

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique  
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Master en Mathématiques**

Option : EDP Et Analyse numérique

Par : KRECHIEM Afaf

## **Intitulé**

**Etude d'un contrôle d'apprentissage itératif (ILC) pour une  
classe d'équations différentielles fractionnaires**

Dirigé par : Dr. Berhail Amel

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. BADRAOUI Salah	PROF	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. BERHAIL Amel	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. BAHLOUL Tarek	MCB	Univ-Guelma

Session Juillet 2019

# Dédicace

Je dédie ce mémoire à :

Ma mère et à mon père.

Mon mari et mes frères.

Ma grande famille et mes amies.

Tous mes collègues de la promotion "2018 2019".

Tous ceux qui sont proches à mon cœur.

# Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur **Dr. BERHAIL Amel** m'avoir proposé le thème de ce mémoire et m'avoir dirigé tout le long de mon travail, ses critiques et les conseils m'ont été précieux.

Je voudrais également remercier les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ce travail et pour toutes leurs remarques et critiques, ainsi que le personnel administratif et les enseignants du département de mathématiques de l'université

8 Mai 1945 Guelma et tous mes compagnons de promotion.

Et enfin j'adresse mes sincères remerciements à mes parents, mes frères et mon mari, mes amis et à tous qui sont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

## Résumé

*Dans ce mémoire, nous discuterons la loi de contrôle d'apprentissage itératif de type PD pour les équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire.*

*Nous tirons des résultats de convergence pour les systèmes d'apprentissage itératif en boucle ouverte et en boucle fermée avec un erreur initiale nul puis un erreur initiale aléatoire mais borné, en utilisant les propriétés de la fonction « Mittag-Leffler ».*

## المخلص

في هذه المذكرة ، سنناقش قانون التحكم في التعلم التكراري من نوع PD للمعادلات التفاضلية الخطية الكسرية ، أين سنحصل على نتائج التقارب لأنظمة التعلم التكراري ذات الحلقة المفتوحة والحلقة المغلقة و هذا في حالة وجود خطأ أولي صفري ثم في حالة خطأ أولي عشوائي ولكن محدود، و هذا بالاعتماد على خصائص الدالة Mittag-Leffler.

# Table des matières

0.1	Introduction . . . . .	1
<b>1</b>	<b>Notions Préliminaires</b>	<b>3</b>
1.1	Calcul fractionnaire . . . . .	3
1.1.1	Fonction Gamma . . . . .	3
1.1.2	Fonction Mittag-Leffler . . . . .	5
1.1.3	Dérivée fractionnelle . . . . .	7
1.1.4	Transformation de Laplace . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Contrôle d'apprentissage itératif ILC</b>	<b>11</b>
2.1	Théorie de contrôle . . . . .	11
2.1.1	Systèmes dynamiques contrôlés . . . . .	12
2.1.2	Contrôle en boucle ouverte . . . . .	12
2.1.3	Contrôle en boucle fermée . . . . .	14
2.2	Contrôle par apprentissage itératif . . . . .	15
2.3	Contrôle ILC de type PD . . . . .	16
2.3.1	Contrôle ILC de type P . . . . .	17
2.3.2	Contrôle ILC de type D . . . . .	17
2.3.3	Contrôle ILC de type PD . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Analyse de convergence de la loi ILC</b>	<b>19</b>
3.1	Existence de la solution d'un problème fractionnel linéaire . . . . .	19
3.2	Convergence de la loi ILC en boucle ouverte . . . . .	21
3.3	Analyse de convergence de la loi ILC en boucle fermée . . . . .	32

<b>Table des matières</b>	ii
3.4 Exemples . . . . .	37
<b>Bibliographie</b>	<b>40</b>

## 0.1 Introduction

L'objectif de la théorie du contrôle est d'améliorer le fonctionnement des systèmes de commande, c'est-à-dire d'obtenir des systèmes plus fiables, plus économiques et plus rapides.

Le contrôle d'apprentissage itératif ILC ( i.e iterative learning control) est un domaine de recherche actif. Depuis l'article d'Arimoto [1] et de ses co-auteurs est souvent considéré comme la principale source d'inspiration de la recherche dans ce domaine. L'idée principale du contrôle de l'apprentissage itératif est d'utiliser des situations où le système à contrôler effectuera plusieurs fois la même opération. Il sera alors possible d'améliorer progressivement les performances du système de contrôle en utilisant les résultats d'une opération lors du choix du signal d'entrée pour l'opération suivante.

Le principal domaine d'application de ILC est le contrôle de robots industriels ; une discussion générale sur l'utilisation de ce type de contrôle en robotique est la convergence : la mise à jour itérative du signal d'entrée converge vers un signal donnant de bonnes performances. Les aspects de convergence ont déjà été examinés où certains critères de convergence ont été dérivés, restrictifs et un grand effort a été consacré à la recherche de conditions plus réalistes. Un certain nombre de ces résultats se retrouvent dans [5].

Récemment, plusieurs auteurs se sont intéressés à l'application du contrôle d'apprentissage itératif pour des problèmes fractionnaires [10] où ils ont utilisé la dérivée fractionnaire qui est une généralisation de la dérivée classique vers un ordre arbitraire.

Cette notion est découverte dans le courrier échangé entre L'Hôpital et Leibniz. *Le 30 Septembre 1695, L'Hôpital récrit à Leibniz afin de l'interroger au sujet d'une notion particulière qu'il avait employée dans ses publications pour la nième dérivée d'une fonction  $f(x)$ . L'Hôpital pose alors la question à Leibniz, sur le résultat de cette dérivée pour l'ordre  $\frac{1}{2}$  ?* [8]

Ce mémoire qui a donc pour but d'étudier le contrôle d'apprentissage itératif (ILC) pour une classe d'équation différentielles fractionnaires linéaire, est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous allons présenter quelques notions préliminaires concernant le calcul fractionnaire (la fonction Gamma, la fonction Mittag-

---

### 0.1. Introduction

Leffler, les dérivées et les intégrales fractionnaires de Caputo et de Riemman-Liouville).

Dans le deuxième chapitre, nous allons présenter l'idée du contrôle d'apprentissage itératif (ILC). Tout d'abord, on commence par la définition de la théorie du contrôle. Ensuite, nous donnons des rappels dont on a besoin sur le contrôle d'apprentissage itératif de type P, D et PD.

Dans le dernier chapitre, nous discuterons la loi de contrôle d'apprentissage de type PD pour les équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire; nous commencerons par l'étude de l'existence de la solution d'un problème fractionnaire linéaire pour étudier ensuite la convergence de la loi ILC dans les deux cas, en boucle ouverte et en boucle fermée.



# Chapitre 1

## Notions Préliminaires

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au calcul des intégrales et les dérivées d'ordre fractionnaire. On va présenter l'intégrale au sens de Caputo où nous définissons certaines fonctions importantes telles que la fonction Gamma et la fonction de Mittag-Leffler. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul différentiel d'ordre fractionnaire.

### 1.1 Calcul fractionnaire

#### 1.1.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes.

**Définition 1.1** [7] La fonction Gamma  $\Gamma(z)$  est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Cette intégrale impropre converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive  $z \in \mathbb{C}$ .

On peut définir la fonction Gamma par la limite :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n^z}{z.(z+1)...(z+n)}.$$

**Quelques propriétés de la fonction Gamma**

- 1-  $\Gamma(z)$  est une fonction strictement décroissante pour  $0 < z < 1$ .
- 2-  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \forall z > 0$ .
- 3-  $\Gamma(0^+) = +\infty$  et  $\Gamma(1) = 1$ .
- 4- La fonction gamma vérifie la formule de réflexion d'Euler, ou formule des compléments

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \Gamma(1 - z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

car la fonction  $\Gamma(1 - z)\Gamma(z)$  est  $2\pi$ -périodique et a les mêmes pôles et résidus que la fonction  $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ .

- 5- Le logarithme de la fonction gamma est parfois appelé lngamma. Il intervient notamment dans la résolution des problèmes de propagation d'ondes : l'équation fonctionnelle de la fonction lngamma est

$$\ln \Gamma(z) = \ln \Gamma(z + 1) - \ln(z).$$

**Remarque 1.1** De  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$  et  $\Gamma(1) = 1$ , on déduit :

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1!, \\ \Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2!, \\ \Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3!, \\ &\dots\dots\dots, \\ \Gamma(n + 1) &= n.\Gamma(n) = n!. \end{aligned}$$

---

**1.1. Calcul fractionnaire**

Valeurs particulières

La valeur de  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  permet, par récurrence, de déterminer les autres valeurs de la fonction gamma pour les demi-entiers positifs :

$$\begin{aligned} \Gamma(3/2) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \\ \Gamma(5/2) &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \Gamma(n + 1/2) &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Même chose pour les valeurs négatives, par exemple :

$$\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}.$$

1.1.2 Fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler, notée  $E_{\alpha,\beta}$  qui tient son nom du mathématicien suédois Gösta Mittag-Leffler (1903), est une fonction spéciale, c'est-à-dire qui ne peut être calculée à partir d'équations rationnelles, qui s'applique dans le plan complexe et dépend de deux paramètres complexes  $\alpha$  et  $\beta$ .

Cette fonction est une généralisation directe de la fonction exponentielle, et elle joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire.

