République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministére de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 mai 1945-Guelma
Faculté des mathématiques, de l'informatique et des sciences de la matière
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Matrices tridiagonales

Présenté par
Marwa Fareh et Sarra Messaadi

Mémoire soutenu le 08 Juillet 2019 devant le jury composé de:

M. BELLAOUAR Djamel Université de Guelma (Président),
M. KHENICHE Azzedine Université de Guelma (Rapporteur),
M. AZZOUZA Nourddine Université de Guelma (Examinateur).

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de MASTER 2 en Mathématique Appliquées

Année Universitaire 2018-2019

Please refer to this work as follows:
Marwa Fareh et Sarra Messaadi(**Promotion 2019**). *Matrices tridiagonales*, Université 8 mai 1945-Guelma
Facultédes mathématiques, de l'informatique et des sciences de la matiére
Département de Mathématiques

The supervisors give the authorization to consult and to copy parts of this work for personal use only.

Remerciements

Nous tenons en premier lieu à remercier Dieu de nous avoir donné le courage, la patience et la volonté pour réaliser ce travail.
Nous tenons à exprimer nos remerciements au Dr, Kheniche Azzedine, pour avoir dirigé ce mémoire, et pour ses précieux conseils, son aide, et son soutien scientique et humain, qui nous a donné la patience et la volonté d'accomplir ce modeste travail.
Nos vifs remerciements, vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre mémoire en acceptant d'éxaminer notre travail. Nous adressons aussi nos remerciemment à tout les enseignants de la filière de Mathémathique de l'université de Guelma, qui nous a aidé tout au long de cette formation de Master.
Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Guelma, juin 2019
MARWA FAREH ET SARRA MESSAADI

Résumé

Ce mémoire de Master a pour but, de faire une étude algébrique sur les matrices tridiagonales et plus particulièrement en ce qui concerne les matrices tridiagonales de Toeplitz. En effet, aprés avoir introduit la notion d'une matrice bande (tridiagonale) et celle de Toeplitz, nous commençons par une étude sur les déterminants de ce genre de matrices, et le lien de ces déterminants avec les nombres de Fibonacci. Nous continuons a expliciter les valeurs et vecteurs propres ainsi que les formules des matrices inverses de ces matrices. En outre, nous allons présenter la méthode de Householder, pour la tridiagonalisation d'une matrice symétrique, avec des exemples illustratifs, notons que ce mémoire n'a pas la prétention d'apporter de nouveaux résultats, mais il présente quelques résultats obtenus dernières années par diférents auteurs, dans des travaux cités en bibliographie.

Abstract

The aim of this memory is to present the notion of tridiagonal matrices, we will focus on the algebraic study of such matrices, and in particular the Toeplitz tridiagonale matrices. Indeed, after introducing the notion of the band matrix (tridiagonal) and that of Toeplitz, we start with a study of the determinant of such matrices, and the links with the Fibonacci numbers, we continue to explain the eigenvalues, eigenvectors and the formulas of the inverses matrices of a tridiagonal matrix. Moreover, we will introduce the Householder's method for tridiagonalising a symmetric matrix, and we finish with some illustrative examples, note that this memory does not pretend to bring new results, but it presents some results obtained in recent years by different authors, in works cited in the bibliography.

Sommaire

Liste des symboles

I_n La matrice identité d'ordre n

K Le corps des complexes ou des réels

$M_n(\mathbb{K})$ L'ensemble des matrices carrées d'ordre n

M_n^{TD} L'ensemble des matrices tridiagonales d'ordre n

M_n^{TO} L'ensemble des matrices tridiagonales de Toeplitz d'ordre n

F_n Le nombre de Fibonacci d'ordre n

L_n Le nombre de Lucas d'ordre n

δ_{ij} Le symbole de kronicker

A^T La matrice transposée de la matrice A

H_u La matrice de Householder assocée au vecteur u

Introduction

Les matrices tridiagonales, jouent un rôle important autant en pratique qu'en théorie, et apparaissent dans de nombreux contextes en mathématiques pures et appliquées comme un outil de base dans la théorie de l'approximation, en particulier dans l'étude des fonctions spéciales et polynômes orthogonaux, les équations aux dérivées partielles par la méthode des différences finies, il est donc nécessaire de leur apporter un intérét particulier.
La forme compacte qu'offere la matrice tridiagonale amène une réduction importante du nombre d'opérations arithmétiques lors du calcule des valeures propres et des vecteures propres, calcule de la matrice inverse, ainsi que pour la résolution d'un systéme d'equations linéaires.
Les matrices tridiagonales de Toeplitz (Otto Toeplitz, né le 1er août 1881 à Breslau auj. Wroclaw-Pologne et mort le 15 février 1940 à Jérusalem est un mathématicien allemand) est l'une des formes le plus souvent utilisées dans beaucoup d'applications et ont été largement étudiées dans la littérature. Elles sont omniprésentes dans de trés nombreux problèmes tels que le traitement de signal numérique (le filtrage numérique, la théorie destimation, le traitement de la parole, etc...), ainsi que le traitement dimages, la théorie de contrôle, les équations intégrales, les polynômes orthogonaux, les équations aux dérivées partielles et dautres domaines de lanalyse numérique.
Notre objectif dans ce mémoire, est de faire une étude détailée sur ces matrices de Toeplitz tridiagonales. En effet, les matrices symétriques, que l'on retrouve dans des application en physique, mécanique, génie électrique etc.., peuvent être réduites a une forme tridiagonale.
Quand on calcule numériquement des solutions approchées d'équations aux dérivées partielles élliptiques ou paraboliques par des méthodes de différences finies, on doit considérer des matrices tridiagonales. Pour développer et étudier certains préconditionnements pour les méthodes itératives, il est utile de connaitre les propriètés de l'inverse comme, par exemple, la décroissance des élments de l'inverse sur une ligne ou une colonne. [11, 7].
Les inverses des matrices tridiagonales ont été abondamment étudiés dans le passé, bien qu'il semble que la plupart des résultats aient été obtenus indépendamment. On ne peut obtenir des formules explicites pour les élments de l'inverse que pour des matrices particulières comme par exemple les matrices tridiagonales de Toeplitz [16]. Quand une solution explicite ne peut pas être trouvée, les élments de l'inverse sont donnés par les solutions de récurrences du second ordre.
Dans l'application de telles méthodes, l'étude de linverse de ces matrices apparaît très importante [21, 5, 31, 19], nous avons choisi dans ce travail une méthode exacte, assez élégante, introduite par M. El-Mikkawy et A. Karawia dans [13] pour

le calcul rapide de l'inverse de matrices tridiagonales.
Le calcule des valeurs et vecteurs propres de matrices tridiagonales est l'un des problèmes les plus importants en analyse numérique linéaire. Les techniques requérant la connaissance du spectre de matrices sont utilisées dans des domaines aussi variés que la mécanique quantique, lanalyse des structures, la théorie des graphes, les modèles de léconomie et le classement des pages de la Toile informatique par les moteurs de recherche.
On veut transformer une matrice symétrique en une matrice tridiagonale sans modifier les valeurs propres et avoir des vecteurs propres equivalents entre les deux matrices. Il existe plusieurs méthodes qui permettent une telle tridiagonalisation, mais ici nous nétudierons que celle de Householder (Alston Scott Householder, né le 5 mai 1904, à Rockford dans l'Illinois et mort le 4 juillet 1993, est un mathématicien américain spécialiste de biomathématique et d'analyse numérique).
La méthode de Householder est une suite de transformations orthogonales [27, 28, 25, 15, 30]. Donc la matrice symétrique $A_1 = A \in R^{n\times n}$ est réduite à la matrice tridiagonale (symétrique) A_{n-1} par $(n-2)$ transformations orthogonales:
Pour une matrice tridiagonale, nous avons expliciter dans ce mémoire les valeurs et les vecteurs propres dans le cas où cette matrice est de Toeplitz [3], comme nous avons aussi investigué quelques résultats sur les déterminants liés aux nombres de Fibonacci[8, 9, 20, 24].
Ce mémoire n'a pas la prétention d'apporter de nouveaux résultats, mais il présente en détails, quelques résultats obtenus dernières années par diférents auteurs, dans des travaux cités en bibliographie.
Ce mémoire est organisé de la façon suivante :
Dans le premier chapitre, nous introduisons quelques outils théoriques utiles tout au long de ce travail. Nous rappelons d'abord les définitions de quelques matrices spéciales (hermitienne, orthogonale, decomposée en blocs, triangulaires, bande, echelonnées, Hessenbergue), et quelques propriétés de ces matrices (trace, transposition, Déterminant, normes et produits scalaires).
Dans le deuxiéme chapitre, nous nous intéressons à l'étude des matrices tridiagonales, en particulier, les matrices tridiagonales de Toeplitz (d'aprés Otto Toeplitz) et on introduit quelques propriétés liées à cette notion (déterminant, déterminants liés au nombre de fibonacci, valeurs et vecteurs propres, inversion d'une matrice tridiagonale).
Le troisième chapitre concerne l'étude de la méthode de Householder pour la tridiagonalisation d´une matrice symétrique ainsi que la décomposition LU de la matrice tridiagonale résultante.
A la fin, nous présentons une conclusion générale avec quelques perspectives de ce modeste travail de recherche.

1 Généralité sur l´algèbre des matrices

1.1. Matrices et vecteurs

Les matrices jouent un rôle fondamental en algèbre linéaire, où elles fournissent un outil de calcul irremplaçable. L'objectif de ce chapitre, est de rappeler les bases du calcul matriciel, qui seront utilisées dans les chapitres suivants. Nous nous plaçons dans le corps $\mathbb{K}$, en géneral $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1. *Soient m et n deux entiers strictement positifs. On appelle matrice à m lignes et n colones à coeficients dans un corps $\mathbb{K}$, un ensemble A de $m \times n$ scalaires a_{ij}, $i = 1, ..., m$, $\quad j = 1, ..., n$ noté $(A)_{ij}$, présentés dans le tableau rectangulaire suivant:*

$$(A)_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Les scalaires a_{ij}, $\ i = 1, ..., m$, $\ j = 1, ..., n$ sont appelées coefficients ou élèments de la matrice A, le premier indice i étant celui de la ligne de l'élèment et le second j étant celui de la colonne. Ainsi l'ensemble des coefficients:

- $a_{i1}, ..., a_{in}$ est la i^{ieme} ligne de la matrice .
- $a_{1j}, ..., a_{mj}$ est la j^{ieme} colonne .

Les élèments d'une matrice $(A)_{ij}$ sont notés aussi par a_{ij} (lorsque qu'aucune confusion ou ambiguitè n'est possible). On note $M_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes dont les coefficient appartiennent à $\mathbb{K}$. Une matrice est dite réelle ou complexe selon que ses élèments sont dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $m = n$, la matrice est dite carrée d'ordre n et on note $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble correspondant, lorsque $m \neq n$, $\quad$ on parle de matrice rectangulaire.
On appelle diagonale d'une matrice A d'ordre n l'ensemble des coefficientes a_{ii}, $i = 1, ..., n$. $\quad$ Cette diagonale divise la matrice en une partie sur-diagonale composée des élèments dont l'indice de ligne est strictement inférieur à l'indice de colonne et une partie sous-diagonale formée des élèments pour les quels l'indice de ligne est strictement supérieur à l'indice de colonne. Étant donné $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, on note $A^T \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, la matrice transposée de A telle que:

- $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$, $\ 1 \leq i \leq n$, $\ 1 \leq j \leq m$. On a alors $(A^T)^T = A$. De même étant donné $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, on note $A^* \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, la matrice adjointe de A

telle que :

- $(A^*)_{ij} = (\overline{A})_{ji}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m.$ le scalaire $\overline{z}$ désignant le nombre complexe conjugué du nombre z et on a $(A^*)^* = A$.

On appelle vecteur ligne (resp., vecteur colonne), une matrice n'ayant qu'une ligne (resp., vecteur colonne).

