République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par :

M^{elle} Guezaout Noor El Houda

Intitulé

Sur les équations aux dérivées partielles fractionnaires

Dirigé par : Dr.Boulares hamid

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.Debbouche Amar	Pr	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.Boulares hamid	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.Debbar Rabeh	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2019

Les équations aux dérivées partielles fractionnaires

A master memory

By Guezaout Noor El Houda

Advisor : Dr. Hamid Boulares

Dedication

Du profond de mon coeur, je dédie ce travail à tous ceux qui me sont chérs :

★ A mes chérs parents :

aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect,mon amour et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon instruction et mon bien être.Je vous remercie pour tout l'amour et le soutien que vous me portez depuis mon enfance.Puisse Dieu, le trés Haut, vous accorder santé, bonheur et longue vie.

★ A mes chérs frères et ma soeur :

merci énormément pour votre soutien plus que pécieux et pour le courage que vous me donnez durant ces années d'études.Un merci plein d'amour à mon petit ange ABDOU, ma vie ne serait aussi magnifique sans ton présance,Je vous aime de tout mon coeur.

★ A mes ami(e)s :

merci pour votre amours et encouragements.

Remerciements

Je profite par ce mémoire d'exprimer mes vifs remerciment à mes professeurs qui ont contribué à la réalisation de ce modeste travail.

Un merci bien particulier à monsieur BOULARES HAMID qui m'a encadré et aidés avec les remarques, les informations qui m'a apporté et les conseils qui m'a donné au long de mon projet.Permettez-moi aussi de remercier les membres du jury.

Abstract

In this memory ,in the first case we will define some mathematical tools, preliminary notions and some fractional derivative defects and their properties,in the last case we will treat with a fractional fractional problem using these last
Key words :

Fractional fractional derivative, fractional derivative of Caputo, fractional derivative of Riemann-liouville, derivative of Grunwald.

Résumé

Dans ce mémoire ,au premier lieu on va définir quelques outils mathématiques, notions préliminaires et quelques défauts du dérivées fractionnaires et leurs propriétés et au dèrnier lieu on va traiter un problème partielle fractionnaire en utilisant ces dèrniers.

Mots clés :

Dérivée partielle fractionnaire, dérivée fractionnaire de Caputo, dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, dérivée de Grunwald-Letnikov,dérivée partielle avec une dérivée temporelle fractionnaire.

ملخص

في هذه المذكرة نتطرق اولا الى بعض المفاهيم الاولية و بعض عيوب المشتقات الجزئية الكسرية و خصائصها ثم نقوم بمعالجة مشكلة كسور جزئية باستخدام ها ته الاخيرة

Table des matières

Première partie

Introduction

En mathématiques, l'analyse fractionnaire est une branche de l'analyse qui étudie les dérivées fractionnaires (dérivées d'ordre réelle).Au XIXéme siècle Riemann-Liouville sont les premiers qui ont commencés l'extension dans ce domaine.

On peut établir des différentes définitions de la dérivée fractionnaire comme celles de Caputo ou bien de Grunwald-Letnikov,ces deux dernières donnent des résultats équivalantes pour plusieurs fonctions mais pas forcément identiques. Les dérivées fractionnaires sont aussi appliqués dans la physique,comme l'electromagnétisme,l'acoustique ou la thermique, en définissant des opérateurs pseudo-différentiels, avec condition de bord à "géométrie fractale",etc ...

Le premier chapitre consiste à présenter des différentes notions préliminaires de la dérivation non entiére qui sont trés nécessaires car elle ont été établies dans le chapitre qui se suit (chapitre 2).

Dans le troisiéme chapitre on vous propose un problème mixte d'une équation aux dérivées partielles fractionnaires où on utilise les propriétés de la dérivée de Caputo pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème posé.

Deuxième partie

Chapitre 01 : Notions préliminaires

0.1 Espace L^p

Definition 0.1 $\Omega = [a, b]$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ est un intervalle borné ou non borné de R. Soit $1 \leq p \leq +\infty$,alors l'espace L^p est définie comme suit :

1. pour $1 \leq p \leq +\infty$, $L^P(\Omega)$ est l'espace de fonctions mésurables de puissance $P^{ième}$ intégrables sur Ω c'est-à-dire

$$f \in L^p(\Omega) \Longrightarrow \int_\Omega |f|^p \, dx < \infty \tag{1.1}$$

Avec $\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $L^p(\Omega)$.
et $\left(L^p(\Omega), \|.\|_p\right)$ est un Banach.
▲ Cas particulier : si $p = 2$ alors :

$$L^2(\Omega) = \left\{ f \,;\int_\Omega f^2 dx < \infty, f \text{ (classe de fonctions mésurables à carrée intégrable sur } \Omega) \right\}$$

$\left(L^p(\Omega)\,; <.,.>_{L^2(\Omega)}\right)$ est un hilbert ; avec $<.,.>_{L^2(\Omega)}$est le produit scalaire définit comme suit :

$$< f, g >_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x).g(x)dx \qquad \forall f, g \in L^2(\Omega) \tag{1.2}$$

2. pour $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur Ω

0.2 Espace AC^n

Definition 0.2 Soit $\Omega = [a, b]$, un intervalle borné de R, alors on peut définir l'espace des fonctions absolument continues comme l'espace des primitives des fonctions $L^1(\Omega)$ i.e. $f : \overline{\Omega} \longrightarrow C$, et on écrit $AC\left(\overline{\Omega}\right)$

donc f est dérivable presque partout sur $\overline{\Omega}$ où $f' \in L^1(\Omega)$ et on a l'équivalance suivante :

$$f \in AC\left(\overline{\Omega}\right) \Leftrightarrow f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt,\ x \in \overline{\Omega} \tag{1.3}$$