**Définition 1.2** [8] La fonction de Mittag-Leffler est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\alpha}(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(i\alpha + 1)}, \\ \mathbb{E}_{\alpha,\beta}(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(i\alpha + \beta)}, \end{aligned}$$

où  $z \in \mathbb{C}$  et  $\alpha, \beta$  sont des nombres réels positifs.

**Exemple 1.1** Nous donnons quelques cas particuliers de la fonction Mittag-Leffler

$$\mathbb{E}_0(z) = \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1,$$

---

1.1. Calcul fractionnaire

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_1(z) &= e^z, \\ \mathbb{E}_2(z) &= \cosh(\sqrt{z}), \quad z \in \mathbb{C}, \\ \mathbb{E}_2(-z^2) &= \cos(z), \quad z \in \mathbb{C}, \\ \mathbb{E}_{1,2}(z) &= \frac{e^{z-1}}{z}, \quad \mathbb{E}_{2,2}(z) = \frac{\sinh(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}.\end{aligned}$$

**Lemme 1.1** [3] Soit  $\alpha > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ , on a

$$\frac{d}{dz}[z^{\beta-1}\mathbb{E}_{\alpha,\beta}(z^\alpha)] = z^{\beta-2}\mathbb{E}_{\alpha,\beta-1}(z^\alpha).$$

**Lemme 1.2** [6] Soient  $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  et  $|a\lambda^{-\alpha}| < 1$ , alors

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^{\beta-1} \mathbb{E}_{\alpha,\beta}(\pm ax^\alpha) dx = \frac{\lambda^{\alpha-\beta}}{\lambda^\alpha \mp a}.$$

**Lemme 1.3** [11] Soit  $z \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$ , on a

$$\frac{d}{dz}\mathbb{E}_\alpha(z) = \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(z).$$

**Lemme 1.4** [4] Soit  $\bar{\alpha} \in (0, 2)$  et  $\bar{\beta} \in \mathbb{R}$  sont arbitraires. Pour tout  $\bar{p} = [\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}]$ , on a

$$\mathbb{E}_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}(z) = \frac{1}{\bar{\alpha}} z^{\frac{1-\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}} e^{(z^{\frac{1}{\bar{\alpha}}})} - \sum_{k=1}^{\bar{p}} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\bar{\beta} - \bar{\alpha}k)} + O(z^{-1-\bar{p}}), \quad z \rightarrow \infty.$$

Si  $\bar{\alpha} = \alpha$ ,  $\bar{\beta} = \alpha$  et  $z = at^\alpha$ , on obtient la fonction Mittag-Leffler  $\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}$ .

**Lemme 1.5** [10]  $\forall a > 0$ ,  $\alpha \in (0, 2)$ , on a

$$t^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(at^\alpha) \sim \frac{e^{(a^{\frac{1}{\alpha}}t)}}{\alpha a^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}, \quad t \rightarrow \infty.$$

La fonction  $t^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)$  est croissante  $\forall t \in [0, T]$  et  $\alpha > 0$ .

---

## 1.1. Calcul fractionnaire

**Lemme 1.6** [9] Soit  $\{a_k\}_{(k \in \mathbb{N})}$  une suite réelle définie par

$$a_k \leq pa_{k-1} + d_k,$$

où  $d_k$  est une suite réelle spécifiée. Si  $p < 1$ , alors

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} d_k \leq d \Rightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \frac{d}{1-p}.$$

### 1.1.3 Dérivée fractionnelle

Cette section sera consacrée aux définitions élémentaires sur les intégrales et les dérivées fractionnelles de Caputo.

**Définition 1.3** [8] Soit  $\Omega = [a, b)$  un intervalle fini de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction intégrable sur  $\Omega$ . L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville (notée par RL) d'ordre  $\alpha$  est définie par :

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

où  $\alpha$  est un nombre réel ou complexe.

**Définition 1.4** [8] La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  est définie par

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} (I_a^{n-\alpha} f(t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \quad n-1 \leq \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

**Remarque 1.2 :**

La définition de la différentiation fractionnaire de type Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires ainsi que pour son application dans les mathématiques pures (solution des équations différentielles d'ordre entier, définitions de nouvelles classes de fonctions, sommation des séries, etc...).

Malheureusement, l'approche de Riemann-Liouville mène à des conditions

---

## 1.1. Calcul fractionnaire

initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville en la borne inférieure.

Malgré le fait que des problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement, leurs solutions sont pratiquement inutiles, car il n'y a aucune interprétation physique pour de telle type de conditions initiales. Une certaine solution pour ce problème a été proposée par M. Caputo.

**Définition 1.5** [8] Soient  $0 < n - 1 < \alpha < n$  et  $f$  une fonction de classe  $\mathbb{C}^n([a, b])$ . La dérivée de Caputo d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f$  est définie par l'intermédiaire de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville par :

$${}^c D_t^\alpha f(t) = {}^{RL} D_t^\alpha [f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} t^k].$$

**Remarque 1.3 :**

Une différence entre la définition de Riemann-Liouville et la définition de Caputo est que la dérivée de Caputo d'une constante est nulle, par contre, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante  $C$  n'est pas égale à zéro, mais

$${}^c D_t^\alpha C = \frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}.$$

### 1.1.4 Transformation de Laplace

Comme dans le cas entier, la transformée de Laplace est utilisée pour la résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaires. Dans cette section, nous donnons quelques outils de base et des formules fondamentales de la transformée de Laplace pour la dérivée fractionnaire de Caputo.

**Définition 1.6** [2] La transformée de Laplace d'une fonction  $f(t)$  d'un variable réel positif  $t \in (0, +\infty)$  est définie par

$$(\mathcal{L}f)(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{C}.$$

---

## 1.1. Calcul fractionnaire

**Remarque 1.4** Pour l'existence de l'intégrale précédent la fonction  $f(t)$  doit être d'ordre exponentiel  $s$ , ce qui veut dire qu'il existe deux constantes positives  $M$  et  $T$  telles que

$$e^{-st}|f(t)| \leq M \text{ pour tout } t > T.$$

En d'autres termes, la fonction  $f(t)$  ne doit "croître ou décroître" plus vite qu'une certaine fonction exponentielle quand  $t \rightarrow \infty$ .

**Propriétés de la transformation de Laplace :**

1- **Linéarité** : La transformation de Laplace est linéaire c-à-d pour deux fonctions  $f$  et  $g$ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f + g\} &= \mathcal{L}\{f\} + \mathcal{L}\{g\}. \\ \mathcal{L}\{kf\} &= k\mathcal{L}\{f\}, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2-**Addition** : Soient  $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$  et  $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$ , alors

$$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s).$$

**Définition 1.7** [6] L'inverse de la transformation de Laplace de la fonction  $g(s)$  est donnée par la formule :

$$(\mathcal{L}^{-1}g)(x) = \mathcal{L}^{-1}\{g(s)\}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sx} g(s) ds.$$

**Définition 1.8** [2] Soient  $F(s)$  et  $G(s)$  les transformées de Laplace de  $f(t)$  et  $g(t)$  respectivement alors le produit de convolution  $(f * g)$  est donné par :

$$f * g = F(s).G(s) = \mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(t-z)g(z)dz \right\}.$$

---

**1.1. Calcul fractionnaire**

**Définition 1.9** [2], [6]

1- La formule de transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est

$$\mathcal{L}\{D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^{(k-(n-\alpha))} f(0), \quad (n-1 < \alpha \leq n).$$

2- La formule de transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est :

$$\mathcal{L}\{{}^c D_t^\alpha f(t); s\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \{{}^c D_t^\alpha f(t)\},$$

avec

$$\mathcal{L}\{{}^c D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (n-1 < \alpha \leq n).$$

**Quelques transformées de Laplace :**

$Y(t)$	$y(t) = \mathcal{L}(Y(t))$
$\frac{1}{s^\alpha - a}$	$t^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha, \alpha}(at^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha + a)}$	$\mathbb{E}_\alpha(-at^\alpha)$



# Chapitre 2

## Contrôle d'apprentissage itératif ILC

Dans ce chapitre, nous allons présenter l'idée du contrôle d'apprentissage itératif ( ILC) dans laquelle le système à contrôler effectuera plusieurs fois la même opération. Il sera alors possible d'améliorer progressivement les performances du système de contrôle en utilisant les résultats d'une opération lors du choix du signal d'entrée pour l'opération suivante. Cela peut être vu comme une procédure de recherche itérative qui doit évidemment converger pour donner un résultat positif.

Nous commençons par donner quelques notions concernant la théorie de contrôle.

### 2.1 Théorie de contrôle

La théorie du contrôle s'intéresse au comportement de systèmes dynamiques en fonction de leurs paramètres. Elle peut être vue comme une stratégie permettant de sélectionner la bonne entrée d'un système pour que la sortie soit celle désirée.

Donc, le but est d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères.

On rencontre dans la pratique de très nombreux problèmes de contrôle, dans toutes les disciplines : par exemple garer la voiture, piloter un avion ou un satellite vers une orbite, optimiser les flux d'information dans un réseau, contrôler une épidémie, réaliser une opération chirurgicale au laser,...

### 2.1.1 Systèmes dynamiques contrôlés

La théorie des systèmes dynamiques exprime l'évolution d'un système au cours du temps comme le résultat d'une fonction prenant en argument son état ainsi que les actions appliquées sur ses entrées.

