République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

<u>Mémoire</u>

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP Et Analyse numérique**

Réalisé par :

MAIZI Meriem
MOKRANI Nouha

Intitulé

Etude de cycles limites pour une classe des systèmes différentiels polynomiaux de Kolmogorov

<u>Dirigé par</u> : D_r MENACEUR Amor

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.GHIAT Mourad	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. MENACEUR Amor	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. MELLAL Roumaissa	MCB	Univ-Guelma

Session Juillet 2019

Remerciements

Au terme de ce travail je tiens à remercier tous les intervenants et toutes les personnes qui de près ou de loin, ont contribué à sa réaction, en particulier :

Nous voudrons tout d'abord remercier Dieu, notre créateur de m'avoir donné la volonté et le courage afin d'accomplir ce modeste travail.

Nous tenons à remercier vivement notre encadreur Monsieur MENACEUR AMOR qui a proposé le thème de ce mémoire et pour leur suivi, leurs aides et ses conseils et remarques.

Nous remercions aussi les membres du jury : le président Dr GHIAT Mourad et L'examinateur Dr MELLAL Roumaissa de leur présence et des observations qu'ils ont porté à notre travail.

Nous remercions l'ensemble du personnel de département de mathématique (étudiant, Enseignants, secrétaires).

Nos collègues de fin de cycle, qui nous ont donné leurs encouragements toute la durée de réalisation de ce travail.

Nos familles, qui durant nos études, nous ont toujours donné la possibilité de faire ce que nous voulions et qui ont toujours cru en nous.

Toutes les personnes qui nous ont aidé et soutenu de près ou de loin tout le long de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à me chers être dans ma vie

À mes parents et ma grand-mère Zohra, qui m'ont toujours poussé et motivé dans mes études, pour leur amour, leur tendresse, et pour leur soutien matériel et surtout moral durant toute ma vie.

À ma grande sœur Naima et son mari Walid pour ces aides sans oublier ma puce et ma princesse MAYAR qui je l'adore.

À mes frère ABD EL-RAHMAN et AYOUB, et mes sœurs MARWA, NADA et bien sûr ma belle-sœur NADJWA pour leur effort avec moi.

À toute ma famille

À mon cher et mon époux ILYES qui je souhaiterais une longue vie plein de joie, bonheur. Celui qui est m'ont encouragé qui a été compréhensif et toujours à mes côtés dans la tristesse et la joie pour leur soutien moral.

À ma chère amie et sœur HOUDA merci pour ta patience ta tolérance et pour les bons moments qu'on a partagé.

À toutes mes amies surtout SARA, SIHAM, BOUCHRA, SAMIRA, NOUHAD, AFEF, WIDED et MOUNA sans oublier ma puce NORO.

À ma binôme et ma puce NOUHA

À tous les étudiants de notre promo 2018/2019.

À tous ceux qui m'ont encouragé et qui m'ont aidé et qui ont contribué de façon ou d'une autre à la réalisation de ce modeste travail.

MERIEM

Dédicace

Je dédie ce travail à mes très chers êtres au monde

Le grand merci à mes très chers parents, qui ont toujours été là pour moi par leur amour, tendresse, encouragement, et leur soutien durant toute ma vie.

Je remercie ma sœur HOUDA et son mari BADRI et mon frère YASSINE et sa femme YAMINA et aussi mon frère ABDOU, pour leurs encouragements.et mes chères neveux petits MAYSSOUNE, ZAKARIA, mon prince GHAYTH et ma princesse LAYANE, Qui sont dans ma vie.

Je remercie mon future époux et bien aimé KHALED qui m'a toujours encourage et soutenue.

Enfin, je remercie ma chère binôme MERIEM et mes amies HALOUMA, KAHINA, BATOUTA, WIDED, BOUCHRA et mes collèges aussi et toute ma famille.

À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

****Nouha****

Table des matières

Résumé

Dans ce travail, nous étudions l'existence et la non existence des cycles limites des systèmes polynômiaux dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$$

où P et Q sont des polynômes de degré n. Ainsi que les systèmes différentiels de kolmogorov de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = xp(x, y) \\ \dot{y} = yq(x, y), \end{cases}$$

tel que $p(x, y) = (FU + \lambda y U_y)$, $q(x, y) = (GU - \lambda x U_x)$ avec U, F et G sont des polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Mots clés : Cycle limite, système de Kolmogorov, solutions périodiques, courbes invariantes.

Abstract

In this work, we study the existence and non-existence of limit cycles of the polynomial systems in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$$

with P and Q are polynomials.

We also study the existence of limit cycles of kolmogorov system of the type

$$\begin{cases} \dot{x} = xp(x, y) \\ \dot{y} = yq(x, y), \end{cases}$$

where $p(x, y) = (FU + \lambda y U_y)$, $q(x, y) = (GU - \lambda x U_x)$ with F, U and G are polynomials $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Key words : Limit cycle, Kolmogorov system, periodic solution, Invariant curres.

Introduction

Un des problèmes principaux dans la théorie qualitative des équations différentielles est l'étude de l'intégrabilité et les cycles limites des systèmes différentiels planaires polynomiaux. L'intérêt des cycles limites des systèmes différentiels planaires est dû à leurs significations importantes dans les modèles mathématiques issus de la pratique dans plusieurs branches des sciences (Physique, Biologie, Economie, ...).

Les cycles limites ont été introduits pour la première fois par H. Poincaré en 1881 dans son "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle" [12]. Poincaré s'est intéressé à l'étude qualitative des solutions des équations différentielles, c'est à dire des points d'équilibre, des cycles limites et de leur stabilité. Ce qui permet d'avoir une idée globale des autres orbites du système étudié. A la fin des années 1920, Van Der Pol, Liénard et Andronov ont prouvé qu'une trajectoire fermée d'une oscillation arrivant dans un circuit de tube vide était un cycle limite.

Le mathématicien David Hilbert [5] présenta, lors du deuxième congrès international des mathématiques (1900), 23 problèmes "dont l'avenir attend la résolution grâce aux nouvelles méthodes qui seront découvertes dans le siècle qui commence". Le problème numéro 16 est de savoir le nombre maximal et la position relative des cycles limites d'un système différentiel, Ce problème est non résolu à ce jour. Beaucoup de travaux récents sont consacrés à l'étude des cycles limites, voire par exemple les papiers ([2], [3], [8], [9], [10], [15], [17]).

En biologie mathématique, un modèle de système d'équations différentielles a été proposé, indépendamment, par Alfred James Lotka(1880 1949) en 1925 et Vito Volterra (1860 1940) en 1926, d'où le nom Lotka-Volterra. Ce modèle connu aussi sous le nom "proie-prédateur" décrit l'interaction entre deux espèces d'une population et son évolution. Le modèle de Lotka-Volterra à fait l'objet d'une vaste littérature. Ce modèle ne présente pas de cycles limites, mais il reste le point de départ de plusieurs modèles proposés actuellement. Kolmogorov a considéré le système proie-prédateur général où l'existence de cycles limites est probable. Ces Systèmes interviennent dans la modélisation de plusieurs phénoménologies liées à l'écologie et à l'environnement socio-économique.

Dans notre travail, nous allons utiliser la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires pour traiter une classe des systèmes différentiels planaires polynomiaux de Kolmogorov de la forme

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xp\left(x,y\right) \\ \dfrac{dy}{dt} = yq\left(x,y\right), \end{cases}$$

où p et q sont des polynômes.

Ce mémoire est structuré comme suit : Le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques notions préliminaires sur les systèmes différentiels planaires. On définit la notion de points singuliers, la linéarisation des systèmes différentiels non linéaires, le portrait de phases, les courbes invariantes, ainsi que les solutions périodiques. Le deuxième chapitre, on énoncera des critères pour l'existence et la non existence des cycles limites. De plus, on rappellera un théorème qui caractérise la stabilité d'un cycle limite. Dans le troisième chapitre, seront traitées trois classes de systèmes différentiels de type Kolmogorov de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(FU + \lambda y U_y\right) \\ \dot{y} = y\left(GU - \lambda x U_x\right), \end{cases}$$

où U, F, et G sont des polynomes et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base des systèmes dynamiques, équations et systèmes différentielles, flot et points critiques, la stabilité du point critique du système différentiel, portrait de phase, cycle limites. Enfin nous terminons par donner les définitions des courbes algébriques invariantes.

1.1 Equations et systèmes différentiels

1.1.1 Equation différentielle

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel normé, une équation différentielle ordinaire (EDO) est une relation entre la variable réelle t, une fonction inconnue $t \to y(t)$ et ses dérivées $\left(y^{'}, y^{''}, ..., y^{(n)}\right)$ au point t définie par*

$$F\left(t, y, y^{'}, ..., y^{(n)}\right) = 0. \tag{1.1}$$

Soit y une fonction de t définie d'un intervalle I dans l'espace vectoriel normé E, n fois dérivable en tout point de I et $y^{'}$, y'', ..., $y^{(n)}$ ses dérivées successives. Cette fonction y est solution de (1.1) si $\forall t \in I$

$$F(t, y(t), y^{'}(t), ...) = 0.$$

Définition 1.1.2 *(EDO linéaire et non linéaire) : L'équation (1.1) est dite linéaire si elle s'écrit sous la forme*

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + ... + a_1 y^{'} + a_0 y = b, \tag{1.2}$$

où a_0, a_1, ..., a_n, b sont des fonctions de t ou bien des constantes. Autrement dit l'équation (1.1) est dite non linéaire si n est un entier strictement positif et si $a_n \neq 0$ l'équation (1.2) est d'ordre n.

