République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par : Mme Hchachna Besma

Mlle Kadri Sihem

Intitulé

Utilisation de l'intégrale de Stieltjes dans l'approximation des séries

Dirigé par :

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr.Bellaouar Djamel**	**MCA**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr.Azzouza Nourddine**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr.Ezzzbssa Abdellali**	**MCA**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2019

Dédicace

*Pour m'avoir permis d'accéder au savoir et d'être ce que je suis devenu aujourd'hui, je voudrais remercier **DIEU** le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force, la patience et la persévérance pour accomplir ce Modeste travail.*

Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma mère.

A mon cher père pour l'éducation qu'il m'a prodigué; avec tous les moyens et au prix de tous les sacrifices qu'il a consenti à mon égard, pour m'inculper le sens du devoir depuis mon enfance.

A la mémoire de mes grand(e)s parent(e)s et toute la famille Kadri et Siouane

A mes frères et sœurs : Oussama, Mohamed, Douà et Hiba.

A mon binôme, Besma pour la patience dont il fait preuve envers moi.

A tous mes amis avec lesquels j'ai partagé des moments de joie et de bonheur, à tous ceux qui ont été à mes côtés jusqu'à aujourd'hui.

A tous les honorables enseignants qui ont contribué à ma formation.

Enfin, toute personne m'ayant aidé de près ou de loin dans ce travail laborieux et de longue haleine, trouve ici l'expression de mes vives reconnaissances et remerciement.

A tous ceux qui m'aiment Sihem .

Sihem

Remerciement

*En premier lieu nous remercions **DIEU** tout puissant de nous avoir donné la patience, la santé et la volonté pour achever ce modeste travail.*

Et Nos remerciements vont tout particulièrement à nos parents, pour leur soutien et leur patience.

*Nous aimerons adresser plus qu'un merci pour notre encadreur monsieur **AZZOUZA NOURDDINE**. Qui a su partager son savoir faire, ses connaissances et son temps pour nous porter aide pendant et hors de ses heures de travail.*

Nous remercions chacun des membres du jury d'avoir consacré une partie de leur temps à la lecture de ce mémoire et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

*Nos remerciements s'étendent à tous nos enseignants et les membres du département mathématique de l'université **8** Mai **1945** Guelma.*

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours soutenues et encouragées au cours de la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

A mes parents .Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils ne cessent de me combler .Que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

A celui que j'aime beaucoup et qui m'a soutenue tout au long de ce projet :

ma fille Tasnim, ma belle Noujoud , mon marie Radouan et bien sûr à Mon frères Abd erahim et ma sœur Nariman.

A mon binome Sihem pour la patience dont il fait preuve envers moi.

A toute amies : Sara ,Salma ,Rayen ,Noura et surtout Hadjer , Houda.

A toute la famille Hechachna et surtout ZAALANI, et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin que ce projet soit possible, je vos dit merci.

BASMA

Table des matières :

Résumé :

Généraliser l'intégrale de Riemann, c'est pouvoir intégrer plus de fonctions, en introduisant de nouvelles mesures, ce qui se fait par la théorie de la mesure, et l'intégrale de Lebesgue.
Dans ce projet, on se suffit de l'intégrale de Stieltjes ou intégrale de Riemann-Stieltjes ou on remplace la variable d'intégration x par une fonction g qui n'est pas, obligatoirement continue.
Cette intégrale trouve son application, en physique, en probabilité et en théorie des nombres.

Introduction:

Dans ce mémoire on va présenter l'intégrale de Stieltjes, et son utilisation dans l'approximation des séries et on procédé par trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on va présenter l'intégrale de Riemann de façon résumée:

Le calcul intégral trouve son origine et sa motivation dans les problèmes géométriques du calcul des aires des figures plans curvilignes, des volumes des corps solides ronds, etc. Habituellement on interprète l'intégrale d'une fonction à valeurs réelles comme l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction. L'idée de Riemann a été de repartir de cette évaluation de l'aire en montrant qu'elle pouvait se faire même pour les fonctions non continues. Bien que la théorie d'intégration de Riemann permet de calculer l'intégrale d'une très grande classe de fonctions et elle possède de nombreux atouts dont : la facilité de construction, interprétation visuelle immédiate, puissance d'utilisation (toutes les fonctions usuelles sont Riemann intégrable, théorèmes puissants) mais *elle a aussi d'autres inconvénients, car on ne peut intégrer que des fonctions bornées, et les théorèmes sont souvent disponibles sous des hypothèses souvent trop fortes. Deux types de théorèmes sont peu satisfaisants: les théorèmes d'intégration d'une suite de fonction, le théorème fondamental de l'analyse.*

Le deuxième chapitre on va parler sur l'intégrale de Stieltjes de façon détaillée:

la définition de l'intégrale de Stieltjes, les conditions pour appliquer cette intégrale, des propriétés de intégrale de Stieltjes, des théorèmes et leurs démonstrations, ainsi que des exemples simples pour mieux comprendre l'intégrale de Stieltjes.

Le troisième chapitre on propose des exemples d'applications de l'intégrale de Stieltjes à la sommation de certaines séries, importantes en théorie des nombres.

$Chapitre\ \mathbf{01}$:

$l'int\acute{e}grale\ de\ Riemann$:

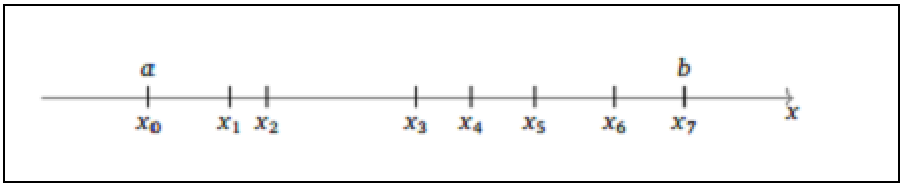
Dans ce chapitre la définition de l'intégrale est due à Darboux (1842-1917); elle est équivalente à celle donnée un peu plus tôt par B. Riemann (1826-1866) .

1-1: Définition de l'intégrale de Riemann:

Définition 1-1: (Subdivision d'un intervalle)

Soit $[a, b]$ *un intervalle fermé borné de* $\mathbb{R}$ *,On appelle* ***subdivision de l'intervalle*** $[a, b]$, *toute suite finie strictement croissante,* $\sigma = (x_i)_{0<i<n}$ *telle que* $x_0 = a$ *et* $x_n = b$.

Autrement dit $a = x_0 < x_1 < \ldots . < x_n = b$.



Un raffinement d'une subdivision σ est une subdivision σ′ du même intervalle, formée en rajoutant des points.

On dit alors que σ′ est plus fine que σ.

.