Un système contrôlé est un système dynamique sur lequel on peut agir au moyen d'une commande ou contrôle, donné sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u),$$

où  $x$  est un vecteur comprenant les entrées et les sorties du système;  $u$  un vecteur comprenant les modifications effectuées sur les entrées, appelé "contrôle" ou "commande" et  $f$  représente le processus de transformation (non linéaire en général) qui caractérise le système.

Le contrôle d'un système est donc la manipulation adéquate de ses entrées en regard des buts de l'utilisateur sur ses sorties.

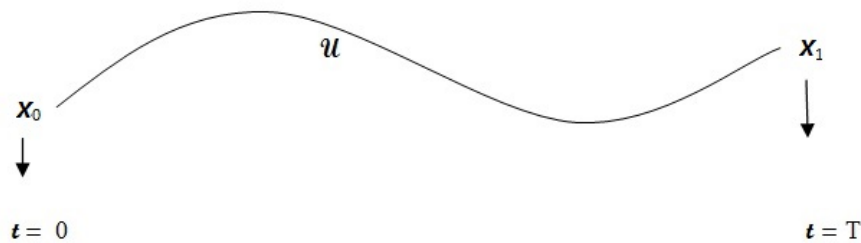


FIGURE 2.1 – Contrôle d'un système dynamique

### 2.1.2 Contrôle en boucle ouverte

Le système commence avec des entrées qui sont transmises au niveau contrôle (ou de prise de décision), dont la fonction est de définir l'action qui doit être entreprise. Il transmet des instructions au niveau du procédé qui est en charge de l'exécution de ces actions. Une fois les actions accomplies, le travail du système est terminé jusqu'à ce que l'exécutif soit à nouveau activé.

---

## 2.1. Théorie de contrôle

Bien entendu, sans feedback, le système en boucle ouverte ne peut pas savoir si les actions déclenchées dans l'environnement ont été effectives pour atteindre l'objectif, et des modifications ne peuvent donc être apportées tant que l'action est en cours.

Le contrôle en boucle ouverte est utilisé, la plupart du temps, lorsque la réaction du système est difficile à mesurer ou à diagnostiquer. C'est-à-dire, quand il est très compliqué d'avoir un retour du résultat obtenu.

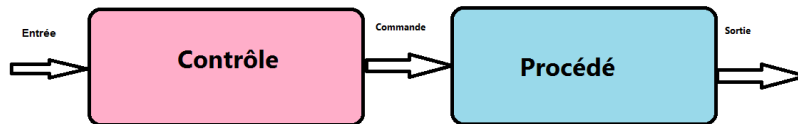


FIGURE 2.2 – Contrôle en boucle ouverte

### Exemple 2.1 les véhicules motorisés :

Un automobiliste qui dirige sa voiture avec un contrôle en boucle ouverte ne réagit pas si la position de volant n'est pas bonne (en conduisant par exemple les yeux fermés) et dévie rapidement. Si l'utilisateur d'une voiture désire accélérer, il va en donner l'entée par le biais de la pédale d'accélération.

Plusieurs contrôle doivent être entreprises sur le moteur pour respecter cette entée. Ces contrôles impliquent des actions de la part de différents effecteurs (valves, injecteurs, etc), qui doivent à leur tour être contrôlés afin de s'assurer que leur action (angle d'ouverture, durée d'injection, etc) est correcte et coordonnée avec les autres actions en cours.

---

## 2.1. Théorie de contrôle

### 2.1.3 Contrôle en boucle fermée

La rétroaction (ou feedback) est l'action que produit un phénomène en retour sur ses propres causes. Une rétroaction est dite positive si elle tend à amplifier le phénomène, et négative si elle tend au contraire à l'amortir. Dans le cadre du contrôle de système, la rétroaction se traduit par le fait que le contrôle d'un système est influencé par l'erreur entre la sortie du système et l'entrée.

Les contrôleurs basés sur le principe de rétroaction sont dits en boucle fermée (figure 2.3); ils constituent l'immense majorité des systèmes de contrôle actuels. Ainsi, le comportement du système contrôlé influence celui de son contrôleur et réciproquement. Les deux systèmes sont couplés.

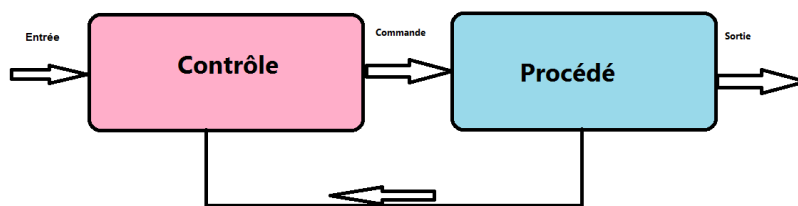


FIGURE 2.3 – Contrôle en boucle fermée

**Exemple 2.2** L'exemple bien connu est celui du thermostat.

Le thermostat a été développé en 1886 par Albert Butz, qui a donné naissance à la société Honeywell. Le thermostat a longtemps été constitué d'un système à bilame qui ouvrait un circuit électrique quand la chaleur atteignait un certain stade et fermait ce circuit dès que l'on descendait en dessous de cette même température. En pratique, tout se passait comme s'il avait existé en fait deux entrées de température voisines.

Le thermostat est utilisé à chaque fois qu'une température doit se maintenir à un certain niveau. Cela peut être : un fer à repasser, un réfrigérateur, un

---

## 2.1. Théorie de contrôle

lave-vaisselle, un four, une climatisation, au niveau d'un automobile, près du moteur pour réguler la température du liquide de refroidissement, pour réguler la température d'une pièce, etc.

## 2.2 Contrôle par apprentissage itératif

Introduit pour la première fois par Arimoto, Kawamura et Miyazaki en 1984 [1], le contrôle par apprentissage itératif (Iterative Learning Control, ILC) a d'abord été motivé par la maîtrise de bras robotisés industriels, répétant indéfiniment la même tâche. Chaque nouvelle passe améliore le contrôle en s'appuyant sur la précédente.

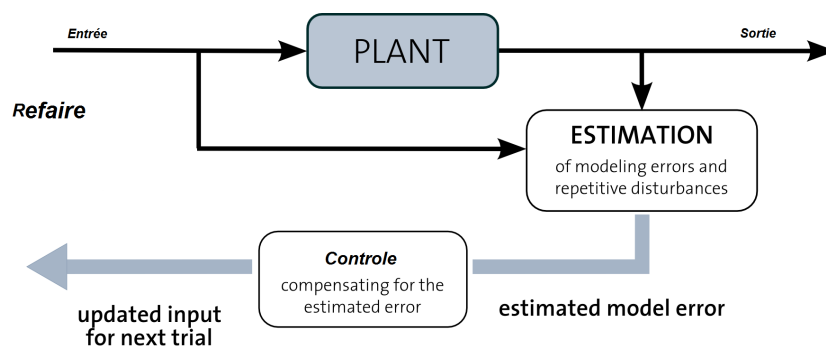


FIGURE 2.4 – Contrôle d'apprentissage itératif

L'idée principale de ILC est que le système exécute une opération donnée plusieurs fois. On suppose en outre que chaque opération est effectuée sur un intervalle de temps fini. Tous les signaux sont donc définis sur un intervalle de temps fini et dans le cas de temps discret  $e_k$  désignera le signal d'erreur à l'instant  $t$  et à l'itération  $k$  c'est à dire un vecteur représentant l'erreur aux points d'échantillonnage.

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + K(e_k(t)). \quad (2.1)$$

Le nouveau contrôle appliqué  $u_{k+1}$  est donc fonction du précédent  $u_k$ , de la dernière erreur  $e_k$  entre la sortie et l'entrée, et d'un "opérateur de gain  $K$ ". Pour illustrer l'idée de base, nous commencerons par examiner l'ILC dans un

---

### 2.2. Contrôle par apprentissage itératif

contexte de boucle ouverte. Par souci de simplicité, considérons un problème d'asservissement et négligeons la perturbation de la charge.

A l'itération  $k$ , la sortie  $y_k(t)$  du système est écrite sous la forme :

$$y_k(t) = G(t)u_k(t), \quad (2.2)$$

où  $G$  est une fonction de transfert. La sortie  $y_k(t)$  donne l'erreur :

$$e_k(t) = y_d(t) - y_k(t). \quad (2.3)$$

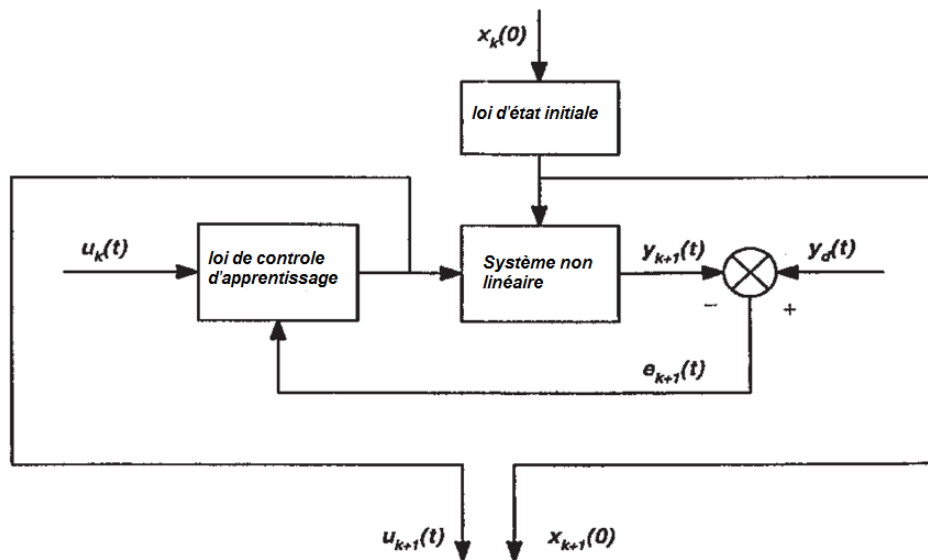


FIGURE 2.5 – Contrôle d'apprentissage itératif

## 2.3 Contrôle ILC de type PD

Le contrôle proportionnel-dérivé PD est utile pour les contrôleurs à réponse rapide qui n'ont pas besoin d'une erreur d'état stable de 0. Nous commençons par la définition du contrôle P et D.