1.1.2 Système différentiel

Un système différentiel linéaire d'ordre n est un système d'équations différentielles linéaires de la forme

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = a_{11}(t)y_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)y_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) = a_{n1}(t)y_n(t) + \cdots + a_{nn}(t)y_n(t) + b_n(t), \end{cases} \tag{1.3}$$

où y_1, ..., y_n sont les fonctions inconnues à déterminer et où les a_{ij} et b_j sont supposés données. Ce systéme différentiel peut s'écrire comme une seule équation différentielle dans

$$\mathbb{R}^n : \dot{Y}(t) = A(t)y(t) + b(t), \tag{1.4}$$

où A est la matrice des coefficients a_{ij} et où on a introduit les vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $Y = (y_1, ..., y_n)$, $\dot{Y} = (\dot{y}_1, ..., \dot{y}_n)$, et $b = (b_1, ..., b_n)$. L'équation est dite homogène si $b = 0$, et non homogène lorsque $b \neq 0$.

Définition 1.1.3 *(Système dynamique) : Un système dynamique sur $\mathbb{R}^n$est une application*

$$U : \mathbb{R}^+ * \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

définit sur tout $\mathbb{R}^+ * \mathbb{R}^n$ telle que :

•$U(., x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ est continue.
•$U(t, .) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue.
•$U(0, x) = x$.
•$U(t + s, x) = U(t, u(s, x))$ pour t, $s \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.1.1 *Soit le système linéaire suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_{0,} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n,$$

où A est une matrice constante. La solution de (1.4) est :

$$x(t) = \exp(tA) * x_0.$$

Le système (1.4) *engendre un système dynamique car :*

$$U : \mathbb{R}^+ * \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$U(t,x) = \exp(tA) * x, \quad t \in \mathbb{R}^+, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

•U est continue.
•$U(0,x) = x$.
•$U(t+s,x) = U(t,u(s,x))$.

1.2 Flots et points critiques

Soit le système différentiel non linéaire

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.5}$$

où $x = x(t)$ appartient à un ouvert U (un ouvert de l'espace des phases paramétrisées par les coordonnées locales x) de $\mathbb{R}^n$ et f une application de U dans $\mathbb{R}^n$. L'application f est appelée champ de vecteurs.

Définition 1.2.1 *On appelle flot sur l'ouvert U dans $\mathbb{R}^n$, une application continûment différentiable*

$$\phi : \mathbb{R} \times U \to U,$$

telle que

(*i*) $\phi(0,x) = x, \forall x \in U \subset \mathbb{R}^n$;
(*ii*) $\phi(t,\phi(s,x)) = \phi(t+s,x)$, $\forall$ $(t,s) \in \mathbb{R}^2, \forall$ $x \in U \subset \mathbb{R}^n$.

Notons $\phi(t,x) = \phi_t(x)$. Autrement dit, le flot est une solution d'équations différentielles qui décrit l'évolution d'un système dynamique.

Remarque 1.2.1 *Le flot est dit autonome si f ne dépend pas explicitement du temps, et il est dit non-autonome dans l'espace des phases si cette fonction dépend explicitement du temps.*

Définition 1.2.2 *Soit le système différentiel suivant :*

$$\dot{X} = f(X).$$

On appelle point d'équilibre de ce système, tout point $X_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(X_0) = 0$$

Définition 1.2.3 *Le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est appelé un point critique (aussi, point d'équilibre, point singulier, ... etc) du système(1.5), s'il satisfait l'équation de linéarisation et classification des points critiques.*

1.2.1 Linéarisation

Dans l'analyse des points critiques nous commençons par la linéarisation du système d'équations différentielles au voisinage de ces points critiques.

Définition 1.2.4 *Soit le système suivant*

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.6}$$

où

$$A = Df(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)) = Df(x_0), 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

est une matrice $(n \times n)$, est appelé le système linéarisé de (1.5) en x_0.

1.2.2 Classification des points critiques

Notons la matrice Jacobienne A par :

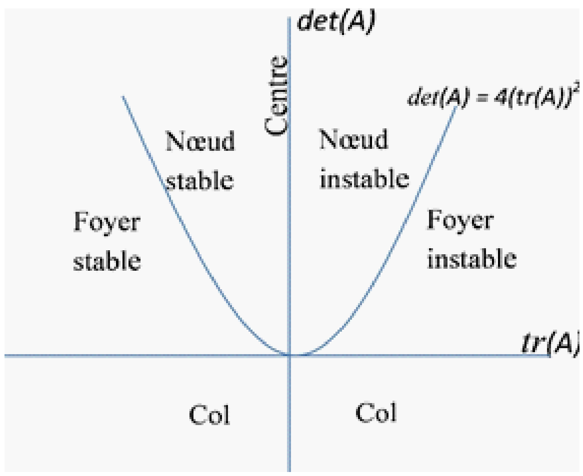
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

où λ_1, λ_2 sont les valeurs propres de A, cette matrice s'appelle souvent matrice de stabilité, les valeurs propres de A données en fonction du déterminant et de la trace par

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(tr(A) \pm \sqrt{(tr(A))^2 - 4\det(A)}),$$

et vérifient les relations $\lambda_1 + \lambda_2 = tr(A)$, et $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(A)$ pour la linéarisation le point d'équilibre (x_0, y_0) et alors :

- un point selle si $det(A) < 0$.
- un point centre si $\det(A) > 0$ et $tr(A) = 0$.
- un foyer si $det(A) > 0$ et $(tr(A))^2 - 4\det(A) < 0$, ce foyer est stable si $tr(A) < 0$ et instable si $tr(A) > 0$.
- un noeud si $det(A) > 0$ et $(tr(A))^2 - 4\det(A) > 0$, ce noeud est stable si $tr(A) < 0$ et instable si $tr(A) > 0$.
- le point d'équilibre (x_0, y_0) est dit hyperbolique si aucun des valeurs propres de la matrice Jacobienne $Df(x_0)$ n'a de partie réelle nulle.



classification des points critiques

1.2.3 Stabilité du point critique du système linéaire dans $\mathbb{R}^2$

Soit donné un système de deux équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \tag{1.7}$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

Pour étudier la stabilité des points critiques de système (1.7) il faut établir l'équation caractéristique :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

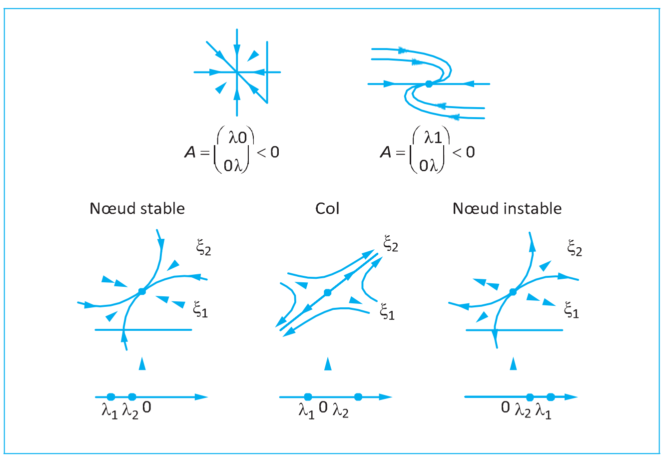
on cherche ses racines λ_1 et λ_2, les cas suivantes se présentent la stabilité du système (1.7) :

(1) Si λ_1, λ_2 sont réelles et distincts :

(a) Si $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, le point critique est asymptotiquement stable (noeud stable).

(b) Si $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, le point critique est instable (noeud instable).

(c) Si $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, le point critique est instable (point selle (col)).

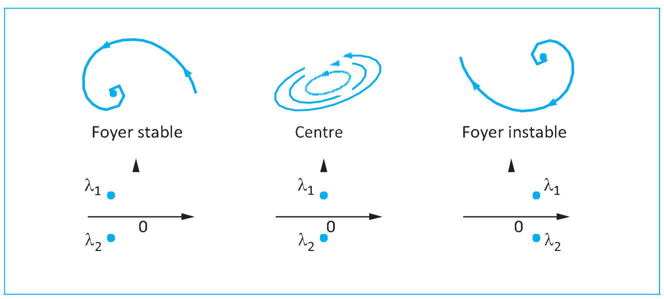


Portraits de phases plans et linéaires $\dfrac{dx}{dt} = Ax$, *lorsque les valeurs propres de A* λ_1, λ_2 *sont réelles et* ξ_1, ξ_2 *sont les vecteurs propres de A lorsqu'ils existent*

(2) Si les racines de l'équation caractéristique sont complexes où

$$\lambda_1 = p + iq; \;\; \lambda_2 = p - iq.$$

(a) Si $p < 0$, $q \neq 0$, le point critique est asymptotiquement stable (foyer stable).
(b) Si $p > 0$, $q \neq 0$, le point critique est instable (foyer instable).
(c) Si $p = 0$, $q \neq 0$, le point critique est stable (centre).
(3) Les racine $\lambda_1 = \lambda_2$ sont multiples :
(a) Si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, le point critique est stable (noeud stable).
(b) Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, le point critique est instable (noeud instable).