Le pas d'une subdivision σ est la quantité

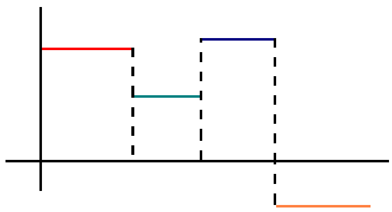
$$\|\sigma\| := \max_{0<i<n} (x_{i+1} - x_i).$$

Définition 1-2:(Fonction en escalier) $[\mathbf{1}: \boldsymbol{p4}]$

Soit la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *On dit que f est* ***fonction en escalier*** *s'il existe une subdivision* $\sigma = (x_i)_{0<i<n}$ *de* $[a, b]$ *et des nombres réels* c_1*..........*c_n *,telle que* $\forall\ i \in \{1 \dots\dots n\}$ *on* a:

$$\forall\ x\ \in\ ]x_{i-1}, x_i[\qquad f(x) = c_i\ .$$

Autrement dit f est une fonction constante sur chacun des sous intervalles de la subdivision.



fonction en escalier

Définition 1-3:(Intégrale des fonctions en escalier) $[\mathbf{1}: \boldsymbol{p4}]$

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction en escalier* , $\sigma = (x_i)_{0<i<n}$ *une subdivision* , $c_i \in \mathbb{R}$ *pour* $i \in \{1 \dots\dots n\}$ *tels que*

$$f(x) = c_i\ sur\ \ ]x_{i-1}, x_i[$$

Son intégrale ,notée $\int_a^b f(x)dx$, *est définie par*:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i\,(x_i - x_{i-1}).$$

Définition 1-4 :(Fonction bornée) [1: p4]

Une fonction $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ *est* ***bornée*** *s'il existe* $M \geq 0$ *tel que* :

$$\forall\, x \in [a,b] \quad |f(x)| \leq M.$$

Définition 1-5:(Sommes de Darboux) [2: p9]

Soient $\beta([a,b],\mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions réelles bornées*

sur $[a,b]$, *et* $\mathcal{S}([a,b])$ *l^' ensemble des subdivision de* $[a,b]$.

pour $f \in \beta([a,b],\mathbb{R})$ *et* $\sigma \in \mathcal{S}([a,b])$.

on pose :

$$m_i = \min_{[x_{i-1},x_i]} f.$$

$$M_i = \max_{[x_{i-1},x_i]} f.$$

et:

$$s(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, m_i.$$

$$S(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, M_i.$$

$$\Delta(f,\sigma) = S(f,\sigma) - s(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(M_i - m_i).$$

$s(f,\sigma)$ *et* $S(f,\sigma)$ *sont respectivement la petite et la grande somme de Darboux associée à* f *et* σ .

Définition 1-6:(Intégrabilité sur [a, b]) [3:p11]

Une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *est dite* ***intégrable sur*** $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, *si*

$\forall\varepsilon>0,\exists f_1,f_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ *fonctions en escaliers telles que*:

1. $f_1 \leq f \leq f_2$ $(i.e.\ \forall x\in[a,b], f_1(x)\leq f(x)\leq f_2(x))$.
2. $\left|\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx\right|<\varepsilon.$

Définition 1-7:(Intégrabilité au sens de Riemann)

Une fonction bornée f est dit ***intégrable au sens de Riemann sur [a,b]*** *si:*

$$\lim_{\|\sigma\|\to 0}\Delta(f,\sigma)=0.$$

1-2 : Intégrabilité de certaines fonctions :

1-2-1 : Fonction continue :

Théorème 1-1: [2:p1]

Si f *est une fonction continue sur* $[a,b]$ *, alors* f *est intégrable sur* $[a,b]$, *De plus si* F *est une primitive de* f *sur* $[a,b]$,

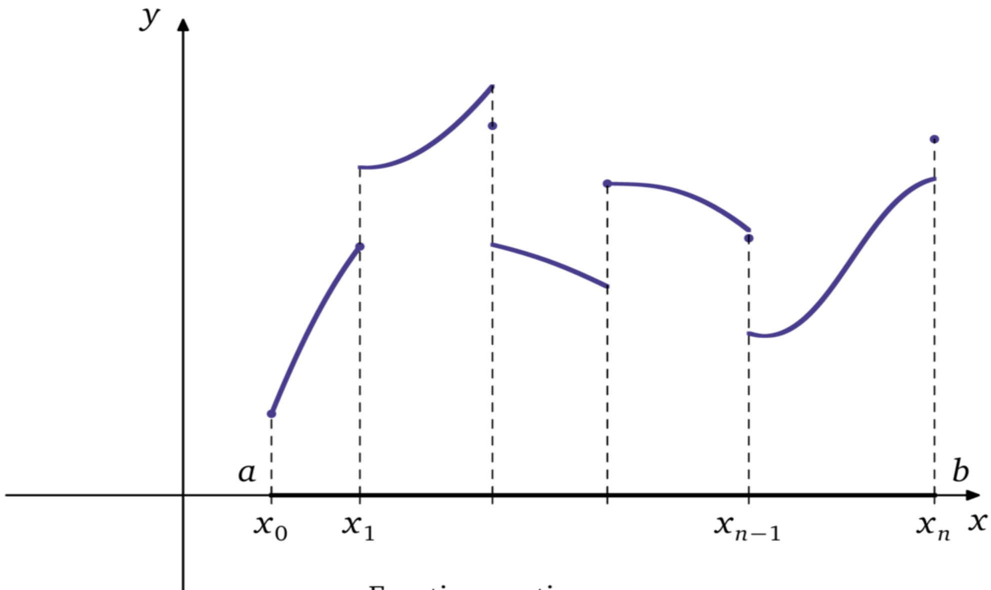
$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

1-2-2: Fonction continue par morceaux:

Définition 1-8:(Continue par morceaux)

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est dite* ***continue par morceaux*** *s'il existe une subdivision* $\sigma = (x_i)_{0<i<n}$ *telle que, pour tout de* $\{0 \dots \dots n-1\}$ *la restriction* f_k *de* f à $]x_k, x_{k+1}[$ *est continue. pour chaque* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ *existe une application* f_i*, définie et continue. Sur le segment* $]x_k, x_{k+1}[$ *et vérifiant*:

$$\forall\, x \in \,]x_k, x_{k+1}[, f_k(x) = f(x).$$



Fonction continue par morceaux sur un segment.

Théorème 1-2:

Si f *est une fonction continue par morceaux sur* $[a, b]$ *, alors* f *est intégrable sur* $[a, b]$.

Corollaire 1-1:

Si f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$,

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k\,(t)dt$$

(On utilise la relation de Chasles, énoncée ci-après).