Si $n \in N^*$,
$AC^n\left(\overline{\Omega}\right)$ est l'espace des fonctions $f : \Omega \longrightarrow C, (n-1)$ fois dérivables sur $\overline{\Omega}$ telles que $f^{(n-1)} \in AC\left(\overline{\Omega}\right)$ c'est-à-dire :

$$AC^{n}\left(\overline{\Omega}\right)=\left\{f:\overline{\Omega}\longrightarrow C \text{ et } f^{(n-1)}\left(x\right)\in AC\left(\overline{\Omega}\right)\right\}$$

Lemma 0.1 *L'espace $AC^{n}\left[a,b\right]$ne contient que les fonctions $f(x)$ qui sont représentées sous la forme suivante :*

$$f(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{a}^{x}\left(x-t\right)^{n-1}f^{(n)}\left(t\right)dt+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!}\left(x-a\right)^{k} \tag{1.4}$$

0.3 Transformé de Fourier

Definition 0.3 Soit $f\in L^{1}\left(R\right)$ une fonction à valeurs complexes. La transformé de Fourier de f notée $\mathcal{F}f$ est la fonction de la variable $t\in R$, définie par :

$$(\mathcal{F}f)(t):=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ixt}f(x)dx,\ \ (t\in R) \tag{1.5}$$

La transformé de Fourier inverse de f est définie par :

$$\left(\mathcal{F}^{-1}f\right)\left(x\right):=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixt}f\left(t\right)dt,\quad \left(x\in R\right)$$

0.4 Produit de convolution

Definition 0.4 Soient f et g deux fonctions réelles,leur produit de convolution noté $f*g$ est définie par :

$$\left(f*g\right)\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\left(x-t\right).g\left(t\right)dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\left(t\right).g\left(x-t\right)dt \tag{1.6}$$

Elle existe notamment lorsque :

■f et $g\in L^{1}\left(R\right)$, alors $f*g\in L^{1}\left(R\right)$

■$f\in L^{1}\left(R\right)$ et g bornée.

Theorem 0.1 [3] *Si $f\in L^{1}\left(R\right)$ et $g\in L^{p}\left(R\right)$, alors*

$$\left(f*g\right)\left(x\right)\in L^{p}\left(R\right)\qquad\left(1\leq p\leq\infty\right)$$

et on a

$$\left\|f*g\right\|_{p}\leq\left\|f\right\|_{1}\cdot\left\|g\right\|_{p}$$

▲ Particuliérement si $f \in L^1(R)$ et $g \in L^2(R)$, alors

$$(f * g)(x) \in L^2(R) \text{ et } \|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_2$$

Theorem 0.2 [3] *La transformée de Fourier dans $L^1(R)$ d'un produit de convolution est égale au produit des transformées de Fourier*

$$\mathcal{F}(f * g)(t) = \mathcal{F}f(t) . \mathcal{F}g(t) \tag{1.7}$$

0.5 Transformé de Laplace

Definition 0.5 On appelle transformé de Laplace d'une fonction f d'une variable réelle $t \in R_+$la fonction suivante :

$$(\mathcal{L}f)(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt, \quad s \in \mathcal{C} \tag{1.8}$$

Theorem 0.3 [3] *La transformé de Laplace d'un produit de convolution de f et g est définit seulement si les transformées de ces deux derniers existent et on écrit :*

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}f(s) . \mathcal{L}g(s) \tag{1.9}$$

0.6 Fonction Gamma

Definition 0.6 [3] Soit $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{C}$ avec $Re(\boldsymbol{z}) > 0$, on peut définir une fonction notée par Γ,et appellée fonction Gamma comme suit

$$\Gamma(\boldsymbol{z}) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \tag{1.10}$$

où $t^{z-1} = e^{(z-1)\log(t)}$, et on a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Elle converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement possitive.

0.7 Fonction Bêta

Definition 0.7 La fonction Bêta est définie sous la formule suivante :

$$\beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \qquad \forall p,q>0 \tag{1.11}$$

$$\beta(p,q)=\beta(q,p)$$

on pose $t=1-x \Longrightarrow dx=-dt$
et

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=-\int_0^1 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt$$

■
Il y'a une relation entre les deux fonctions Bêta et Gamma et elle est donnée par :

$$\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

0.8 Formule de binôme

Definition 0.8 [3] La formule de binôme généralisée $\binom{a}{n}$ pour $\alpha\in C$ et $n\in N$ est définie par :

$$\binom{a}{0}=1,\ \binom{a}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!},\ (n\in N^*) \tag{1.12}$$

▲ Particuliérement, pour $\alpha=m\in N$, on a :

$$\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!\,(m-n)!},\ m\geq n \tag{1.13}$$

0.9 Fonction de Mittag-Leffler

Definition 0.9 [3] Soit $z\in C$,alors la fonction de Mittag-Leffler généralisée $E_{\alpha,\beta}(z)$ est donnée par :

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \quad , \quad (\alpha>0 \ , \ \beta>0) \tag{1.14}$$

la fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ est définie comme suit :

$$E_{\alpha}(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^{k}}{\Gamma(\alpha k+1)}\quad(\alpha>0\ )$$

Troisième partie

Chapitre 02 : Intégrales et dérivées fractionnaires

0.10 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Definition 0.10 $\Omega = [a,b]$ est un intervalle fini, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in R_+^*$ est écrit sous la forme :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \ , \ x > a \tag{2.1}$$

Si $\alpha = 0$ on a $I_a^0 := I$(l'opérateur identité)
Si $\alpha = n \in N^*$,alors la définition précédente devient :

$$(I_a^\alpha f)(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ..... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \tag{2.2}$$

Example 0.1 Soit $f(x) = (x-a)^k$ avec $k > -1$, alors

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} (x-a)^{\alpha+k} \tag{2.3}$$

En effet,

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^k \, dt \tag{2.4}$$

On utilise le changement de variable :

$$t = a + s(x-a) \quad , \quad 0 \le s \le 1 \tag{2.5}$$

et on utilise la fonction Bêta on obtient :

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+k} \int_0^1 s^k (1-s)^{\alpha-1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+k} \beta(\alpha, k+1) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+k} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \\
I_a^\alpha f(x) &= \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} (x-a)^{\alpha+k}
\end{aligned}$$