Portraits de phases plans et linéaires en fonction des valeurs propresde A ayant une partie imaginaire non nulle

Exemple 1.2.1 *Soit le système suivant*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y. \end{cases}$$

On étude la nature du point critique (0,0) du ce système. $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, *par suit le point critique (0,0) est instable (point selle).*

1.3 Stabilité d'un point d'équilibre du système dans $\mathbb{R}^n$

Soit (x_0, y_0) un point d'équilibre du système

$$X(t) = (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t)))$$
et
$$X_0 = (P(x_0, y_0), Q(x_0, y_0)).$$

Définition 1.3.1 *On dit que* (x_0, y_0) *est stable ssi*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0. \, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \eta \Rightarrow \forall t > 0 \quad \|X(t) - X_0\| < \varepsilon,$$

(x_0, y_0) *est asymptotiquement stable ssi* (x_0, y_0) *est stable et*

$$\lim_{t \to +\infty} \|X(t) - X_0\| = 0.$$

1.4 Portrait de phase et cycle limite

Portrait de phase

Soit le système planaire autonome :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \tag{1.8}$$

où P et Q sont polynomiaux en x et y.

Définition 1.4.1 *Les solutions* $(x(t), y(t))$ *du système(1.8)représentent dans le plan* (x, y) *des courbes appelées orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes. La figure complète des orbites de ce système ainsi que les points critiques représentés dans le plan* (xoy) *s'appelle portrait de phases et le plan* (xoy) *est appelé plan de phase.*

Théorème 1.4.1 *On appelle orbite périodique du système (1.8) une trajectoire* $\phi_t(x)$ *qui n'est pas réduite à un point et telle qu'il existe* $T > 0$ *vérifiant* $\phi_T(x) = x$*. Le plus petit réel* T *strictement positif tel que* $\phi_T(x) = x$ *est appelé Période. Il est indépendant du point* x *pris sur la trajectoire.*

Remarque 1.4.1 *Toute solution périodique ce correspond à une courbe fermée dans l'espace des phases, l'inverse est vrai.*

Remarque 1.4.2 *Pour un système non autonome ceci est faut. C'est à dire une orbite fermée du système :*

$$\dot{x} = f(t, x), \;\; x \in \mathbb{R}^n,$$

ne correspond pas nécessairement à une solution périodique.

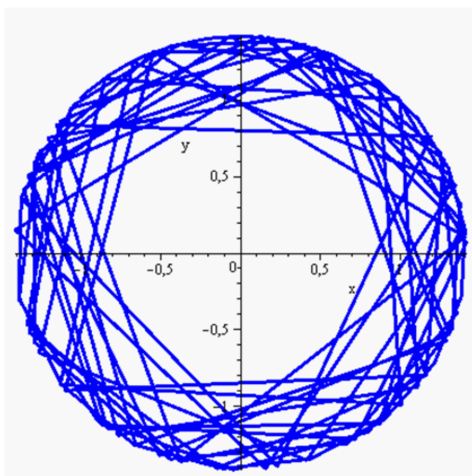
Exemple 1.4.1 *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2ty \\ \dot{y} = -2tx, \end{cases} \tag{1.9}$$

a une solution sous la forme

$$\phi(t) = (x(t), y(t)) = (\alpha\cos(t^2) + \beta\sin(t^2), -\alpha\sin(t^2) + \beta\cos(t^2)).$$

Dans le plan de phases (xoy), on a des orbites fermées mais les solutions ne sont pas périodiques.



Portrait de phase du système (1.9)

Définition 1.4.2 *On appelle cycle limite C du système (1.8) une orbite fermée isolée dans $\mathbb{R}$, ceci signifie qu'il existe un voisinage V de C dans lequel il n'y a pas d'autres courbes fermées. Cependant il peut exister des orbites non fermées dans V qui s'approchent ou s'éloignent de C.*

1.4.1 Stabilité des cycles limites

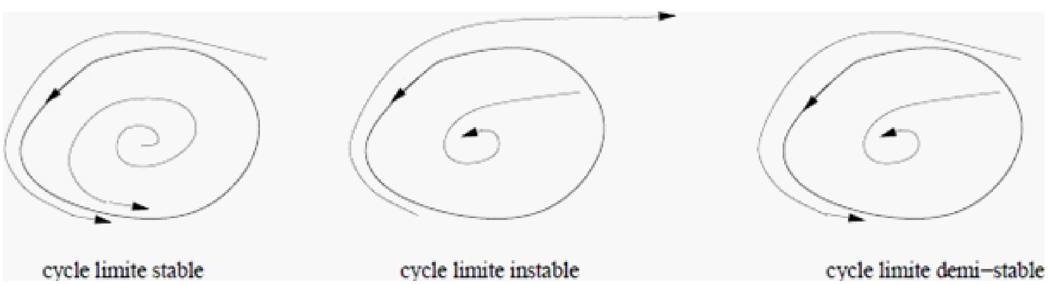
Dans [14],D.W.Jordan et .Smith ont expliqué que les trajectoires avoisinantes ne sont pas fermées et se comportent comme des spirales qui s'approchent ou s'éloignent du cycle limite lorsque $t \to +\infty$. Ceci concerne aussi bien les trajectoires $\gamma(t)$ qui démarrent à l'intérieur que celles qui démarrent à l'extérieur en fonction des conditions initiales. Ces solutions sont relativement de moindre importance en comparaison avec la solution périodique.

Les types de cycles limites :

(a) Le cycle limite γ est stable (ou attractif), si les trajectoires intérieures et extérieures spirales tendent vers l'orbite fermé γ quand $t \to +\infty$.

(b) Le cycle limite γ est instable (ou répulsif), si les trajectoires intérieures et extérieures spirales tendent vers l'orbite fermé γ quand $t \to -\infty$.

(c) Le cycle limite γ est demi-stable, si les trajectoires spirales intérieures tendent vers l'orbite fermée γ quand $t \to +\infty$, les extérieures tendent vers γ quand $t \to -\infty$.



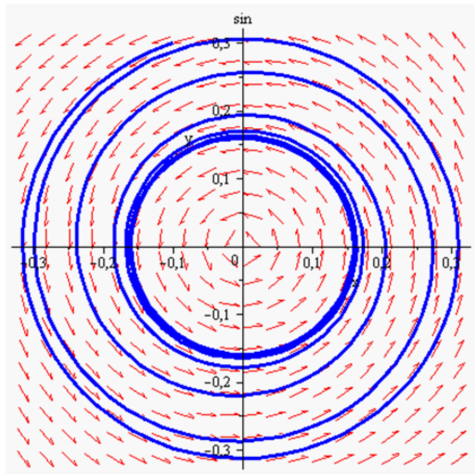
Classification des cycles limites

Exemple 1.4.2 *soit le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dot{y} = x + y(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases} \tag{1.10}$$

Après le passage en cordonnée polaire (r, θ), ce système se découple en

$$\begin{cases} \dot{r} = r^3 \sin\dfrac{1}{r} \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$



Cycle limite du système (1.10)

Définition 1.4.3 *(fonction de Lyaponov) : une fonction de Lyaponov est une fonction continue $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ telle que $w(x) \geq 1$ et $\lim w(x) = +\infty$. En particulier les ensembles de niveau $\{x : w(x) \leq a\}$ sont compacts.*

1.5 Courbes invariantes

Les courbes algébriques invariantes jouent un rôle important dans l'intégrabilité des systèmes différentiels planaires polynômiaux, sont utilisées dans l'étude de l'existence et non-existence de solutions périodiques et par conséquent l'existence et non-existence de cycles limites.