1-2-3:Une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité:

Définition 1-9:

*On dira qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est **négligeable** si pour tout $\varepsilon > 0$*

il existe une suite $(I_n)_{n\geq 0}$ d'intervalles $I_n =]a_n, b_n[$ tels que:

$$A \subset \bigcup_{n\geq 0} In \quad et \quad \sum_{n\geq 0}(b_n - a_n) \leq \varepsilon \ .$$

Définition 1-10:

Un ensemble E est dit dénombrable si il existe une bijection entre E et l'ensemble des naturels $\mathbb{N}$.

Exemples :

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ *et* $\mathbb{Q}$ *sont dénombrables.*

Proposition 1-1:

1-Un singleton est négligeable.

2-un ensemble fini de points est négligeable.

3-un ensemble dénombrable est négligeable.

4-une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable .

Théorème 1-3:

Pour qu'une fonction $f \in \beta([a,b],\mathbb{R})$ *soit R- intégrable, il faut et il suffit que l'ensemble de ses points de discontinuité, soit négligeable.*

1-3:Propriétés de l'intégrale de Riemann : [4:p21]

Soient f, g *deux fonctions intégrables sur* $[a,b]$ *alors on a*

(1)*- Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est intégrable alors la restriction de* f *à tout intervalle* $[a_0, b_0] \subset [a,b]$ *est encore intégrable* .

(2)*-<u>Relation de Chasles :</u>*

Soit $a < c < b$ *, si* f *est intégrable sur* $[a,c]$ *et* $[c,b]$*, alors* f *est intégrable sur* $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

(3)-Positivité de l'intégrale

Soit $a < b$ *deux réels*:

$$si \quad f \leq g \quad alors \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx .$$

En particulier l'intégrale d'une fonction positive est positive :

$$si\ f > 0 \quad alors \int_a^b f(x)dx > 0 .$$

(4)-La linéarité de l'intégrale :

Pour tous réels λ, μ *on a :*

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

(5)-$f \times g$ *est une fonction intégrable sur* $[a,b]$ *mais en générale*

$$\int_a^b (fg)(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx \times \int_a^b g(x)dx.$$

(6)$-|f|$ *est une fonction intégrable sur* $[a,b]$:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

(7)-Les bornes d'intégration sont confondues:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

(8)-On permute les bornes d^' intégration:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

(9)-<u>intégration par parties</u> :

Soient $f, g \in C^1[a,b]$ *alors*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [fg]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Exemple 01 :

Calcul de $\int_0^1 xe^x dx$.

On pose $f(x) = x$ *et* $g'(x) = e^x$.*alors* $f'(x) = 1$ *et* $g(x) = e^x$.

La formule d'intégration par parties donne:

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} xe^x dx = \int_0^1 f(x)g'(x)dx$$

$$= [f(x)g(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x)g(x)dx$$

$$= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1.e^x dx$$

$$= (1.e^1 - 0.e^0) - [e^x]_0^1.$$

$$= e - (e^1 - e^0) = 1.$$

(10)-<u>première formule de moyenne</u>:

Soit f *une fonction réelle continue sur* $[a,b]$ *, il existe*

un point $c \in [a,b]$ *tel que*:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad ou \quad \int_a^b f(x)dx = (b-a)fc)$$

(11)-<u>deuxième formule de moyenne</u> :

Soient f *une fonction réelle continue sur* $[a,b]$,*et* φ *bornée*

et monotone dans $[a,b]$ *.on a alors: Il existe* $\xi\epsilon]a,b[$,*tel que* :

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx + \varphi(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

1-4: Utilisation de l'intégrale de Riemann :

Calculer des limites de sommes à partir d'intégrales.

Théorème 1-3: [5-p1]

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable, alors :*

$$s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)dx .$$

La somme s_n *s'appelle la somme de Riemann associée à l'intégrale et correspond à une subdivision régulière de l'intervalle* $[a,b]$ *en* n *petits intervalles. La hauteur de chaque rectangle étant évaluée à son extrémité droite.*

Le cas le plus utile est le cas où $a = 0$, $b = 1$ *alors*

$$\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \; et \; f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et ainsi

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(x)dx.$$

Exemple 02 :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$$

On va calculer sa limite

$$On \; a \;\; U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$$

On a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur $[0,1]$ *définie par*

$$f\,(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

On sait que U_n *converge alors vers*

$$\int_0^1 f\,(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [arctan\;x]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

Exemple 03 :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par*:

$$U_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k}$$

on va calculer sa limite :

Un changement d'indice donne

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+2n} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2+\frac{j}{n}}$$

qui est une somme de Riemann pour la fonction continue

$$f(x) = \frac{1}{2+x}$$

sur $[0,1]$*ainsi*

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{dx}{2+x} = ln\frac{3}{2}.$$

1-5 : Exemples :

Exemple 01 :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & si\ x = \dfrac{p}{q} \quad et\ (p,q) = 1. \\ 0 & sinou\ . \end{cases}$$

est discontinue dans $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ *.donc Intégrable car* :

l'ensemble $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ *est dénombrable donc négligeable.*

Exemple 02 :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ -1 & sinou \end{cases}$$

est discontinue partout et comme $\mathbb{R}$ *n' est pas dénombrable ;donc non intégrable.*

Exemple 03:

Soit $f \in [0,1]$ *telle que*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q}. \\ 0 & sinou. \end{cases}$$

est discontinue partout ; donc non R-intégrable, en effet :

Soit $\sigma = (x_i)_{0<i<n}$ *une subdivision de* $[0,1]$. *Pour tout*

$1 \leq i \leq n,$

l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ *contient un rationnel* α_i *et un irrationnel* β_i

(par densité de $\mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{Q}^c$ *dans* R)

On a alors

$$f(\alpha_i) = 1 \quad d'où \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}[} f(x) = 1$$

et

$$f(\beta_i) = 0 \; d'où \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}[} f(x) = 0.$$

On en déduit facilement que

$$I^-(f) = 0 \; et \; I^+(f) = 1.$$

pour toute subdivision σ. *On ne peut donc pas vérifier*

la définition de la Riemann intégrabilité :

avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, *comment trouver une subdivision* σ *telle que :*

$$1 = 1 - 0 \quad et \;\; I^{+}(f) - I^{-}(f) \leq \varepsilon.$$

La fonction f n'est pas Riemann-intégrable. On verra qu'elle est

Stieltjes intégrable.

Chapitre 02 :

L'intégrale de Stieltjes.

On a vu au chapitre 1, l'intégrale de Riemann de la fonction f définie sur $[a, b]$ par rapport à la variable x nous allons définir une nouvelle intégrale, celle de Stieltjes, en remplaçant la variable d'intégration x par une fonction g qui n'est pas toujours continue.

2-1: Définition de l'intégrale de Stieltjes :

***Définition 2-1**: (Subdivision d'un intervalle)*[7: p127]

*Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$,On appelle **subdivision de l'intervalle** $[a, b]$, toute suite finie strictement croissante, $\sigma = (x_i)_{0<i<n}$, telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$.*

Autrement dit $a = x_0 < x_1 <\ldots< x_n = b$.