Au cas où $a = 0$ on a :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} x^{\alpha+k}$$

Lemma 0.2 [6] *L'opérateur d'intégration fractionnaire* I_a^α *est borné dans* $L^p[a,b]$ $(1 \leq p \leq \infty)$ *;*

$$\|J_a^\alpha f\| \leq k \|f\|_p \tag{2.6}$$

Proof. Soit $f \in L^p[a,b]$, on a ■

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x-t)\,\varphi_2(t)dt$$

avec

$$\varphi_1(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & , & 0 \leq x \leq b-a \\ 0 & , & x \in R/[a,b] \end{array} \right\}$$

et

$$\varphi_2(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} f(x) & , & a < x \leq b \\ 0 & , & x \in R/[a,b] \end{array} \right\}$$

De $\varphi_1 \in L^1(R)$ et $\varphi_2 \in L^p(R)$,donc d'aprés le théorème de convolution on a :

$$\|I_a^\alpha f\|_p = \|\varphi_1 * \varphi_2\|_p \leq \|\varphi_1\|_1 \cdot \|\varphi_2\|_p = \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_p$$

Theorem 0.4 [1] *Pour toute fonction* $f \in L^1[a,b]$ *et pour* $\alpha, \beta > 0$ *on a :*

$$(I_a^\alpha I_a^\beta)(x) = (I_a^{\alpha+\beta})(x) = \left(I_a^\beta I_a^\alpha\right)(x) \tag{2.7}$$

Pour presque tout $x \in [a,b]$,et si de plus $f \in C[a,b]$, alors la relation précédente est satisfaite pour tout $x \in [a,b]$.

Theorem 0.5 [3] *Pour* $0 < \alpha < 1$ *et* $f \in L^1(R)$, *on a la formule de transformé de Fourier d'une intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville est donnée par :*

$$\mathcal{F}\left(I_{-\infty}^\alpha f\right)(t) = |it|^{-\alpha} \mathcal{F}f(t) \tag{2.8}$$

Lemma 0.3 [3] *Pour* $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ *et* $f \in L^1(0,b)$ *et pour tout* $b > 0$, *alors la transformé de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de* f *est définit si* f *admet une transformé de Laplace par la formule suivante :*

$$\mathcal{L}\left(I_0^\alpha f\right)(t) = s^{-\alpha}\mathcal{L}f(s) \tag{2.9}$$

0.11 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Definition 0.11 Soit $\beta \in R_+$ et $n \in N^*$ avec $n-1 \leq \beta < n$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville (R-L) d'ordre α d'une fonction f est donnée par :

$$\left(D_a^\beta f\right)(x) := D^n \left(J_a^{n-\beta} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\beta-n+1}} dt, x > a$$

où

$$D^n = \frac{d^n}{dx^n} \tag{2.10}$$

Particuliérement, si $\beta = n$,alors

$$\left(D_a^n f\right)(x) = f^{(n)}(x) \tag{2.11}$$

Si $\beta = 0$:

$$\left(D_a^0 f\right)(x) = f(x) \tag{2.12}$$

On conclut que dans les deux cas précédentes la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville coincide avec la dérivée usuelle.

Corollary 0.1 [3] *Pour* $\beta > 0$ *et* $n = [\beta] + 1$ *.L'équation* $\left(D_a^\beta f\right)(x) = 0$ *est satisfaite si*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j (x-a)^{\beta-j} \tag{2.13}$$

où $c_j \in R\, (j = 1, n)$ sont des constantes arbitraires.

Proposition 0.1 [3] *Pour* $\beta > 0$ *et* $n = [\alpha] + 1$, *telles que* $\forall m \in N^*$ *, où* $m > \beta$ *on a :*

$$(D_a^\beta f)(x) = D^m J_a^{m-\beta} f(x) \tag{2.14}$$

Proof. comme $m \geq n$ ■

$$D^m J_a^{m-\beta} f(x) = D^n D^{m-n} J_a^{m-n} J_a^{n-\beta} f(x) = D^n J_a^{n-\beta} f(x) = D_a^\beta f(x)$$

car

$$D^{m-n} J_a^{m-\beta} = I$$

Lemma 0.4 [3] *Pour* $\beta \geq 0$ *et* $n = [\alpha] + 1$. *Si* $f(x) \in AC^n [a, b]$,*donc la dérivée fractionnaire* $D_a^\beta f(x)$ *existe presque partout sur* $[a, b]$, *et elle est définie comme suit :*

$$\left(D_a^{\beta} f\right)(x)=\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\beta)}(x-a)^{k-\beta}+\frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\beta-n+1}} dt$$

Theorem 0.6 [7] *f et g sont deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville existent. soit $c_1, c_2 \in R$. Donc $D_a^{\beta}(c_1 f+c_2 g)$existe et on a l'égalité suivante :*

$$D_a^{\beta}(c_1 f(x)+c_2 g(x))=c_1 D_a^{\beta} f(x)+c_2 D_a^{\beta} g(x)$$

Lemma 0.5 [7] *Si $\beta>0$ et $f(x) \in L^1(a, b)$, alors l'égalité suivante est satisfaite pour tout $x \in[a, b]$:*

$$(D_a^{\beta} I_a^{\beta} f)(x)=f(x) \tag{2.15}$$

$$D_a^{\beta} i_a^{\beta} f(x)=D^n I_a^{n-\beta} I_a^{\beta} f(x)=D^n I_a^n f(x)=f(x)$$

presque partout sur $[a, b]$.