---

### 2.3. Contrôle ILC de type PD

### 2.3.1 Contrôle ILC de type P

L'action proportionnelle ( i.e contrôle ILC de type P) fournit une réponse instantanée à l'erreur de contrôle. Ceci est utile pour améliorer la réponse d'un système stable mais ne peut pas contrôler un système instable par lui-même. De plus, le gain est le même pour toutes les fréquences quittant le système avec une erreur d'état stable non nulle.

Il permet de tenir compte de l'erreur actuelle entre la valeur observée du signal de rétroaction et l'entrée.

$$P = k_p e_k(t),$$

où  $k_p$  est une constante,  $e_k$  l'erreur actuelle et  $t$  le temps. Augmenter l'importance de ce terme permet une convergence plus rapide vers l'entrée mais dégrade rapidement la stabilité du système.

**Remarque 2.1** Un contrôleur d'apprentissage itératif de type P utilisant le concept de facteur  $k_p$  et la modification d'erreur actuelle où la limite uniforme entre la sortie du système et la sortie souhaitée est obtenue à chaque itération sous certaines conditions relatives aux incertitudes. Donc, l'ensemble résiduel de l'erreur de suivi sur l'itération final est une fonction de classe du facteur  $k_p$ .

Lorsque toutes les incertitudes et le facteur  $k_p$  tendent à zéro, la sortie du système convergera uniformément vers celle souhaitée.

### 2.3.2 Contrôle ILC de type D

L'action dérivée agit sur la dérivée ou le taux de variation de l'erreur de contrôle. Ceci fournit une réponse rapide, par opposition à l'action intégrale, mais ne peut pas contenir d'erreurs constantes (c'est-à-dire que la dérivée d'une erreur constante non nulle est 0).

Pour utiliser le contrôle dérivé, les fonctions de transfert doivent être appropriées. Cela nécessite souvent l'ajout d'un pôle au contrôleur (ce pôle n'est pas présent dans les équations ci-dessous)

---

## 2.3. Contrôle ILC de type PD

$$D = k_d \frac{de_k(t)}{dt},$$

où  $k_d$  est une constante,  $e_k$  l'erreur et  $t$  le temps.

### 2.3.3 Contrôle ILC de type PD

Le contrôle proportionnel-dérivé PD est utile pour les contrôleurs à réponse rapide qui n'ont pas besoin d'une erreur d'état stable de 0.

Les contrôleurs proportionnels sont rapides ainsi que les contrôleurs dérivés mais les deux ensembles, sont plus rapides.

Pour utiliser le contrôle PD, les fonctions de transfert doivent être appropriées. Cela nécessite souvent l'ajout d'un contrôleur proportionnel-dérivé :

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + k_p e_k(t) + k_d \dot{e}_k(t), \quad (2.4)$$

où  $k_p$  et  $k_d$  sont des paramètres réels.



# Chapitre 3

## Analyse de convergence de la loi ILC

Dans ce chapitre, nous discutons la loi de contrôle d'apprentissage de type PD pour les équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire. Nous dérivons les résultats de la convergence pour la boucle ouverte et des schémas d'apprentissage itératifs en boucle fermée avec une erreur initiale nulle puis aléatoire, en utilisant les propriétés des fonctions de Mittag-Leffler. Nous commençons par l'étude de la solution du problème fractionnaire linéaire à partir de la transformation de Laplace.

### 3.1 Existence de la solution d'un problème fractionnel linéaire

On considère l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$\begin{cases} {}_0^c D_t^\alpha x_k(t) = ax_k(t) + bu_k(t), & t \in [0, T], \quad \alpha \in (1, 2), \\ \dot{x}_k(0) = 0, \\ y_k(t) = cx_k(t) + d \int_0^t u_k(s) ds, \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $k$  est le nombre des itérations, le symbole  ${}_0^c D_t^\alpha x_k(t)$  est la dérivée de Caputo d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $x_k$  au point  $t$  avec  $x_k, y_k, u_k \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $b, c, d \in \mathbb{R}$ .

Considérons le temps de démarrage de la machine,  $(x_k)$  ne peut pas changer immédiatement sur un petit intervalle de temps fini  $[0, \delta]$ . Pour  $\delta \rightarrow 0$ , on obtient la condition  $x_k(0) = 0$  dans (3.1).

Soit la trajectoire désirée :

$$y_d(t) = cx_d(t) + d \int_0^t u_d(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

où  $x_d(t)$  et  $u_d(t)$  sont les trajectoires d'état et du contrôle souhaitées, respectivement.

On note par

$$e_k(t) = y_d(t) - y_k(t),$$

l'erreur de suivi ( c'est-à-dire l'erreur sur la trajectoire) et

$$\delta u_k(t) = u_d(t) - u_k(t),$$

l'erreur sur le contrôle.

**Théorème 3.1** *La solution du problème (3.1) est donnée par :*

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \mathbb{E}_\alpha(at^\alpha)x_k(0) + t\mathbb{E}_{\alpha,2}(at^\alpha)\dot{x}_k(0) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha)bu_k(s)ds \\ &= \mathbb{E}_\alpha(at^\alpha)x_k(0) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha)bu_k(s)ds, \end{aligned} \quad (3.2)$$

où  $\mathbb{E}_\alpha(z)$  et  $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}(z)$  sont les fonctions de Mittag-Leffler.

**Preuve.** En appliquant la transformation de Laplace sur la première équation du système (3.1), on obtient :

$$\mathcal{L}\{D_t^\alpha x_k(t); s\} = \mathcal{L}\{ax_k(t) + bu_k; s\},$$

c-à-d

$$s^\alpha \mathcal{L}\{x_k(t); s\} - \sum_{i=0}^1 s^{\alpha-i-1} x_k^{(i)}(0) = a\mathcal{L}\{x_k(t); s\} + b\mathcal{L}\{u_k(t); s\},$$

$$s^\alpha \mathcal{L}\{x_k(t); s\} - s^{\alpha-1}x_k(0) - s^{\alpha-2}\dot{x}_k(0) = a\mathcal{L}\{x_k(t); s\} + b\mathcal{L}\{u_k(t); s\}.$$

---

### 3.1. Existence de la solution d'un problème fractionnel linéaire

Après des calculs simples on obtient :

$$(s^\alpha - a)\mathcal{L}\{x_k(t); s\} = s^{\alpha-1}x_k(0) + b\mathcal{L}\{u_k(t); s\}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x_k(t); s\} &= \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - a}x_k(0) + \frac{b}{s^\alpha - a}\mathcal{L}\{u_k(t); s\} \\ &= \mathcal{L}\{\mathbb{E}_\alpha(at^\alpha)x_k(0); s\} + \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(at^\alpha); s\}\mathcal{L}\{bu_k(t); s\} \\ &= \mathcal{L}\{\mathbb{E}_\alpha(at^\alpha)x_k(0) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha)bu_k(s)ds; s\}. \end{aligned}$$

En utilisant la transformation de Laplace inverse, on obtient :

$$x_k(t) = \mathbb{E}_\alpha(at^\alpha)x_k(0) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha)bu_k(s)ds. \blacksquare$$

## 3.2 Convergence de la loi ILC en boucle ouverte

Pour illustrer l'idée de base de la convergence de la loi ILC, nous commencerons par examiner ILC dans un contexte de boucle ouverte.

Dans cette section, nous étudions le problème (3.1) avec la loi de contrôle d'apprentissage de type PD suivante :

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + k_p e_k(t) + k_d \dot{e}_k(t), \quad (3.3)$$

où  $k_p$  et  $k_d$  sont des paramètres réels.

**Théorème 3.2** *Supposons que le schéma ILC (3.3) soit appliqué à (3.1) et que la condition initiale à chaque itération est :*

$$x_k(0) = x_d(0), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

*c'est-à-dire l'erreur initiale est nulle.*

*Si*

$$|1 - k_d| < 1,$$

*alors*  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t)$  *uniformément sur*  $t \in [0, T]$ .