Un raffinement d'une subdivision σ est une subdivision σ' du même intervalle, formée en rajoutant des points.

On dit alors que σ' est plus fine que σ.

Le pas d'une subdivision σ est la quantité

$$\|\sigma\| := \max_{0<i<n} (x_{i+1} - x_i).$$

Pour $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *et* $\sigma \in S[a, b]$, *on pose :*

$$V(f, \sigma) = \sum_j |f(x_{i+1}) - f(x_i)| .$$

__Définition 2-2__:(La somme de Stieltjes) $[\mathbf{6}: \boldsymbol{p}\mathbf{3}]$

Soit σ *une subdivision de l'intervalle* $[a, b]$; *et soit* $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ *tels que pour tout* $k = 1, \dots, n$.

La somme de Stieltjes de f *par rapport à* g *est* :

$$S(\sigma, f, g) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\big(g(x_k) - g(x_{k-1})\big).$$

__Définition 2-3__ : (Intégrabilité au sens de Stieltjes)

Une fonction f *est dite intégrable au sens de Stieltjes par rapport à* g *sur* $[a, b]$, *s'il existe* $A \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$S(\sigma, f, g) \to A \qquad avec \quad \max_k |g(x_k) - g(x_{k+1})| \to 0.$$

Exemple 2-1:

Soit $f(x) = x$ *et* $g(x) = x + [x]$ *Trouver* $\int_0^{10} f(x)\, dg(x)$.

Solution :

Considérons la subdivision : $\sigma = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots\dots, \frac{10n}{n}\right\}$. *puis*

$$S(\sigma, f, g) = \sum_{k=1}^{10n} f(t_k)\left(g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{10n} t_k\left(\left(\frac{k}{n} + \left[\frac{k}{n}\right]\right) - \left(\frac{k-1}{n} + \left[\frac{k-1}{n}\right]\right)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{10n} t_k\left(\frac{1}{n} + \left(\left[\frac{k}{n}\right] - \left[\frac{k-1}{n}\right]\right)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{10n} \frac{t_k}{n} + \sum_{k=1}^{10n} t_k\left(\left[\frac{k}{n}\right] - \left[\frac{k-1}{n}\right]\right).$$

Puis

$$\sum_{k=1}^{10n} \frac{t_k}{n} \to \int_0^{10} x\, dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=0}^{10} = 50$$

et

$$\sum_{k=1}^{10n} t_k\left(\left[\frac{k}{n}\right] - \left[\frac{k-1}{n}\right]\right) = \sum_{i=0}^{9} t_{(i+1)n}\big((i+1) - i\big) \to 55.$$

Quand $n \to \infty$ *on a* :

$$\int_0^{10} f(x)\, dg(x) = 50 + 55 = 105.$$

2-2 : Les fonctions à variation bornée :

La notion de fonction à variation bornée a été introduite par Camille Jordan. Cette classe des fonctions est très importante pour l'intégration au sens de Stieltjes.

<u>Définition 2-4</u> : (Fonction à variation bornée) [3:p94]

Une fonction $f\ :\ [a,b] \to\ \mathbb{R}$ *est dite à* ***variation bornée***

sur $[a,b]$ *si*:

$$V_f[a,b] \coloneqq \sup_{\sigma \in S[a,b]} V(f,\sigma) < \infty.$$

On désigne par $VB[a,b]$ *l'ensemble des fonctions à variation bornée sur* $[a,b]$.

<u>Théorème 2-1</u>: [7:p128]

Si f *une fonction monotone sur* $[a,b]$ *alors* f *à variation bornée sur* $[a,b]$.

<u>Preuve</u> :

Soit f *croissante alors pour toute subdivision* σ *sur* $[a,b]$ *on pose:*

$$\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) \quad , \qquad \text{on a } \Delta f_k \geq 0$$

$$V(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Delta f_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})]$$

$$= f(b) - f(a).$$

Théorème 2-2:

Soit I désigne le segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

Si $f \in C^1(I,\mathbb{R})$, alors f est à variation bornée et

$$V_{[a,b]}(f) = \int_a^b \|f'(x)\| \; dx.$$

Preuve :

Tout d'abord, f est à variation bornée et

$$V_{[a,b]}(f) \leq \int_a^b \|f'(x)\| \; dx.$$

Soit en effet $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ une subdivision de I

$$V(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} \|f(x_{i+1}) - f(x_i)\|$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(t)dt \right\|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|f'(x)\|dt$$

$$= \int_a^b \|f'(x)\|dx.$$

Théorème 2-3 :

Si g *une fonction continument dérivable sur* $[a, b]$ *alors*

g *à variation bornée sur* $[a, b]$.

Preuve :

Soit σ *une subdivision sur* $[a, b]$ *. Il existe* $M > 0$ *tell que :*

$$|g'(x)| \leq M \ \ pour\ tout\ x \in [a, b]\ .$$

Et par le théorème de la valeur moyenne, on a :

$$\forall\ 1 \leq k \leq n \quad , \qquad \exists\ \ c_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$|g(x_k) - g(x_{k-1})| = |g'(c_k)|(x_{k-1} - x_k) \leq M(x_{k-1} - x_k)$$

Ainsi

$$V(g, \sigma) \leq M(b - a)$$

Remarque 01 :

La réciproque est fausse ; Il existe des fonctions à variation bornée qui ne sont pas continument dérivables.

Exemple 2-2:

La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ *est à variation bornée mais non continue.*

Théorème 2-4 :

Si g *une fonction monotone sur* $[a,b]$ *alors* g *a variation bornée sur* $[a,b]$.

Preuve :

Soient g *une fonction croissante sur* $[a,b]$ *et* σ *une subdivision Sur* $[a,b]$ *on a :*

$$\sum_{j=1}^{n} |g(x_j) - g(x_{j-1})| = \sum_{j=1}^{n} \left(g(x_j) - g(x_{j-1})\right)$$

$$= g(x_n) - g(x_0)$$

$$= g(b) - g(a) = M < \infty$$

Donc

$$V(f,\sigma) \leq M.$$

Remarque 2-2 :

La réciproque est fausse ; Il existe des fonctions à variation bornée Qui ne sont pas monotone.