Définition 1.5.1 *On appelle courbe invariante du système (1.8), toute courbe d'équation $U(x,y) = 0$ du plan de phase pour laquelle il existe une fonction $R = R(x,y)$ appelée cofacteur associé à la courbe invariante, telle que :*

$$P(x,y)\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = R(x,y)\,U(x,y)\,. \tag{1.11}$$

Cette égalité montre que sur la courbe invariante, le gradient $\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}, \dfrac{\partial U}{\partial y}\right)$ de U est orthogonal au champ de vecteurs $X = (P,Q)$, donc en tout point de la courbe invariante le champ de vecteurs est tangent à cette courbe, donc *elle est formée de solutions (ou trajectoires) du champ de vecteurs X, ce qui justifie son appellation.*

Définition 1.5.2 *Une courbe invariante $U(x,y)=0$ est dite algébrique de degré m si $U(x,y)$ est un polynôme de degré m. Si non on dit qu'elle est non algébrique.*

Remarque 1.5.1 *Dans le cas où le système(1.8) est polynômial et possède une courbe invariante algébrique $U(x,y)=0$ de degré m, le cofacteur est aussi algébrique et son degré vérifie $\deg(R)\leq m-1$. Nous rappelons que la notations div est la divergence du système (1.8), c'est-à-dire :*

$$\operatorname{div}(x,y)=\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}.$$

Exemple 1.5.1 *La courbe définie par l'équation*

$$x^2+y^2-1=0$$

est une courbe invariante pour le système

$$\begin{cases}\dot{x}=x^2+y^2+4y-1\\ \dot{y}=x^2+y^2+4x-1,\end{cases}$$

$U(x,y)=x^2+y^2-1$

$$\begin{aligned}P(x,y)\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} &= 2x\left(x^2+y^2+4y-1\right)\\ &\quad+2y\left(x^2+y^2+4x-1\right)\\ &=(2x+2y)\left(x^2+y^2-1\right).\end{aligned}$$

Le cofacteur est : $R(x,y)=2x+2y$.

Théorème 1.5.1 *[7]$\gamma(t)$ une orbite périodique de période T et supposons que $f:U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une courbe invariante telle que $\gamma\subseteq\{(x,y)\,/\,f(x,y)=0\}$ et $R(x,y)$ est le cofacteur de la courbe invariante. Supposons que $\nabla f(p)\neq 0$ $\forall p\in\gamma$. Alors,*

$$\int_0^T R(\gamma(t))dt=\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t))dt.$$

1.6 Résultats auxiliaires

(1) Gradient d'une fonction à valeurs scalaires

$$\vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}} U(\vec{x}),$$

est le vecteur de composantes $g_i = \dfrac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_i}$. On a noté x_i les composantes du vecteurs $\vec{x}$.

(2) Divergence d'une fonction à valeurs vectorielles.

Étant donné une fonction à valeurs vectorielles $U(\vec{x})$, de composantes $(U_1(\vec{x}),\ U_2(\vec{x}),\ ...,\ U_n(\vec{x}))$, c'est la fonction scalaire

$$\text{div}\, \vec{U}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U_i(\vec{x})}{\partial x_i}.$$

Propriété importante

On a que div $\overrightarrow{\text{grad}} U(\vec{x}) = \Delta U$, avec

$$\Delta U = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 U(\vec{x})}{\partial x_i^2},$$

où Δ est l'opérateur Laplacien.

La formule de Green

Soit C une courbe plane simple, positivement orientée et C^1 par morceaux, D le compact du plan délimité par C et $Pdx + Qdy$ une forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$, si P et Q ont des dérivées partielles continues sur une région ouverte incluant D, alors

$$\int_C (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Chapitre 2

Existence et non-existence de cycles limites

Dans la Théorie qualitative des équations différentielles il y a plusieurs problèmes. Un de ces problèmes principaux est l'étude d'intégrabilité et surtout l'étude d'existence et non-existence des cycles limites de système différentiel de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = P\left(x, y\right) \\ \dot{y} = Q\left(x, y\right), \end{cases} \tag{2.1}$$

où P et Q sont des polynômes réels en x et y de degré $n \geq 2$.

2.1 Critère de non-existence de cycles limites

Pour étudier la non-existence du cycle limite on utilise des critères et des théorèmes (Critère du Bendixon-Dulac, Critère du Bendixon, Critère du la fonction du Lyaponov, Critère du Potentiel).

2.1.1 Critère de Bendixon

Théorème 2.1.1 *[11]Soit D un domaine simplement connexe de $\mathbb{R}^2$, si la quantité*

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \neq 0,$$

est non identiquement nulle et de signe constant sur D, alors le champs de vecteur X n'admet pas de cycle limite entièrement contenu dans D.

Preuve. Supposons que

$$\gamma : X = X(t); 0 \leq t \leq T$$

est une orbite fermée du système (2.1) entièrement contenue dans D. Si S désigne l'intérieure de γ, s'il s'en suit de la forme de green $(page15)$ que

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{S} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy &= \int\limits_{\gamma} (Pdy - Qdx) \\
&= \int\limits_{0}^{T} (Pdy - Qdx) \\
&= \int\limits_{0}^{T} (P\ \dot{y} - Q\ \dot{x})\, dt \\
&= \int\limits_{0}^{T} (PQ - QP)\, dt \\
&= 0,
\end{aligned}$$

et si $\mathrm{div}(P, Q)$ est non identiquement nulle et ne change pas de signe dans S, alors il s'en suit de la continuité de champ de vecteur (P, Q) dans S que l'intégrale double précédente est soit positive ou négative. Dans tous les cas, cela conduit à une contradiction. Donc, il n'y a pas de cycles limite de (2.1) entièrement contenu dans D. ∎

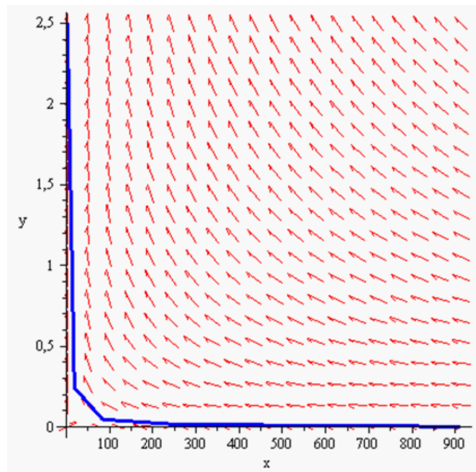
Exemple 2.1.1 *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x^2y + \dfrac{1}{2}y + x \\ \dot{y} = 4xy^2 + 2y. \end{cases} \tag{2.2}$$

Ona

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} &= -8xy + +8xy + 3 \\
&= 1 + 2 \\
&= 3 > 0,
\end{aligned}$$

alors il ne peut donc exister de cycle limite dans $\mathbb{R}^2$.



Portrait de phase du système (2.2)

Remarque 2.1.1 *Si* $n > 2$ *on ne peut pas appliquer les résultats précédents comme on le voit sur l'exemple suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \\ \dot{z} = -2z. \end{cases}$$

On a bien $\operatorname{div} f = -2 < 0$, *dans* $\mathbb{R}^3$. *Mais le système possède une orbite périodique* $(x(t), y(t), z(t)) = (\sin t, \cos t, 0)$.*Par conséquent on ne peut pas généraliser le critère de Bendixon sans ajouter d'hypothèses.*

2.1.2 Critère de Bendixon-Dulac

Théorème 2.1.2 *[11]Soit le système différentiel (2.1) et soit* $B(x, y)$ *une fonction de classe* C^1*sur un domaine simplement connexe* D *de* $\mathbb{R}^2$. *Si la quantité*

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ), \tag{2.3}$$

est non identiquement nulle et de signe constant sur D, *alors le système (2.1) n'admet pas de cycle limite dans* D.

Preuve. Supposons qu'il existe une fonction $B(x,y) \in C^1$ telle que

$$\frac{\partial (BP)}{\partial x} + \frac{\partial (BQ)}{\partial y} > 0,$$

soit γ une trajectoire fermée du système planaire dans D, et soit S l'intérieur de γ. S'il s'en suit de la formule de Green

$$\begin{aligned}
\iint_S \left(\frac{\partial (BP)}{\partial x} + \frac{\partial (BQ)}{\partial y} \right) dxdy &= \int_\gamma (BPdy - BQdx) \\
&= \int_0^T (BP\,\dot{y} - BQ\,\dot{x})\,dt \\
&= \int_0^T (BPQ - BQP)\,dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

C'est une contradiction, alors il ne peut y avoir une trajectoire fermé γ. Donc il n'a y pas un cycle limite. ■

Exemple 2.1.2 *Soit le système de Kolmogorov suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x - \alpha y) = 0 \\ \dot{y} = ry(1 - y - \beta x) = 0 \end{cases}, \text{ avec } \alpha,\ \beta,\ r > 0.$$

Les points d'équilibres $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, *et* (x^*, y^*) *qui vérifient les deux équations*

$$\begin{aligned} 1 - x^* - \alpha y^* = 0 \\ 1 - y^* - \beta x^* = 0. \end{aligned}$$

Les droites $x = 0$ *et* $y = 0$ *sont respectivement isoclines nulles verticale et horizontale, le quadrant positif* $D = \{(x,y)/x \geq 0,\ y \geq 0\}$ *est un domaine positivement invariant. S'il doit exister un cycle limite, il est nécessairement autour de* (x^*, y^*). *D est aussi simplement connexe, on le choisit pour appliquer les critères de Bendixson-Dulac.On considère*

$$\begin{aligned} P(x,y) = x(1 - x - \alpha y) &\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = 1 - 2x - \alpha y \\ Q(x,y) = ry(1 - y - \beta x) &\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial y} = r(1 - 2y - \beta x), \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} &= 1 - 2x - \alpha y + r(1 - 2y - \beta x) \\ &= 1 + r - x(2 + r\beta) - y(\alpha + 2r). \end{aligned}$$

