fonction convexe f*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b}f\left(x\right)dx\leq\frac{f\left(a\right)+f\left(b\right)}{2}.$$

(2) *Nous remarquons également les affirmations suivantes*

(*i*) *Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable et $\eta:f\left(I\right)\times f\left(I\right)\to\mathbb{R}$ une bifonction bornée supérieurement avec M_{η} sa borne supérieure. Supposons que pour tout $a,b\in I$ avec $a<b$ on a*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{2}M_{\eta}\leq\frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b}f\left(x\right)dx.$$

Alors pour tout $a,b\in I$ avec $a<b$, il existe $t\in\left(0,1\right)$ tel que

$$f\left(ta+\left(1-t\right)b\right)\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{2}M_{\eta}.$$

(*ii*) *Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable et $\eta:f\left(I\right)\times f\left(I\right)\to\mathbb{R}$ une bifonction bornée supérieurement avec M_{η} sa borne supérieure. Supposons que pour tout $a,b\in I$ avec $a<b$ on a*

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b}f\left(x\right)dx\leq\frac{f\left(a\right)+f\left(b\right)}{2}+\frac{1}{2}M_{\eta}.$$

Alors pour tout $a,b\in I$ avec $a<b$, il existe $t\in\left(0,1\right)$ tel que

$$f\left(ta+\left(1-t\right)b\right)\leq\frac{f\left(a\right)+f\left(b\right)}{2}+\frac{1}{2}t\left(\eta\left(f\left(a\right),f\left(b\right)\right)+\eta\left(f\left(b\right),f\left(a\right)\right)\right).$$

La version $\eta-$convexe des inégalités d'Hermite-Hadamard pour les intégrales fractionnaires peut être représentée de la maniére suivante

Théorème 2.4 [5]. *Supposons que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction η-convexe telle que η est bornée supérieurement par M_η, alors pour $\alpha > 0$, on a l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M_\eta &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)\right] \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{\alpha\left(\eta\left(f(a), f(b)\right) + \eta\left(f(b), f(a)\right)\right)}{2(\alpha+1)} \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{\alpha M_\eta}{\alpha+1}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Preuve. Puisque $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction η-convexe telle que η est bornée supérieurement par M_η donc, de (2.13), on a

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{M_\eta}{2} \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} + \frac{M_\eta}{2},$$

où $x, y \in [a,b]$. Posons $x = ta + (1-t)b$ et $y = tb + (1-t)a$, alors on obtient

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{M_\eta}{2} \leq \frac{f(ta+(1-t)b) + f(tb+(1-t)a)}{2} + \frac{M_\eta}{2},$$

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M_\eta \leq f(ta+(1-t)b) + f(tb+(1-t)a) + M_\eta. \tag{2.15}$$

En multipliant l'inégalité (2.15) par $t^{\alpha-1}$ et puis on intègre par rapport à t sur $[0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{2}{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{M_\eta}{\alpha} &\leq \int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b)\,dt \\ &\quad + \int_0^1 t^{\alpha-1} f(tb+(1-t)a)\,dt + \frac{M_\eta}{\alpha}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

On pose $u = ta + (1-t)b$ et $v = tb + (1-t)a$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b)\,dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} f(tb+(1-t)a)\,dt \\
&= \int_b^a \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(u)\,\frac{du}{a-b} + \int_a^b \left(\frac{v-a}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(v)\,\frac{dv}{b-a} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}} \left[J_{a+}^{\alpha} f(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)\right].
\end{aligned}$$

Donc, l'inégalité (2.16) s'écrite sous la forme suivante

$$\frac{2}{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{M_\eta}{\alpha} \leq \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}} \left[J_{a+}^{\alpha} f(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)\right] + \frac{M_\eta}{\alpha}$$

et le réaménagement des termes fournit

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M_\eta \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}} \left[J_{a+}^{\alpha} f(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)\right], \tag{2.17}$$

ce qui prouve la première inégalité de (2.14) .