---

### 3.2. Convergence de la loi ILC en boucle ouverte

**Preuve.** On calcule l'erreur de suivi :

$$e_k(t) = y_d(t) - y_k(t).$$

En utilisant la troisième équation du problème (3.1), on obtient :

$$\begin{aligned} e_k(t) &= cx_d(t) + d \int_0^t u_d(s) ds - cx_k(t) - d \int_0^t u_k(s) ds \\ &= c(x_d(t) - x_k(t)) + d \int_0^t (u_d(s) - u_k(s)) ds. \end{aligned}$$

Et d'après (3.2), on arrive à :

$$\begin{aligned} e_k(t) &= c[\mathbb{E}_\alpha(at^\alpha)x_d(0) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) bu_d(s) ds - \mathbb{E}_\alpha(at^\alpha)x_k(0) \\ &\quad - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) bu_k(s) ds] + d \int_0^t \delta u_k(s) ds \\ &= c \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_k(s) ds + d \int_0^t \delta u_k(s) ds. \end{aligned} \quad (3.4)$$

En dérivant (3.4), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{e}_k(t) &= c \frac{d}{dt} \left[ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_k(s) ds \right] + d \delta u_k(t) \\ &= c \int_0^t \frac{d}{dt} \left[ (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) \right] b \delta u_k(s) ds + d \delta u_k(t). \end{aligned}$$

On pose :

$$z = a^{\frac{1}{\alpha}}(t-s),$$

---

### 3.2. Convergence de la loi ILC en boucle ouverte

et en utilisant le lemme (1.1), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_k(t) &= c \int_0^t \frac{d}{dt} [a^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} z^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(z^\alpha)] b \delta u_k(s) ds + d \delta u_k(t) \\
 &= c \int_0^t a^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \frac{d}{dz} [z^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(z^\alpha)] b \delta u_k(s) ds + d \delta u_k(t) \\
 &= c \int_0^t a^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} [a^{\frac{\alpha-2}{\alpha}} (t-s)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha-1}(a(t-s)^\alpha)] b \delta u_k(s) ds + d \delta u_k(t) \\
 &= c \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha-1}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_k(s) ds + d \delta u_k(t). \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

De (3.3), (3.4) et (3.5), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \delta u_{k+1}(t) &= \delta u_k(t) - k_p e_k(t) - k_d \dot{e}_k(t) \\
 &= \delta u_k(t) - k_p [c \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_k(s) ds + d \int_0^t \delta u_k(s) ds] \\
 &\quad - k_d [c \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha-1}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_k(s) ds + d \delta u_k(t)] \\
 &= (1 - k_d d) \delta u_k(t) - k_p c \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_k(s) ds \\
 &\quad - k_d c \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha-1}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_k(s) ds - k_p d \int_0^t \delta u_k(s) ds. \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

En utilisant la  $\lambda$ -norme qui est définie par :

$$\|x\|_\lambda = \max_{t \in [0, T]} e^{-\lambda t} |x(t)|.$$

---

### 3.2. Convergence de la loi ILC en boucle ouverte

On conclut que

$$\begin{aligned}
 |\delta u_{k+1}(t)|e^{-\lambda t} &\leq |1 - k_d d| |\delta u_k(t)|e^{-\lambda t} + |k_p d| e^{-\lambda t} \int_0^t |\delta u_k(s)| ds \\
 &\quad + |k_p c| e^{-\lambda t} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) |b \delta u_k(s)| ds \\
 &\quad + |k_d c| e^{-\lambda t} \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha-1}(a(t-s)^\alpha) |b \delta u_k(s)| ds.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

En notant

$$I_1 = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) |\delta u_k(s)| ds,$$

$$I_2 = \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha-1}(a(t-s)^\alpha) |\delta u_k(s)| ds,$$

$$I_3 = e^{-\lambda t} \int_0^t |\delta u_k(s)| ds,$$

on a, alors

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) e^{\lambda(t-s)} |\delta u_k(s)| ds \\
 &\leq e^{\lambda t} \|\delta u_k\|_\lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) ds \\
 &\leq e^{\lambda t} \|\delta u_k\|_\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda(t-s)} (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) ds \\
 &= \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^\alpha - a} \|\delta u_k\|_\lambda.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

---

### 3.2. Convergence de la loi ILC en boucle ouverte

Avec la même méthode, on arrive à la valeur de  $I_2$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha, \alpha-1}(a(t-s)^\alpha) |\delta u_k(s)| ds \\
 &= \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} (t-s)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha, \alpha-1}(a(t-s)^\alpha) e^{\lambda(t-s)} |\delta u_k(s)| ds \\
 &\leq e^{\lambda t} \|\delta u_k\|_\lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} (t-s)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha, \alpha-1}(a(t-s)^\alpha) ds \\
 &\leq e^{\lambda t} \|\delta u_k\|_\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda(t-s)} (t-s)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha, \alpha-1}(a(t-s)^\alpha) ds,
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

et d'après le lemme (1.2), on a le resultat suivant :

$$I_2 \leq \frac{\lambda e^{\lambda t}}{\lambda^\alpha - a} \|\delta u_k\|_\lambda.$$

Finalement, la valeur de  $I_3$  est majorée par :

$$\begin{aligned}
 I_3 &= e^{-\lambda t} \int_0^t |\delta u_k(s)| ds = \int_0^t |\delta u_k(s)| e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)} ds \\
 &\leq \|\delta u_k\|_\lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} ds \\
 &= \|\delta u_k\|_\lambda \left[ \frac{e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda} \right]_0^t \\
 &= \|\delta u_k\|_\lambda \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right) \\
 &= \frac{\|\delta u_k\|_\lambda}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \\
 &\leq \frac{\|\delta u_k\|_\lambda}{\lambda}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

D'après (3.7), (3.8), (3.9) et (3.10) on a :

$$\|\delta u_{k+1}\|_\lambda \leq \left( |1 - k_d d| + \frac{|k_p c b|}{\lambda^\alpha - a} + \frac{|k_d c b| \lambda}{\lambda^\alpha - a} + \frac{|k_p d|}{\lambda} \right) \|\delta u_k\|_\lambda. \tag{3.11}$$

D'après la condition  $0 \leq |1 - k_d d| < 1$ , on a :

---

### 3.2. Convergence de la loi ILC en boucle ouverte

$$\rho = |1 - k_d d| + \frac{|k_p c b|}{\lambda^\alpha - a} + \frac{|k_d c b| \lambda}{\lambda^\alpha - a} + \frac{|k_p d|}{\lambda} < 1 \quad (3.12)$$

Pour  $\lambda$  plus grand, l'inégalité (3.11) devient

$$\begin{aligned} \|\delta u_{k+1}\|_\lambda &\leq \rho \|\delta u_k\|_\lambda \\ \|\delta u_k\|_\lambda &\leq \rho \|\delta u_{k-1}\|_\lambda \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \|\delta u_1\|_\lambda &\leq \rho \|\delta u_0\|_\lambda \\ \|\delta u_k\|_\lambda &\leq \rho^k \|\delta u_0\|_\lambda \end{aligned} \quad (3.13)$$

$(\rho^k)$  est une suite géométrique avec  $\rho < 1$ , donc elle est convergente, et par passage à la limite, on obtient :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\delta u_k\|_\lambda = 0.$$

D'autre part, en utilisant (3.4), on a :

$$|e_k(t)| \leq |c| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) |b \delta u_k(s)| ds + |d| \int_0^t |\delta u_k(s)| ds.$$

D'après (3.8) et (3.10), on a :

$$|e_k(t)| \leq |cb| \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^\alpha - a} \|\delta u_k\|_\lambda + \frac{|d| e^{\lambda t}}{\lambda} \|\delta u_k\|_\lambda.$$

On multiplie l'inégalité précédente par  $e^{-\lambda t}$  :

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} |e_k(t)| &\leq \left( \frac{|cb|}{\lambda^\alpha - a} + \frac{|d|}{\lambda} \right) \|\delta u_k\|_\lambda, \\ \|e_k\|_\lambda &\leq \left( \frac{|cb|}{\lambda^\alpha - a} + \frac{|d|}{\lambda} \right) \|\delta u_k\|_\lambda. \end{aligned}$$

---

### 3.2. Convergence de la loi ILC en boucle ouverte



Par passage à la limite, on arrive à :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k\|_\lambda \leq \left( \frac{|cb|}{\lambda^\alpha - a} + \frac{|d|}{\lambda} \right) \lim_{k \rightarrow \infty} \|\delta u_k\|_\lambda,$$

donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(t)\|_\lambda = 0.$$

On conclut que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t),$$

uniformement pour  $t \in [0, T]$ . ■

On va refaire le même travail pour que l'erreur sur la condition initiale soit bornée c-à-d

$$|\delta x_k(0)| = |x_d(0) - x_k(0)| \leq A.$$

On arrive au résultat suivant

**Théorème 3.3** *Supposons que le schéma ILC (3.3) soit appliqué à (3.1) et que l'erreur sur la condition initiale à chaque itération soit bornée :*

$$|\delta x_k(0)| = |x_d(0) - x_k(0)| \leq A, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Si

$$|1 - k_d d| < 1,$$

alors l'erreur entre  $y_d(t)$  et  $y_k(t)$  est bornée et dépend des paramètres  $A$ ,  $|k_p|$  et  $|k_d|$ .