Définition 1.2. *(*sous-matrice*)*
Soit A une matrice de $M_{m,n}(\mathbb{K})$. Soient

(i) $1 \leq i_1 < ..... < i_p \leq m$

(ii) $1 \leq j_1 < ..... < j_p \leq n$

deux ensembles d'indices. La matrice S de $M_{p,q}(\mathbb{K})$ ayant pour coefficients: $s_{kl} = a_{i_k j_l l}$, $1 \leq k \leq p$, $1 \leq l \leq q$, est appellée une sous-matrice de A.
Il est aussi trés courant d'associer à une matrice, une décomposition en sous-matrice.

Définition 1.3. *(*décomposition par blocs d'une matrice*)*
Une matrice A de $M_{m,n}(\mathbb{K})$, est dite décomposée par blocs, si elle s'écrit:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

où les blocs A_{IJ}, $\ 1 \leq I \leq M$, $1 \leq J \leq N \quad$ sont des sous-matrices de A.

L'intérêt de telles dcompositions par blocs réside dans le fait que certaines opérations définies sur les matrices, restent formellement les mêmes, les coefficients de la matrice étant remplacés par ses sous-matrices.

1.2. Opérations sur les matrices

On peut effectuer un certain nombre d'oprations simples sur les matrices. Nous rappelons à présent quelques opération essontielles définies sur les matrices.

Définition 1.4. *(*Égalité de deux matrices*)*
Soit A et B deux matrices de $M_{m,n}(\mathbb{K})$. On dit que A égale à B si $a_{ij} = b_{ij}$, pour $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$.

Définition 1.5. *(*Somme de deux matrices*) Soit A et B deux matrices de $M_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle somme des matrices A et B la matrice C de $M_{m,n}(\mathbb{K})$, dont les coeffi-*

cients sont:

- $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$. *L'élèment neutre pour la somme de matrices est la matrice nulle noté* 0, *dont les coefficients sont tous égaux à zéro, on rappelle que l'on a par ailleurs*
- $(A + B)^T = A^T + B^T$, $\forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.
- $(A + B)^* = A^* + B^*$, $\forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Définition 1.6. *(*multiplication d'une matrice par un scalaire*)*
Soit A *une matrice de* $M_{m,n}(\mathbb{K})$ *et* λ *un scalaire , le résultat de la multiplication de la matrice* A *par le scalaire* λ
est la matrice C *de* $M_{m,n}(\mathbb{K})$, *dont les coefficients sont* $c_{ij} = \lambda a_{ij}$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$, *on a:* $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ *et* $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$ $, \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Muni des deux dernière opérations, l'ensemble $M_{m,n}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle alors base canonique de $M_{m,n}(\mathbb{K})$, l'ensemble des $m \times n$ matrices E_{kl}, $k = 1, ..., m$, $l = 1, ..., n$, de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ dont les élément sont définis par:

$$(E_{kl})_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{, si } i \neq k \;\; ou \;\; j \neq l, \;\; 1 \leq i \leq m \;\; et \;\; 1 \leq j \leq n, \\ 1 & \text{, si } \;\; i = k \;\; et \;\; j = l, \;\; 1 \leq i \leq m \;\; et \;\; 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Définition 1.7. *(*produit de deux matrices*)*
Soit A *une matrice de* $M_{m,p}(\mathbb{K})$ *et* B *une matrice de* $M_{p,n}(\mathbb{K})$, *le produit des matrices* A *et* B *est la matrice* C *de* $M_{m,n}(\mathbb{K})$ *dont les coefficients sont donnée par* $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{jk}$, $i = 1, ..., m$, $j = 1..., n$.

le produit de matrices est associatif et distributif par rapport à la somme de matrices, mais il n'est pas commutatif en général. Dans le cas de matrices carrées, on dit que deux matrices A et B commutent si $AB = BA$. Toujours dans ce cas l'élèment neutre pour le produit de matrices d'ordre n est la matrice carrée appelée matrice identité définie par:

$$I_n = (\delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

avec δ_{ij} le symbole de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, si } i = j, \\ 0 & \text{, si } \textit{non}. \end{cases}$$

Cette matrice est, par définition la seul matrice d'ordre n telle que $AI_n = I_n, A = A$ pour toute matrice A d'ordre n.
Muni de la multiplication par un scalaire de la somme et de la produit de matrice l'ensemble $M_n(\mathbb{K})$ est une algèbre. Si A est une matrice d'ordre n et p un entier, on définit la matrice A^p comme étant le produit de A par elle même répété p fois

en posant $A^\circ = I_n$.
On rapelle enfin que l'on a

(i) $(AB)^T = B^T A^T \ \forall A \in M_{m,p}(K), \forall B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$.

(ii) $(AB)^* = B^* A^* \ \forall A \in M_{m,p}(K), \forall B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$.

Notons que toutes ces opérations peuvent s'étendre au cas de matrices décomposées par blocs, pourvu que la taille de chacun des blocs soit telle que les opérations soient bien définies.
On a le résultat suivant:

Lemme 1.1. *(*produit de matrices décomposées par blocs*)*
Soient A et B deux matrices de tailles compatibles pour effectuer le produit AB. Si A admet une dècomposition en blocs $(A_{IK})_{1\leq I\leq M,\ 1\leq K\leq N}$ de formats respectifs (r_I, s_K) et B admet dècomposition compatibles en blocs $(B_{KJ})_{1\leq K\leq M,\ 1\leq J\leq P}$ de formats respectifs (s_K, t_J), alors le produit $C = AB$ peut aussi s'écrire comme une matrice par blocs $(C_{IJ})_{1\leq I\leq M, 1\leq J\leq P}$, de formats respectifs (r_I, t_J) et donnés par:

$$C_{IJ} = \sum_{K=1}^{N} A_{IK} B_{KJ}, 1 \leq I \leq M, 1 \leq J \leq P$$

.

1.3. Trace et déterminant d'une matrice

Nous rappellons quelques définitions sur la notion de trace et de déterminant d'une matrice carrée.

Définition 1.8. *(***trace d'une matrice***)*
La trace d'une matrice A d'ordre n est la somme de ses coefficients diagonaux

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Les relations suivantes sont évidentes:

$$tr(A + B) = tr(A) + tr(B), \quad tr(AB) = tr(BA), \quad tr(\alpha A) = \alpha tr(A),$$

et

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A, B \in M_n(\mathbb{K}).$$

la seconde ayant comme conséquence le fait que la trace d'une matrice est invariant par changement de base. En effet, pour toute matrice A et tout matrice inversible

P de même ordre, on a:

$$tr(PAP^{-1}) = tr(P^{-1}PA) = tr(A)$$

.

Définition 1.9. *On appelle permutation d'un ensemble, une bijection de cet ensemble dans lui-même. On note S_n le groupe (pour la loi de composition $\circ$) des permutations de l'ensemble $\{1, ..., n\}$ avec $n \in \mathbb{N}$. La signature d'une permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$ est le nombre, égal à 1 ou -1, défini par*

$$\varepsilon(\sigma) = \Pi_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$

Définition 1.10. *(**déterminant d'une matrice**)*
On appelle déterminant d'une matrice A d'ordre n le scalaire défini par la formule de leibniz

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, \Pi_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i},$$

où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature d'une permutation σ de S_n.

Par propriété des permutation, on a : $det(A^T) = det(A)$, $det(A^*) = \overline{det(A)}$, pour toute matrice A d'ordre n.
On peut voir le déterminant d'une matrice A d'ordre n comme une forme multilinéaire des n colonnes de cette matrice, det(A)=det($a_1, ..., a_n$) où les vecteurs a_j $j = 1, ..., n$ désignent les colonnes de A. Ainsi, multiplier une colonne (ou une ligne, puisque det(A)=det(A^T)) de A par un scalaire α, multiplie le déterminant par ce scalaire. On a notamment: $det(\alpha A)$=$\alpha^n det(A)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A \in M_n(\mathbb{K})$.
Cette forme est de plus alternée: échanger deux colonnes (ou deux lignes) de A entre elles entraêne la multiplication de son déterminant par -1 et si deux colonnes (ou deux ligne) sont égales ou plus généralement, si les colonnes(ou les lignes) de A vérifient une relation non triviale de dèpendance linèaire, le déterminant de A est nul. En revanche, ajouter à une colonne (resp.ligne) une combinaison linéaire des autre colonnes (resp.lignes) ne modifie pas le déterminant.
Ces propriétés expliquent à elles seules le rôle essentiel que joue les déterminants en algèbre linéaire.
On rapelle enfin, que le déterminant est un *morphisme de groupes* du groupe linéaire des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$ (muni de la multiplication). Ainsi si A et B sont deux matrices d'ordre n, on a: $det(AB) = det(BA) = det(A)det(B)$ et si A inversible, $det(A^{-1}) = 1/det(A)$

Corollaire 1.1. *Désignons par $\delta_{n-1}(i, j)$ le déterminant de la matrice carrée de taille $(n-1) \times (n-1)$ extraite de A par suppression de la $i-eme$ ligne et de la*

$j-$ eme colonne. Alors, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on a

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \delta_{n-1}(i,j)$$

Cette relation offre une premiére technique de calcul dun déterminant. Mais le coût en temps de calcul dune telle méthode est rédhibitoire: de lordre de $(n!)$. La programmation de cette technique est alors fortement déconseillée dès lors que n nest plus de lordre de lunité.

1.4. Inverse d'une matrice

Le but de cette section est de rappeler la notion de matrices carrées inversibles pour la multiplication matricielle. Ces matrices inversibles ont plusieurs caractéerisations équivalentes:

Définition 1.11. *(***inverse d'une matrice***)*
Soit A une matrice d'ordre n, On dit que A est inversible ou régulière s'il existe une (unique) matrice notée A^{-1}, telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, (A^{-1} est alors applée la matrice inverse de A).

Une matrice non inversible est dite singulière. Il ressort de cette définition qu'une matrice A inversible est la matrice d'un endomorfisme bijectif. Par conséquent, une matrice A d'ordre n est inversible si et seulement si $rg(A) = n$.
Si une matrice A est inversible, son inverse est évidemment inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$. On rappelle par ailleurs que, si A et B sont deux matrices inversibles, on a les égalités suivantes:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

et

$$(\alpha A)^{-1} = 1/\alpha A^{-1} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K}^*$$

.

Proposition 1.1. *[12]*
Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un corps commutatif (K). Les propositions suivantes sont équivalentes (on note X une matrice colonne à n éléments dans K :

- *A est inversible;*
- *le déterminant de A est non nul;*
- *A possède n pivots;*

- 0 *n'est pas valeur propre de* A*;*
- *le rang de* A *est égal à* n*;*
- *le système linéaire homogène* $AX = 0$ *a pour seule solution* $X = 0$*;*
- *pour tout* b *dans* $M_{n,1}(K)$*, le système linéaire* $AX = b$ *a au plus une solution;*
- *pour tout* b *dans* $M_{n,1}(K)$*, le système linéaire* $AX = b$ *a au moins une solution;*
- *les colonnes de* A*, considérées comme des vecteurs de* K^n*, sont linéairement indépendantes;*
- *les colonnes de* A*, considérées comme des vecteurs de* K^n*, engendrent* K^n*;*
- *l'endomorphisme canoniquement associé à* A *(cest-à-dire l'application linéaire de* K^n *dans lui-même qui a pour matrice* A *dans la base canonique) est injectif;*
- *l'endomorphisme canoniquement associ à* A *est surjectif;*
- *la matrice* A *est inversible à gauche, c'est-à-dire qu'il existe une matrice* B *carrée d'ordre* n *telle que* $BA = I_n$*;*
- *la matrice* A *est inversible à droite, c'est-à-dire qu'il existe une matrice* B *carrée d'ordre* n *telle que* $AB = I_n$*;*
- *la transposée* A^t *de* A *est inversible;*
- *il existe un polynôme annulateur de* A *dont* 0 *n'est pas racine;*
- 0 *n'est pas racine du polynôme minimal de* A *;*
- A *est équivalente à la matrice identit* I_n *d'ordre* n*.*

1.5. Valeurs et vecteurs propres d'une matrice

Les valeurs propres d'une matrice A d'ordre n sont les n racines λ_i, $i = 1, ..., n$, réelles ou complexes, distinctes ou confondues, du polynôme caractéristique $p(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ associé à A. Le spectre d'une matrice A, noté $\sigma(A)$, est l'ensemble des valeurs propres de A. On rappelle les propriétés suivantes:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Par conséquent, la matrice A est singulière si au moins une de ses valeurs propres est nulle. Enfin, le rayon spectral d'une matrice A est le nombre défini par:

$$\rho(A) = max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|.$$

$$det(A^t - \lambda I_n) = det(A - \lambda I_n)^t = det(A - \lambda I_n), \;\; d'ou \;\; \sigma(A^t) = \sigma(A)$$

À toute valeur propre λ d'une matrice A est associé au moins un vecteur non nul v tel que $Av = \lambda v$ et appelé vecteur propre de la matrice A correspondant à la valeur propre λ. Le sous-espace vectoriel constitué de la réunion de l'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre λ et du vecteur nul est appelé sous-espace propre correspondant à la valeur propre λ. Il coïncide par définition avec $Ker(A-\lambda I_n)$ et sa dimension est $n-rg(A-\lambda I_n)$. On appelle cette dernière multiplicité géométrique de λ et elle ne peut jamais être supérieure à la multiplicité algébrique de λ, définie comme la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique. Une valeur propre ayant une multiplicité géométrique inférieure à sa multiplicité algébrique est dite défective.