Maintenant nous procédons pour prouver la deuxième inégalité. On a

$$f(ta+(1-t)b) \leq f(b) + t\eta(f(a), f(b)), \tag{2.18}$$

$$f(tb+(1-t)a) \leq f(a) + t\eta(f(b), f(a)). \tag{2.19}$$

Ajoutons (2.18) et (2.19) ensuite multipliant les deux côtés par $t^{\alpha-1}$ puis on intègre par rapport à t sur $[0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t^{\alpha-1} \left(f(ta+(1-t)b) + f(tb+(1-t)a)\right) dt \\
&\leq [f(a)+f(b)] \int_0^1 t^{\alpha-1} dt + [\eta(f(a), f(b)) + \eta(f(b), f(a))] \int_0^1 t^{\alpha} dt
\end{aligned} \tag{2.20}$$

(par définition de la fonction η-convexe). En simplifiant l'inégalité (2.20), alors on trouve

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b-}^{\alpha}f(a)\right]\leq\frac{f(a)+f(b)}{\alpha}+\frac{\eta(f(a),f(b))+\eta(f(b),f(a))}{\alpha+1}. \tag{2.21}$$

D'aprés les inégalités (2.20) et (2.21), on a

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right)-M_{\eta} &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b-}^{\alpha}f(a)\right] \\
&\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{\alpha(\eta(f(a),f(b))+\eta(f(b),f(a)))}{2(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

De plus, puisque f est bornée supérieurement par M_{η}, donc de ce qui précède nous pouvons facilement obtenir le résultat souhaîté dans (2.14) . ■

Remarque 2.5 *Si f est η-convexe par rapport à η définie par $\eta(x,y)=x-y$, alors* (2.14) *réduit à l'inégalité du Théorème* 2.1.

Afin de prouver notre prochain résultat ,nous avons besoin du Lemme 2.1

Théorème 2.5 [5]. *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a,b) avec $a<b$. Si $\left|f'\right|$ est une fonction η-convexe sur $[a,b]$, alors on a l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b-}^{\alpha}f(a)\right]\right| \\
&\leq \frac{b-a}{2(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left(2\left|f'(b)\right|+\eta\left(\left|f'(a)\right|,\left|f'(b)\right|\right)\right).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 2.1 avec la propriété fondamentale de la valeur obsolue des nombres réels, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b-}^{\alpha}f(a)\right]\right| \\
&\leq \frac{b-a}{2}\int_{0}^{1}\left|\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]\right|\left|f^{'}(ta+(1-t)b)\right|dt \\
&\leq \frac{b-a}{2}\int_{0}^{1}\left|\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]\right|\left(\left|f^{'}(b)\right|+t\eta\left(\left|f^{'}(a)\right|,\left|f^{'}(b)\right|\right)\right)dt \quad \left(\text{car } \left|f^{'}\right| \text{ est } \eta\text{-convexe}\right) \\
&= \frac{b-a}{2}\left[\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]\left(\left|f^{'}(b)\right|+t\eta\left(\left|f^{'}(a)\right|,\left|f^{'}(b)\right|\right)\right)dt\right. \\
&\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}\right]\left(\left|f^{'}(b)\right|+t\eta\left(\left|f^{'}(a)\right|,\left|f^{'}(b)\right|\right)\right)dt\right] \\
&= \frac{b-a}{2}\left[\left|f^{'}(b)\right|\left\{\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]dt\right\}+\eta\left(\left|f^{'}(a)\right|,\left|f^{'}(b)\right|\right)\left\{\int_{0}^{\frac{1}{2}}t\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]dt\right\}\right. \\
&\left.+\left|f^{'}(b)\right|\left\{\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}\right]dt\right\}+\eta\left(\left|f^{'}(a)\right|,\left|f^{'}(b)\right|\right)\left\{\int_{\frac{1}{2}}^{1}t\left[t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}\right]dt\right\}\right]. \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Donc par un calcul simple, (2.23) est équivalente à

$$\begin{aligned}
&\left|f^{'}(b)\right|\left[\frac{1}{\alpha+1}-\frac{1}{2^{\alpha}(\alpha+1)}\right]+\eta\left(\left|f^{'}(a)\right|,\left|f^{'}(b)\right|\right)\left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}-\frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}\right] \\
&+\left|f^{'}(b)\right|\left[\frac{1}{\alpha+1}-\frac{1}{2^{\alpha}(\alpha+1)}\right]+\eta\left(\left|f^{'}(a)\right|,\left|f^{'}(b)\right|\right)\left[\frac{1}{(\alpha+2)}-\frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}\right].
\end{aligned}$$

De plus, la simplification des termes ci-dessus fournit l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b-}^{\alpha}f(a)\right]\right| \\
&\leq \frac{b-a}{2(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left(2\left|f^{'}(b)\right|+\eta\left(\left|f^{'}(a)\right|,\left|f^{'}(b)\right|\right)\right).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Chapitre 3