**Preuve.** En utilisant les mêmes étapes dans la preuve du théorème (3.2), on obtient :

---

### 3.2. Convergence de la loi ILC en boucle ouverte

$$\begin{aligned}
 e_k(t) &= y_d(t) - y_k(t) \\
 &= cx_d(t) + d \int_0^t u_d(s) ds - cx_k(t) - d \int_0^t u_k(s) ds \\
 &= c(x_d(t) - x_k(t)) + d \int_0^t (u_d(s) - u_k(s)) ds \\
 &= c[\mathbb{E}_\alpha(at^\alpha)x_d(0) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) bu_d(s) ds - \mathbb{E}_\alpha(at^\alpha)x_k(0) \\
 &\quad - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) bu_k(s) ds] + d \int_0^t \delta u_k(s) ds \\
 &= c\mathbb{E}_\alpha(at^\alpha)\delta x_k(0) + c \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) b\delta u_k(s) ds + d \int_0^t \delta u_k(s) ds.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

En dérivant (3.14), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_k(t) &= c\delta x_k(0) \frac{d}{dt} \mathbb{E}_\alpha(at^\alpha) + c \frac{d}{dt} \left[ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) b\delta u_k(s) ds \right] + d\delta u_k(t) \\
 &= c\delta x_k(0) \frac{d}{dt} \mathbb{E}_\alpha(at^\alpha) + c \int_0^t \frac{d}{dt} \left[ (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) b\delta u_k(s) ds \right] + d\delta u_k(t).
 \end{aligned}$$

Les lemmes (1.1) et (1.3), nous donnent :

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_k(t) &= c\delta x_k(0) \left( a\alpha t^{\alpha-1} \frac{d}{a\alpha t^{\alpha-1} dt} \mathbb{E}_\alpha(at^\alpha) \right) \\
 &\quad + c \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha-1}(a(t-s)^\alpha) b\delta u_k(s) ds + d\delta u_k(t) \\
 &= c a \alpha t^{\alpha-1} \frac{d}{d(at^\alpha)} \mathbb{E}_\alpha(at^\alpha) \delta x_k(0) \\
 &\quad + c \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha-1}(a(t-s)^\alpha) b\delta u_k(s) ds + d\delta u_k(t) \\
 &= c a t^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(at^\alpha) \delta x_k(0) + c \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha-1}(a(t-s)^\alpha) b\delta u_k(s) ds + d\delta u_k(t).
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

---

### 3.2. Convergence de la loi ILC en boucle ouverte

Par l'utilisation de (3.3) (3.14) et (3.15), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \delta u_{k+1}(t) &= \delta u_k(t) - k_p e_k(t) - k_d \dot{e}_k(t) \\
 &= \delta u_k(t) - k_p [c \mathbb{E}_\alpha(at^\alpha) \delta x_k(0) + c \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_k(s) ds \\
 &\quad + d \int_0^t \delta u_k(s) ds] - k_d [c a t^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(at^\alpha) \delta x_k(0) + \\
 &\quad c \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha-1}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_k(s) ds + d \delta u_k(t)] \\
 &= (1 - k_d d) \delta u_k(t) - k_p c \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_k(s) ds \\
 &\quad - k_d c \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha-1}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_k(s) ds - k_p d \int_0^t \delta u_k(s) ds \\
 &\quad - k_p c \mathbb{E}_\alpha(at^\alpha) \delta x_k(0) - k_d c a t^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(at^\alpha) \delta x_k(0).
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 |\delta u_{k+1}(t)| e^{-\lambda t} &\leq |1 - k_d d| |\delta u_k(t)| e^{-\lambda t} + |k_p d| e^{-\lambda t} \int_0^t |\delta u_k(s)| ds \\
 &\quad + |k_p c| e^{-\lambda t} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) |b \delta u_k(s)| ds \\
 &\quad + |k_d c| e^{-\lambda t} \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha-1}(a(t-s)^\alpha) |b \delta u_k(s)| ds \\
 &\quad + |k_p c| e^{-\lambda t} |\mathbb{E}_\alpha(at^\alpha)| |\delta x_k(0)| \\
 &\quad + |k_d c a| e^{-\lambda t} |t^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)| |\delta x_k(0)|.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

---

### 3.2. Convergence de la loi ILC en boucle ouverte

D'après (3.8), (3.9) et (3.10), on arrive à :

$$\begin{aligned} \|\delta u_{k+1}\|_\lambda &\leq \left( |1 - k_d d| + \frac{|k_p c b|}{\lambda^\alpha - a} + \frac{|k_d c b| \lambda}{\lambda^\alpha - a} + \frac{|k_p d|}{\lambda} \right) \|\delta u_k\|_\lambda \\ &\quad + |k_p c| \|\mathbb{E}_\alpha(at^\alpha)\|_\lambda |\delta x_k(0)| + |k_d c a| \|t^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)\|_\lambda |\delta x_k(0)|. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Donc

$$\|\delta u_{k+1}\|_\lambda \leq \rho \|\delta u_k\|_\lambda + |k_p c| \|\mathbb{E}_\alpha(at^\alpha)\|_\lambda |\delta x_k(0)| + |k_d c a| \|t^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)\|_\lambda |\delta x_k(0)|.$$

Si on a

$$\|\mathbb{E}_\alpha(at^\alpha)\|_\lambda \leq \|\mathbb{E}_\alpha(at^\alpha)\|_C \leq \mathbb{E}_\alpha(aT^\alpha), \quad \left( \|x\|_\lambda \leq \|x\|_C, \quad \forall x \in C([0, T], \mathbb{R}) \right).$$

Ou encore

$$\|t^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)\|_\lambda \leq \|t^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)\|_C \leq T^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(aT^\alpha).$$

L'inégalité (3.18) devient :

$$\|\delta u_{k+1}\|_\lambda \leq \rho \|\delta u_k\|_\lambda + |k_p c| A \mathbb{E}_\alpha(aT^\alpha) + |k_d c a| A T^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(aT^\alpha).$$

En utilisant le lemme (1.6), on obtient :

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\delta u_k\|_\lambda \leq \frac{1}{1 - \rho} (|k_p c| \mathbb{E}_\alpha(aT^\alpha) + |k_d c a| T^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(aT^\alpha)) A.$$

De (3.14), on obtient :

$$|e_k| \leq |c| \|\mathbb{E}_\alpha(at^\alpha)\|_\lambda |\delta x_k(0)| + |c| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) |b \delta u_k(s)| ds + |d| \int_0^t |\delta u_k(s)| ds.$$

D'après (3.8) et (3.10), on a :

$$|e_k| \leq \frac{|c b|}{\lambda^\alpha - a} e^{\lambda t} \|\delta u_k\|_\lambda + \frac{|d|}{\lambda} e^{\lambda t} \|\delta u_k\|_\lambda + |c| A |\mathbb{E}_\alpha(at^\alpha)|.$$

---

### 3.2. Convergence de la loi ILC en boucle ouverte

En multipliant cette inégalité par  $e^{-\lambda t}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 e^{-\lambda t}|e_k| &\leq \left( \frac{|cb|}{\lambda^\alpha - a} + \frac{|d|}{\lambda} \right) \|\delta u_k\|_\lambda + |c|A|\mathbb{E}_\alpha(at^\alpha)|e^{-\lambda t}, \\
 \|e_k\|_\lambda &\leq \left( \frac{|cb|}{\lambda^\alpha - a} + \frac{|d|}{\lambda} \right) \|\delta u_k\|_\lambda + |c|A\|\mathbb{E}_\alpha(at^\alpha)\|_\lambda \\
 &\leq \left( \frac{|cb|}{\lambda^\alpha - a} + \frac{|d|}{\lambda} \right) \|\delta u_k\|_\lambda + |c|A\mathbb{E}_\alpha(aT^\alpha). \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

Quand  $k \rightarrow \infty$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \|e_k\|_\lambda &\leq \left( \frac{|cb|}{\lambda^\alpha - a} + \frac{|d|}{\lambda} \right) \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \|\delta u_k\|_\lambda + |c|A\mathbb{E}_\alpha(aT^\alpha) \\
 &\leq |c|A \left( \left( \frac{|cb|}{\lambda^\alpha - a} + \frac{|d|}{\lambda} \right) \frac{1}{1 - \rho} (|k_p|\mathbb{E}_\alpha(aT^\alpha) \right. \\
 &\quad \left. + |k_d||a|T^{\alpha-1}\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(aT^\alpha) \right) + \mathbb{E}_\alpha(aT^\alpha), \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

donc l'erreur entre  $y_d(t)$  et  $y_k(t)$  est bornée et dépend des paramètres  $A$ ,  $|k_p|$  et  $|k_d|$ .

La preuve est complétée. ■

**Remarque 3.1** Pour certaines longueurs de domaine d'itération  $T$ .

En liant la formule (3.20), on peut réduire l'erreur de suivi en appliquant deux méthodes :

- (i) en ajustant la loi d'apprentissage, c'est-à-dire en faisant diminuer  $|k_p|$ .
- (ii) amélioration de la précision de suivi de l'état initial du système, c'est-à-dire  $A$  décroissante.

Mais nous ne pouvons pas voir si l'augmentation ou la diminution aura un effet sur l'erreur de suivi par (3.20).

En réalité,  $\left( \frac{1}{1 - \rho} \right)$  augmenterait si  $|k_d|$  diminuent.

**Remarque 3.2** supposons que l'erreur initiale satisfasse  $x_d(0) \neq x_0$  et

---

### 3.2. Convergence de la loi ILC en boucle ouverte

$$|x_k(0) - x_0| \leq A^*.$$

Notons  $|x_d(0) - x_0| = A^{**}$ ,

alors

$$|\delta x_k(0)| = |x_d(0) - x_k(0)| \leq A,$$

devient

$$|\delta x_k(0)| \leq A^* + A^{**} = A.$$

On peut obtenir un résultat similaire dans le théorème (3.2).