1.6. Quelques matrices particuliéres

1.6.1. Matrice symètrique et hermitinnes

Notons $M_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.

Définition 1.12. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice A est:*

(i) symétrique, si $A = A^T$,

(ii) antisymétrique si $A = -A^T$,

(iii) orthogonale si $A^TA = AA^T = I_n$.

(iv) semi-définie positive si $X^TAX \geq 0, \; \forall \; X \in \mathbb{R}$,

(v) définie positive si $X^TAX > 0, \; \forall \; X \in \mathbb{R}$, avec $X \neq 0$,

Définition 1.13. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice A est:*

- *hermitienne, si $A = A^*$,*
- *unitaire si $A^*A = AA^* = I_n$,*
- *normale si $A^*A = AA^*$.*

Les matrices diagonales interviennent à de nombreuses reprise en algèbre linéaire. Elles vérifient des propriétés qui rendent leur manipulation particulièrement aisée d'un point de vue calculatoire.

Définition 1.14. *(***matrice diagonale***)*
Une matrice A d'ordre n est dite diagonale, si on a $a_{ij} = 0$, pour les couples d'indices $(i,j) \in 1,...,n^2$ tels que $i \neq j$

Lemme 1.2. [27]

- *La somme et le produit de deux matrices diagonales sont des matrices diagonales.*
- *le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit de ses élèments diagonaux.*
- *Une matrice diagonale A est donc inversible si et selement si tous ses élèments diagonaux son non nuls et dans ce cas, son inverse est une matrice diagonale dont les élèments diagonaux sont les unverses des élèments diagonaux correspondants de A.*

Les matrices triangulaires forment une classe de matrices intervenant trés couramment en algèbre linéaire numérique.

Définition 1.15. *(***matrice triangulaire***)*
On dit qu'une matrice A d'ordre n est triangulaire supérieure (resp.inférieure) si on a:
$a_{ij} = 0$, *pour les couples d'indices* $(i, j) \in 1, ..., n^2$ *tels que* $i > j(resp.i < j)$.

Une matrice à la fois triangulaire supérieure et inférieure est une matrice diagonale, et que la matrice transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure, et vice versa(évident).

Lemme 1.3. [27] *Soit A une matrice d'ordre n triangulaire supérieure (resp. inférieure). Son déterminant est égal au produit de ses termes diagonaux et elle est donc inversible si et seulement si ces derniers sont tous sont non nuls. Dans ce cas, son inverse est aussi une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) dont les élments diagonaux sont les inverses des élments diagonaux de A. Soit B une autre matrice d'ordre n triangulaire supérieure (resp. inférieure). La somme $A + B$ et le produit AB sont des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) dont les élments diagonaux sont respectivement la somme et le produit des élments diagonaux correspondants de A et B.*

1.6.2. Matrice bande, Hessenberg

Une matrice bande est une matrice carrée dont les coefficients non nuls sont localisés dans une "bande" autour de la diagonale principale. Plus précisement, on a la définition suivante.

Définition 1.16. *(***matrice bande***)*
Soit n un entier strictement positif, on dit qu'une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, est une matrice bande s'il existe des entiers positif p et q strictement inférieurs à n tels que $a_{ij} = 0$, *pour tous les couples d'entiers* $(i, j) \in 1, ..., n^2$ *tels que* $i - j > p$ *ou* $j - i > q$.
La largeur de bande *de la matrice vaut $p + q + 1$, avec p élèments a priori non nuls à gauche de la diagonale et q élèments à droite sur chaque ligne.*

Définition 1.17. *(***matrice à diagonale dominante***) On dit qu'une matrice A d'ordre n est àdiagonale dominante par lignes (resp.par colonnes) si:*

$$\mid a_{ii} \mid \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \mid a_{ij} \mid, \; (resp. \mid a_{ii} \mid \geq \sum_{j=1}^{n} \mid a_{ji} \mid), \; 1 \leq i \leq n.$$

On dit que A est à diagonale strictement dominante (par lignes ou par colonnes respectivement) si ces inégalités sont strictes. Les matrices à diagonale strictement dominante possédent la particularité d'être inversibles, comme le montre le résultat suivant.

Théoreme 1.1. [27] *Soit A une matrice d'ordre n à diagonale strictement dominante (par lignes ou par colonnes). Alors, A est inversible.*

Définition 1.18. *(***matrice échelonnée***) Une matrice A de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ est dite échelonnée ou en échelons s'il existe un entier r, $1 \leq r \leq min(m, n)$ et une suite d'entiers $1 \leq j_1 \leq j_2 < .... < j_r \leq n$ tels que:*

- *$a_{ij_i} \neq 0$, pour $1 \leq i \leq r$, et $a_{ij} = 0$ pour $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq j_i$ ($i \geq 2$ si $j_1 = 1$), c'est-à-dire que les coefficients a_{ij_i}, appelès* pivots, *sont les premiers coefficients non nuls des r premiéres lignes.*

- *$a_{ij} = 0$ pour $r < i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$, c'est à dire que toutes les lignes après les r premiéres sont nulles.*

Exemple 1.1. *La matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice échelonne dont les pivots sont 1, -5 et 6.
On déduit immédiatement de la définition précédente que le rang d'une matrice échelonnée est égal au nombre r de pivots. Dans un système linéire échelonné, c'est-à-dire associé une matrice échelonnée, de m équations à n inconnues, les inconnues $x_{j_1}, ..., x_{j_r}$, sont dites principales et les $n - r$ inconnues restantes sont appelées secondaires.

Définition 1.19. *(***matrice de Hessenberg***) Une matrice carrée A, est dite une matrice de:*

(i) Hessenberg supérieure, si tous les éléments se trouvant en dessous de la première sous-diagonale (i.e., la diagonale en dessous de la diagonale principale) sont nuls,

(ii) Hessenberg inférieure, si tous les éléments situés au-dessus de la première

super-diagonale (i.e., la diagonale au-dessus de la diagonale principale) sont nuls.

Ces matrices tirent leur nom du mathmaticien et ingnieur Karl Hessenberg.

Exemple 1.2. *Les matrices*

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 6 & 2 & -5 & 7 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \ et \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 7 & 0 \\ 3 & -2 & 6 & -1 \\ -4 & 5 & 0-3 & 4 \end{pmatrix}$$

sont des matrices de Hessenberg respectivement supérieure, inférieure.

1.7. Normes et produits scalaires

La notion de norme est particulièrement utile en algèbre linéaire numérique, nous rappelons quelques définitions concernant les normes vectorielles sur $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), et les normes matricielles définies sur $M_n(\mathbb{R})$ (ou $M_n(\mathbb{C})$).

Définition 1.20. *(*norme*) Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit qu'une application $\|.\|$ de E dans $\mathbb{R}$ est une norme sur E si*

(i) $\|v\| \geq 0, \forall v \in E$, *et* $\|v\| = 0$ *si et seulement si* $v = 0$,

(ii) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \alpha \in E$,

(ii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in E$.

Définition 1.21. *(*Produits scalaires et normes vectoriels*) Considérons l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{K}^n$ sur le corps $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ définie par*

$$\langle U, V \rangle = V^t U = U^t V = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i, \ si \ \mathbb{K} = \mathbb{R},$$

$$\langle U, V \rangle = V^\star U = \overline{U^\star V} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}, \ si \ \mathbb{K} = \mathbb{C},$$

est appelée produit scalaire canonique (et produit scalaire euclidien lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). On note La norme induite par ce produit scalaire, appelée norme euclidienne dans le cas réel, est alors

$$\|V\|_2 = \sqrt{\langle V, V \rangle} = (\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

D'autres normes couramment utilisées sont les normes:

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|,$$

et

$$\|v\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |v_i|.$$

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Théoreme 1.2. [28, 2] *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de dimension finie n. Pour tout nombre réel $p \ge 1$, l'application $\|\cdot\|_p$ définie par*

$$\|v\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p)^{\frac{1}{p}},\ \forall v \in E$$

est une norme.

Définition 1.22. *(*norme matricielle*) Une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{C})$ est une application de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les proprités d'une norme ainsi que la propriété de* sous-multiplicativité *suivante:*

$$\|AB\| \le \|A\|\|B\|,\ \forall\ A, B \in M_n(\mathbb{C}).$$

Exemple 1.3. *L'application définie par:*

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{tr(AA^\star)},\ \forall\ A \in M_n(\mathbb{C}),$$

est une norme matricielle, appelée norme de Frobenius*.*

Remarque 1.1. *Les normes couramment utilisées, pour une matrice carrée A d'ordre n sont*

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,\ et\ \|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

2 Matrices Tridiagonales

Les matrices tridiagonales se rencontrent dans le calcul des valeurs et vecteurs propres de matrices. Dans ce cas, une premiére étape consiste à mettre la matrice donnée sous forme tridiagonale. Les matrices tridiagonales interviennent aussi dans le calcul des splines cubiques et surtout dans la discrétisation d'équations aux dérivées partielles.

2.1. Définitions et Propriétés

2.1.1. Matrices tridiagonales

Les matrices tridiagonales interviennent souvent en analyse numérique, d'où l'intérêt d'avoir des algorithmes rapides pour les inverser ou calculer leurs valeurs propres.

Définition 2.1. *Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice dordre n, ($A \in M_n(\mathbb{R})$).*
A est dite tridiagonale, si les seuls élements non nuls se trouvent sur la diagonale ou adjacents à la diagonale, cest-à-dire $a_{ij} = 0$, pour $|i - j| > 1$. Autrement-dit, c'est une matrice dont tous les coefficients qui ne sont ni sur la diagonale principale, ni sur la diagonale juste au-dessus, ni sur la diagonale juste en dessous, sont nuls, i.e. elle est sous-forme:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \alpha_3 & \beta_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Remarque 2.1. *Une matrice tridiagonale, est donc une matrice de Hessenberg à la fois supérieure et inférieure.*

Proposition 2.1. [4] *Si une matrice réelle tridiagonale A vérifie $a_{k,k+1} \times a_{k+1,k} > 0$ pour $k = 1, ..., n$ (cest-à-dire si les signes de ses coefficients sont symétriques, alors elle est semblable à une matrice hermitienne, et donc toutes ses valeurs propres sont réelles.*

2.1.2. Matrices tridiagonales de Toeplitz

En algèbre linéaire, une matrice de Toeplitz (d'aprés Otto Toeplitz) ou matrice à diagonales constantes est une matrice dont les coefficients sur une diagonale descendant de gauche à droite sont les mêmes. Par exemple, la matrice suivante est une matrice de Toeplitz:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ f & a & b & c & d \\ g & f & a & b & c \\ h & g & f & a & b \\ j & h & g & f & a \end{pmatrix}$$

Définition 2.2. *Une matrice tridiagonale A, est une matrice tridiagonale de Toeplitz, si elle scrit sous la forme suivante:*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & ... & 0 & 0 \\ c & a & b & ... & 0 & 0 \\ 0 & c & a & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & a & b \\ 0 & 0 & 0 & ... & c & a \end{pmatrix}$$

Ces matrices interviennent par exemple, dans la théorie de la prédiction, les solutions numériques de certaines équations différentielles, traitement du signal et de limage, étude des processus gaussiens stationnaires.