Inégalités intégrales à noyaux continus

Proposition 3.1 *Soit* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^n$ *telle que* f *et* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *soient continues sur* $\mathbb{R}^2$, *et soient* a *et* b *deux fonctions dérivables de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Alors (l'intégrale paramétrique)* F *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt$$

est dérivable et on a

$$F'(x)=f(x,b(x))\,b'(x)-f(x,a(x))\,a'(x)+\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Dans un article publié en 1943, Bellman a prouvé l'inégalité suivante

Lemme 3.1 [6]. *(Gronwall-Bellman) Soit* $u(t)$ *et* $v(t)$ *des fonctions continues non négatives pour* $t\geq a$ *telles que*

$$u(t)\leq a+\int_a^t v(s)\,u(s)\,ds,\quad t\geq a \tag{3.1}$$

où $a\geq 0$ *est une constante, alors*

$$u(t)\leq a\exp\left(\int_a^t v(s)\,ds\right),\quad t\geq a.$$

Preuve. Soit $a > 0$ alors l'inégalité (3.1) implique l'inégalité suivante

$$\frac{v(\tau)\,u(\tau)}{a + \int_a^\tau v(s)\,u(s)\,ds} \leq v(\tau)\,, \quad \tau \geq a.$$

En intégrant ceci de a à t on trouve

$$\ln\left[a + \int_a^t v(s)\,u(s)\,ds\right] - \ln a \leq \int_a^t v(s)\,ds,$$

d'où

$$\exp\left(\ln\left[a + \int_a^t v(s)\,u(s)\,ds\right]\right) \leq \exp\left(\int_a^t v(s)\,ds + \ln a\right).$$

En utilisant l'hypothèse, on obtient l'inégalité désirée. ■

Lemme 3.2 [6]. *Soient $b(t)$ et $f(t)$ deux fonctions continues pour tout $t \geq \alpha$, et $v(t)$ une fonction différentiable pour tout $t \geq \alpha$. On suppose que*

$$\begin{cases} v'(t) \leq b(t)\,v(t) + f(t)\,, \quad t \geq \alpha \\ v(\alpha) \leq v_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

alors, pour $t \geq \alpha$

$$v(t) \leq v_0 \exp\left(\int_\alpha^t b(s)\,ds\right) + \int_\alpha^t f(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau)\,d\tau\right) ds. \tag{3.3}$$

Preuve. Les conditions (3.2) impliquent que

$$\left[v'(s) - b(s)\,v(s)\right] \exp\left(\int_s^t b(\tau)\,d\tau\right) \leq f(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau)\,d\tau\right), \quad s \geq \alpha,$$

où

$$\frac{d}{ds}\left[v(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau)\,d\tau\right)\right] \leq f(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau)\,d\tau\right).$$

Par intégration par rapport à s de α à t on obtient

$$v(t) - v(\alpha) \exp\left(\int_\alpha^t b(\tau)\,d\tau\right) \leq \int_\alpha^t f(s) \exp\left(\int_s^t b(\tau)\,d\tau\right) ds,$$

ce qui implique (3.3) avec $v(\alpha) \leq v_0$. ■

3.1 Inégalités de type Pachpatte

Théorème 3.1 [6]. *Soient* $u(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $g(t)$, $h(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *et* $p > 1$ *est une constante réelle*

(a_1) *Si*

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t [g(s)u^p(s) + h(s)u(s)]\, ds, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.4}$$

alors

$$u(t) \leq \left\{ a(t) + b(t) \int_0^t \left[g(s)a(s) + h(s) \left(\frac{p-1}{p} + \frac{a(s)}{p} \right) \right] \right.$$
$$\left. \times \exp\left(\int_s^t b(\sigma) \left(g(\sigma) + \frac{h(\sigma)}{p} \right) d\sigma \right) ds \right\}^{\frac{1}{P}}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.5}$$

(a_2) *Soit* $c(t)$ *une fonction réelle positive continue et non décroissante sur* $\mathbb{R}_+$. *Si*

$$u^p(t) \leq c^p(t) + b(t) \int_0^t [g(s)u^p(s) + h(s)u(s)]\, ds, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.6}$$

alors

$$u(t) \leq c(t) \left\{ 1 + b(t) \int_0^t \left[g(s) + h(s)c^{1-p}(s) \right] \right.$$
$$\left. \times \exp\left(\int_s^t b(\sigma) \left(g(\sigma) + \frac{h(\sigma)}{p} c^{1-p}(\sigma) \right) d\sigma \right) ds \right\}^{\frac{1}{P}}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.7}$$