Proposition 0.2 [3] *Si $\alpha, \beta>0$, alors pour $f(x) \in L^p(a, b)$ la relation $(D_a^{\beta} I_a^{\alpha} f)(x)=(I_a^{\alpha-\beta} f)(x)$ est satisfaite presque partout sur $[a, b]$.*

En particulier si $\beta=k \in N, \alpha>k$, alors

$$(D^k I_a^{\alpha} f)(x)=(I_a^{\alpha-k} f)(x) \tag{2.16}$$

Theorem 0.7 [3] *Si $f \in AC^n[0, b]$,et pour tout $b>0$,Alors on a la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de f est donnée par la formule suivante :*

$$\left\{\mathcal{L}\left(D_0^{\alpha} f\right)\right\}(s)=s^{\alpha}(\mathcal{L} f)(s)-\sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{n-k-1} J_0^{n-\alpha} f(0^+) \tag{2.17}$$

sous la condition que f possède une transformée de Laplace.
En particulier, si $0<\alpha<1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{n-k-1} J_0^{n-\alpha} f(0^+)=J_0^{1-\alpha} f(0^+) \tag{2.18}$$

ce qui donne :

$$\left\{\mathcal{L}\left(D_0^{\alpha} f\right)\right\}(s)=s^{\alpha}(\mathcal{L} f)(s)-J_0^{1-\alpha} f(0^+) \tag{2.19}$$

0.12 Dérivée fractionnaire de Caputo

Definition 0.12 La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\beta \in R_+$ d'une fonction f peut etre représenter par :

$$^{c}D_a^{\beta} f(x) := J_a^{n-\beta} f^{(n)}(x) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\beta-1} f^{(n)}(t)dt \quad , \quad x > a, \tag{2.20}$$

où $n-1 < \beta \leq n, n \in N^*$.

Example 0.2 On pose $f(x) = (x-a)^k$ avec $k > 0$ alors pour $(0 < \beta \leq 1)$ on aura :

$$D_a^{\beta} f(x) = I_a^{1-\beta} f'(x) = kI_a^{1-\beta}(x-a)^{k-1} = \frac{k}{\Gamma(1-\beta)} \int_a^x (x-s)^{-\beta}(t-a)^{k-1} ds$$

d'après le changement de variable de (2.5) on obtient :

$$^{c}D_a^{\beta} f(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(1-\beta+k)} (x-a)^{-\beta+k}$$

Theorem 0.8 [3] *Pour $\beta \geq 0$ et $n = [\beta] + 1$.Si f admet $(n-1)$ dérivées au point a et si $D_a^{\beta} f$ existe alors on a l'égalité suivante :*

$$^{c}D_a^{\beta} f(x) = D_a^{\beta} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-\beta)^k \right] \tag{2.21}$$

$\forall x \in [a, b]$

Proof. En utilisant la définition on arrive à : ■

$$\begin{aligned} D_a^{\beta} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] &= D_a^n D_a^{n-\beta} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\beta-1}}{\Gamma(n-\beta)} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] dt \end{aligned}$$

Et en utilisant l'intégration par partie on obtient :

$$
\begin{aligned}
I_a^{n-\beta}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] &= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\beta-1}}{\Gamma(n-\beta)}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]dt \\
&= -\frac{1}{\Gamma(n-\beta+1)}\left[\left(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right)(x-t)^{n-\beta}\right]_{t}^{t} \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(n-\beta+1)}\int_a^x (x-t)^{n-\beta}\left[Df(t)-D\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)\right.
\end{aligned}
$$

d'où :

$$
I_a^{n-\beta}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] = I_a^{n-\beta+1}D\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]
$$

En utilisant la même façon n-fois on arrive à :

$$
\begin{aligned}
I_a^{n-\beta}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] &= I_a^{n-\beta+n}D^n\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] \\
&= I_a^{n}I_a^{n-\beta}D^n\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]
\end{aligned}
$$

Mais $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-\beta)^k$ est un polynome d'ordre $n-1$,donc on aboutit à :

$$
I_a^{n-\beta}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] = I_a^{n}I_a^{n-\beta}D^n f(x)
$$

ainsi

$$
\begin{aligned}
D_a^{\beta}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] &= D^n I_a^{n}I_a^{n-\beta}D^n f(x) \\
&= I_a^{n-\beta}D^n f(x) \\
&= {}^{c}D_a^{\beta}f(x)
\end{aligned}
$$

$\forall x\in[a,b]$

Remark 0.1 Si $0<\beta<1$ alors la relation (2.21) devient

$$
{}^{c}D_a^{\beta}f(x) ={}^{c} D_a^{\beta}\left[f(x)-f(a)\right]
$$

Lemma 0.6 [3] *Pour* $\beta \geq 0$ *et* $n = [\beta]+1$. *on choisit* f *telle que* $D_a^\beta f(x)$ *et* ${}^cD_a^\beta f$ *existent donc*

$$ {}^cD_a^\beta f(x) = D_a^\beta f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\beta+1)}(x-a)^{k-\beta} \tag{2.22}$$

Et particuliérement si $0 < \beta < 1$ alors :

$$ {}^cD_a^\beta f(x) = D_a^\beta f(x) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\beta)}(x-a)^{-\beta}$$

Une conséquance de ce lemme est donnée par le corollaire suivant :

Corollary 0.2 [3] *Pour* $\beta \geq 0$ *et* $n = [\beta]+1$.*Si on suppose que* $D^k f(a) = 0$ $\forall k \in \{0,1,...,n-1\}$ *et si de plus* $D_a^\beta f(x)$ *et* ${}^cD_a^\beta f(x)$ *existent alors :*

$$ {}^cD_a^\beta f(x) = D_a^\beta f(x) \tag{2.23}$$

Theorem 0.9 [7] *Si* $\beta > 0$ $(n-1 < \beta \leq n)$ *et si de plus* $f \in C[a,b]$ *alors on a :*

$$ {}^cD_a^\beta I_a^\beta f(x) = f(x) \tag{2.24}$$

Proof. D'aprés l'égalite (2.16) et pour $k = 0,1,...,n-1$ on trouve : ■

$$(I_a^\beta f)^k(x) = I_a^{\beta-k} f(x)$$

et d'après l'estimation suivante :

$$\left|I_a^{\beta-k} f(x)\right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{|\Gamma(\beta-k+1)|}(x-a)^{\beta-k}$$