2.2. Déterminant d'une matrice tridiagonale

Le déterminant d'une matrice carée, joue un rôle important dans le calcul matriciel et la résolution des systèmes linéaires, il permet aussi de savoir si une matrice est inversible ou pas. Nous allons dans cette section définir de façon numérique le déterminant d'une matrice tridiagonale de Toeplitz puis en donner quelques propriétés. Il s'agit donc d'un calcul élémentaire que l'on effectue sur les coefficients de cette matrice, en explicitant les résultats sur des exemples.

Soient $(\alpha_n)_{n\geq 1}$, $(\beta_n)_{n\geq 2}$ et $(\gamma_n)_{n\geq 2}$ trois suites de nombres réels (complexes). Considérons la matrice tridiagonale suivante:

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{n-1} & \alpha_{n-1} & \beta_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$

On pose $D_0 = 1$, $D_1 = \alpha_1$ et $D_n = det(A_n)$, $\forall n \geq 2$.
En développant suivant la dernière colonne, on obtient la relation de récurrence:

$$\forall n \geq 3, \quad D_n = \alpha_n D_{n-1} - \beta_n \gamma_n D_{n-2}$$

Comme $D_2 = \alpha_1\alpha_2 - \beta_2\gamma_2$, $D_1 = \alpha_1$ et $D_0 = 1$, la formule est encore valable pour $n = 2$.

Exemple 2.1. *Prenons $\alpha_n = 2$ et $\beta_n = \gamma_n = -1$, $\forall n \geq 1$. Soit donc le déterminant:*

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \tag{1}$$

On a

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

D'ou $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}, \forall n \geq 3$.
Notons que

$$D_1 = Det(2) = 2, D_2 = det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3, D_3 = det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 4.$$

On peut calculer D_n en foction de n par deux méthodes:

(i) *En utilisant un calcul usuel: On a $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$, $\forall n \geq 3$.*
On écrit (1) sous la forme matricielle suivante:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{pmatrix}}_{X_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} D_{n-1} \\ D_{n-2} \end{pmatrix}}_{X_{n-1}}, \text{où} \quad X_2 = \begin{pmatrix} D_2 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ceci implique $\quad X_n = AX_{n-1} = A^2 X_{n-2} = ... = A^{n-2} X_2$
Maintenant, on calculent A^{n-2}, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

– *Polynôme caractéristique:*

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ 1-x & -x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = (1-x)^2$$

Donc $\lambda = 1$ est une valeur propre double de la matrice A. Puisque $A \neq \lambda I$, alors A n'est pas diagonalisable.

– *Vecteur propre associé: $E_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - y = x \quad et \quad x = y\}$, prenons v_1=(1,1).*
Soit $v_2 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ un vecteur quelconque tel que v_1, v_2 est une base $\mathbb{R}^2$, il suffit de prendre alors $v_2 = (1, 0)$.
On pose:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = [v_1 \quad v_2].$$

Ceci implique

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'ou

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient alors:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

On voit que T est une matrice triangulaire supérieure avec

$t_{11} = t_{22} = \lambda = 1$. *Puisque* $P^{-1}AP = T$, *alors* $A = PTP^{-1}$.
D'où $A^n = PT^nP^{-1}$.
On peut factoriser T *sous la forme de Dunford suivante:*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_D + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_N,$$

avec N^2*=0 et* $DN = ND$. *D'aprés la formule de Binôme, on a:*

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i D^{n-i} N^i = D^n + nD^{n-1}N = I + nN$$

Il s'ensuit que

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & 1-n \end{pmatrix}.$$

$$X_n = \begin{pmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-2} X_2$$

$$= \begin{pmatrix} n-1 & 2-n \\ n-2 & 3-n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Finalement, $D_n = 3(n-1) + 2(2-n) = \ n+1$.

(ii) En utilisant les solutions d'une suite récurrente d'ordre 2:
Léquation caractéristique de la suite récurrente $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$ *est* $r^2 - 2r + 1 = 0$, *qui adment une solution double* $r = 1$, *donc la solution générale de cette suite dans ce cas est sous forme* $D_n = (a + bn)r^n$, *en utilisant les conditions initiales:* $D_1 = 2$ *et* $D_2 = 3$, *on obtient:* $a = b = 1$, *d'où* $D_n = n + 1$.

2.2.1. Déterminant d'une matrice tridiagonale de Toeplitz

Dans cette partie, nous intéressons aux déterminants des matrices tridiagonales de Toeplitz.
Dans [22, 24], les théoremes suivants ont été élaborés.

Théoreme 2.1. [22] *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a, b, c \in \mathbb{C}$, on a*

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & ... & 0 & 0 \\ c & a & b & ... & 0 & 0 \\ 0 & c & a & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & a & b \\ 0 & 0 & 0 & ... & c & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(a+\sqrt{a^2-4bc})^{n+1} - (a-\sqrt{a^2-4bc})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{a^2-4bc}} & si \qquad a^2 \neq 4bc \\ (n+1)(\dfrac{a}{2})^n & sinon \end{cases}$$

En posant $b = c$ dans le théorème 2.1, on obtient le corrolaire suivant:

Corollaire 2.1. *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{C}$,on a*

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & ... & 0 & 0 \\ b & a & b & ... & 0 & 0 \\ 0 & b & a & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & a & b \\ 0 & 0 & 0 & ... & b & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(a+\sqrt{a^2-4b^2})^{n+1} - (a-\sqrt{a^2-4b^2})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{a^2-4b^2}} & si \qquad a^2 \neq 4b^2 \\ (n+1)(\dfrac{a}{2})^n & sinon \end{cases}$$

Remarque 2.2. *Si on revient a l'exemple 2.1, en posant dans le corrolaire 2.1 $a = 2$, $b = -1$, et puisque $a^2 = 4b^2$, alors $D_n = (n+1)(\frac{a}{2})^n = n+1$, et on retrouvent les résultats précédents.*

2.1

2.2.2. Liens avec les nombres de Fibonacci

Nous rappelons d'abord la définition d'une suite récurrente d'ordre 2.

Définition 2.3. *Soit (a,b) un couple de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.*
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est récurrente linéaire d'ordre 2, si elle satisfait à la relation de récurrence suivante:

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$$

Notons $\mathbb{U}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant cette relation de recurrence.
Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique $x^2=ax+b$. Trois cas sont à distinguer:

(i) $\Delta>0$.
L'équation caractéristique possède dans ce cas deux solution réelles distinctes r_1 et r_2 et dans ce cas u_n appartient à $\mathbb{U}$ si et selement s'il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^{\not\models}$ tel que:

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n$$

(ii) $\Delta=0$.
L'équation caractéristique possède une solution double notée r. Dans ce cas u_n appartient à $\mathbb{U}$ si et selement s'il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^{\not\models}$ tel que:

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=(\lambda n+\mu)r^n$$

(iii) $\Delta<0$.
L'équation caractéristique possède deux solution complex solution double conjuguées w et$\overline{w}$. Posons $r=|w|$ et $\theta=argw$. Dans ce cas u_n appartient à $\mathbb{U}$ si et selement s'il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^{\not\models}$ tel que:

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\lambda r^n\cos(n\theta)+\mu r^n\sin(n\theta)$$

Remarque 2.3. *Dans les trois cas ci-dessus, le couple (λ,μ) est déterminé à partir des valeurs des premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.*

Les nombres de Fibonacci sont les éléments de la suite des entiers positifs où chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent. Elle commence généralement par les termes 0 et 1 (resp. 1 et 1) et ses premiers termes sont

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,....$$

(resp.

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,....)$$

Définition 2.4. *(***suite de Fibonacci***) La suite de Fibonacci, notée (F_n), est la* *suite définie par:*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \forall n \geq 0 \ , \tag{2.1}$$

avec les conditions initiales $F_0 = 0$ *et* $F_1 = 1$

La formule précédente nous permet détendu la suite de Fibonacci sur Z. En effet, la récriture de la formule 2.5 sous la forme

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1},$$

nous permet détendre les termes de la suite de Fibonacci vers la gauche, cest-à-dire de calculer les termes dindice négatif. Ainsi, on peut déduire le corrolaire suivant:

Corollaire 2.2. *Les termes d'indice négatif dans la suite de Fibonacci étendue sont donnés par:*

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n, \quad \forall n \geq 0.$$

La suite de Fibonacci est une équation aux différences linéaire a coefficients constantes homogène d'ordre 2.
Soit la suit de fibonacci

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad \forall n \geq 1 \ , \tag{2.2}$$

Léquation caractéristique de 2.2 est $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, qui admet comme racines

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

La solution générale s'écrit donc:

$$F_n = c_1 (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2 (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

Utilisons les conditions initiales, on obtient $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$, d'où

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}} (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \ , \tag{2.3}$$

Remarque 2.4. *La formule 2.3 est dite la formule de Binet. Autrement dit*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad n \in \mathbb{N} \ , \tag{2.4}$$

avec

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Définition 2.5. *(**suite de Lucas**) La suite de Lucas, notée* (L_n), *est la suite* *définie par:*

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \quad \forall n \geq 0 \ , \tag{2.5}$$

avec les conditions initiales $L_0 = 2$ et $L_1 = 1$ (ou $L_1 = 1$ et $L_2 = 3$.)

On démontre facilement par récurrence, la relation suivante entre les nombres de Fibonacci et Lucas:

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

En utilisant la suite de Fibonacci étendue , on constate d'une part que

$$L_0 = F_1 + F_{-1} = 2F_1 = 2 \qquad et \qquad L_1 = F_2 + F_0 = 1$$

Proposition 2.2. *Les nombres de Fibonacci admettent la factorisation suivante:*

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} \ , \tag{2.6}$$

Proof. Par récurrence sur m. Pour $m = 1$,

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n = F_{n-1}F_1 + F_nF_2.$$

Supposons que la formule est vraie pour $m \leq k + 1$. Par lhypothèse, il est vrais que

$$F_{n+k} = F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1}, \quad et \quad F_{n+k+1} = F_{n-1}F_{k+1} + F_nF_{k+2}$$

On ajoute ces deux équations terme par terme, on obtient

$$F_{n+k} + F_{n+k+1} = F_{n-1}(F_k + F_{k+1}) + F_n(F_{k+1} + F_{k+2}),$$

C'est-à-dire $F_{n+k+2} = F_{n-1}F_{k+2} + F_nF_{k+3}$. d'où le résultat. □

Proposition 2.3. *Les nombres de Fibonacci admettent la factorisation suivante:*

$$F_{n+2} + F_{n-2} = 3F_n \ . \tag{2.7}$$

Proof. On a

$$\begin{aligned} F_{n+2} + F_{n-2} &= (F_{n+1} + F_n) + F_{n-2} + (F_{n-1} - F_{n-1}) \\ &= (F_n + F_{n-1}) + F_n + (F_{n-2} + F_{n-1}) - F_{n-1}) \\ &= F_n + F_{n-1} + F_n + F_n) - F_{n-1} \\ &= 3F_n \,. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.4. [9] $F_{2n} = \prod_{k=1}^{n-1}(3 - 2\cos\frac{\pi k}{n})$, *pour tout $n \geq 2$.*

Exemple 2.2. *Le déterminant de la matrice A_n suivante :*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & & & \\ -1 & 3 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 3 & -1 \\ & & & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

est F_{2n+2}

Proof. Par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on a $det(A_1) = 3 = F_4$, le résultat est donc vrai.
Supposons que $det(A_k) = F_{2k+2}$, pour tout $k < n$. On a

$$det(A_n) = 3\ det(A_{n-1}) + \begin{vmatrix} -1 & -1 & & & \\ -1 & 3 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 3 & -1 \\ & & & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

En utilisant la proposition 2.3, en endéduit que:

$$\begin{aligned} det(A_n) &= 3det(A_{n-1}) - det(A_{n-2})) \\ &= 3F_{2(n-1)+2} - F_{2(n-2)+2} \\ &= 3F_{2n} - F_{2n-2} \\ &= (F_{2n+2} + F_{2n-2}) - F_{2n-2} \\ &= F_{2n+2}.. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Remarque 2.5. *Cahill et al. [8], a démontrer que le déterminant ne se change pas si on remplace -1 par 1 dans la matrice A_n dans la matrice A_n*

On peut citer autres exemples pour cette technique de calcul des déterminants en utilisant les suites de Fibonacci et Luca. En effet, Strang [28] a démontrer que les déterminants des matrices tridiagonales suivantes:

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 & -1 \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$C_n = \begin{pmatrix} 1 & i & & & \\ i & 1 & i & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & i & 1 & i \\ & & & i & 1 \end{pmatrix}$$

sont respectivement F_n et F_{n+1}, pour $n \geq 1$.