(a_3) *Soient* $k(t,s)$ *et sa dérivée partielle* $\dfrac{\partial}{\partial t} k(t,s)$ *sont des fonctions réelles, non négatives et continues pour* $0 \leq s \leq t < \infty$. *Si*

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t k(t,s) [g(s)u^p(s) + h(s)u(s)]\, ds, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.8}$$

alors

$$u(t) \leq \left\{ a(t) + b(t) \int_0^t B(\sigma) \exp\left(\int_\sigma^t A(\tau) d\tau \right) d\sigma \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.9}$$

où

$$A(t) = k(t,t)b(t)\left(g(t) + \frac{h(t)}{p}\right) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}k(t,s)b(s)\left(g(s) + \frac{h(s)}{p}\right)ds, \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} B(t) &= k(t,t)\left(g(t)a(t) + h(t)\left(\frac{p-1}{p} + \frac{a(t)}{p}\right)\right) \\ &+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}k(t,s)\left(g(s)a(s) + h(s)\left(\frac{p-1}{p} + \frac{a(s)}{p}\right)\right)ds, \qquad \textit{pour } t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Preuve. (a_1) *On définit la fonction* $z(t)$ *par*

$$z(t) = \int_0^t [g(s)u^p(s) + h(s)u(s)]\,ds. \tag{3.12}$$

Donc $z(0) = 0$ *et* (3.4) *peut être réécrite sous la forme*

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t)z(t). \tag{3.13}$$

À partir de (3.13) *et en utilisant l'inégalité élémentaire*

$$x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}, \tag{3.14}$$

où $x \geq 0$, $y \geq 0$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *on remarque*

$$\begin{aligned} u(t) &\leq (a(t) + b(t)z(t))^{\frac{1}{p}}(1)^{\frac{1}{\left(\frac{p}{p-1}\right)}} \\ &\leq \frac{a(t)}{p} + \frac{b(t)}{p}z(t) + \frac{p-1}{p}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Par différentiation de (3.12) *et en utilisant* (3.13) *et* (3.15) *nous obtenons*

$$z'(t) \leq b(t)\left(g(t) + \frac{h(t)}{p}\right)z(t) + \left[g(t)a(t) + h(t)\left(\frac{p-1}{p} + \frac{a(t)}{p}\right)\right]. \tag{3.16}$$

D'aprés le Lemme (3.2) *l'inégalité* (3.16) *implique l'estimation*

$$\begin{aligned} z(t) \leq & \int_0^t \left[g(s)a(s) + h(s)\left(\frac{p-1}{p} + \frac{a(s)}{p}\right)\right] \\ & \times \exp\left(\int_s^t b(\sigma)\left(g(\sigma) + \frac{h(\sigma)}{p}\right)d\sigma\right)ds. \end{aligned} \tag{3.17}$$

L'inégalité réquise (3.5) *découle de* (3.17) *et* (3.13).

(a_2) *Comme* $c(t)$ *est une fonction positive continue et non décroissante pour* $t \in \mathbb{R}_+$, *à partir de* (3.6) *on remarque que*

$$\left(\frac{u(t)}{c(t)}\right)^P \leq 1 + b(t)\int_0^t \left[g(s)\left(\frac{u(s)}{c(s)}\right)^p + h(s)c^{1-p}(s)\left(\frac{u(s)}{c(s)}\right)\right] ds.$$

Maintenant une application de l'inégalité donnée en (a_1) *donne le résultat désiré en* (3.7).