Le signe de cette quantité n'est pas claire, le critère de Bendixon ne permet pas de conclure ou d'exclure la présence de cycle limite. Soit $B(x, y) = \dfrac{1}{xy}$*. Alors,*

$$\left.\begin{array}{l} BP(x,y) = \dfrac{x}{xy}(1 - x - \alpha y) \Rightarrow \dfrac{\partial BP}{\partial x} = -\dfrac{1}{y} \\ BQ(x,y) = \dfrac{ry}{xy}(1 - y - \beta x) \Rightarrow \dfrac{\partial BQ}{\partial y} = -\dfrac{r}{x} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{\partial BP}{\partial x} + \frac{\partial BQ}{\partial y} = -\frac{1}{y} - \frac{r}{x}$$

où la quantité (2.3) est toujours strictement négative sur D*. On peut donc exclure la présence de cycle limite.*

Exemple 2.1.3 *Soit le système de Kolmogorov suivant*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x(5 - y - 5x) \\ \dot{y} = y(4 - x - 5y), \end{array} \right. \tag{2.4}$$

et soit $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 0\big\}$*. Nous avons*

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 9 - 9x - 9y,$$

cette quantité s'annule et change de signe dans D*, et le critère de Bendixon ne permet pas de conclure ou d'exclure la présence d'orbite fermée dans* D*. Soit* $B(x, y) = \dfrac{1}{xy}$*. Alors,*

$$\frac{\partial BP}{\partial x} + \frac{\partial BQ}{\partial y} = -\frac{5}{y} - \frac{5}{x}.$$

Donc pour tout $(x, y) \in D$ *la quantité (2.3) est négative. On peut conclure donc que le système (2.4) n'admet pas de cycle limite dans* D*.*

2.1.3 Critère de la fonction de Lyaponov

Une fonction de lyaponov est une fonction qui permet d'estimer la stabilité d'une solution d'équation différentielle, soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $\dot{x} = f(x)$ un système dynamique, avec x^* un point d'équilibre de ce système

$$f(x^*) = 0.$$

Définition 2.1.1 *Une fonction $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction candidate de lyaponov si*

$\cdot V(0) = 0.$
$\cdot \forall x \in U \backslash \{0\}, V(x) > 0,$ *pour un certain voisinage U de l'origine la dérivée $\dot{V}$ d'une fonction V le long du champ de vecteurs f est définie par*

$$\dot{V} = \langle \nabla V(x), \ f(x) \rangle .$$

Définition 2.1.2 *Une fonction de Lyaponov est une fonction de classe C^1 à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$\begin{array}{l} \cdot V(X_0) = 0 \text{ et } \forall X \neq X_0, V(X) > 0. \\ \cdot \forall X \neq X_0, \overrightarrow{\operatorname{grad} V(X)} \dot{X} < 0. \end{array}$$

Théorème 2.1.3 *Si un système différentiel admet une fonction de lyaponov il ne peut admettre d'orbite fermée.*

Exemple 2.1.4 *Soit le système suivant*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -x + 2y \\ \dot{y} = x^3. \end{array} \right. \tag{2.5}$$

Posons $V(x, y) = x^4 + y^4$ et

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{grad} V(X)} \dot{X} &= \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dt} \\ &= \frac{dV}{dx}\dot{x} + \frac{dV}{dy}\dot{y} \\ &= -4x^3y^3 + 4y^3x^3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

On remarque que

$$V(0,0)=0, \forall (x,y)\neq (0,0),\ \text{et } V(x,y)>0 \text{ et } \overrightarrow{\operatorname{grad} V(X)}\dot{X}=0,$$

alors, V n'est pas une fonction de lyaponov. Donc il existe au moins un cycle limite.

Exemple 2.1.5 *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x}=y-x \\ \dot{y}=-x-y, \end{cases}$$

posons $V(x,y)=\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$, donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{grad} V(X)}\dot{X} &= \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dV}{dy}\frac{dy}{dt} \\ &= \frac{dV}{dx}\dot{x}+\frac{dV}{dy}\dot{y} \\ &= x(y-x)+y(-x-y) \\ &= xy-x^2-xy-y^2 \\ &= -\left(x^2+y^2\right)<0. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$V(0,0)=0, \forall (x,y)\neq (0,0),\ V(x,y)>0,\ \text{et } \overrightarrow{\operatorname{grad} V(X)}\dot{X}<0.$$

Alors V est une fonction de lyaponov, ce qui implique que le système ne peut admettre d'orbite fermée, donc n'existe pas un cycle limite.

2.1.4 Critère du Potentiel

Définition 2.1.3 *Soit le système*

$$\dot{X}=f(X). \tag{2.6}$$

Telle que

$$\dot{X}=\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}.$$

Supposons que le système (2.6) puisse s'écrire sous la forme $\dot{X}=\overrightarrow{-\operatorname{grad} V(X)}$ où $X\in D\subseteq \mathbb{R}^2$ et V est une fonction de classe C^1 définie sur D à valeur dans $\mathbb{R}$, on dit que V est un potentiel du système (2.6).

Théorème 2.1.4 *Si le système (2.6) admet un potentiel, il ne peut admettre d'orbites fermées donc n'admet pas de cycle limite.*

Exemple 2.1.6 *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x^3 \sin y \\ \dot{y} = x^4 \cos y, \end{cases}$$

ce système admet un potentiel $V(x, y) = -x^4 \sin y$, *telle que*

$$\dot{X} = -\overrightarrow{\operatorname{grad} V(X)},$$

donc le système n'admet pas d'orbites fermées, ce qui implique que le système n'admet pas de cycle limite.

2.2 Critère d'existence de cycles limites

En mathématique, le théorème de Poincaré-Bendixon est un résultat sur les équations différentielles, il est énoncé par Henri Poincaré et la preuve est finalement complétée par Ivar Bendixon en 1901. Grâce a ce théorème et sous des hypothèses nous pouvons assurer l'existence d'un cycle limite. Donnons d'abord quelques définitions.

Définition 2.2.1 *Un compact de* $\mathbb{R}^2$ *est un ensemble fermé et borné (fermé signifie que la frontière est incluse et borné signifie qu'il est délimité par des bornes finies).*

Définition 2.2.2 *(Domaine positivement invariant) : Un domaine* D *du plan associé au système*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)), \end{cases} \tag{2.7}$$

est dit positivement invariant si quelle que soit la condition initial

$$(x_0, y_0) \in D,$$

la trajectoire correspondante reste dans D *lorsque* $t \to +\infty$.

Définition 2.2.3 *(Domaine attractant) : On dit que* D *est un domaine attractant pour le système dynamique (2.7) si* D *est compact et positivement invariant.*

2.2.1 Critère de Poincaré-Bendixon

Théorème 2.2.1 *Soit D un domaine attractant du plan pour le système dynamique planaire (2.1). Alors, pour tout $X \in D$, son $\omega -$ limite est soit :*

(i) Un point d'équilibre attractif (asymptotiquement stable).
(ii) Une trajectoire périodique (un cycle limite).
(iii) Une réunion de points d'équilibre reliés par des trajectoires régulières.

Un ensemble limite $\omega(x)$ non vide compact d'un système dynamique planaire, qui ne contient pas de point d'équilibre est une trajectoire périodique.

Corollaire 2.2.1 *S'il existe dans le plan un domaine attractant pour un système dynamique, et qui ne contient pas de point d'équilibre ou contient un unique point d'équilibre instable, alors il existe au moins un cycle limite entièrement contenu dans ce domaine.*

Exemple 2.2.1 *Soit le système dynamique suivant*

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} + (1 - x^2 - y^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

La fonction $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ est une fonction de Lyaponov pour ce système.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x\dot{x} + y\dot{y} \\ &= x\left[y + (1 - x^2 - y^2)x\right] + y[-x + (1 - x^2 - y^2)y] \\ &= (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2). \end{aligned}$$

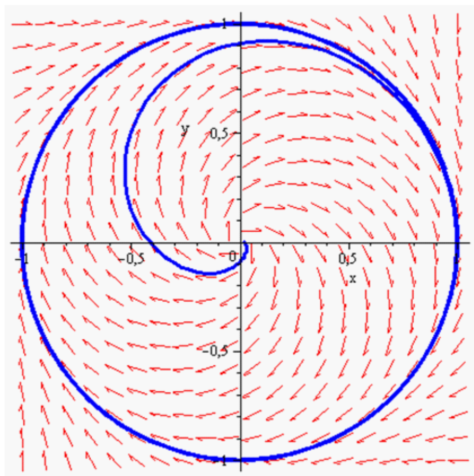
Si on considère le Domaine D définie par le cercle de rayon $\frac{1}{2}$, et le cercle de rayon 2,

$$D = \left\{(x, y)/\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\},$$

on obtient un domaine attractant pour notre système. Le domaine D ne contient pas de point d'équilibre, on peut donc conclure d'après le corollaire de théorème de Poincaré-Bendixon qu'il existe au moins un cycle limite entièrement contenu dans D. On considère le domaine $\acute{D}$ définie par

$$\acute{D} = \left\{(x, y)/x^2 + y^2 \leq 2\right\},$$

le domaine $\acute{D}$ contient un unique point d'équilibre instable (l'origine), On peut donc conclure d'après le corollaire 2.2.1 de théorème de Poincaré-Bendixon ou 'il existe au moins un cycle limite.