Kilic and Tasci [20], a montré que le determinant de la matrice

$$G_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ -1 & -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & -1 & 1 \\ & & & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

est $(-1)^n F_{n+1}$.

N.D. Cahill et J.R. D'Errico [9], Ont montré que les déterminants des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & \\ 0 & 8 & 1 & & & \\ & 1 & 7 & 1 & & \\ & & 1 & 7 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & \sqrt{6} & & & & \\ \sqrt{6} & 5 & i & & & \\ & i & 4 & i & & \\ & & i & 4 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & i \\ & & & & i & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 13 & -\sqrt{5} & & & & \\ -\sqrt{5} & 3 & -1 & & & \\ & -1 & 3 & -1 & & \\ & & -1 & 3 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

sont respectivement, F_{4k-2}, F_{3k+3} et F_{2k+5}.

2.3. Valeurs et vecteurs propres d'une matrice tridiagonale de Toeplitz

Du point de vue théorique, le problème de la détermination des vecteurs propres et valeurs propres dune matrice est presque aussi bien connu que la résolution des systèmes linéaires. La physique fournit un grand nombre de problèmes équivalents à la tridiagonalisation dune matrice symétrique ou hermitique. Dans cette partie, on calcule d'une façon explicite les valeurs et vecteurs propres d'une matrice tridiagonale, en se limitant essentiellement au cas des matrices tridiagonales de Toeplitz.

2.3.1. Cas d'une matrice tridiagonale de Toeplitz symétrique

Considérons la matrice de Toeplitz A suivante

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Cette matrice apparaît dans de nombreuses applications, On calcule dans un premier temps les valeurs propres de A.

On écrit A sous la forme:

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha\, I + \beta\, T$$

Clairement, A et T ont les mêmes vecteurs propres et leurs valeurs propres respectives sont liées par

$$\lambda_A = \alpha + \beta\lambda_T.$$

Ainsi, il suffit de travailler avec la matrice simple T.
Le problème donc revient à calculer les valeurs propres de T, on cherche les réels

λ_T tels qu'il existe un vecteur $X = (x_i)$ non nul de $\mathbb{R}^n$, vérifiant:

$$TX = \lambda_T X\,. \tag{2.8}$$

On écrit (2.8) sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \\ \vdots \\ \lambda x_{n-1} \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Ainsi

- $i = 1$: $x_2 - \lambda_T x_1 = 0 \Rightarrow -\lambda_T x_1 + x_2 = 0$
- $i = 2$: $x_1 - x_3 - \lambda_T x_2 = 0 \Rightarrow x_1 - \lambda_T x_2 + x_3 = 0$
- $i = 3$: $x_2 - x_4 - \lambda_T x_3 = 0 \Rightarrow x_2 - \lambda_T x_3 + x_4 = 0$

- $i = n-1$: $x_{n-2} + x_n - \lambda_T x_{n-1} = 0 \Rightarrow x_{n-2} - \lambda_T x_{n-1} + x_n = 0$
- $i = n$: $x_{n-1} + \lambda x_n = 0 \Rightarrow -\lambda_T x_n + x_{n-1} = 0$

Ainsi en posant $x_0 = x_{n+1} = 0$, on obtient pour la suite finie $(x_i)_i$ la relation de récurrence d'ordre deux suivante:

$$x_{k-1} - \lambda x_k + x_{k+1} = 0, \quad k = 1, 2, .., n \tag{2.9}$$

Léquation caractéristique est donnée par:

$$r^2 - \lambda r + 1 = 0 \tag{2.10}$$

On pose $\lambda = 2c$, le discriminant de (2.10) est $\Delta = 4c^2 - 4$.

(i) Si $\Delta > 0$,
il est clair que $c^2 - 1 > 0 \Rightarrow |c| > 1 \Rightarrow c \in]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$.
Donc l'équation caractéristique admet deux solutions réelles opposées que l'on note r_1 et r_2 données par:

$$r_1 = c + \sqrt{c^2 - 1}$$
$$r_2 = c - \sqrt{c^2 - 1}$$

On remarque dans un premier temps que

$$r_1 r_2 = 1,\ r_1 + r_2 = 2c \ \ et \ \ r_1 + r_1^{-1} = r + r^{-1} = 2c$$

Dans ce cas, la solution générale de (2.8) est donnée par:

$$x_k = \gamma r_1^k + \delta r_2^{-k}, \quad k = 1, .., n+1 \tag{2.11}$$

où les coefficients γ, δ sont fournis par les conditions $x_{n+1} = x_0 = 0$. On obtient alors

(i) $x_0 = 0$ implique $\gamma + \delta = 0$, d'où $x_k = \gamma(r^k - r^{-k})$

(i) $x_{n+1} = 0$ implique $\gamma\ (r^{n+1} - r^{-(n+1)}) = 0$, deux cas se présentent:

- si $\gamma = 0$, alors $x_k = 0, \quad \forall k = 0, 1, ..., n+1,$ ce qui est exclu! $(car\ X \neq 0)$.
- Donc $r^{n+1} - r^{-(n+1)} = 0$, ce qui implique $r^{2(n+1)} = 1$. En particulier, pour $|r| = 1$, on a alors $|2c| \leq |r| + |r|^{-1} = 2 \Rightarrow 2|c| \leq 2 \Rightarrow$ $|c| \leq 1$, i.e., $-1 < c < 1$ contradiction. Donc ce cas est impossible.

(ii) Si $\Delta = 0$, alors $c^2 - 1 = 0 \Rightarrow c = \pm 1$, d'ou $r_1 = r_2 = r = c$. La solution générale de (2.8) est donnée

$$x_k = (\gamma + \delta k) r^k, \quad k = 1, .., n+1 \tag{2.12}$$

En utilisant les conditions initiales, nous avons alors deux cas:

(i) $x_0 = 0$ implique $\gamma = 0$.

(ii) $x_{n+1} = 0$ implique $(\delta\ (n+1)) r^{n+1} = 0$, d'ou $\delta = 0$, par conséquent, $X = 0$ (contradiction). Donc ce cas est impossible.

(iii) Si $\Delta < 0$, alors $c^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < c < 1$, dans ce cas nous avons deux solutions complexes conjugées r_1 et r_2 données par:

$$r_1 = c + i\sqrt{c^2 - 1} \quad et \quad r_2 = c - i\sqrt{c^2 - 1}$$

on a $r = \sqrt{a^2 + b^2}\ \exp\ (i\theta)$, $|r| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2 + 1 - c^2} = 1$,
et $cos\ (\theta) = \frac{c}{|r|} = c$ ce qui donne

$$r_1 = \exp\ (i\ \theta)$$

$$r_2 = \exp\ (-i\ \theta).$$

La solution générale de (2.8) est donnée dans ce cas par:

$$x_k = \gamma r_1^k + \delta r_2^k = \gamma\ \exp(i\ k\ \theta) + \delta\ \exp(-i\ k\ \theta)$$

En utilisant les conditions initiales, on obtient:

(i) $x_0 = 0$ implique $\gamma = -\delta$, d'ou

$$x_k = \gamma\ (\exp\ (i\ k\ \theta) - \exp\ (-i\ k\ \theta)) = 2\ i\ \gamma\ \sin\ (k\ \theta),$$

(i) $x_{n+1} = 0$ implique $2\ i\ \gamma\ \sin((n+1)\theta) = 0$, deux cas se présentent:

- Si $\gamma = 0$, alors $\delta = 0$, et par consequant $X = 0$, contradiction.
- Donc $\sin((n+1)\theta) = 0$, ce qui ipmlique que $\theta = \frac{k\pi}{n+1}$

D'ou $(\lambda_T)_k = 2c = 2\cos\ (\frac{k\pi}{n+1})$

Finalement, les valeurs propres de la matrice A sont donnés par

$$\boxed{\lambda_k = \alpha + 2\ \beta\ \cos\ (\frac{k\pi}{n+1}),\quad k = 1, ..., n}$$

Cherchons maintenant les **vecteurs propres** associés:

Nous avons $x_k = 2i\gamma \sin\ (\frac{k\pi}{n+1})$, pour chaque valeur propre λ_k, $k = 1, ..., n$, le vecteur propre associé a cette valeur propre noté $V_k = (v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, ..., v_n^{(k)})$, où $v_j^{(k)} = \sin\ (j(\frac{k\pi}{n+1}))$, $j = 1, ..., n$ et $k = 1, ..., n$, en choisissant $\gamma = \frac{1}{2i}$, c'est-à-dire

$$\boxed{V_k = (\sin\ (\frac{k\pi}{n+1}), \sin\ (\frac{2k\pi}{n+1}), ..., \sin\ (\frac{nk\pi}{n+1}))}$$

2.3.2. Cas d'une Matrice tridiagonale de Toeplitz non symétrique

Soit A une matrice tridiagonale de Toeplitz d'ordre $n \geq 2$ de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \xi & \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \xi & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \xi & \alpha \end{pmatrix},$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta, \xi \in \mathbb{R}$ avec $\beta\xi > 0$.

On écrit A sous-forme $A = \alpha I_n + \beta T$, où

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\xi}{\beta} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\xi}{\beta} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\xi}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

Comme le cas précident, nous avons $\lambda_A = \alpha + \beta\lambda_T$, où λ_A désigne la valeur propre associée á A, et λ_T désigne la valeur propre associée á T. Nous calculons d'abord les valeurs proprse associées à T, puis on endéduit celle de A.
On cherche les réels λ_T tel qu'il existe $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul, vérifiant:

$$TX = \lambda_T X$$

On a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\xi}{\beta} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\xi}{\beta} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\xi}{\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \\ \vdots \\ \lambda x_{n-1} \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

- Pour $i = 1$, on a $x_2 - \lambda_T x_1 = 0 \Rightarrow -\lambda_T x_1 + x_2 = 0$
- Pour $i = 2$, on a $(\frac{\xi}{\beta})x_1 + x_3 - \lambda_T x_2 = 0 \Rightarrow (\frac{\xi}{\beta})x_1 - \lambda_T x_2 + x_3 = 0$
- Pour $i = 3$, on a $(\frac{\xi}{\beta})x_2 + x_4 - \lambda_T x_3 = 0 \Rightarrow (\frac{\xi}{\beta})x_2 - \lambda_T x_3 + x_4 = 0$

- Pour $i = n-1$, on a $(\frac{\xi}{\beta})x_{n-2} + x_n - \lambda_T x_{n-1} = 0 \Rightarrow (\frac{\xi}{\beta})x_{n-2} - \lambda_T x_{n-1} + x_n = 0$
- Pour $i = n$, on a $(\frac{\xi}{\beta})x_{n-1} + \lambda x_n = 0 \Rightarrow -\lambda_T x_n + (\frac{\xi}{\beta})x_{n-1} = 0$

On pose $\frac{\xi}{\beta} = d$, et $\lambda_T = 2c$.

On introduit deux nouvelles variables x_0 et x_{n+1}, tels que $x_0 = x_{n+1} = 0$, pour intégrer la première équation ($i = 1$) et la dernière équation ($i = n$) avec les mêmes type que les autres équations.
Il s'ensuit que

- Pour $i = 1$, on a: $dx_0 - \lambda_T x_1 + x_2 = 0$

- Pour $i = 2$, on a: $dx_{n-1} - \lambda_T x_n + x_{n+1} = 0$

On obtient la relation générale de récurrence d'ordre deux suivante:

$$dx_{k-1} - 2cx_k + x_{k+1} = 0, \quad k = 1, ..., n \tag{2.13}$$

Son équation caractéristique, est donnée par:

$$r^2 - 2cr + d = 0. \tag{2.14}$$

Le discriminant est $\Delta = 4c^2 - 4d$. Nous distinguons trois cas possible:

(i) Si $\Delta = 0$, alors $4c^2 - 4d = 0 \Rightarrow |c| = \sqrt{d}$, dans ce cas il exsiste une solution double $r_1 = r_2 = c$, et la solution générale de léquation (2.13)est :

$$x_k = (\gamma + \delta k)c^k, \quad k = 0, ..., n+1$$

En utilisant les conditions initiales, on a

- $x_0 = 0$ implique $\gamma = 0$.
- $x_{n+1} = 0$ implique $\delta(n+1))c^{n+1} = 0$, dans ce cas, puisque $c \neq 0$, alors $\delta = 0$ et donc $X = 0$, cotradiction, il s'ensuit que ce cas est exclus!