on obtient :

$$I_a^{\beta-k} f(a) = 0, (k = 0,1,...,n-1)$$

et d'après le corollaire précédent, on a :

$$ {}^cD_a^\beta I_a^\beta f(x) = D_a^\beta I_a^\beta f(x) = f(x)$$

Theorem 0.10 [7] *Soient* f_1 *et* f_2 *deux fonctions qui appartiennent à l'intervalle* $[a,b]$, *où* ${}^cD_a^\beta f_1$ *et* ${}^cD_a^\beta f_2$ *existent presque partout. et soient aussi* c_1 *et* c_2 $\in$ R *alors* ${}^cD_a^\beta(c_1 f_1 + c_2 f_2)$ *existent sur le même intervalle* $[a,b]$ *et on a :*

$$ {}^cD_a^\beta(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) = c_1({}^cD_a^\beta)f_1(x) + c_2\left({}^cD_a^\beta\right)f_2(x) \tag{2.25}$$

Theorem 0.11 [2] *Soit $b > 0$, si $f \in AC^n[0, b]$ et si de plus la transformée de Laplace de f existe alors la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo de f est :*

$$\left\{\mathcal{L}\left({}^cD_0^\beta f\right)\right\}(s) = s^\beta\left(\mathcal{L}f\right)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\beta-1-k} f^{(k)}(0^+) \tag{2.26}$$

Proof. On sait que : ■

$${}^cD_0^\beta f(x) = I_0^{n-\beta} f^{(n)}(x)$$

$\forall n - 1 < \beta \leq n, n \in N^*, x > 0.$
Donc :

$$\begin{aligned}
\left\{\mathcal{L}\left({}^cD_0^\beta f\right)\right\}(s) &= \left\{\mathcal{L}(I_0^{n-\beta} f^{(n)})\right\}(s) \\
&= s^{-n+\beta}\left(\mathcal{L}f^{(n)}\right)(s) \\
\left\{\mathcal{L}\left({}^cD_0^\beta f\right)\right\}(s) &= s^\beta\left(\mathcal{L}f\right)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\beta-1-k} f^{(k)}\left(0^+\right)
\end{aligned}$$

0.13 Dérivée de Grünwald-Letnikov

Definition 0.13 Soit $\alpha \in R_+$,Si la limite existe ,alors la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov est donnée par la formule suivante :

$${}^{GL}D_a^\alpha f(x) := \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\frac{(x-a)}{h}} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh), (x > a) \tag{2.27}$$

cas particulier : si $\alpha = n \in N$,alors on a :

$$D^n f(x) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh) \tag{2.28}$$

Theorem 0.12 [7] *Pour $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$.Si $f \in C^n[a, b]$,alors :*

$${}^{GL}D_a^\alpha f(x) :=^c D_a^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x - a)^{k-\alpha} = D_a^\alpha f(x) \tag{2.29}$$

Ce théorème représente la relation entre les trois dérivées qu'on a vu dans ce chapitre.

Quatrième partie

Chapitre 03 : Problèmes

0.14 Equation différentielle au sens de Caputo

Definition 0.14 On considère le problème associé à l'équation différentielle au sens de Caputo suivant :

$$\begin{cases} {}^{c}D_{0}^{\alpha}y(x) - \beta y(x) = 0 \\ y^{(k)}(0) = c_k \in R, (k = 0, 1, ..., n-1, n-1 < \alpha < n, \beta \in R) \end{cases}$$

avec $n = [\alpha] + 1$,la solution $y(x)$ de ce problème est donnée par la formule suivante :

$$y(x) = \sum_{K=0}^{n-1} c_k x^k E_{\alpha,k+1}(\beta x^\alpha) \tag{3.1}$$

Proof. On applique la transformée de Laplace sur l'équation suivante :

$${}^{c}D_{0}^{\alpha}y(x) - \beta y(x) = 0$$

■

on trouve :

$$s^\alpha (\mathcal{L}y)(s) - \sum_{K=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k} y^{(k)}\left(0^+\right) - \beta (\mathcal{L}y)(s) = 0$$

$$s^\alpha (\mathcal{L}y)(s) - \beta (\mathcal{L}y)(s) = \sum_{K=0}^{n-1} c_k s^{\alpha-1-k}$$

Et alors :

$$(\mathcal{L}y)(s) = \sum_{K=0}^{n-1} c_k \frac{s^{\alpha-1-k}}{s^\alpha - \beta}$$

Et d'autre part on a :

$$\frac{s^{\alpha-1-k}}{s^\alpha - \beta} = \int_0^\infty e^{-st} t^k E_{\alpha,k+1}(\beta t^\alpha)\, dt$$

$$\frac{s^{\alpha-1-k}}{s^\alpha - \beta} = \mathcal{L}\left(x^k E_{\alpha,k+1}(\beta x^\alpha)\right)(s)$$

Et après, en appliquant la transformation inverse, on arrive à :

$$y(x) = \sum_{K=0}^{n-1} c_k x^k E_{\alpha,k+1}(\beta x^\alpha)$$

0.15 Equation aux dérivées partielles avec une dérivée temporelle fractionnaire

L'équation de diffusion généralisée avec une dérivée temporelle fractionnaire est donnée par la formule suivante :

$$({}^{c}D_{0,t}^{\alpha}u)(x,t) = -Lu(x,t) + F(x,t) \tag{3.2}$$

avec

$$0 < \alpha \leq 1, (x,t) \in \Omega_T := G \times (0,T), G \in R^n$$

et

$$L(u) := -\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad} u) + q(x)u \tag{3.3}$$

$$p \in C^1\left(\overline{G}\right), q \in C\left(\overline{G}\right), p(x) > 0, q(x) \geq 0, x \in \overline{G} \tag{3.4}$$