(a_3) *On définit la fonction* $z(t)$ *par*

$$z(t) = \int_0^t k(t,s)\left[g(s)u^p(s) + h(s)u(s)\right] ds. \tag{3.18}$$

Donc d'aprés la proposition (3.1), *on a*

$$\begin{aligned} z'(t) &= k(t,t)\left[g(t)u^p(t) + h(t)u(t)\right] + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}k(t,s)\left[g(s)u^p(s) + h(s)u(s)\right] ds \qquad \textit{(3.19)} \\ &\leq k(t,t)\left[g(t)\left(a(t) + b(t)z(t)\right) + h(t)\left(\frac{p-1}{p} + \frac{a(t)}{p} + \frac{b(t)}{p}z(t)\right)\right] \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}k(t,s)\left[g(s)\left(a(s) + b(s)z(s)\right) + h(s)\left(\frac{p-1}{p} + \frac{a(s)}{p} + \frac{b(s)}{p}z(s)\right)\right] ds \\ &\leq \left[\begin{array}{c} k(t,t)b(t)\left(g(t) + \dfrac{h(t)}{p}\right) \\ + \displaystyle\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}k(t,s)b(s)\left(g(s) + \frac{h(s)}{p}\right) \end{array}\right] z(t) \\ &+ k(t,t)\left(g(t)a(t) + h(t)\left(\frac{p-1}{p} + \frac{a(t)}{p}\right)\right) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}k(t,s)\left(g(s)a(s) + h(s)\left(\frac{p-1}{p} + \frac{a(s)}{p}\right)\right) ds \\ &= A(t)z(t) + B(t). \end{aligned}$$

D'aprés le Lemme (3.2) *l'inégalité* (3.19) *implique l'estimation*

$$z(t) \leq \int_0^t B(\sigma)\exp\left(\int_\sigma^t A(\tau)d\tau\right) d\sigma. \tag{3.20}$$

Utilisons (3.20) *dans* (3.13), *on déduit l'inégalité* (3.9). ■

3.2 Inégalités de type Pachpatte-Bihari

Théorème 3.2 [6] . *Soient* $u(t)$, $a(t)$, $a'(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, $k(t,\sigma)$, $\dfrac{\partial}{\partial t}k(t,\sigma) \in C(D, \mathbb{R}_+)$ *où* $D = \left\{(t,\sigma) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \le \sigma \le t < \infty\right\}$.

Soit $g \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *une fonction non décroissante sur* $\mathbb{R}_+$ *et* $g(u) > 0$ *sur* $(0, \infty)$. *Si*

$$u(t) \le a(t) + \int_0^t k(t,\sigma) g(u(\sigma)) d\sigma, \qquad t \in \mathbb{R}_+ \tag{3.21}$$

alors

$$u(t) \le G^{-1}\left[G\left(a(t)\right) + \int_0^t A(s) ds\right], \qquad 0 \le t \le t_1 \tag{3.22}$$

où

$$A(t) = k(t,t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} k(t,\sigma) d\sigma, \tag{3.23}$$

$$G(r) = \int_{r_0}^r \frac{ds}{G(s)}, r > 0, \tag{3.24}$$

$r_0 > 0$ *est arbitraire,* G^{-1} *est la fonction inverse de* G *et* $t_1 \in \mathbb{R}_+$ *est choisie de telle sorte que*

$$G(a(t)) + \int_0^t A(s) ds \in Dom(G^{-1}),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ *sur l'intervalle* $0 \le t \le t_1$.

Preuve. Soit $a(t) > 0$ et $z(t)$ une fonction positive non décroissante pour $t \in \mathbb{R}_+$, définie par

$$z(t) = a(t) + \int_0^t k(t,\sigma) g(u(\sigma)) d\sigma,$$

alors $z(0) = a(0)$, $u(t) \le z(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$ et on a

$$\begin{aligned} z'(t) &= a'(t) + k(t,t) g(u(t)) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} k(t,\sigma) g(u(\sigma)) d\sigma \\ &\le a'(t) + A(t) g(z(t)), \end{aligned} \tag{3.25}$$

à partir de (3.24), (3.25) et le fait que $a(t) \leq z(t)$ et la non décroissance de g nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}G(z(t)) &= \frac{z'(t)}{g(z(t))} \leq \frac{a'(t) + A(t)g(z(t))}{g(z(t))} \\ &\leq \frac{a'(t)}{g(a(t))} + A(t) \\ &= \frac{d}{dt}G(a(t)) + A(t). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Maintenant posons $t = s$ dans (3.26), intégrons de 0 à t, $t \in \mathbb{R}_+$ et en utilisant le fait que $z(0) = a(0)$ nous obtenons

$$G(z(t)) \leq G(a(t)) + \int_0^t A(s)ds. \tag{3.27}$$

A partir de (3.27) et l'hypothèse sur G on obtient

$$z(t) \leq G^{-1}\left[G(a(t)) + \int_0^t A(s)ds\right]. \tag{3.28}$$

Utilisons (3.28) dans $u(t) \leq z(t)$ on déduit l'inégalité (3.22).