(ii) Si $\Delta > 0$, alors $4c^2 - 4d > 0 \Rightarrow |c| > \sqrt{d} \Rightarrow c \in]-\infty, -\sqrt{d}[\cup]\sqrt{d}, \infty[$
Il existe dans ce cas deux solutions distincts de l'équation caractéristique, qui sont

$$r_1 = c + \sqrt{c^2 - d} \ \ et \ \ r_2 = c - \sqrt{c^2 - d},$$

avec

$$r_1 r_2 = d \ \ et \ \ r_1 + r_2 = 2c$$

Les solutions générales de (2.13) sont de la forme:

$$x_k = \gamma r_1^k + \delta r_2^{-k}, \ k = 0..n+1,$$

avec γ et δ sont des constantes réels à déterminer a partir des conditions initiales: $x_0 = x_{n+1} = 0$.

- Pour $x_0 = 0$, on a $\gamma = -\delta$
- Pour $x_{n+1} = 0$, on a $\gamma(r_1^{n+1} - r_2^{-(n+1)}) = 0$.
  * Si $\gamma = 0$, alors $\delta = 0$ et donc $X = 0$ (contradiction).
  * Si $r_1^{n+1} - r_2^{-(n+1)} = 0$, alors $r_1^{n+1} - (\frac{d}{r_1})^{-(n+1)} = 0$, donc $r_1^{2(n+1)} = d^{n+1}$, d'où $r_1 = \sqrt{d} = r_2$, puisque $r_1 + r_2 = 2c$, il s'esuit que $\sqrt{d} = c$, ce qui veut dire que $\Delta = 0$, donc on revient au cas précident, par conséquant ce cas est exclus aussi.

(iii) Si $\Delta < 0$, alors $4c^2 - 4d < 0$, ce qui implique $-\sqrt{d} < c < \sqrt{d}$, par consequant, l'équation caractérisitique admet deux solutions complexes: $r_1 = c + i\sqrt{d - c^2}$ et $r_2 = c - i\sqrt{d - c^2}$, avec

$$|r_1| = |r_2| = \sqrt{d} \;\; et \;\; cos(\theta) = c/r = c/\sqrt{d}, \; i.e., \; c = \sqrt{d}\; cos(\theta).$$

On cherche θ:
Les solutions générales de (2.13) sont de la forme:

$$x_k = \gamma\; r_1^k \cos(k\theta) + \delta\; r_2^k \sin(k\theta), \;\; k = 0, ..., n+1,$$

avec γ et δ sont des constantes réels à déterminer a partir des conditions initiales: $x_0 = x_{n+1} = 0$.

- Pour $x_0 = 0$, on a $\gamma = 0$

- Pour $x_{n+1} = 0$, on a $\delta\; r_2^{n+1} \sin\;((n+1)\theta) = 0$.
  Puisque $r_2^{n+1} \neq = 0$, alors $\sin((n+1)\theta) = 0$, par conséquant $\theta = k\pi/n + 1$. d'où

$$\lambda_T = 2c = 2(\sqrt{d}\;\; \cos(\frac{k\pi}{n+1})).$$

Finalement, les valeurs propres de la matrice tridiagonale non symmetrique de Toeplitz A sont données par:

$$\boxed{\lambda_k = \alpha + 2\beta\sqrt{\frac{\xi}{\beta}} \cos\;(\frac{k\pi}{n+1}), \quad k = 1, ..., n}$$

En suivant la même procédure que celle du cas precident (Toeplitz symetrique), on trouvent que pour chaque valeur propre λ_k, $k = 1, ..., n$, le vecteur propre associé a cette valeur propre noté $V_k = (v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, ..., v_n^{(k)})$, où $v_j^{(k)} = (\sqrt{\frac{\xi}{\beta}})^j \sin\;(j(\frac{k\pi}{n+1}))$, $j = 1, ..., n$ et $k = 1, ..., n$, c'est-à-dire

$$\boxed{V_k = (\sqrt{\frac{\xi}{\beta}}) \sin\;(\frac{k\pi}{n+1}), (\sqrt{\frac{\xi}{\beta}})^2 \sin\;(\frac{2k\pi}{n+1}), ..., (\sqrt{\frac{\xi}{\beta}})^n \sin\;(\frac{nk\pi}{n+1}))}$$

2.4. Inverse d'une matrice tridiagonale

Nous exposons dans cette partie une méthode exacte, assez élégante, introduite par M. El-Mikkawy et A. Karawia, dans [13], pour le calcul rapide de l'inverse de matrices tridiagonales. En effet, c'est un travail qui est principalement consacré au développement d'un algorithme qui ne s'effondrera jamais pour trouver l'inverse de toute matrice tridiagonale non singulière.

Soit la matrice tridiagonale suivante:

$$T = \begin{pmatrix} d_1 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ b_2 & d_2 & a_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_3 & d_3 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & d_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & d_n \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Dans lequel $t_{ij} = 0$ pour $\mid i - j \mid \geq 2$.

2.4.1. Principaux résultats

Sur la base des résultats présentés dans [18], nous pouvons introduire deux vecteurs $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n+})$, de dimensions $n+1$, comme suite:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & , \text{ si } i = 0 \\ d_1 & , \text{ si } i = 1 \\ d_i \alpha_{i-1} - b_i a_{i-1} \alpha_{i-2} & , \text{ si } i = 2, 3, ..., n \end{cases} . \tag{2.15}$$

et

$$\beta_i = \begin{cases} 1 & , \text{ si } i = n+1 \\ d_n & , \text{ si } i = n \\ d_i \beta_{i+1} - b_{i+1} a_i \beta_{i+2} & , \text{ si } i = n-1, n-2, ..., 1 \end{cases} . \tag{2.16}$$

Les éléments des vecteurs α et β dans (2.15) et 2.16, sont précisément les déterminants des sous-matrices de la matrice tridiagonale T. Pour cette matrice, les résultats obtenus sont résumés dans le théorème suivant:

Théoreme 2.2. [21, 14] *Pour la matrice T, les éléments suivants sont valides.*

(i) $det\ (T) = \alpha_n = \beta_1$,

(ii) T *est non singulière si et seulement si* $\alpha_n \neq 0$,

(iii) T *est non singulière si et seulement si* $\beta_1 \neq 0$,

(iv) T *possède une décomposition LU si et selement si* $\alpha_k \neq 0,\ k = 1, 2, ..., n-1$,

(v) T *défini positif si et seulement si* $\alpha_k > 0,\ k = 1, 2, ..., n$.

(vi) T *défini positif si et seulement si* $\beta_k > 0,\ k = 1, 2, ..., n$.

(vii) *La matrice inverse* $T^{-1} = (u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, *de la matrice* T *est donnée par*

- $u_{11} = (d_1 - \frac{b_2 a_1 \beta_3}{\beta_2})^{-1}$,
- $u_{nn} = (d_n - \frac{b_n a_{n-1} \alpha_{n-2}}{\alpha_{n-1}})^{-1}$,
- $u_{ii} = (d_i - \frac{b_i a_{i-1} \alpha_{i-2}}{\alpha_{i-1}} - \frac{b_{i+1} a_i \beta_{i+2}}{\beta_{i+1}})^{-1}$,

$$u_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j-i} (\prod_{k=1}^{j-i} a_{j-k}) \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_{j-1}} u_{jj} & , \text{ si } i < j \\ \\ (-1)^{i-j} (\prod_{k=1}^{i-j} b_{j+k}) \frac{\beta_{i+1}}{\beta_{j+1}} u_{jj} & , \text{ si } i > j \end{cases}.$$

Remarque 2.6. $detA = \alpha_n = \beta_1$

2.4.2. Exemples illustratifs

Exemple 2.3. *Soit la matrice tridiagonale* A *d'ordre* 3 *définie par:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & a_1 & 0 \\ b_2 & d_2 & a_2 \\ 0 & b_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

Pour avvoir la matrice inversie A^{-1}, *on calcule d'abord* $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *et* $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$.

$$\begin{cases} \alpha_0 & = 1 \\ \alpha_1 & = d_1 = 4 \\ \alpha_2 & = d_2\alpha_1 - b_2 a_1 \alpha_0 = 3(4) - 2(3)(1) = 6 \\ \alpha_3 & = d_3\alpha_2 - b_3 a_2 \alpha_1 = 2(6) - 1(1)(4) = 8 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \beta_4 &= 1 \\ \beta_3 &= d_3 = 2 \\ \beta_2 &= d_2\beta_3 - b_3a_2\beta_4 = 3(2) - 1(1)(1) = 5 \\ \beta_1 &= d_1\beta_2 - b_2a_1\beta_3 = 4(5) - 2(3)(2) = 8 \end{cases}$$

A partir de $(\alpha_i)_{0\leq i\leq 3}$ *et* $(\beta_i)_{1\leq i\leq 4}$ *, on calcule* A^{-1} *comme suite:*
$A^{-1} = (u_{ij})$*, avec:*

- $u_{11} = (d_1 - \frac{b_2a_1\beta_3}{\beta_2})^{-1} = (4 - \frac{2(3)(2)}{5})^{-1} = 5/8$
- $u_{33} = (d_3 - \frac{b_3a_2\alpha_1}{\alpha_2})^{-1} = (2 - \frac{1(1)(4)}{6})^{-1} = 3/4$
- $u_{22} = (d_2 - \frac{b_2a_1\alpha_0}{\alpha_1} - \frac{b_3a_2\beta_4}{\beta_3})^{-1} = (3 - \frac{2(3)(1)}{4} - \frac{1(1)(1)}{2})^{-1} = 1$
- $u_{12} = (-1)^1(a_1)\frac{\alpha_0}{\alpha_1}U_{22} = (-1)(3)(1/4)(1) = -3/4$
- $u_{13} = (-1)^2(a_1)(a_1)\frac{\alpha_0}{\alpha_2}U_{33} = (1)(3)(1/6)(3/4) = 3/8$
- $u_{23} = (-1)^1(a_2)\frac{\alpha_1}{\alpha_2}U_{33} = (-1)(1)(4/6)(3/4) = -1/2$
- $u_{21} = (-1)^1(b_2)\frac{\beta_3}{\beta_2}U_{11} = (-1)(2)(2/5)(5/8) = -1/2$
- $u_{31} = (-1)^2(b_2)(b_3)\frac{\beta_4}{\beta_2}U_{11} = (2)(1)(1/5)(5/8) = 1/4$
- $u_{32} = (-1)^1(b_3)\frac{\beta_4}{\beta_3}U_{22} = (-1)(1)(1/2)(1) = -1/2$

Donc:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/8 & -3/4 & 3/8 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.4. *Soient* $(p, q) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$*, considérons la matrice tridiagonale* T *d'ordre* 4*, donnée par:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & p \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & a_1 & 0 & 0 \\ b_2 & d_2 & a_2 & 0 \\ 0 & b_3 & d_3 & a_3 \\ 0 & 0 & b_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

On a $det(A) = \alpha_4$, *avec* $\alpha_4 = d_4\alpha_3 - b_4a_3\alpha_2 = -q$, *d'où* T *est inversible.*
Donc la matrice inverse T^{-1} *est donées par*

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -\frac{p}{q} \\ 2 & -2 & -1 & \frac{p}{q} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{q} \end{pmatrix}$$

3 Tridiagonalisation d'une matrice symétrique

La forme compacte qu'offre la matrice tridiagonale amène une réduction importante du nombre d'opérations arithmétiques lors du calcul des valeurs propres et des vecteurs propres, ainsi que pour la résolution du système d'equations linéaires $AX = b$.
De plus, les matrices symétriques, que l'on retrouve en abondance dans des applications en physique, mécanique, génie électrique etc., peuvent être réduites à une forme tridiagonale et la méthode la plus efficace pour trouver toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique avec ou sans les vecteurs propres associés est la tridiagonalisation de Householder.
La procédure de Householder se propose donc de transformer une matrice A symétrique en une matrice tridiagonale par une série de transformations orthogonales, ces transformations en matrice tridiagonale nécessite , grâce â l'algorithme de householder, un nombre fini d'opérations. Dans ce chapitre, nous allons transformer une matrice symétrique en une matrice tridiagonale sans modifier les valeurs propres et avoir des vecteurs propres equivalents entre les deux matrices.