Exemple 2-3 :

$g(x) = sin\ (x)$ *fonction à variation bornée sur* $[0,2\pi]$ *mais non Monotone.*

Théorème 2-5:

Si g *a variation bornée sur* $[a,b]$ *alors* g une fonction bornée sur $[a,b]$

Preuve :

Soit $x \in [a,b]$ *et par la définition,*

on a

$$|g(x) - g(a)| \leq |g(x) - g(a)| + |g(b) - g(x)| \leq V(g,\sigma)$$

Donc par l'inégalité triangulaire

$$|g(x)| \leq |g(a)| + V(g,\sigma).$$

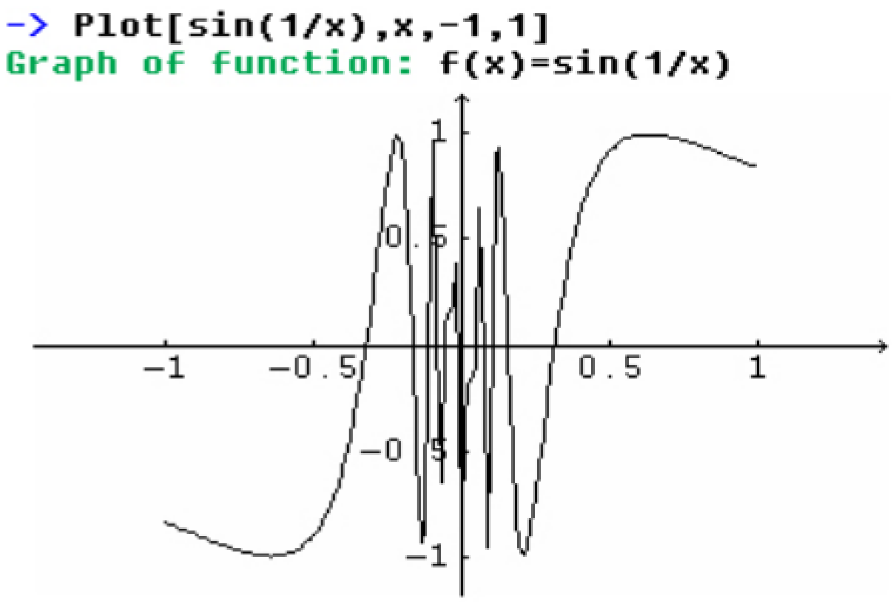
Remarque 2-3 :

La réciproque est fausse ; Il existe des fonctions bornées qui ne sont pas à variation bornée.

Exemple 2-4 :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f *une fonction bornée mais non à variation bornée sur* $[a,b]$.



2-3:Existence de l'intégrale de Stieltjes:

Nous considérons maintenant un cas important dans lequel l'intégrale de Stieltjes existe.

Théorème 2-6:

Si f *est continue sur* $[a,b]$ *, et si* g *fonction à variation bornée sur* $[a,b]$; *alors* $f \in S_T(g)$ *et la fonction*

$$F(t) = \int_0^t f(x)\, dg(x)\,.$$

Vérifie les propriétés suivantes :

(1) F *est une fonction a variation bornée sur* $[a,b]$.

(2) f *et* g *sont continue sur même point* .

Théorème 2-7: $[7: \mathbf{p128}]$

Si f *une fonction continue et* g *une fonction croissante (resp décroissante) alors*

$$\int_a^b f(x) dg(x) \text{ existe.}$$

Preuve :

Pour la démonstration de ce théorème on utilise quelque propriété de fonction continue. Le résultat est claire sans preuve.

Exemple 2-5:

On va calculer

$$\int_0^1 xd(x^2).$$

Par définition de l'intégrale de Stieltjes on a :

$$\int_0^1 f(x)dg(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\left[g\left(\frac{i}{n}\right) - g\left(\frac{i-1}{n}\right)\right].$$

Donc :

$$\int_0^1 xd(x^2) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n}\frac{2i-1}{n}\frac{1}{n}.$$

Mais :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Donc :

$$\int_0^1 xd(x^2) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{2}{3}.$$

2-4:Propriétés de l'intégrale de Stieltjes: $[\mathbf{7}:\boldsymbol{p}\mathbf{131}]$

Nous présentons maintenant quelque propriétés utilise dans l'intégrale de Stieltjes .Les fonction f et g dans les propriétés suivantes sera complexe sauf indication contraire.

2-4-1 : Table des propriétés :

Dans la liste suivante k une constante, f et g deux fonctions continues et croissantes.

$(\mathbf{1})$: $\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a).$

$(\mathbf{2})$:*Si g est constante alors:*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = 0.$$

$(\mathbf{3})$: $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} f(x)d[g(x)+k] = \int_a^b f(x)dg(x).$

$(\mathbf{4})$: $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} kf(x)dg(x) = k\int_a^b f(x)dg(x).$

$(\mathbf{5})$: $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} [f_{\mathbf{1}}(x)+f_{\mathbf{2}}(x)]dg(x) = \int_a^b f_{\mathbf{1}}(x)dg(x) + \int_a^b f_{\mathbf{2}}(x)dg(x).$

$$(\mathbf{6}): \int_{a}^{b} f(x)d[g_{\mathbf{1}}(x)+g_{\mathbf{2}}(x)] = \int_a^b f(x)dg_1(x) + \int_a^b f(x)dg_2(x).$$

$(\mathbf{7})$:*Si* $h(x) \geq 0$ *et* g *est une fonction croissante sur* $[a,b]$ *alors :*

$$\int_a^b h(x)dg(x) \geq 0.$$

$(\mathbf{8})$:*Si* $|f| \in S_T(g)$ *sur* $[a,b]$ *alors :*

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \leq \int_a^b |f(x)|dg(x)\,.$$

$(\mathbf{9})$: *Soit* $\{f_n(x)\}$ *une suite de fonctions tel que* $f_n \in S_T(g)$ *dans* $[a,b]$. *Si* $\{f_n(x)\}$ *converge vers une fonction f uniformement dans* $[a,b]$, $f \in S_T(g)$ dans $[a,b]$ *et on a :*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dg(x).$$

2-4-2 : Propriété linéaire : [7:p142]

Théorème 2-8:

Si $f_1, f_2 \in S_T(g)$ *sur* $[a,b]$ *alors* $c_1f_1 + c_2f_2 \in S_T(g)$ *sur* $[a,b]$ *alors*

$$\int_a^b (c_1f_1 + c_2f_2)\,dg = c_1\int_a^b f_1dg + c_2\int_a^b f_2dg.$$

Preuve :

Soient $h = c_1 f_1 + c_2 f_2$ *et* σ *une subdivision sur* $[a, b]$ *,on a*

$$S(\sigma, h, g) = \sum_{k=1}^{n} h(t_k)\big(g(x_k) - g(x_{k-1})\big)$$

$$= c_1 \sum_{k=1}^{n} f_1(t_k)\big(g(x_k) - g(x_{k-1})\big)$$

$$+ c_1 \sum_{k=1}^{n} f_2(t_k)\big(g(x_k) - g(x_{k-1})\big)$$

$$= c_1 S(\sigma, f_1, g) += c_2 S(\sigma, f_2, g).$$

Pour $\xi > 0$ *en choisissent* σ'_ξ *tel que* $\sigma \supseteq \sigma'_\xi$ *cela implique*:

$$\left| S(\sigma, f_1, g) - \int_a^b f_1 dg \right| < \xi$$

et en choisissent σ''_ξ *tel que* $\sigma \supseteq \sigma''_\xi$ *cela implique :*

$$\left| S(\sigma, f_2, g) - \int_a^b f_2 dg \right| < \xi.$$

Si $\sigma_\xi = \sigma'_\xi \cup \sigma''_\xi$ *alors*

$$\left| S(\sigma, h, g) - c_1 \int_a^b f_1 dg - c_2 \int_a^b f_2 dg \right| \leq |c_1|\xi + |c_2|\xi .$$