Cycle limite du système (2.8)

Théorème 2.2.2 *[11]Soit $\gamma(t)$ une orbite périodique, de période T alors : γ est un cycle limite stable si*

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t))dt < 0.$$

γ *est un cycle limite instable si*

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t))dt > 0.$$

γ *est un cycle limite semi-stable si*

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t))dt = 0.$$

Remarque 2.2.1 *Si* $\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t))dt \neq 0$*, alors le cycle limite* γ *est hyperbolique.*

Exemple 2.2.2 *Soit le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y + x^2(xy - y^2) \\ \dot{y} = -x + y, \end{cases} \tag{2.9}$$

ona $\operatorname{div}(P,Q) = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ *telle que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 3x^2y - 2xy^2 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 1, \end{cases}$$

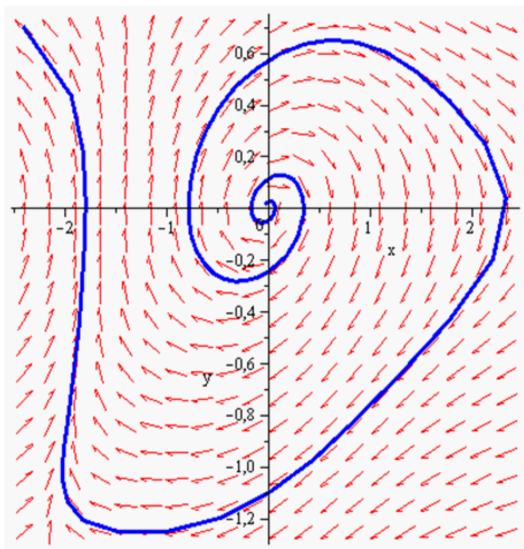
ce qui implique que

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 3x^2y - 2xy^2 + 1,$$

et le point d'équilibre de ce système est (0,0). Supposons que : $\gamma(t) = (-\cos(t), -\sin(t))$ *est une solution périodique de ce système de période* 2π*. Donc*

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)(-\cos(t), -\sin(t))dt &= \int_0^T [3(-\cos(t))^2(-\sin(t)) - \\ &\quad 2(-\cos(t))(-\sin(t))^2 + 1]dt \\ &= \int_0^{2\pi} [-3\cos^2(t)\sin(t) + 2\cos(t)\sin^2(t) + 1]dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1dt \\ &= 2\pi > 0, \end{aligned}$$

donc il existe un cycle limite instable.



Cycle limite du système (2.9)

Chapitre 3

Cycles limites des systèmes différentiels polynomiaux de Kolmogorov

Dans ce chapitre, nous allons utiliser la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires, pour traiter une classe des systèmes différentiels planaires polynomiaux de kolmogorov de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = xp(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = yq(x,y)\,, \end{array} \right. \tag{3.1}$$

où $p(x,y)$ et $q(x,y)$ sont des polynômes. Notre contribution dans ce travail consiste en la présentation de quelques classes de systèmes différentiels de type de kolmogorov, possédant des cycles limites algébriques hyperboliques, donc on peut déterminer leurs expressions explicites.

3.1 Introduction

Une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de la différentiation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise. La dynamique des populations est une partie de la biologie mathématique qui a pour but la description, en termes de modèles mathématiques, de l'interaction entre différents types des populations dans un milieu donné. Ces modèles sont régis par des équations dévolutions qui sont des équations aux dérivées partielles. Il existe en dynamique des populations plusieurs types d'interactions entre, ces populations (proie-prédateur, compétition, etc). Un problème central est l'étude du comportement asymptotique des solutions des systèmes modélisant ces phénomènes. Dans les années 1920 le staticien austro-hongrois Lotka et le mathématicien italien Volterra élaborent un modèle qui décrit la dynamique des systèmes écologiques où cohabitent un prédateur et sa proie (Lynx et lièvres des neiges dont les recensements précis ont été établis par la compagnie de la baie d'Hadson). Ce modèle est constitué d'une équation différentielle qui traduit l'évolution des populations de chaque animal. Kolmogorov a considéré le système proie-prédateur général (3.1) où l'existence de cycles limites est probable. Ces systèmes interviennent dans la modélisation de plusieurs phénoménologies liées à l'écologie et à l'environnement socioéconomique. Dans notre travail, on s'intéressera au système de kolmogorov de la forme (3.1) avec :

$$p\left(x,y\right) = FU + \lambda y \frac{\partial U}{\partial y},\ q\left(x,y\right) = GU - \lambda x \frac{\partial U}{\partial x}, \tag{3.2}$$

où U, F, G sont des polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Donnons d'abord quelques définitions.

Définition 3.1.1 *[4](Intégrales premières) une fonction $H : U \to \mathbb{R}$ de classe C^j et qui est constante sur chaque trajectoire de*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases} \tag{3.3}$$

et non localement constante, s'appelle intégrale première du système (3.3) de classe j sur $U \subset \mathbb{R}^2$. L'équation $H\left(x,y\right) = c$ pour un $c \in \mathbb{R}$ fixé, donne un ensemble de trajectoire du système d'une manière implicite. Quand $j = 1$, cas conditions sont équivalentes

$$P\left(x,y\right) \frac{\partial H}{\partial x}\left(x,y\right) + Q\left(x,y\right) \frac{\partial H}{\partial y}\left(x,y\right) = 0,$$

et H non localement constante.

Définition 3.1.2 *(Facteurs intégrants) la fonction $K\left(x,y\right)$ est un facteur intégrant du système (3.3) sur le sous ensemble ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2 si\ K \in C^1\left(u\right)$, $K \neq 0$ sur U et*

$$\frac{\partial\left(KP\right)}{\partial x} = -\frac{\partial\left(KQ\right)}{\partial y},$$

$$\operatorname{div}(KP, KQ) = 0,$$

où

$$P\frac{\partial K}{\partial x} + Q\frac{\partial K}{\partial y} = -K \operatorname{div}(P, Q),$$

c'est claire que la fonction H *telle que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} = KQ \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} = -KP, \end{cases}$$

est une intégrale première, c'est à dire H *est donnée donc par*

$$\begin{cases} H(x, y) = -\displaystyle\int KP(x, y)\, dy + h(x) \\ H(x, y) = \displaystyle\int KQ(x, y)\, dx + h(y). \end{cases}$$

3.2 La non existence de cycle limite pour une classe de systèmes cubiques de kolmogorov

Soit le système de kolmogorov suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a(x^2 + y^2 - 1) + 2\lambda y^2) \\ \dot{y} = y(b(x^2 + y^2 - 1) - 2\lambda x^2). \end{cases} \tag{3.4}$$

Proposition 3.2.1 *Le système (3.4) admet* $U(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ *comme une courbe algébrique invariante de cofacteur* $R(x, y) = 2ax^2 - 2by^2$

Preuve.

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \dot{x}\, U_x + \dot{y}\, U_y \\ &= \dot{x}\ (2x) + \dot{y}\ (2y) \\ &= \left(2ax^2 - 2by^2\right)\left(x^2 + y^2 - 1\right). \end{aligned}$$

■

Théorème 3.2.1 *Le système (3.4) a une intégrale première rationnelle de la forme*

$$H(x,y) = \frac{x^b}{y^a\left(x^2+y^2-1\right)^{\lambda}}, \tag{3.5}$$

de plus, il n'admet pas de cycle limite algébrique.

Preuve. Soit

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{x^b(bx^{-1}\left(y^a\left(x^2+y^2-1\right)^{\lambda}\right) - 2\lambda y^a x\left(x^2+y^2-1\right)^{\lambda-1})}{y^{2a}\left(x^2+y^2-1\right)^{2\lambda}} \\ &= \frac{x^b(bx^{-1} - 2\lambda x\left(x^2+y^2-1\right)^{-1})}{y^a\left(x^2+y^2-1\right)^{\lambda}}, \end{aligned}$$

et

$$H_y = -\frac{x^b(ay^{-1} + 2\lambda y\left(x^2+y^2-1\right)^{-1})}{y^a\left(x^2+y^2-1\right)^{\lambda}},$$

on a donc

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \dot{x}H_x + \dot{y}H_y \\ &= x(a(x^2+y^2-1) + 2\lambda y^2)H_x + y(b(x^2+y^2-1) - 2\lambda x^2)H_y \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc, ce système admet une intégrale première rationnelle, ce qui implique que les courbes solutions sont algébriques. Donc elles ne peuvent pas être des spirales. Ainsi le système (3.4) n'admet pas de cycle limite algébrique.