3.1. Matrice de Householder

Définition 3.1. *On appelle matrice (élémentaire) de Householder une matrice H de la forme $H_u = \mathbb{I}_n - 2uu^T$, où $u \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur unitaire c'est-à-dire de norme* 1 *pour la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ définie par $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$, i.e., $u^T u = 1$.*

Par exemple, pour $n = 3$, on peut considérer le vecteur $u = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1 \quad 1 \quad 2)^T$ qui vérifie bien $\|u\| = 1$. On obtient alors la matrice de Householder

$$H_u = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Par abus de langage, on considérera l'identité comme une matrice de Householder, et l'on écrira $I_n = H_0$.

Définition 3.2. *Une matrice $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ est dite orthogonale si elle est réelle, i.e., $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $AA^T = A^T A = I_n$.*

Proposition 3.1. *Toute matrice de Householder est:*

(i) symétrique

(ii) orthogonale

Proof.

(i) On a $H_u = \mathbb{I}_n - 2uu^T$, et

$$H_u^T = (\mathbb{I}_n - 2uu^T)^T = (\mathbb{I}_n)^T - 2(u^T)^T u^T = H_u.$$

(ii) On a

$$(H_u)^T H_u = (\mathbb{I}_n - 2uu^T)^T(\mathbb{I}_n - 2uu^T) = (\mathbb{I}_n - 2uu^T)^2,$$

D'ou

$$(H_u)^T H_u = (\mathbb{I}_n)^2 - 4\mathbb{I}_n uu^T + 4u(u^T u)u^T,$$

Puisque $u^T u = 1$, alors

$$(H_u)^T H_u = \mathbb{I}_n.$$

□

Proposition 3.2. [6]
Pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|u\| = 1$, on a: $H_u u = -u$.
De plus, si $v \in \mathbb{R}^n$ est orthogonal à u, i.e., $\langle u, v\rangle = 0$, alors: $H_u v = v$.

Proposition 3.3. *Soit x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $x \neq y$ et $\|x\| = \|y\|$. Alors il existe un vecteur unitaire $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $H_u x = y$.*

Proof.

Il suffit de prendre $u = \frac{x-y}{\|x-y\|}$. □

Proposition 3.4. *Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$, deux vecteurs non nuls, il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ et un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, tels que*

$$H_u a = [I - 2uu^T]a = \alpha b.$$

Proof.

Il suffit de prendre $u = \frac{a-\alpha b}{2u^T a}$. □

Remarque 3.1.

la matrice H_u est associée à une transformation géometrique, qui est la symétrie par rapport à l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ orthogonal au vecteur u. En effet, l'algorithme de householder se comprend facilement à partir sa représentation géométrique dans l'espace à trois dimensions. Soient un point M et un plan (p), contenant l'origine (mais pas M), et normal au vecteur unitaire $\tilde{n}$. On cherche à construire le point M' qui se déduit de M par une symétrie orthogonale par rapport à (p). La droite

passant par M et perpendiculaire à (p) perce ce plan en K, elle passe aussi par M'.
Le vecteur $\overrightarrow{KM}$ est parallèle a $\tilde{n}$, sa longueur est celle de la projection orthogonale de $\overrightarrow{OM}$ sur $\tilde{n}$, autrement dit $\overrightarrow{KM} = (\tilde{n}\ \overrightarrow{OM})\tilde{n}$.
Par symétries, $\overrightarrow{KM'}$ est l'opposé de $\overrightarrow{KM}$. On veut relier M' à M par:

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{kM} = \overrightarrow{OM} - 2(\tilde{n}.\overrightarrow{OM})\tilde{n}.$$

Il est clair que $OM' = OM$, la symétrie preservent les longueurs.
Lorsque on représente les vecteurs par des matrice colonne, les relations précédentes deviennent

$$\overrightarrow{OM} = x \ et \ \overrightarrow{OM'} = x',$$

avec

$$x' = x - 2(\tilde{n}^T x)\tilde{n} = x - 2\tilde{n}\tilde{n}^T x = (I - 2\tilde{n}\tilde{n}^T)x.$$

Ce raisonnement se généralise sans peine à l'espace à n dimensions.

3.2. Réduction à la forme tridiagonale (Householder)

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice symétrique d'ordre n, qu'on écrit sous la forme:

$$\left(\begin{array}{c|c} a_{11} & a_1^t \\ \hline a_1 & \tilde{A}_1 \end{array}\right) \text{ où } a_1 \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ et } \tilde{A}_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Décrivons la première étape de la méthode de Householder.
Si $a_1 \neq 0$, alors il existe une matrice de Householder élémentaire $\tilde{H}_1$ (symétrique et orthogonale) dans $M_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que l'on ait:

$$\tilde{H}_1 a_1 = \alpha e^{(1)} = (\alpha, 0, 0, ..., 0)^t \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad ou \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Soit H_1 la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ définie par:

$$H_1 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \tilde{H}_1 \end{array}\right)$$

On a alors: $H_1^T\ A\ H_1 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \tilde{H}_1^T = \tilde{H}_1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & a_1^t \\ \hline a_1 & \tilde{A}_1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \tilde{H}_1 \end{array}\right)$

D'où

$$H_1\ A\ H_1 = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & \alpha\ \ 0\cdots\ \ 0 \\ \hline \begin{matrix}\alpha\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \tilde{H}_1\tilde{A}_1\tilde{H}_1 \end{array}\right)$$

Notons A_2 cette matrice: $A_2 = H_1AH_1$. En notant $A_1 = A$, et en suivant la même démarche que ci-dessus, on détermine de proche en proche $(n-2)$ matrices symétriques et orthogonales $H_1, H_2, ..., H_{n-2}$ de $M_n(\mathbb{R})$, telles que les matrices symétriques:

$$A_k = H_{k-1}^T A_{k-1} H_{k-1} = (H_1H_2...H_{k-1})^T A(H_1H_2...H_{k-1}),\ \ 2 \leq k \leq n-1,$$

soient tridiagonales et semblables à la matrice A.
Le theoreme suivant récapitule cette procèdure de householder [25]

Théoreme 3.1. [25] *Étant donnée une matrice symétrique A d'ordre n, il existe une matrice orthogonale H, produit de $(n-2)$ matrices de Householder, telle que la matrice $\mathbf{T} = H^TAH$ soit tridiagonale et semblable à A.*

Remarque 3.2. *La matrice tridiagonale $\mathbf{T}$ a les propriétés suivantes:*

(i) $\mathbf{T}$ *est symétrique. En effet,*

$$\mathbf{T}^T = (\mathbf{H}^TA\mathbf{H})^T = \mathbf{H}^TA^T\mathbf{H} = \mathbf{H}^TA\mathbf{H} = \mathbf{T}$$

(ii) $\mathbf{T}$ *admet les mêmes valeurs propres que A. En effet,*

$$det(\mathbf{T} - \lambda I_n) = det((\mathbf{H}^TA\mathbf{H}^T) - \lambda I_n),$$

d'oú

$$det(\mathbf{T} - \lambda I_n) = det(\mathbf{H}^T(A - \lambda I_n)\mathbf{H}).$$

On obtient alors

$$det(\mathbf{T} - \lambda I_n) = det\ \mathbf{H}^T\ det\ (A - \lambda I_n)\ det\ \mathbf{H} = det(A - \lambda I_n).$$

(iii) Si z est un vecteur propre de $\mathbf{T}$, alors $\mathbf{H}z$ est un vecteur propre de A. En effet,

$$(\mathbf{T}z = \lambda z) \Rightarrow ((\mathbf{H}^TA\mathbf{H})z = \lambda z) \Rightarrow (A(\mathbf{H}z) = \lambda(\mathbf{H}z)).$$

(iv) Si $y^\star$ est une solution du système $\mathbf{T}y = \mathbf{H}^Tb$, alors $\mathbf{H}y^\star$ est une solution de $Ax = b$. En effet,

$$(\mathbf{T}y^\star = \mathbf{H}^Tb) \Rightarrow ((\mathbf{H}^TA\mathbf{H})y^\star = \mathbf{H}^Tb)) \Rightarrow (A(\mathbf{H}y^\star) = b).$$

Il existe donc une relation entre les vecteurs propres d'une matrice symétrique A et ceux de la matrice tridiagonale $\mathbf{T}$ obtenue par la méthode de Householder, d'autre part les valeurs propres restent inchangées. Il existe aussi une relation entre la solution du système $Ax = b$ et celle du système $\mathbf{T}y = \mathbf{H}^T b$.
Si un problème contient une matrice symétrique, nous n'avons qu'à travailler avec la matrice tridiagonale associée, et ensuite faire les transformations nécessaires.

Explicitement, une méthode plus simple d'avoir la matrice $\mathbf{H}$, est celle introduite dans [25]. En effet, soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice symétrique d'ordre n, lors de la premiére étape, nous devons déterminer α et r comme suite:

$$\alpha = -sgn(a_{21})\sqrt{\sum_{j=2}^{n} a_{j1}^2};$$

$$r = \sqrt{1/2(\alpha^2 - a_{21}\alpha)}.$$

De α et r, on construit un vecteur v, de la façon suivante:

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix} \text{ où}$$

$$v_1 = 0,\ v_2 = \frac{a_{21} - \alpha}{2r},\ et\ v_k = \frac{a_{k1}}{2r},\quad k = 3, 4, ..., n.$$

Aprés avoir calculé v, on construit la première matrice de Householder P_1 comme suite:
$P_1 = I - 2v^{(1)}(v^{(1)})^T$, puis $A_2 = P_1 A_1 P_1$, en posant $A_1 = A$.
Nous répétons ce processus pour $k = 2, 3, 4, ..., n - 2$ comme suite:

$$\alpha = -sgn(a_{k+1,k}^k)\sqrt{\sum_{j=k+1}^{n} (a_{jk}^k)^2};$$

et

$$r = \sqrt{1/2(\alpha^2 - a_{k+1,k}^k \alpha)};$$

avec:

$$v_1^k = v_2^k = ... = v_k^k = 0;$$

et

$$v_{k+1}^{k} = \frac{a_{k+1,k}^{k} - \alpha}{2r};$$

$$v_{j}^{k} = \frac{a_{jk}^{k}}{2r}, pour j = k+2, ..., n;$$

la matrice P_k est donc

$$P_k = I - 2v^{(k)}(v^{(k)})^T;$$

et

$$A_{k+1} = P_k A_k P_k.$$

En continuant ainsi, la matrice tridiagonale symétrique est obtenue et bien formée.