${}^{c}D_{0,t}^{\alpha}$ est la dérivée de Caputo par rapport à t d'ordre $0 < \alpha < 1$
G est un domaine ouvert borné de R^n.
$(-L)$ est un opérateur différentiel elliptique linéaire du second ordre

$$-L(u) = p(x)\Delta u + \langle \operatorname{grad} p, \operatorname{grad} u\rangle - q(x)u \tag{3.5}$$

Où Δ est l'opérateur de Laplace.
Si $\alpha = 1$ l'équation (3.2) devient une équation aux dérivées partielles parabolique du second ordre.
Considérons le problème mixte suivant

$$(I)\begin{cases} ({}^{c}D_{0,t}^{\alpha}u)(x,t) = -Lu(x,t) + F(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \overline{G} \\ u(x,t) = v(x,t), (x,t) \in S \times [0,T] \end{cases}$$

$$0 < \alpha < 1, (x,t) \in \Omega_T := G \times (0,T), G \subset R^n$$

La solution classique de ce problème est définie sur le domaine $\overline{\Omega}_T := \overline{G} \times (0,T)$ à valeurs réelles et qui appartient à l'espace $C\left(\overline{\Omega}_T\right) \cap W_t^1\left(\Omega_T\right) \cap C_x^2\left(\Omega_T\right)$
Avec

$$W_t^1\left(\Omega_T\right) = \left\{u : \overline{\Omega}_T \longrightarrow R, \forall x \in \overline{G}; u(x,.) \in W^1\left((0,T]\right)\right\}$$

$$C_x^2\left(\Omega_T\right) = \left\{u : \overline{\Omega}_T \longrightarrow R, \forall t \in [0,T]\,; u(.,t) \in C^2\left(G\right)\right\}$$

où $W^1\left((0,T]\right)$ est l'espace des fonctions $f \in C^1\left((0,T]\right)$ où $f\prime \in L^1((0,T))$. Si le problème (I) admet une solution classique alors :

$$F \in C(\Omega_T), u_0 \in C(\overline{G}) \text{ et } v \in C(S \times [0,T])$$

Theorem 0.13 [4] *Si* $f \in W^1((0,T]) \cap C([0,T])$ *atteind son maximum sur l'intervalle* $(0,T]$ *au point* $\eta = t_0, t_0 \in (0,T]$ *alors la dérivée fractionnaire de Caputo de* f *n'est pas négative au point* t_0 *,*$\forall$ $(0 < \alpha < 1)$ *:*

$$({}^cD_0^\alpha f)(t_0) \geq 0, 0 < \alpha < 1 \tag{3.6}$$

Theorem 0.14 [4] *Soit* $u(x,t) \leq 0, (x,t) \in \overline{\Omega}_T$*, avec* u *est une fonction qui atteind son maximum sur la partie* $S_G^T := \left(\overline{G} \times \{0\} \cup (S \times [0,T]\right)$ *de la frontière du* Ω_T *c'est-à-dire :*

$$u(x,t) \leq \max_{(x,t)\in S_G^T} u(x,t), \forall (x,t) \in \overline{\Omega}_T \tag{3.7}$$

Si $u \in C\left(\overline{\Omega}_T\right) \cap W_t^1(\Omega_T) \cap C_x^2(\Omega_T)$ est une solution de l'équation (3.2) dans le domaine $\Omega_T := G \times (0,T), G \subset R^n$ et $F(x,t) \leq 0, (x,t) \in \Omega_T$.

Proof. La démonstration de ce théorème est basée sur le théorème précédent c'est-à-dire :

■

$\exists (x_0, t_0), x_0 \in G, 0 < t_0 \leq T$
i.e.

$$(x_0, t_0) > \max_{(x,t)\in S_G^T} \{0, u(x,t)\} = M > 0 \tag{3.8}$$

on prend le nombre $\eta := (x_0, t_0) - M > 0$ et on définit la fonction auxilliaire suivante :

$$\Psi(x,t) := u(x,t) + \frac{\eta}{2}\frac{T-t}{T}, (x,t) \in \overline{\Omega}_T \tag{3.9}$$

qui possède les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \Psi(x,t) \leq u(x,t) + \frac{\eta}{2}, (x,t) \in \overline{\Omega}_T \\ \Psi(x_0,t_0) \geq u(x_0,t_0) = \eta + M \geq \eta + u(x,t) \geq \eta + \Psi(x,t) - \frac{\eta}{2} \geq \frac{\eta}{2} + \Psi(x,t) \\ (x,t) \in S_G^T \end{cases}$$

la derniére propriété signifie que la fonction Ψ ne peut atteindre son maximun sur la partie S_G^T.Si le point maximum de Ψ est désigné par (x_1, t_1) alors $x_1 \in G, 0 \leq t_1 \leq T$
et

$$\Psi(x_1,t_1) \geq \Psi(x_0,t_0) \geq \eta + M > \eta$$

Maintenant, d'après le théorème (3.2.1) et les conditions nécessaires de l'existance du maximum sur le domaine G, on aboutit à les relations suivantes

$$:\begin{cases}({}^cD_{0,t}^{\alpha}\Psi)(t_1)\geq 0\\ \operatorname{grad}\Psi\,(x_1,t_1)=0\\ \triangle\Psi\,(x_1,t_1)\leq 0\end{cases}$$

et on peut écrire :

$$u(x,t):=\Psi(x,t)-\frac{\eta}{2}\frac{T-t}{T},(x,t)\in\overline{\Omega}_T \tag{3.10}$$

Or d'autre part, pour $0<\alpha\leq 1$ on a :

$$({}^cD_0^{\alpha}\tau^{\beta})(t)=\frac{\Gamma\left(1+\beta\right)}{\Gamma\left(1-\alpha+\beta\right)}t^{\beta-\alpha},\beta>0 \tag{3.11}$$