Exemple 3.2.1 *On pose $a = 2$, $b = 4$, $\lambda = 1$, le système (3.4) devient*

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2x^2 + 4y^2 - 2) \\ \dot{y} = y(2x^2 + 4y^2 - 4), \end{cases} \tag{3.6}$$

il possède comme intégrale première rationnelle

$$H(x,y) = \frac{x^4}{y^2\left(x^2+y^2-1\right)},$$

on trouve que

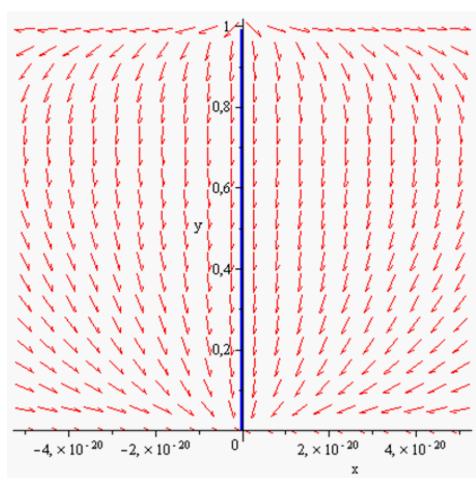
$$H_x = \frac{x^4\left(4x^{-1} - 2x\left(x^2+y^2-1\right)^{-1}\right)}{y^2\left(x^2+y^2-1\right)}$$

$$H_y = -\frac{x^4\left(2y^{-1} + 2y\left(x^2+y^2-1\right)^{-1}\right)}{y^2\left(x^2+y^2-1\right)}$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \dot{x}H_x + \dot{y}H_y \\ &= \frac{x^4\left(8\left(x^2+y^2-1\right) - 8y^2 - 4x^2 - 4x^2y^2\left(x^2+y^2-1\right)^{-1}\right)}{y^2\left(x^2+y^2-1\right)} \\ &\quad -\frac{x^4\left(8\left(x^2+y^2-1\right) - 8y^2 - 4x^2 - 4x^2y^2\left(x^2+y^2-1\right)^{-1}\right)}{y^2\left(x^2+y^2-1\right)} \\ &= 0,\end{aligned}$$

donc, ce système admet une intégrale première rationnelle alors le système n'admet pas de cycles limites algébriques.



Portrait de phase du système (3.6)

■

3.3 L'existence de cycle limite algébrique pour une classe de systèmes quartiques de kolmogorov

Soit le quadrant positif $\omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \ > 0, y \ > \ 0\right\}$, on a le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left((ax)\left((x-1)^2 + (y-1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + 2\lambda y\,(y-1)\right) \\ \dot{y} = y\left((by)\left((x-1)^2 + (y-1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - 2\lambda x\,(x-1)\right), \end{cases} \tag{3.7}$$

tel que $F = ax$, $G = by$ et $U(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 - \frac{1}{4}$ où a et b sont des constantes réels.

Remarque 3.3.1 *le cercle $\gamma = \{(x,y) \in \omega / U(x,y) = 0\}$ est contenu dans le premier quadrant du plan $\omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \ \rangle \ 0, y \ \rangle \ 0\right\}$.*

Proposition 3.3.1 *Soit le système (3.7) admet $U(x,y) = 0$ comme une courbe algébrique invariante de cofacteur*

$$R(x,y) = 2\left[ax^2(x-1) + by^2(y-1)\right]. \tag{3.8}$$

Preuve. Soit

$$\begin{aligned} R(x,y)\,U(x,y) &= \frac{dU}{dt} \\ &= \dot{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial U}{\partial y} \\ &= 2\left[ax^2(x-1) + by^2(y-1)\right]\left((x-1)^2 + (y-1)^2 - \frac{1}{4}\right), \end{aligned}$$

pour prouver l'existence de cycle limite algébrique de la classe de système de kolmogorov (3.7) on doit vérifier le résultat suivant

Lemme 3.3.1 *Le cercle γ définit une solution périodique de système (3.7).*

■

Preuve. Le cercle γ est une courbe algébrique invariante de cofacteur

$$R(x,y) = 2\left[ax^2(x-1) + by^2(y-1)\right].$$

On va montrer que ce cofacteur et non singulier. Supposons que le cercle γ contient un point singulier du système (3.7) tel que ce point singulier est une solution du système

$$\begin{cases} ax\left((x-1)^2 + (y-1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + 2\lambda y(y-1) = 0 \\ by\left((x-1)^2 + (y-1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - 2\lambda x(x-1) = 0, \end{cases}$$

on a $U(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$ (courbe algébrique invariante)donc

$$\begin{cases} 2\lambda y(y-1) = 0 \\ -2\lambda x(x-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(y-1) = 0 \\ x(x-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ où } y = 1 \\ x = 0 \text{ où } x = 1, \end{cases}$$

et comme $x > 0$ et $y > 0$ alors le seul point singulier est $(x^*, y^*) = (1,1)$. Le système (3.7) admet le cercle γ comme solution périodique, ce qui implique que γ est une orbite périodique. ■

Théorème 3.3.1 *Le système (3.7) admet le cercle γ comme cycle limite hyperbolique si*

$$a\left(1 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right) + b\left(1 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right) \neq 0. \tag{3.9}$$

Preuve. *On pose T la période de γ. Pour montrer que γ est un cycle limite, il suffit de vérifier que*

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t))dt \neq 0.$$

D'après le théorème 1.5.1

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t))dt = \int_0^T R(\gamma(t))dt,$$

donc $\forall \eta \in \mathbb{R}^*$ *on a*

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t))dt = \int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t))dt + \eta(\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t))dt - \int_0^T R(\gamma(t))dt),$$

où

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(\dot{x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\dot{y}) \\ &= 2((ax+by)((x^2-1)+(y^2-1)-\frac{1}{4}) \\ &\quad +(ax^2-\lambda x)(x-1)+(\lambda y+by^2)(y-1),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\int_0^T \operatorname{div}(x(t),y(t))dt &= \int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t))dt + \eta(\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t))dt - \int_0^T R(\gamma(t))dt) \\ &= 2\int_0^T ((ax^2-\lambda x-\eta\lambda x)(x-1) \\ &\quad +(by^2+\lambda y+\eta\lambda y)(y-1))dt.\end{aligned}$$

D'après le système (3.7) *on a*

$$dt = \frac{dx}{x(ax((x-1)^2+(y-1)^2-\frac{1}{4})+2\lambda y(y-1)},$$

par suite

$$\int_0^T \operatorname{div}(x(t),y(t))dt = \oint_\gamma \frac{(ax-\lambda-\eta\lambda)(x-1)}{\lambda y(y-1)}dx + \oint_\gamma \frac{(by+\lambda+\eta\lambda)}{\lambda x(y-1)}dx,$$

on a $U(x,y)=0$ *est une courbe algébrique. Donc*

$$U_x(x,y)dx + U_y(x,y)dy = 0,$$

ce qui implique que

$$U_x(x,y)dx = -U_y(x,y)dy,$$

donc

$$\int_0^T \operatorname{div}(x(t),y(t))dt = \oint_\gamma \frac{(by+\lambda+\eta\lambda)}{\lambda x}dx - \oint_\gamma \frac{(ax-\lambda-\eta\lambda)}{\lambda y}dy.$$

Cette égalité est de la forme

$$\int_0^T \operatorname{div}(x(t),y(t))dt = \int_\gamma p(x,y)dx + \int_\gamma q(x,y)dy,$$

où on peut appliquer la formule de Green $(page 15)$ *on obtient*

$$\begin{aligned}\int_0^T \operatorname{div}(x(t),y(t))dt &= \iint_{int(\gamma)} \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{(by+\lambda+\eta\lambda)}{\lambda x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{(ax-\lambda-\eta\lambda)}{\lambda y}\right)dxdy \\ &= -\iint_{int(\gamma)} \frac{by+ax}{\lambda xy}dxdy \\ &= -\frac{b}{\lambda}\iint_{int(\gamma)} \frac{1}{x}dxdy - \frac{a}{\lambda}\iint_{int(\gamma)} \frac{1}{y}dxdy.\end{aligned}$$

Telle que γ *est une réunion des deux arcs*

$$y_1 = 1 - \sqrt{\frac{1}{4} - (x-1)^2}$$
$$y_2 = 1 + \sqrt{\frac{1}{4} - (x-1)^2}.$$

On pose

$$\int_0^T \operatorname{div}(x(t),y(t))dt = -\frac{b}{\lambda}I_1 - \frac{a}{\lambda}I_2, \tag{3.10}$$

avec

$$I_1 = \iint_{int(\gamma)} \frac{1}{x}dxdy \text{ et } I_2 = \iint_{int(\gamma)} \frac{1}{y}dxdy.$$

On calculent

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint\limits_{int(\gamma)} \frac{1}{x} dx dy \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \Big(\int_{1-\sqrt{\frac{1}{4}-(x-1)^2}}^{1+\sqrt{\frac{1}{4}-(x-1)^2}} \frac{1}{x} dy \Big) dx \\
&= 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-1)^2}}{x} dx,
\end{aligned}$$

On faisant le changement de variable $x = 1 + \dfrac{1}{2}\sin\theta$ *on obtient*