### 3.3 Analyse de convergence de la loi ILC en boucle fermée

Dans cette section, on considère la loi ILC de type PD suivant :

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + k_p e_{k+1}(t) + k_d \dot{e}_{k+1}(t). \quad (3.21)$$

Dans cette loi, l'algorithme d'apprentissage proportionnel en boucle fermée peut fournir une vitesse de convergence plus rapide. Nous supposons que

$$\dot{e}_k(t) = \lim_{\tau \rightarrow t^-} \frac{e_k(\tau) - e_k(t)}{\tau - t},$$

on trouvera ci-dessous le premier résultat de cette section.

**Théorème 3.4** *Supposons que le schéma ILC (3.21) soit appliqué à (3.1) et que la condition initiale à chaque itération est :*

$$x_k(0) = x_d(0), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Si

$$|1 + k_d d| > 1,$$

alors  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t)$  uniformément sur  $t \in [0, T]$ .

**Preuve.** D'après (3.4), on obtient :

$$\begin{aligned} e_{k+1}(t) &= y_{d+1}(t) - y_{k+1}(t) \\ &= c \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha, \alpha}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_{k+1}(s) ds \\ &+ d \int_0^t \delta u_{k+1}(s) ds. \end{aligned} \quad (3.22)$$

---

### 3.3. Analyse de convergence de la loi ILC en boucle fermée

D'après (3.5), on obtient :

$$\dot{e}_{k+1}(t) = c \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha, \alpha-1}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_{k+1}(s) ds + d \delta u_{k+1}(t). \quad (3.23)$$

En utilisant (3.21), (3.22) et (3.23), on arrive à :

$$\begin{aligned} \delta u_{k+1}(t) &= \delta u_k(t) - k_p e_{k+1}(t) - k_d \dot{e}_{k+1}(t) \\ &= \delta u_k(t) - k_p c \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha, \alpha}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_{k+1}(s) ds \\ &\quad - k_d c \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha, \alpha-1}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_{k+1}(s) ds \\ &\quad - k_p d \int_0^t \delta u_{k+1}(s) ds - k_d d \delta u_{k+1}(t). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (1 + k_d d) \delta u_{k+1}(t) &= \delta u_k(t) - k_p c \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha, \alpha}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_{k+1}(s) ds \\ &\quad - k_d c \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha, \alpha-1}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_{k+1}(s) ds \\ &\quad - k_p d \int_0^t \delta u_{k+1}(s) ds. \end{aligned}$$

D'après (3.8), (3.9) et (3.10), on a :

$$|1 + k_d d| \cdot \|\delta u_{k+1}\|_\lambda \leq \|\delta u_k\|_\lambda + \left( \frac{|k_p c b|}{\lambda^\alpha - a} + \frac{|k_d c b| \lambda}{\lambda^\alpha - a} + \frac{|k_p d|}{\lambda} \right) \|\delta u_{k+1}\|_\lambda.$$

$$\|\delta u_{k+1}\|_\lambda \leq \left( |1 + k_d d| - \left( \frac{|k_p c b|}{\lambda^\alpha - a} - \frac{|k_d c b| \lambda}{\lambda^\alpha - a} - \frac{|k_p d|}{\lambda} \right) \right)^{-1} \|\delta u_k\|_\lambda.$$

Comme  $|1 + k_d d| > 1$ , alors il existe  $\lambda$  suffisamment grand tel que :

$$\bar{\rho} = |1 + k_d d| - \frac{|k_p c b|}{\lambda^\alpha - a} - \frac{|k_d c b| \lambda}{\lambda^\alpha - a} - \frac{|k_p d|}{\lambda} > 1.$$

---

### 3.3. Analyse de convergence de la loi ILC en boucle fermée

alors  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t)$  uniformément sur  $t \in [0, T]$ . ■

Maintenant, on refait les calculs pour une erreur initiale aléatoire bornée.

**Théorème 3.5** *Supposons que le schéma ILC (3.21) soit appliqué à (3.1) et que la condition initiale à chaque itération est conforme  $|\delta x_k(0)| \leq A$ .*

*Si*

$$|1 + k_d d| > 1,$$

*alors l'erreur entre  $y_d(t)$  et  $y_k(t)$  est bornée et sa limite dépend de  $A$ ,  $|k_p|$  et  $|k_d|$ .*

**Preuve.**

D'après (3.14), on a :

$$e_{k+1}(t) = c \mathbb{E}_\alpha(at^\alpha) \delta x_k(0) + c \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_{k+1}(s) ds + d \int_0^t \delta u_{k+1}(s) ds.$$

En utilisant (3.15), on obtient :

$$\dot{e}_{k+1}(t) = c a t^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(at^\alpha) \delta x_k(0) + c \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha-1}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_{k+1}(s) ds + d \delta u_{k+1}(t).$$

$$\begin{aligned} \delta u_{k+1}(t) &= \delta u_k(t) - k_p e_{k+1}(t) - k_d \dot{e}_{k+1}(t) \\ &= \delta u_k(t) - k_p c \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_{k+1}(s) ds \\ &\quad - k_d c \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha-1}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_{k+1}(s) ds \\ &\quad - k_p d \int_0^t \delta u_{k+1}(s) ds - k_d d \delta u_{k+1}(t) - k_p c \mathbb{E}_\alpha(at^\alpha) \delta x_k(0) \\ &\quad - k_d c a t^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(at^\alpha) \delta x_k(0), \end{aligned} \tag{3.25}$$

---

### 3.3. Analyse de convergence de la loi ILC en boucle fermée



donc

$$\begin{aligned}
 (1 + k_d d) \delta u_{k+1}(t) &= \delta u_k(t) - k_p c \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_{k+1}(s) ds \\
 &\quad - k_d c \int_0^t (t-s)^{\alpha-2} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha-1}(a(t-s)^\alpha) b \delta u_{k+1}(s) ds \\
 &\quad - k_p d \int_0^t \delta u_{k+1}(s) ds \\
 &\quad - k_p c \mathbb{E}_\alpha(a t^\alpha) \delta x_k(0) - k_d c a t^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a t^\alpha) \delta x_k(0).
 \end{aligned}$$

D'après (3.8), (3.9) et (3.10), on arrive à :

$$\begin{aligned}
 |1 + k_d d| \cdot \|\delta u_{k+1}\|_\lambda &\leq \|\delta u_k\|_\lambda + \left( \frac{|k_p c b|}{\lambda^\alpha - a} + \frac{|k_d c b| \lambda}{\lambda^\alpha - a} + \frac{|k_p d|}{\lambda} \right) \|\delta u_{k+1}\|_\lambda \\
 &\quad + A |k_p c| \mathbb{E}_\alpha(a T^\alpha) + A |k_d c a| T^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a T^\alpha).
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 &\left( |1 + k_d d| - \frac{|k_p c b|}{\lambda^\alpha - a} - \frac{|k_d c b| \lambda}{\lambda^\alpha - a} - \frac{|k_p d|}{\lambda} \right) \|\delta u_{k+1}\|_\lambda \\
 &\leq \|\delta u_k\|_\lambda + A (|k_p c| \mathbb{E}_\alpha(a T^\alpha) + |k_d c a| T^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a T^\alpha)).
 \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\|\delta u_{k+1}\|_\lambda \leq \frac{1}{\bar{\rho}} \|\delta u_k\|_\lambda + \frac{A}{\bar{\rho}} (|k_p c| \mathbb{E}_\alpha(a T^\alpha) + |k_d c a| T^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a T^\alpha)).$$

Comme  $|1 + k_d d| > 1$ , il est possible de choisir  $\lambda$  suffisamment grand tant que

$$\bar{\rho} = \left( |1 + k_d d| - \frac{|k_p c b|}{\lambda^\alpha - a} - \frac{|k_d c b| \lambda}{\lambda^\alpha - a} - \frac{|k_p d|}{\lambda} \right) > 1.$$

En utilisant le lemme (1.6), on obtient :

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\delta u_k\|_\lambda \leq \frac{A (|k_p c| \mathbb{E}_\alpha(a T^\alpha) + |k_d c a| T^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(a T^\alpha))}{\bar{\rho} - 1},$$

et d'après (3.19), on conclut que :

$$\|e_k\|_\lambda \leq \left( \frac{|c b|}{\lambda^\alpha - a} + \frac{|d|}{\lambda} \right) \|\delta u_k\|_\lambda + |c| A \mathbb{E}_\alpha(a T^\alpha),$$

---

### 3.3. Analyse de convergence de la loi ILC en boucle fermée

et par passage à la limite

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \|e_k\|_\lambda &\leq \left( \frac{|cb|}{\lambda^\alpha - a} + \frac{|d|}{\lambda} \right) \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \|\delta u_k\|_\lambda + |c| A \mathbb{E}_\alpha(aT^\alpha) \\
 &\leq \left( \frac{|cb|}{\lambda^\alpha - a} + \frac{|d|}{\lambda} \right) \frac{1}{\bar{\rho} - 1} \left( A |k_p| c |\mathbb{E}_\alpha(aT^\alpha)| \right. \\
 &\quad \left. + |k_d| c a |T^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(aT^\alpha)| + |c| A \mathbb{E}_\alpha(aT^\alpha) \right) \\
 &\leq |c| A \left( \frac{|cb|}{\lambda^\alpha - a} + \frac{|d|}{\lambda} \right) \frac{1}{\bar{\rho} - 1} (|k_p| \mathbb{E}_\alpha(aT^\alpha) \\
 &\quad + |k_d| |a| T^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(aT^\alpha) + \mathbb{E}_\alpha(aT^\alpha)).
 \end{aligned}$$