Si $a(t)$ est positive, nous nous chargeons de la procédure ci-dessus avec $a(t) + \epsilon$ au lieu de $a(t)$, où $\epsilon > 0$ est une constante arbitraire infiniment petite, et passons à la limite quand $\epsilon \to 0$ pour obtenir(3.22). Le sous-intervalle $0 < t < t_1$ est évident. ■

Remarque 3.1 *Notons que l'inégalité établie dans le Théorème 3.2 est une légère variante de l'inégalité donné par Pachpatte.*

Dans le cas particulier quand $a(t) = c$ (c constante non négative), $k(t,\sigma) = f(\sigma)$ et par conséquant $\frac{\partial}{\partial t}k(t,\sigma) = 0$, l'inégalité dans le Théorème 3.2 réduite à l'inégalité de Bihari. Si nous prenons $g(u) = u$ dans le Théorème 3.2, alors l'estimation obtenue dans le Théorème 3.2 réduite à

$$u(t) \leq a(t)\exp\left(\int_0^t A(s)ds\right),$$

pour $t \in \mathbb{R}_+$. Dans ce cas le Théorème 3.2 est une généralisation de l'inégalité bien connue de Gronwall-Belman.

3.3 Inégalités de type Ou-Iang-Pachpatte-Bihari

Corollaire 3.1 [6] . *Soient* $u(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, $k(t,\sigma)$, $\frac{\partial}{\partial t}k(t,\sigma) \in C(D, \mathbb{R}_+)$ *où* $D = \{(t,\sigma) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq \sigma \leq t$ *et* c *est une constante positive.*

(a_1) *Si*

$$u^2(t) \leq c + \int_0^t k(t,\sigma)u(\sigma)d\sigma, \qquad t \in \mathbb{R}_+ \tag{3.29}$$

alors

$$u(t) \leq \sqrt{c} + \frac{1}{2}\int_0^t A(s)ds, \tag{3.30}$$

pour $t \in \mathbb{R}_+$, *où* $A(t)$ *est définie par* (3.23) .

(a_2) *Soit* $g(u)$ *définie comme dans le Théorème* 3.2. *Si*

$$u^2(t) \leq c + \int_0^t k(t,\sigma)u(\sigma)g(u(\sigma))d\sigma, \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.31}$$

alors

$$u(t) \leq G^{-1}\left[G\left(\sqrt{c}\right) + \frac{1}{2}\int_0^t A(s)ds\right], \quad \text{pour } 0 \leq t \leq t_2 \ , \tag{3.32}$$

où G *et* G^{-1} *sont définis comme dans le Théorème* 3.2 *et* $t_2 \in \mathbb{R}_+$ *est choisie de telle sorte que* $G\left(\sqrt{c}\right) + \frac{1}{2}\int_0^t A(s)ds \in Dom(G^{-1})$, *pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$ *sur l'intervalle* $0 \leq t \leq t_2$.

Preuve. (a_1). Soit $c > 0$, $z(t)$ une fonction positive et non décroissante pour $t \in \mathbb{R}_+$.On définit la fonction $z(t)$ par

$$z(t) = c + \int_0^t k(t,\sigma)u(\sigma)d\sigma$$

alors $z(0) = c$, $u(t) \leq \sqrt{z(t)}$ pour $t \in \mathbb{R}_+$ et

$$\begin{aligned} z'(t) &= k(t,t)u(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}k(t,\sigma)u(\sigma)d\sigma \\ &\leq k(t,t)\sqrt{z(t)} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}k(t,\sigma)\sqrt{z(\sigma)}d\sigma \\ &\leq A(t)\sqrt{z(t)} \end{aligned} \tag{3.33}$$

ce qui implique

$$\sqrt{z(t)} \leq \sqrt{c} + \frac{1}{2}\int_{0}^{t} A(s)ds. \tag{3.34}$$

Utilisons (3.34) dans $u(t) \leq \sqrt{z(t)}$,en déduit l'inégalité (3.30). La preuve dans le cas lorsque $c \geq 0$ peut être complétée comme mentionnée dans la preuve du Théorème 3.2.