Théorème 2-9 :

Si $f \in S_T(g)$ *et* $f \in S_T(k)$ *sur* $[a,b]$ *alors* $f \in S_T(c_1 g + c_2 k)$

sur $[a,b]$*,alors*

$$\int_a^b f d(c_1 g + c_2 k) = c_1 \int_a^b f dg + c_2 \int_a^b f dk.$$

Théorème 2-10:

Si $c \in [a,b]$ *alors*

$$\int_a^b f\, dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg \;.$$

On en déduit :

$$\int_b^a f\, dg = -\int_a^b f dg.$$

Preuve :

Si σ *une subdivision sur* $[a,b]$ *et* $c \in \sigma$ *,alors* :

$$\sigma' = \sigma \cap [a,c] \quad \text{et} \;\; \sigma'' = \sigma \cap [c,d]$$

On a

$$S(\sigma, f, g) = S(\sigma', f, g) + S(\sigma'', f, g)$$

Si $\sigma' = \sigma \cap [a,c]$ *alors* $\left|S(\sigma', f, g) - \int_a^c f dg\right| \leq \frac{\xi}{2}$.

et si $\sigma'' = \sigma \cap [a,c]$ *alors* $\left|S(\sigma'', f, g) - \int_c^b f dg\right| \leq \frac{\xi}{2}$.

donc

$$\left| S(\sigma, f, g) - \int_a^c f dg - \int_c^b f dg \right| < \xi.$$

Ensuite :

$$0 = \int_a^a f\, dg = \int_a^b f dg + \int_b^a f dg$$

Donc

$$\int_b^a f\, dg = -\int_a^b f dg$$

2-4-3:Intégration par parties :[$\mathbf{7}$: $\boldsymbol{p}\mathbf{146}$]

Théorème 2-11 :

Si f est fonction à variation bornée et g est continue alors l'intégrale de Stieltjes de f par rapport à g elle est existé telle que

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = f(b)g(a) - \int_a^b g(x)\, df(x)\,.$$

Preuve:

On a

$$\sigma_\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)], \quad x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)[f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})] - g(a)[f(\xi_0) - f(a)]$$
$$- g(b)[f(b) - f(\xi_{n-1})] + f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Comme

$$f(\xi_0) - f(a) \ , et\ f(\xi_{n-1}) - f(b) \ \ tendent\ \ vers\ \ 0,$$

on obtient

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = -\int_a^b g(x)\, df(x) + f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Exemple 2-6 :

Soit $f(x) = x$ *et* $g(x) = x + [x]$ *et*

$$\int_0^{10} f(x)\, dg(x) = f(10)g(10) - f(0)g(0) - \int_0^{10} g(x) df(x).$$

$$= 10 \times 20 - 0 \times 0 - \int_0^{10} (x + |x|) dx.$$

$$= 200 - 50 - \int_0^{10} [x] dx = 150 - 45 = 105.$$

2-4-4:Intégrale de Riemann :

Propriété 2-1 :

Si $f \in S_T(g)$ *et la dérivé de* g *est continue sur* $[a,b]$ *,alors*

on a

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

2-4-5:Changement des variables :$[\mathbf{7}\colon \mathbf{p144}]$

Théorème 2-12 :

On suppose que $f \in S_T(g)$ *sur* $[a,b]$ *et* h *est une fonction continue et strictement croissante sur* $[c,d]$

avec $a = h(c)$ *,* $b = h(d), k = f \circ h, l = g \circ h$ *.*

Soit $k \in S_T(l)$ *sur* $[c,d]$

alors

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_c^d f(h(t))dg(h(t)) = \int_c^d k(t)dl(t)\,.$$

Exemple 2-7:

Soit $y = \sqrt{x}$ *,on a* :

$$\int_0^4 \left([\sqrt{x}] + x^2\right) d\sqrt{x} = \int_0^2 ([y] + y^4)dy$$

$$= \int_0^2 [y]dy + \int_0^2 y^4 dy = 1 + \frac{1}{5} y^5|_{y=0}^2 = \frac{37}{5}.$$

2-4-6:Théorème de comparaison :

Théorème 2-13 **:**

Supposons que g *une fonction croissante sur* $[a,b]$ *.*

Si $f, h \in S_T(g)$ *sur* $[a,b]$ *.Si* $f(x) \leq h(x)$ *et* $x \in [a,b]$ *.*

alors

$$\int_a^b f(x)dg(x) \leq \int_a^b h(x)dg(x) \quad .$$

Corollaire 2-1:

Si $h(x) \geq 0$ *et* g *est une fonction croissante sur* $[a,b]$ *,alors*

$$\int_a^b h(x)dg(x) \geq 0.$$

2-4-7: Théorème de moyenne: [6:p 137]

On a $\xi \in [a,b]$

Théorème 2-13:

Soient f *une fonction continue et* g *une fonction croissante.*

On a alors

$$\int_b^a f(x)dg(x) = f(\xi) \int_a^b dg(x).$$

Théorème 2-14:

Soient $f \in S_T(g)$ *,et* φ *bornée et monotone dans* $[a, b]$.

On a, alors

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dg(x) = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)dg(x) + \varphi(b)\int_\xi^b f(x)dg(x).$$

2-4-8 :l'intégrale de Riemann contre l'intégrale Stieltjes :

L'intégrale de Stieltjes est une modification de l'intégrale de Riemann.

	l'intégrale de Riemann	*L'intégrale de Stieltjes*
f est intégrable par rapport à :	x	$g(x)$
Les sommes de Darboux	$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$	$\Delta g_i = g(x_i) - g(x_{i-1})$

Chapitre03:

Application de l'intégrale de Stieltjes à l'approximation de séries.

Dans ce chapitre, on va donner des exemples d'applications de l'intégrale de Stieltjes, pour évaluer asymptotiquement certaines séries de théorie des nombres.