Alors l'erreur entre  $y_d(t)$  et  $y_k(t)$  est bornée et sa limite dépend de  $A$ ,  $|k_p|$  et  $|k_d|$ . ■

**Remarque 3.3 :**

Si  $\alpha = 1$ , le système (3.1) devenu une équation différentielle ordinaire a un ordre comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = ax_k(t) + bu_k(t), & t \in [0, T]. \\ y_k(t) = cx_k(t) + d \int_0^t u_k(s) ds. \end{cases} \quad (3.26)$$

Il est bien connu que la solution de (3.26) est donnée par

$$x_k(t) = e^{at} x_k(0) + \int_0^t e^{a(t-s)} bu_k(s) ds.$$

Avec des calculs élémentaires, nous obtenons la formule d'erreur :

$$e_k(t) = ce^{at} x_k(0) + c \int_0^t e^{a(t-s)} bu_k(s) ds + d \int_0^t \delta u_k(s) ds.$$

En prenant la dérivée, nous avons

$$e'_k(t) = cae^{at} x_k(0) + c \int_0^t ae^{a(t-s)} bu_k(s) ds + d\delta u_k(t).$$

En utilisant les résultats précédentes, l'analyse de convergence des lois en boucle ouverte et en boucle fermée peut être donnée immédiatement.

---

**3.3. Analyse de convergence de la loi ILC en boucle fermée**

### 3.4 Exemples

Dans cette section, des exemples sont présentés. Pour décrire la stabilité du système associée à l'augmentation des itérations, on désigne l'énergie totale de la  $k$ -itération par :

$$E_k = \|u_k\|_{L^2}.$$

**Exemple 3.1** Considérons le système différentiel d'ordre fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^c_0D_t^{1.5}x_k(t) = 0.5x_k + 0.5u_k(t), & t \in [0, 1], \\ y_k(t) = 0.8x_k(t) + 0.5 \int_0^t u_k(s)ds, \end{cases} \quad (3.27)$$

la loi d'apprentissage dans le système est définie comme (3.3) où

$$k_p = 1, \quad k_d = 1.2.$$

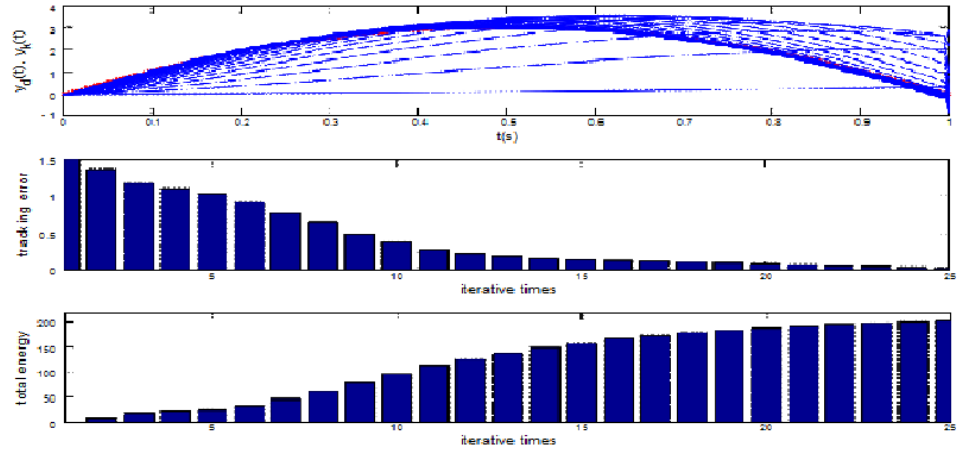
L'état initial et le 1<sup>er</sup> contrôle sont :

$$\begin{cases} x_k(0) = 0, & k = 1, 2, \dots \\ u_1(t) = 1, & t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (3.28)$$

Ensuite, définissons la trajectoire souhaitée comme :

$$y_d(t) = 12t(1 - t), \quad t \in [0, 1],$$

toutes les conditions du théorème (3.1) étant vérifiées, l'erreur de suivi à la 25<sup>ème</sup> itération est  $e = 0,0378$ , ce qui est très infime.

FIGURE 3.1 – Les trajectoires  $y_d$  et  $y_k$ , l'erreur  $e_k$  et l'énergie total

**Exemple 3.2** Considérons le système différentiel d'ordre fractionnaire suivant :

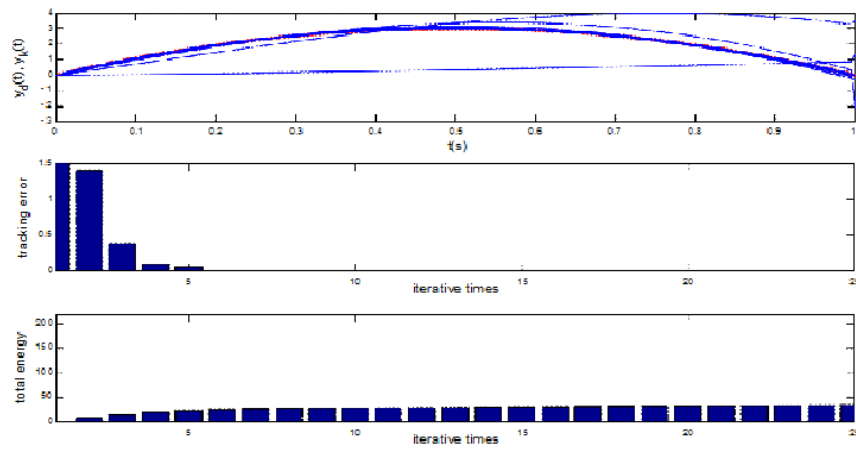
$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = 0.5x_k + 0.5u_k(t), & t \in [0, 1], \\ y_k(t) = 0.8x_k(t) + 0.5 \int_0^t u_k(s)ds, \end{cases} \quad (3.29)$$

la loi d'apprentissage dans le système, l'état initial, le 1<sup>er</sup> contrôle et la trajectoire souhaitée, sont les mêmes que l'exemple précédent. L'erreur de suivi à la 25<sup>ème</sup> itération est de  $e = 0,0042$ , ce qui est aussi très infime.

**Remarque 3.4** Dans les deux exemples, le total d'énergie devient stable progressivement avec l'augmentation des itérations et nous avons donc besoin de plus d'énergie pour compenser le mémoire du système de contrôle fractionnaire.

---

### 3.4. Exemples

FIGURE 3.2 – Les trajectoires  $y_d$  et  $y_k$ , l'erreur  $e_k$  et l'énergie total

### Conclusion

Dans ce travail, une introduction au domaine du contrôle d'apprentissage itératif ILC pour un problème fractionnaire linéaire a été présentée. Les principes de base de l'utilisation de l'ILC de type PD à la fois en boucle ouverte et en boucle fermée ont été discutés. Le choix des filtres dans la formule de mise à jour et les conséquences pour la convergence ont été traités. Ces résultat a été basé sur la fonction Mittag-Leffler et ses propriétés.

---

### 3.4. Exemples

# Bibliographie

- [1] Arimoto. S, Kawamura . S, Miyazaki, F. : Bettering Operation of Robots by Learning, Journal of Robotic Systems, pages 123-140, 1984.
- [2] Bekaddour K. : Transformé de la Laplace et Applications aux Équations Différentielles Fractionnaires, mémoire master, 2017.
- [3] Gorenflo, R., Kilbas, A.A., Mainardi, F., Rogosin, S.V. : Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. Springer, New York, 2014.
- [4] Gorenflo, R., Loutchko, J., Luchko, Y. : Computation of the Mittag-Leffler function  $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}(z)$  and its derivative. Fract. Calc. Appl. Anal. 2002.
- [5] Guermit.D.N : Quelques opérateurs de dérivations fractionnaires, théorie et applications, mémoire master, 2016.
- [6] Haubold,H.J., Mathai, A.M., Saxena, R.K. : Mittag-Leffler functions and their applications. J. Appl. Math. 2011.
- [7] Igor Podlubny, : Fractional Differential Equations, Mathematics In Science And Engineering, 1999.
- [8] Kilbas, A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J. : Theory and Applications of Fractional Differential Equation. Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [9] Ruan, X., Bien, Z. : Pulse compensation for  $PD$ -type iterative learning control against initial state shift. Int. J. Syst. Sci. 43, 2012.
- [10] Shengda, L., Wang, J., Wei, W, : Analysis of iterative learning control for a classe of fractional differential equations. J. Appl. Math. Comput, 17-31, 2017.

- 
- [11] Wang, J., Feckan, M., Zhou, Y. : Presentation of solutions of impulsive fractional Langevin equations and existence results. *Eur. Phys. J.* 222, 2013.
- [12] Xianghu. L., Yanfang. L : The convergence analysis of P-type iterative learning control with initial state error for some fractional system. *Journal of Inequalities and Applications* 2, 2017.