(a_2) Soit $c > 0$, $w(t)$ une fonction positive et non décroissante pour $t \in \mathbb{R}_+$. On définit la fonction $w(t)$ par

$$w(t) = .c + \int_{0}^{t} k(t,\sigma)u(\sigma)g(u(\sigma))d\sigma,$$

donc $w(0) = c$, $u(t) \leq \sqrt{w(t)}$ pour $t \in \mathbb{R}_+$ est comme la preuve de (3.33) on obtient

$$w'(t) \leq A(t)\sqrt{w(t)}g\left(\sqrt{w(t)}\right), \tag{3.35}$$

ce qui implique

$$\sqrt{w(t)} \leq \sqrt{c} + \frac{1}{2}\int_{0}^{t} A(s)g\left(\sqrt{w(t)}\right)ds. \tag{3.36}$$

Maintenant, en appliquant l'inégalité de Bihari donnée par le Théorème 3.2 on obtient

$$\sqrt{w(t)} \leq G^{-1}\left[G(\sqrt{c}) + \frac{1}{2}\int_{0}^{t} A(s)ds\right]. \tag{3.37}$$

Utilisant (3.37) dans $u(t) \leq \sqrt{w(t)}$, on déduit l'inégalité (3.32).

La preuve dans le cas lorsque $c \geq 0$ est mentionnée comme dans la preuve de Théoréme 3.2. Le sous-intervalle $0 < t < t_2$ est évident. ■

Remarque 3.2 *Si nous pronons* $k(t,\sigma) = f(\sigma)$ *et par conséquant* $\frac{\partial}{\partial t}k(t,\sigma) \ = 0$ *dans le Théoréme* 3.3, *alors les estimations obtenues dans* (3.30), (3.32) *se réduites à*

$$u(t) \leq \sqrt{c} + \frac{1}{2}\int_{0}^{t} f(\sigma)d\sigma,$$

$$u(t) \leq G^{-1}\left[G(\sqrt{c}) + \frac{1}{2}\int_{0}^{t} f(\sigma)d\sigma\right],$$

respectivement. Nous notons que, en suivant la démonstration du Théorème 3.2 *on peut facilement obtenir les estimations sur les inégalités* (3.29), (3.31) *lorsque la constante* c *est remplacée par la fonction* $a(t)$*, où* $a(t)$ *est définie comme dans le Théorème* 3.2.

Chapitre 4

Applications

Dans cette section, nous présentons certaines applications des résultats ci-dessus

4.1 Application 1

En utilisant les inégalités d'Hermite-Hadamard, on donne quelques estimations entre certaines moyennes spéciales définies par

la moyenne arithmétique :

$$A(\alpha,\beta)=\frac{\alpha+\beta}{2},\qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R},$$

la moyenne logarithmique :

$$\bar{L}(\alpha,\beta)=\frac{\beta-\alpha}{\ln|\beta|-\ln|\alpha|},\qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}\backslash\{0\},$$

la moyenne logarithmique généralisée :

$$L_n(\alpha,\beta)=\left[\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{(n+1)(\beta-\alpha)}\right]^{\frac{1}{n}},\qquad n\in\mathbb{N},\ n\geq 1,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha<\beta.$$

Avec $\alpha\neq\beta$.

Appliquons les Théorémes 1.1 et 1.2 aux deux fonctions pour avoir des inégalités liées aux valeurs moyennes.

Proposition 4.1 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Alors on a l'inégalité suivante*

$$\left|A\left(a^n, b^n\right) - L_n\left(a, b\right)\right| \leq \frac{n\left(b-a\right)}{4} A\left(\left|a^{n-1}\right|, \left|b^{n-1}\right|\right).$$

Preuve. La preuve est immedaite en appliquant le Théorème 1.1 pour $f\left(x\right) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$. ■

Proposition 4.2 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Alors, pour tous $p > 1$ on a l'inégalité suivante*

$$\left|A\left(a^n, b^n\right) - L_n\left(a, b\right)\right| \leq \frac{n\left(b-a\right)}{2\left(p+1\right)^{\frac{1}{p}}} \left[A\left(\left|a^{(n-1)p/(p-1)}\right|, \left|b^{(n-1)p/(p-1)}\right|\right)\right]^{(p-1)/p}.$$

Preuve. La preuve est immedaite en appliquant le Théoréme 1.2 pour $f\left(x\right) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$. ■

Proposition 4.3 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $0 \notin \left[a, b\right]$. Alors on a l'inégalité suivante*

$$\left|A\left(a^{-1}, b^{-1}\right) - \bar{L}^{-1}\left(a, b\right)\right| \leq \frac{\left(b-a\right)}{4} A\left(\left|a\right|^{-2}, \left|b\right|^{-2}\right).$$