Exemple 3.1. *Dans cet exemple, la matrice donnée est transformée en une matrice tridiagonale similaire A_3, en appliquant deux transformations de Householder.*

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Premiere étape, nous avons:

$$P_1 = I_4 - 2V^{(1)}V^{(1)^T}, \quad V^{(1)} = \begin{pmatrix} V_1^{(1)} \\ V_2^{(1)} \\ V_3^{(1)} \\ V_4^{(1)} \end{pmatrix}$$

oú $\quad V_1^{(1)} = 0$

et, $V_2^{(1)} = \frac{a_{21}-\alpha}{2r}, \quad V_3^{(1)} = \frac{a_{31}}{2r}, \quad V_4^{(1)} = \frac{a_{41}}{2r}.$
On calcule les valeurs de α et r

$$\alpha = -sgn(a_{21})\sqrt{\sum_{j=2}^{n} a_{j1}^2}$$

$$= \sqrt{a_{21}^2 + a_{31}^2 + a_{41}^2}$$
$$= -\sqrt{1+4+4}$$
$$= -3$$

$$r = \sqrt{1/2(\alpha^2 - a_{21}\alpha)}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}(\alpha^2 - a_{21}\alpha)}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}(9+3)}$$
$$= \sqrt{6}$$

d'où,

$$V_2^{(1)} = \tfrac{4}{2\sqrt{6}} = \tfrac{2}{\sqrt{6}}$$
$$V_3^{(1)} = \tfrac{-2}{2\sqrt{6}} = \tfrac{-1}{\sqrt{6}}$$
$$V_4^{(1)} = \tfrac{2}{2\sqrt{6}} = \tfrac{1}{\sqrt{6}}$$

Ainsi,

$$V^{(1)}{V^{(1)}}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/6 & -2/6 & 2/6 \\ 0 & -2/6 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & 2/6 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & 1/3 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Revenons a P_1:
$P_1 = I_4 - 2V^{(1)}{V^{(1)}}^T$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$A_2 = P_1AP_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

On calcul ce produit:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 2 \\ -3 & -4/3 & 10/3 & -1 \\ -3 & 5/3 & 4/3 & -1 \\ 0 & -2/3 & -1/3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 10/3 & 1 & 4/3 \\ 0 & 1 & 5/3 & -4/3 \\ 0 & 4/3 & -4/3 & -1 \end{pmatrix}$$

Deuxième étape, on utilise A_2 pour former:

$$P_2 = I_4 - 2V^{(2)}{V^{(2)}}^T, \quad V^{(2)} = \begin{pmatrix} V_1^{(2)} \\ V_2^{(2)} \\ V_3^{(2)} \\ V_4^{(2)} \end{pmatrix}$$

oú, $V_1^{(2)} = V_2^{(2)} = 0$, $V_3^{(2)} = \frac{a_{32}^{(2)} - \alpha}{2r}$ *et* $V_4^{(2)} = \frac{a_{42}^{(2)}}{2r}$.
On calcul les valeurs de α et r:

$$\begin{aligned} \alpha &= -sgn(a_{k+1,k}^k)\sqrt{\textstyle\sum_{j=k+1}^n a_{jk}^k}^2 \\ &= -sgn(a_{32}^{(2)})\sqrt{a_{32}^2 + a_{42}^2} \\ &= \sqrt{9+16/9} \\ &= -5/3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{1/2(\alpha^2 - a_{32}\alpha)} \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{2}(\alpha^2 - a_{21}\alpha)} \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{2}(25/9 + 5/3)} \\ &= 2\sqrt{5}/3 \end{aligned}$$

d'ú, $\quad V_3^{(2)} = \frac{1+5/3}{\frac{4\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $V_4^{(2)} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4\sqrt{5}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Alors,

$$V^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$V^{(1)}V^{(1)^T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

On obtient:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 4/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/5 & -4/3 \\ 0 & 0 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$A_3 = P_2 A_2 P_2$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/5 & -4/3 \\ 0 & 0 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 10/3 & 1 & 4/3 \\ 0 & 1 & -5/3 & -4/3 \\ 0 & 4/3 & 4/3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/5 & -4/3 \\ 0 & 0 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 10/3 & -5/3 & 0 \\ 0 & -5/3 & -33/25 & 68/75 \\ 0 & 0 & 68/75 & 149/75 \end{pmatrix}$$

Comme on peut le constater, le résultat final est une matrice symétrique tridiagonale similaire à la matrice originale. le processus est terminé après deux étapes.

Remarque 3.3. *La matrice symétrique $A_1 = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est réduite à la matrice tridiagonale (symétrique) A_{n-1}, par $(n-2)$ transformations orthogonales en utilisant un equivalent processus d'itérations introduit aussi dans* [25]*, comme suite:*

$$A_{i+1} = P_i^T A_i P_i, \quad i = 1, ..., n-2;$$

où

$$P_i = I - \frac{v_i v_i^T}{h_i}, \quad et \quad h_i = 1/2 v_i^T v_i;$$

et

$$v_i^T = [0, ..., 0, a_{i+1,i}^{(i)} + sgn(a_{i+1,i}^{(i)})\sigma_i, a_{i+2,i}^{(i)}, a_{i+3,i}^{(i)}, ..., a_{n,i}^{(i)}].$$

$$\sigma_i^2 = (a_{i+1,i}^{(i)})^2 + (a_{i+2,i}^{(i)})^2 + ... + (a_{n,i}^{(i)})^2.$$

Exemple 3.2. *Soient la matrice symétrique et le vecteur:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\sigma_1^2 = 9 + 16 = 25, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 3+5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

et
$h_1 = \frac{1}{2} v_1^T v_1 = \frac{1}{2} \times 80 = 40.$
Donc

$$P_1 = I_2 - \frac{1}{h_1}(v_1 v_1^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 64 & 32 \\ 32 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/5 & -4/5 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

et

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/5 & -4/5 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/5 & -4/5 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -5 & 132/25 & 26/25 \\ 0 & 26/25 & 43/25 \end{pmatrix} = T$$

où T est tridiagonale.

3.3. Décomposition LU d'une matrice tridiagonale

Les matrices tridiagonale sont trés faciles à factoriser par la méthode de Gauss, si le système $AX = F$ est écrite sous la forme générale ($a_1 = c_n = 0$ par convention)

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

La matrice A peut se décomposer sous la forme $A = LU$, avec les matrices

$$L = \begin{pmatrix} b_1^* & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2^* & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1}^* & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & b_n^* \end{pmatrix}$$

et

$$U = \begin{pmatrix} 1 & c_1^* & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_2^* & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{n-1}^* \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En identifiant les coefficients, nous obtenons les récurrences suivantes pour le calcul des coefficients b^*et c^*:

$$\begin{cases} b_1^* = b_1 \\ \\ c_1^* = c_1/b_1 \end{cases} \quad et \begin{cases} b_k^* = b_k - a_k.c_{k-1}^* & \text{k=2...n} \\ \\ c^* = c_k/b_k^* \end{cases}$$

Remarque 3.4. *Observons que la factorisation LU est possible si les coefficients* b_k^**sont non nuls , donc la matrice A doit être inversible .*

Le système peut être résolu maintenant en deux étapes:
$AX = F \Rightarrow L(UX) = F$ *sous forme* $LY = F$, *avec:*

$$LY = \mathrm{f} \Rightarrow \begin{cases} Y_1 = \mathrm{f}_1/b_1^* \\ \\ Y_k = (\mathrm{f}_k - a_k.Y_{k-1})/b_k^*, \quad k = 2, ..., n \end{cases}$$

et

$$LU = Y \Rightarrow \begin{cases} X_n = Y_n \\ \\ X_k = Y_k - c^*.X_{k+1}, \quad k = (n-1), ..., 1 \end{cases}$$

Conclusion Générale

Dans ce mémoire, nous avons montré l'intérêt que présentent les matrices tridiagonales dans le calcul matriciel, notament dans le cas des matrices tridiagonales de Toeplitz. Nous avons explicité d'une manière claire les valeurs et les vecteurs propres de ce genre de matrices, ainsi que les formules des ces matrices inverses. On a introduit aussi les liens existants entre les déterminants de ces matrices avec les notions des nombres de Fibonacci et Lucas. Nous avons présenté la méthode la plus effecace pour apprendre comment tridiagonaliser une matrice symétrique par les transformations de Householder, et la décomposition LU de ces matrices tridiagonales. En résumé, les recherches futures devront développer une approche plus contextuelle de l'étude des liens entre toutes les méthodes de tridiagonalisations des matrices même non symétriques, en prenant en considération le coût de chaque méthode.

Bibliography

[1] J.M. Arnaudiès et H. Fraysse. Cours de mathmatiques, Dunod, 1980.

[2] G. Allaire and S. M. Kaber. Algèbre linéaire numérique. Mathématiques pour le deuxième cycle. Ellipses, 2002.

[3] R. Àlvarez-Nodarse, J. Petronilhoc, N.R. Quintero, On some tridiagonal k-Toeplitz matrices: Algebraic and analytical aspects. Applications, Journal of Computational and Applied Mathematics 184 (2005) 518-537

[4] Albrecht Böttcher et Sergei M. Grudsky, Spectral Properties of Banded Toeplitz Matrices, SIAM, 2005, p. 35.

[5] W.W. Barrett, A theorem on inverses of tridiagonal matrices, Linear Algebra Appl. 27 (1979) 211-217.

[6] J.C. Bajard et J.M. Muller. Calcul et arithmétique des ordinateurs. Informatique et Systèmes d'Information, Hermes Science publications, Lavoisier, 2004.

[7] P. Concus. G. Meurant, On computing INV black precondtionings for the conjugate gradient method. BIT v26 (1986) pp 493–504.

[8] N. D. Cahil, J. R. D'errico, D. A.Narayan, and J. Y. Narayan, Fibonacci determinants, College Math. J., 33, No. 3 (2002), 221–225

[9] N.D. Cahill, J.R. D'errico and J.P. Spence. "Factorizations of the Fibonacci and Lucas Numbers." The Fibonacci Quarterly 41.1 (2003): 13–19.

[10] P. G. Ciarlet. Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation–cours et exercices corrigés. Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Dunod, 1998.

[11] P. Concus, G.H. Golub. G. Meurant, Black preconditioning for the conjugate gradient method. SIAM J. Sei. Stat. Comput. v6 nl (1985) pp220–252.

[12] David C. Lay, Linear Algebra and its Applications, Washington, Pearson, 2016, p. 114, 237, 277 et 423.

[13] M. El-Mikkawy, A. Karawia, Inversion of general tridiagonal matrices, Applied Mathematics Letters 19 (2006) 712-720.

[14] M.E.A. El-Mikkawy, A fast algorithm for evaluating nth order tridiagonal determinants, J. Comput. Appl. Math. 166 (2004) 581-584.

[15] Gill, Phillip E., Walter Murray, and Margaret H. Wright. Numerical Linear Algebra and Optimization. New York: Addison-Wesely, 1991.

[16] C.F. Fischer. R.A. Usmani, Properties of some tridiagonal matrices and their application1 to boundary value problems. SIAM J. Numer. Anal. v6 nl (1969) pp 127–141.

[17] G. H. Golub and C. F. Van Loan. Matrix computations. Johns Hopkins University Press, third edition, 1996.

[18] Y. Huang, W.F. Mccoll, Analytic inversion of general tridiagonal matrices, J. Phys. A 30 (1997) 79197933.

[19] G.Y. Hu, R.F. OConnell, Analytical inversion of symmetric tridiagonal matrices, J. Phys. A 29 (1996) 1511–1513.

[20] E. Kilic, D. Tasci, Negatively subscripted Fibonacci and Lucas numbers and their complex factorizations, Ars Combin., 96, (2010), 275–288.

[21] G. Meurant, A review on the inverse of symmetric tridiagonal and block tridiagonal matrices, SIAMJ. Matrix Anal. Appl. 13 (3) (1992) 707-728.

[22] Feng Qi, Ai-Qi Liu, Alternative proofs of some formulas for two tridiagonal determinants. Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, 10, 2 (2018) 287–297

[23] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri. Méthodes numériques. Algorithmes, analyse et applications. Springer, 2007.

[24] F. Qi, V. Čerňanová, Y. S. Semenov, Some tridiagonal determinants related to central Delannoy numbers, the Chebyshev polynomials, and the Fibonacci polynomials, Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys. 81 (2019), in press.

[25] Burden, Richard L., and J. Douglas Faires. Numerical Analysis. 8 th Edition. Belmont: Thomson Books/Cole, 2005.

[26] T. Rivlin. Chebyshev Polynomials: From Approximation Theory to Algebra and Number Theory. 2nd Edition, John Wiley. Sons, Inc. 1990.

[27] G. Strang. Introduction to Linear Algebra. 2nd Edition, Wellesley MA, Wellesley- Cambridge, 1998.

[28] G. Strang, Linear algebra and its applications, Brooks/Cole, 3rd edition (1988).

[29] G. Strang and K. Borre. Linear Algebra, Geodesy and GPS. Wellesley MA, Wellesley- Cambridge, 1997, pp. 555–557.

[30] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, Numerical Recipes in C, 2nd ed. Cambridge, UK: Press Syndicate of the University of Cambridge, 1992.

[31] T. Yamamoto, Y. Ikebe, Inversion of band matrices, Linear Algebr. Appl. 24 (1979) 105-111.