3-1:Sommation d'Abel :

Lemme 3-1:

Soient $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *et* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *suites des nombres complexes.*

On a :

$$A_n = \sum_{m=1}^{n} a_m \,(n \geq 1), avec\ A_0 = 0$$

alors

$$\sum_{n=1}^{N} a_n\, b_n = \sum_{n=1}^{N-1} A_n(\, b_n - b_{n+1}) + A_N b_N.$$

Preuve :

$$\sum_{n=1}^{N} a_n\, b_n = \sum_{n=1}^{N} (\, A_n - A_{n-1}) b_n$$

$$= \sum_{n=1}^{N} A_n \, b_n - \sum_{n=1}^{N-1} A_n \, b_{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_N b_N.$$

Ce lemme constitue un outil simple mais efficace pour manipuler des sommes arithmétiques.

Théorème 3-1: *(Abel)* $[\mathbf{9}\colon \boldsymbol{p}\ \mathbf{6}]$

Soit f *une fonction de classe* C^1 *sur un intervalle* $[y, x]$ *,*

avec $x > y \geq 1$, *et soit* $(a_n)_{n\geq 1}$ *une suite des nombres complexes.*

$$A(x) = \sum_{n\leq x} a_n$$

Alors

$$\sum_{y<n\leq x} a_n f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) + \int_y^x A(t)f'(t)dt.$$

Preuve(1):[9 :p 8]

(Sans utiliser l'intégrale de Stieltjes)

Pour $n < t < n + 1$

$$A(t) = A(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Alors

$$\int_{n}^{n+1} A(t)f'(t)dt - A(t)\int_{n}^{n+1} f'(t)dt - A(n)\big(f(n+1) - f(n)\big).$$

Supposons $x = N, et\ y = M\ entiers.$

On a

$$\int_{M}^{N} A(t)f'(t)dt = \sum_{n=M}^{N-1}\int_{N}^{n+1} A(t)f'(t)dt$$

$$= \sum_{n=M}^{N-1} A(n)\big(f(n+1) - f(n)\big)$$

$$= \sum_{n=M+1}^{N} A(n-1)f(n) - \sum_{n=M}^{N-1} A(n)f(n)$$

$$= -\sum_{n=M+1}^{N} f(n)\big(A(n) - A(n-1)\big) + f(N)A(N) - f(M)\,A(M)$$

$$= -\sum_{n=M+1}^{N} a_n f(n) + f(N)A(N) - f(M)A(M)$$

La formule est démontrée quand x et y sont entiers.

Quand x n'est pas entier, il suffit d'ajouter

$$\int_{[t]}^{t} A(t)f'(t)dt = A([x])\big(f(x) - f(([x])\big).$$

$Avec \quad A([x]) = A(t).$

De méme quand y n'est pas entier .

Preuve(2):

$(En\ utilisant\ \ l'intégrale\ de\ \ Stieltjes\ )$

$Appliquons\ le\ théorème\ 2-8:$

$$\sum_{y<n\leq x} a_n f(n) = \int_y^x f(t)dA(t)$$

$$= [A(t)f(t)]_y^x - \int_1^x f'(t)\,A(t)dt$$

$$= A(x)f(x) - A(y)f(y) + \int_y^x A(t)f'(t)dt.$$

Ceci donne le résultat.

3-2 : Comparaison d'une somme et d'une intégrale :

Théorème 3-2:

Soit f une fonction monotone sur l'intervalle $[y, x]$,

$avec\, y, x \ \in \mathbb{Z}.$

Si existe $\theta = \theta(y, x), tel\ que\ 0 \leq \theta \leq 1\ \ alors$

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = \int_y^x f(t)dt + \theta(f(x) - f(y)).$$

Preuve:

Appliquons le lemme d'Abel, avec $a_n = 1$ *pour tout* n,

donc

$$A(x) = \sum_{0<n\leq x} 1 = [x] \quad \text{(Partie entière de x)}$$

La partie fractionnaire de x*, est notée* $\{x\}$.

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) - \int_y^x f(t)dt = \int_y^x f(t)d[t] - \int_y^x f(t)dt = -\int_y^x f(t)d\{t\}$$

On intègre par partie, on trouve

$$[-f(t)\{t\}]_y^x + \int_y^x \{t\}df(t) = \int_y^x \{t\}df(t)$$

Avec :

$$0 \leq \int_y^x \{t\}df(t) < \int_y^x df(t) = f(x) - f(y)$$

C'est-à-dire

$$\int_y^x \{t\}df(t) = \theta\big(f(x) - f(y)\big) \quad \text{avec } 0 < \theta \leq 1$$

3-3 : Evaluation de la série $\sum_{N \leq x} \frac{1}{n}$:

Théorème 3-3:

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \log x + \gamma \right| < \frac{1}{x} \quad \text{où } \gamma = 1 - \int_1^\infty \{t\} \frac{dt}{t^2}$$

Preuve:

$$Posons\ y = 0\ , f(n) = \frac{1}{n}\ \ et\ A(x) = \sum_{1<n\leq x} 1 = [x]$$

On a

$$\sum_{1<n\leq x} \frac{1}{n} = \int_{1-}^{x} \frac{d[t]}{t}$$

$$= \left[\frac{[t]}{t}\right]_{1-}^{x} + \int_{1-}^{x} \frac{[t]dt}{t^2}$$

$$= \frac{[x]}{x} + \int_{1-}^{x} \frac{[t]dt}{t^2}$$

$$= \frac{x - \{x\}}{x} + \int_{1-}^{x} \frac{t - \{t\}}{t^2} dt$$

$$= 1 - \frac{\{x\}}{x} + \log x - \int_{1-}^{x} \frac{\{t\}dt}{t^2}$$

$$= 1 - \frac{\{x\}}{x} + \log x - \int_1^\infty \{t\} \frac{dt}{t^2} + \int_x^\infty \{t\} \frac{dt}{t^2}$$

$$= \log x + \left(1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}dt}{t^2}\right) - \frac{\{x\}}{x} + \int_x^\infty \frac{\{t\}dt}{t^2}$$

On note

$\gamma = 1 - \int_1^\infty \{t\} \frac{dt}{t^2} \approx 0.577215663$... *(constante d'Euler)*

D'autre part, on a les encadrements :

$0 \leq \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt < \frac{1}{x}$ *avec* $-\frac{1}{x} < \frac{-\{x\}}{x^2} \leq 0$

Finalement on a

$$\left|\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \log x + \gamma\right| < \frac{1}{x}$$

Corollaire 3-1:

Pour $n \geq 1$ *on a*

$$\left|\sum_{1<n\leq x} \log n - x \log x + x - 1\right| < \log x$$

Preuve :