Preuve. La preuve est évidente à partir du Théoréme 1.1 pour $f\left(x\right) = \frac{1}{x}$, $x \in \left[a, b\right]$. ■

Proposition 4.4 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $0 \in \left[a, b\right]$. Alors, pour $p > 1$ on a l'inégalité suivante*

$$\left|A\left(a^{-1}, b^{-1}\right) - \bar{L}^{-1}\left(a, b\right)\right| \leq \frac{\left(b-a\right)}{2\left(p+1\right)^{\frac{1}{p}}} \left[A\left(\left|a\right|^{-2p/(p-1)}, \left|b\right|^{-2p/(p-1)}\right)\right]^{(p-1)/p}.$$

Preuve. La preuve est évidente à partir du Théoréme 1.2 pour $f\left(x\right) = \frac{1}{x}$, $x \in \left[a, b\right]$. ■

4.2 Application 2

Considérons le problème a condition initiale

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x) \\ x(\ t_0) = x_0 \end{cases}, \tag{4.1}$$

il est équivalent à l'équation intégrale suivante

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{4.2}$$

Supposons que $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$est une fonction continue et localement Lipschitzienne en $x \in \mathbb{R}^n$,i.e

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L(t) |x - y| \,, \text{ où } t \in \mathbb{R}_+, \ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \tag{4.3}$$

et

$$L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \text{ est une fonction continue.}$$

Soient $\phi(t)$ et $\psi(t)$ deux solutions du problème (4.1) définies sur $J = [\alpha, \beta]$ telles que $t_0 \in J$, alors d'aprés (4.2), $\phi(t)$ et $\psi(t)$ satisfaient

$$\left.\begin{array}{l} \phi(t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds \\ \psi(t) = \psi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))ds \end{array}\right\} \Longrightarrow \phi(t) - \psi(t) = \phi(t_0) - \psi(t_0) + \int_{t_0}^{t} (f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s)))ds. \tag{4.4}$$

De (4.3) et (4.4) on obtient

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq |\phi(t_0) - \psi(t_0)| + \int_{t_0}^{t} L(s) |\phi(s) - \psi(s)| \, ds.$$

D'aprés le Lemme 3.1 on a

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq |\phi(t_0) - \psi(t_0)| \exp\left(\int_{t_0}^{t} L(s)ds\right), \qquad t \in J \,.$$

Or $\phi(t_0) = \psi(t_0)$, ce qui donne $\phi(t) = \psi(t)$, $t \in J$ cela implique que la solution du problème (4.1) est unique.

Conclusion :

Le but de ce mémoire est de décrire le panorama des mathématiques de la célèbre inégalité d'Hermite-Hadamard. Nous avons présenté des nouvelles extensions pour cette inégalité qui nous donnent une estimation de la valeur moyenne (intégrale) d'une fonction convexe et η-convexe continue. On donne aussi quelques inégalités intégrales de type Pachpatte-Bihari-Ou-Iang et leurs applications.

Chapitre 5

Bibliographie

[1] D. Baĭnov and P. Simeonov, Integral Inequalities and Applications, vol. 57 of Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1992.

[2] S. S. Dragomir, R.P. Agarwall, Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapeziodal formula, Appl. Math. lett. 11 (1998), no. 5, 91–95.

[3] F. M. Dannan, Integral inequalities of Gronwall-Bellman-Bihari type and asymptotic behavior of certain second order nonlinear differential equations, J. Math. Anal. Appl. 108 (1985), 151–164.

[4] Gordji M. E., Delavar M. R. and Dragomir S. S., Some inequality related to η-convex function, Preprint Rgmai Res. Rep. Coll., (2015) 1–14.

[5] M. A. Khan, Y. Khurshid and T. Ali, Hermite-Hadamard inequality for fractional integrals via η-convex functions, Acta Math. Univ. Comenianae, Vol. LXXXVI, 1 (2017), pp. 153–164.

[6] B. G. Pachpatte, Integral and finite Difference inequalities and applications, North- Holland Mathematics Studies 205.

[7] I. Podlubni, Fractional Differentail Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[8] M. Z. Sarikaya, E. Set, H. Yaldiz, and N. Basak, Hermite-hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities, Math. Comput. Model. 57 (2013), no. 9–10, 2403–2407.