Donc :

$$({}^cD_{0,t}^{\alpha}u)(x,t)=({}^cD_{0,t}^{\alpha}\Psi)(x,t)-\frac{\eta^c}{2}D_0^{\alpha}\left(\frac{T-t}{T}\right) \tag{3.12}$$

$$({}^cD_{0,t}^{\alpha}u)(x,t)=({}^cD_{0,t}^{\alpha}\Psi)(x,t)+\frac{\eta}{2T}\frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(2-\alpha\right)}t^{1-\alpha} \tag{3.13}$$

$$({}^cD_{0,t}^{\alpha}u)(x,t)=({}^cD_{0,t}^{\alpha}\Psi)(x,t)+\frac{\eta}{2T}\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma\left(2-\alpha\right)} \tag{3.14}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}({}^cD_{0,t}^{\alpha}u)(x_1,t_1)-\operatorname{div}(p\operatorname{grad}u)(x_1,t_1)+qu-F &= ({}^cD_{0,t}^{\alpha}\Psi)(x_1,t_1)+\frac{\eta}{2T}\frac{t_1^{1-\alpha}}{\Gamma\left(2-\alpha\right)}-p(x_1)\triangle\Psi(x_1,\\ +q\left(\Psi-\frac{\eta}{2}\frac{T-t_1}{T}\right)-F &\geq \frac{\eta}{2T}\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma\left(2-\alpha\right)}+q\eta\left(1-\frac{T-t_1}{2T}\right)>0\end{aligned}$$

et c'est contraductoire avec la condition du théorème qui dit que la fonction u est une solution de l'éqation (3.2)

Maintenant, en remplaçant u par $-u$ dans le raisonnement ci-dessus,on arrive au théorème suivant qui formule principe du minimum :

Theorem 0.15 [4] *Si $u\in C\left(\overline{\Omega}_T\right)\cap W_t^1\left(\Omega_T\right)\cap C_x^2\left(\Omega_T\right)$ est une solution de l'équation (3.2) dans le domaine $\Omega_T:=G\times(0,T)\,,G\subset R^n$ et $F(x,t)\geq 0,(x,t)\in\Omega_T$,alors soit $u(x,t)\geq 0$,$(x,t)\in\overline{\Omega}_T$, ou la fonction u atteind son minimum négatif sur la partie S_G^T de la frontière Ω_T c'est-à-dire :*

$$u(x,t)\geq\min_{(x,t)\in S_G^T}u(x,t),\forall(x,t)\in\overline{\Omega}_T \tag{3.15}$$

0.16 Existence de la solution

Avec quelques restrictions sur les données du problème (I) on va montrer l'existance de la solution,soit doncle problème :

$$(II)\begin{cases} {}^{c}D_{0,t}^{\alpha}u(x,t)-Lu(x,t) \\ u(x,o)=u_0(x), x\in\overline{G} \\ u(x,t)=0,(x,t)\in S\times[0,T] \end{cases}$$

On va utiliser la méthode de séparation de variables, on cherchera

$$u(x,t)=U(t)X(x) \text{ avec } X\neq 0, U\neq 0 \tag{3.16}$$

En remplaçant dans l'équation (3.2) on trouvera :

$${}^{c}D_{0,t}^{\alpha}U(t)X(x)=-L(X)U(t) \tag{3.17}$$

alors :

$$\frac{{}^{c}D_{0,t}^{\alpha}U(t)}{U(t)}=\frac{-L(X)}{X(x)} \tag{3.18}$$

Le membre de droite dépend seulement de x et celui de gauche seulement de t,ils ne peuvent être égales que si les deux sont égaux à une constante :

$$\frac{{}^{c}D_{0,t}^{\alpha}U(t)}{U(t)}=\frac{-L(X)}{X(x)}=-\lambda,\lambda>0 \tag{3.19}$$

la dernière équation avec la condition au bord est équivalente à l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$${}^{c}D_{0,t}^{\alpha}U(t)+\lambda U(t)=0 \tag{3.20}$$

et le problème à valeurs propres pour l'opérateur L est

$$\begin{cases} L(X)=\lambda X \\ X(x)=0, x\in S \end{cases}$$

Soit, d'autre part, l'espace :

$$M_L=\left\{f, f\diagdown_S=0, f\in C^1\left(\overline{G}\right)\cap C^2\left(G\right), \text{ et } L(f)\in L^2\left(G\right)\right\}$$

On peut représenter toute fonction $f\in M_L$ par sa série de Fourier comme suit :

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,X_i\rangle X_i(x) \tag{3.21}$$

avec $X_i\in M_L$ sont les fonctions propres correspondantes aux valeurs propres λ_i :

$$L(X_i) = \lambda_i X_i, \quad i = 1, 2, ... \tag{3.22}$$

D'après le théorème 3.1.1 la solution de l'équation différentielle fractionnaire (3.20) avec $\lambda = \lambda_i, i = 1, 2, ...$ a la forme suivante :

$$U_i(t) = c_i E_\alpha(-\lambda_i t^\alpha) \tag{3.23}$$

Le problème étudié étant linéaire et homogéne,le principe de superposition s'applique et par conséquant :

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i E_\alpha(-\lambda_i t^\alpha) X_i(x) \tag{3.24}$$

sera aussi une solution de notre équation avec la condition au bord. pour construire une fonction qui vérifie la condition initiale, on introduit la définition suivante :

Definition 0.15 La solution formelle du problème (II) appelée série de Fourier est sous la forme suivante :

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u_0, X_i \rangle E_\alpha(-\lambda_i t^\alpha) X_i(x) \tag{3.25}$$

Theorem 0.16 [4] *Si la donnée initiale appartient à l'espace M_L alors la solution du problème (II) existe et elle est donnée par la formule précédente.*

0.17 Unicité de la solution

Le principe du maximum prouvé dans la section précédente est appliqué pour montrer que le problème (I) admet une solution unique. et aussi elle dépend des données du problème.