Posons $y = 0$, $f(n) = \log n$ *et* $A(x) = \sum_{1<n\leq x} 1 = [x]$

On a

$$\sum_{1<n\leq x} \log n = \int_{1-}^{x} \log t \, d[t]$$

$$= [[t]log\, t]_{1-}^{x} - \int_{1}^{x} \frac{[t]dt}{t}$$

$$= [x]log\, x - \int_{1}^{x} \frac{[t]dt}{t}$$

$$= (x - \{x\})logx - \int_1^x \frac{t-\{t\}}{t} dt$$

$$= -\{x\}logx + x\, log\, x - x + 1 + \int_{1}^{x} \frac{\{t\}dt}{t}$$

Alors

$$0 \leq \int_1^x \frac{\{t\}dt}{t} < logx \quad et\ -logx < -\{x\}logx \leq 0$$

Finalement, on a

$$\left| \sum_{1<n\leq x} log\, n - x\, log\, x + x - 1 \right| < log\, x$$

3-4:La formule de la somme d'Euler-Maclaurin:

3-4-1:polynômes et nombres de Bernoulli :

Soit $\{b_r(x)\}_{r=0}^{\infty}$ *définit sur l'intervalle* $[a, b]$, *soit les conditions:*

$(1) b_0(x) \equiv 1,$

$(2) b'_r(x) \equiv r b_{r-1}(x) (r \geq 1),$

$(3) \int_{0}^{1} b_r(x)dx = 0 \quad (r \geq 1).$

On vérifie facilement qu'on a l'identité suivante :

$$\sum_{r=0}^{\infty} b_r(x)\frac{y^r}{r!} = \frac{ye^{xy}}{e^y - 1}$$

On peut calculer les $b_r(x)$*,nous avons*

$$b_0(x) = 1 \qquad b_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$b_1(x) = x - \frac{1}{2} \qquad b_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$$

$$b_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} \qquad b_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$$

On définit alors les B_r *, nombres de Bernoulli par:*

$B_r \coloneqq b_r(0)$.

Il est facile de voir que $B_{2r+1} = 0$,

Pour $r \geq 1$*.On a les valeurs numériques :*

r	*0*	*1*	*2*	*4*	*6*	*8*	*10*
B_r	*1*	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$

Soit f *une fonction numérique de classe* C^{k+1} *sur l'intervalle* $[a,b]$,

avec $a, b \in \mathbb{Z}$*. Depuis* $B_1(\{x\}) = \{x\} - \frac{1}{2}$*, on écrit*

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)d[t] = \int_a^b f(t)dt - \int_a^b f(t)dB_1\{t\}.$$

On intégrant par partie:

$$\int_a^b f(t)dB_1(t) = B_1 . \big(f(b) - f(a)\big) - \int_a^b B_1(t)f'(t)dt.$$

$$= B_1.\left(f(b) - f(a)\right) - \frac{1}{2!}\int_a^b f'(t)dB_2(t).$$

En effet, il peut facilement vérifier que $B_2(t)$ *est continue dans* $\mathbb{R}$

et différentiable dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ *, où il satisfait* $B'_2(t) = 2B_1(t)$.

En encore, pour $r > 3$.

$B_r(t)$ *est différentiable sur la vrai ligne entière et satisfait*

$$B'_1(t) = rB_{r-1}(t).$$

Nous pouvons alors calculer l'intégrale. En ce qui concerne $B_2(t)$ *par une nouvelle intégration partielle impliquant* $B_3(t)$*,réitérant le processus, nous obtenons de cette façon le théorème célèbre suivant.*

3-5: Formule de la somme d'Euler-Maclaurin :

***Théorème 3-4* :**

Pour tout entiers $k \geq 0$ *et pour tout fonctions* f *de classe* C^{k+1} *dans* $[a, b]$, *tel que* $a, b \in \mathbb{Z}$,*on trouve* :

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)dt + \sum_{r=0}^{k} \frac{(-1)^{r+1}B_{r+1}}{(r+1)!}\left(f^{(r)}(b) - f^{(r)}(a)\right)$$

$$+ \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_a^b B_{k+1}(t)\, f^{(k+1)}(t)dt.$$

Par l'application de cette formule, nous donnons une évaluation des sommes partielles de la série harmonique.

Théorème 3-5:

Pour $n \geq 1$ *on trouve:*

$$\sum_{m \leq n} \frac{1}{m} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{\theta}{60n^4}$$

tel que γ *constante d'Euler et* $\theta = \theta_n \in [0,1]$.

Preuve:

On applique le théorème $3-4$ *tel que*: $f(t) = 1/t$, $a = 1$, $b = n$, $k = 3$.

Nous avons ajouté la limite correspondant a $m = 1$ *et laissant* n

tendre à l'infini, nous obtenons

$$\sum_{m \leq n} \frac{1}{m} = \log n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + 1\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n^2} - 1\right) + \frac{1}{120}\left(\frac{1}{n^2} - 1\right) - \int_1^n t^{-5} B_4(t)dt$$

$$= \log n + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{120} - \int_1^\infty t^{-5} B_4(t)dt\right)$$

$$+ \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n} + \int_n^\infty t^{-5} B_4(t)dt$$

Tel que

$$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{120} - \int_1^\infty t^{-5} B_4(t)dt \ \ est\ la\ constante\ d'Euler$$

Comme

$$|B_4(t)| \leq \frac{1}{30} \quad pour\ tout\ t,$$

on a:

$$\left|\int_n^\infty t^{-5}B_4(t)dt\right| \leq \frac{1}{120m^4}$$

Alors

$$0 \leq \frac{1}{120m^4} + \int_n^\infty t^{-5}B_4(t)dt \leq \frac{1}{60n^4}$$

Finalement

$$\sum_{m\leq n}\frac{1}{m} = log\, n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{\theta}{60n^4}$$

Pour tout $\theta = \theta_n \in [0,1]$

Remarque 3-1:

En allant plus loin , on aura

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{r=2}^{k}\frac{B_r}{r} - \int_{1}^{\infty} t^{-k-1}\, B_k(t)dt \ (t \geq 1)$$

Remarque 3-2 :

On peut utiliser la formule pour évaluer $\sum_{m\leq n}\frac{1}{m}$

avec une grande précision

en prenant, n=10 avec une erreur inférieure à 0.000002

$$\sum_{m\leq 10}\frac{1}{m} = log\, 10 + \gamma + \frac{1}{2(10)} - \frac{1}{12(10)^2} + \frac{\theta}{60(10)^4} \approx 2.626382663.$$

Référence :

[1] : *Intégrales. Arnaud Bodin*

[2] :*Intégrale de Kurzweil-Henstock pour une fonction réelle définie sur [a,b].mémoire de licence.brahim boutkhamouine.Le 24 juin 2015.*

[3]:*J.Yameogo. (Résumé de la séane du 24 fevrier 2010)*.

[4] :*Intégration: fonction réelle d'une variable réelle*

[5]*www.klubprepa.net.(Jean-Michel Ferrard)*.

[6]: *Stieltjes Widder*

[7]:*Advanced Calculus . Widdder*

[8]*:Introduction analytic and probabilistic (number theory, Tenembaum 1985)*

[9] *:théorie analytique des nombres(Michel Waldschmidt 06-04-2008)*