Le théorème suivant nous donne une estimation appropriée de la solution :

Si u est une solution classique du problème (I) et F est une fonction qui appartient à l'espace $C\left(\overline{\Omega}_T\right)$ avec la norme $M := \|F\|_{C\left(\overline{\Omega}_T\right)}$,alors on a l'estimation suivante :

$$\|U\|_{C\left(\overline{\Omega}_T\right)} \leq \max\{M_0, M_1\} + \frac{T^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} M \tag{3.26}$$

avec

$$M_0 = \|u_0\|_{C(G)}, M_1 = \|u\|_{C(S\times[0,T])} \tag{3.27}$$

Theorem 0.17 [4] *Le problème (I) admet une solution unique dépend continûment des données du problème au sens que si*

$$\left\| F-\tilde{F}\right\|_{C\left(\overline{\Omega}_T\right)}\leq \eta ,\left\| u_0-\tilde{u}_0\right\|_{C\left(\overline{G}\right)}\leq \eta_0,\left\| v-\tilde{v}\right\|_{C(S\times [0,T])}\leq \eta_1 \tag{3.28}$$

Alors, on a l'estimation suivante :

$$\left\| u_0-\tilde{u}_0\right\|_{C\left(\overline{G}\right)}\leq \max\left\{\eta_0,\eta_1\right\}+\frac{T^{\alpha}}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}\eta \tag{3.29}$$

Proof. Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème (I) c'est-à-dire : ∎

$$\begin{cases} {}^{c}D_{0,t}^{\alpha}u_1(x,t)=-Lu_1(x,t)+F(x,t)\\ u_1(x,0)=u_0(x),x\in\overline{G}\\ u_1(x,t)=v(x,t),(x,t)\in S\times[0,T]\end{cases}$$

et

$$\begin{cases} {}^{c}D_{0,t}^{\alpha}u_2(x,t)=-Lu_2(x,t)+F(x,t)\\ u_2(x,0)=u_0(x),x\in\overline{G}\\ u_2(x,t)=v(x,t),(x,t)\in S\times[0,T]\end{cases}$$

Alors

$${}^{c}D_{0,t}^{\alpha}\left(u_1-u_2\right)=-L\left(u_1-u_2\right)$$

Soit $\Psi=u_1-u_2$ une solution du problème homogéne :

$$\begin{cases} {}^{c}D_{0,t}^{\alpha}\Psi(x,t)=-L\Psi(x,t)\\ \Psi(x,0)=0,x\in\overline{G}\\ \Psi(x,t)=0,(x,t)\in S\times[0,T]\end{cases}$$

Donc

$$\left\|\Psi\right\|_{C\left(\overline{\Omega}_T\right)}\leq\max\left\{M_0,M_1\right\}\ \text{ où } M_0=0,M_1=0$$

Alors

$$\Psi=u_1-u_2=0\Longrightarrow u_1=u_2$$

Le problème (I) admet une solution unique.

Pour prouver l'estimation (3.29) on utilise l'estimation (3.26). Cette fois, elle est appliquée à la solution $u-\tilde{u}$ avec les fonctions $F-\tilde{F}$,$u_0-\tilde{u}_0$ et $v-\tilde{v}$ au lieu des fonctions F,u_0 et v respectivement

Cinquième partie

Conclusion

En conclusion,le but de ce mémoire est de préparer des prochaines études supérieurs et aussi de pouvoir résoudre des problèms dans des domaines différents en appliquant presque toute les notions des dérivées fractionnaires.

Sixième partie

Bibliographie

Bibliographie

[1] **R. Gorenflo** : Fractional calculus, some numerical methods, in : Fractional and Fractional calculus in Continuum Mechanics (Eds. **A. Carpinteri and F. Mainardi**), Springer,Verlag,Wien(1997), 277-290.

[2] **Yu. Luchko**, some uniquenessand existence results for the initial-boundray-value problemsfor the generalized time-fractional diffusion equation, Computers and Mathematics with Applications (2009).

[3] **S.G. Samko, A.A. Kilbas and Marichev**, fractional integrals and derivatives : Theory and applications, Gorden and Breach, New-York, (1993).

[4] **M. Weilber**, Efficient Numerical Methods for fractional differential equations and their analytical background, Ph. D. Univ Braunschweig (2006).

[5] **S. Abbas**,Existence of solutions to fractional order ordinary and delay differential equations and applications,**Electronic Journal of Differential Equations** 2011(9) (2011) 1-11.

[6] **R. P. Agarwal, V. Lakshmikantham,J.J.Nieto,** on the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty, **Nonlinear Anal**. 72 (2009) 2859-2862.

[7] **R. P.Agarwal, Y.Zhou,Y.He,** Existence of fractional differential equations ,Computers and Mathematics with Applications 59 (2010) 1095-1100.

[8] **M. Benchohra, J. Henderson,S.K.Ntouyas and A. Ouahab,** Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay, **J. Math. Anal Appl** 338 (2008) 1340-1350.

[9] **T. A. Burton, B. Zhang,** Fractional equations and generalizations of Schaefer's and Krasnoselskii's fixed point theorems, Nonlinear Anal. 75 (2012) 6485-6495.

[10] **F. Chen,** Fixed points and asymtotic stability of nonlinear fractional difference equations, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2011(39) (2011) 1-18.

[11] **F. Chen, X. Luo, Y. Zhou,** Existence results for nonlinear fractional difference equation, Advances in Difference Equations 2011 (2011) Article ID 713201,12 pages.

[12] **S. S. Cheng ,W. T. Patula,** An existence theorem for a nonlinear difference equation, Nonlinear Anal. 20 (1993) 193-203.

[13] **J. M. Jonnalagadda,** Analysisof nonlinear fractional nabla difference equations, International Journal of Analysis and Applications 7(1) (2015) 79-95.

[14] **C. Kou, H. Zhou,Y.Yan,**Existence of solutions of initial value problems for nonlinear fractional differential equations on the half-axis, Nonlinear Anal. 74(2011) 5975-5986.

[15] **K. S. Miller,B.Ross,** An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations,**John Wiley, New-York,**1993.

[16] **I. Podlubny,** Fractional Differential Equations, Academic Press,San Diego, 1999.

[17] **D. R. Smart,** Fixed point theorems, **Cambridge Uni. Press, Cambridge**, 1980.