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta}{1+\frac{1}{2}\sin\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta}{1+\frac{1}{2}\sin\theta} d\theta,
\end{aligned}$$

on pose

$$t = \tan\frac{\theta}{2}$$

on obtient

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \;\; \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \;\; d\theta = \frac{2dt}{1+t^2},$$

par suite

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^2}{1+t^2} \frac{1}{1+\frac{1}{2}\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2(t^2+t+1)} dt,
\end{aligned}$$

après la décomposition du dénominateur on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^{1} (\frac{4}{1+t^2} - \frac{4t}{(1+t^2)^2} - \frac{3}{(t^2+t+1)})dt \\ &= 2\pi - 3\int_{-1}^{1} \frac{1}{(t^2+t+1)}dt \\ &= 2\pi - 3\int_{-1}^{1} \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}, \end{aligned}$$

on pose

$$\tau = t + \frac{1}{2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\pi - 3\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{d\tau}{\tau^2+\frac{3}{4}} \\ &= 2\pi - 3\left[(\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}(\arctan \frac{\tau}{\sqrt{\frac{3}{4}}}) \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \\ &= 2\pi - \frac{3}{\sqrt{\frac{3}{4}}}(\arctan \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} - \arctan \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}) \\ &= 2\pi - \frac{3}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\frac{\pi}{2} \\ &= 2\pi - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} \\ I_1 &= 2\pi(1 - \sqrt{\frac{3}{4}}). \end{aligned}$$

On a la deuxième intégrale

$$I_2 = \iint\limits_{int(\Gamma)} \frac{1}{y}dxdy,$$

par symétrie

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint\limits_{int(\Gamma)} \frac{1}{x} dxdy \\ &= I_1. \end{aligned}$$

Donc, la formule (3.10) *devient*

$$\begin{aligned} \int_0^T \operatorname{div}(x(t), y(t))dt &= (-\frac{b}{\lambda} 2\pi(1 - \sqrt{\frac{3}{4}})) - (\frac{a}{\lambda} 2\pi(1 - \sqrt{\frac{3}{4}})) \\ &= -\frac{2\pi}{\lambda}(1 - \sqrt{\frac{3}{4}})(b + a). \end{aligned}$$

Alors, l'orbite périodique γ est un cycle limite hyperbolique si et seulement si

$$a(1 - \sqrt{\frac{3}{4}}) + b(1 - \sqrt{\frac{3}{4}}) \neq 0.$$

■

Exemple 3.3.1 *on pose $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ et $\lambda = -1$, le système* (3.7) *devient*

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left(\left(\frac{1}{2} x \right) \left((x-1)^2 + (y-1)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) - 2y(y-1) \right) \\ \dot{y} = y \left(\left(\frac{1}{2} y \right) \left((x-1)^2 + (y-1)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) + 2x(x-1) \right), \end{cases} \tag{3.11}$$

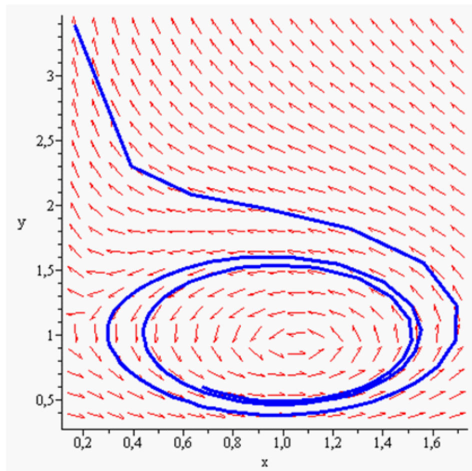
et comme

$$\begin{aligned} \int_0^T \operatorname{div}(x(t), y(t))dt &= (-\frac{\pi}{\lambda}(1 - \sqrt{\frac{3}{4}})) - (\frac{\pi}{\lambda}(1 - \sqrt{\frac{3}{4}})) \\ &= -\frac{0.841\,79}{\lambda} \\ &= 0.84179 > 0, \end{aligned}$$

alors le cercle

$$\gamma : (x-1)^2 + (y-1)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

est le cycle limite hyperbolique instable de ce système.



Cycle limite du système (3.11)

3.4 L'existence de cycle limite algébrique pour une classe de systèmes de kolmogorov d'ordre quatre ou plus

Soit le quadrant positif suivant : $\{(x, y)\ /\ x > 0\ ,\ y > 0\}$ et $\mathbb{R}^2$ est le plan de travail.

On considère les deux systèmes (i) et (ii)

$$(i)\begin{cases} \dot{x} = x\left((xy + p(y))\left(ax^2 + bx + cy^2 + dy + h\right) - dy - 2cy^2\right) \\ \dot{y} = y\left((xy + q(x))\left(ax^2 + bx + cy^2 + dy + h\right) + bx + 2ax^2\right), \end{cases} \tag{3.12}$$

où a, c sont des réels positifs, b, d sont des réels négatifs et h satisfait telle que

$$max\left\{\frac{b^2}{4a}, \frac{d^2}{4c}\right\} < h < \frac{b^2}{4a} + \frac{d^2}{4c},$$

avec $p(y)$ et $q(x)$ sont des polynômes.

$$(ii)\begin{cases} \dot{x} = x\left((xy + p(y))\left(ax^4 + bx^2 + cy^6 + dy^3 + h\right) - 3dy^3 - 6cy^6\right) \\ \dot{y} = y\left((xy + q(x))\left(ax^4 + bx^2 + cy^6 + dy^3 + h\right) + 2bx^2 + 4ax^4\right), \end{cases} \tag{3.13}$$

où a, c sont des réels positifs, b, d sont des réels négatifs et h satisfait telle que

$$max\left\{\frac{b^2}{4a}, \frac{d^2}{4c}\right\} < h < \frac{b^2}{4a} + \frac{d^2}{4c},$$

avec $p\left(y\right)$ et $q\left(x\right)$ sont des polynômes.

Théorème 3.4.1 *1-Le système* (3.12) *admet au moins un cycle limite, les cycles limites sont hyperboliques représentés par la courbe*

$$\gamma_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, ax^2 + bx + cy^2 + dy + h = 0\right\},$$

2-Le système (3.13) *admet au moins un cycle limite, les cycles limites sont hyperboliques représentés par la courbe*

$$\gamma_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, ax^4 + bx^2 + cy^6 + dy^3 + h = 0\right\},$$

Preuve. (i) On va montrer que γ_1 est non-singulière, invariante pour le système (3.12) et $\int\limits_0^T \operatorname{div}\left(\gamma_1\right) dt \neq 0$. ■

A- La courbe γ_1 est non singulière pour le système (3.12) si le système suivant n'a pas de solution réelle.

$$\begin{cases} ax^2 + bx + cy^2 + dy + h = 0 \\ -xy\left(d + 2cy\right) = 0 \\ yx\left(b + 2ax\right) = 0, \end{cases}$$

d'aprés un calcul simple on trouve que le seul point critique de ce système est $M\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}, \sqrt{\frac{-d}{2c}}\right)$. On a

$$h \neq \frac{b^2}{4a} + \frac{d^2}{4c},$$

alors ce point n'appartient pas à γ_1, ce qui implique que γ_1 est une courbe non singulière pour le système (3.12).

B- γ_1 est une courbe invariante pour le système(3.12)

$$\begin{aligned} \frac{dU_1}{dt} &= \frac{\partial U_1}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U_1}{\partial y}\dot{y} \\ &= \left[(xy + p\left(y\right))\left(2ax^2 + bx\right) + (xy + q\left(x\right))\left(2cy^2 + dy\right)\right] U_1, \end{aligned}$$

tel que

$$U_1 = ax^2 + bx + cy^2 + dy + h,$$

et

$$R_1(x, y) = (xy + p(y))\left(2ax^2 + bx\right) + (xy + q(x))\left(2cy^2 + dy\right).$$

C- On doit vérifier que

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma_1)\, dt \neq 0.$$

D'après le théorème 1.5.1

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma_1)\, dt = \int_0^T R_1(x(t), y(t))\, dt,$$

tel que

$$\begin{aligned}
\int_0^T R_1(x(t), y(t))\, dt &= \int_0^T \left[(xy + p(y))\left(2ax^2 + bx\right)\right] dt \\
&\quad + \int_0^T \left[(xy + q(x))\left(2cy^2 + dy\right)\right] dt \\
&= \oint_{\gamma_1} \frac{(xy + p(y))\left(2ax^2 + bx\right)}{y\left(2ax^2 + bx\right)} dy \\
&\quad - \oint_{\gamma_1} \frac{(xy + q(x))\left(2cy^2 + dy\right)}{x\left(2cy^2 + dy\right)} dx \\
&= \oint_{\gamma_1} \left(x + \frac{p(y)}{y}\right) dy - \oint_{\gamma_1} \left(y + \frac{q(x)}{x}\right) dx.
\end{aligned}$$

En appliquant la formule de Green $(page 15)$

$$\oint_{\gamma_1} \left(x + \frac{p(y)}{y}\right) dy - \oint_{\gamma_1} \left(y + \frac{q(x)}{x}\right) dx = \iint_{int(\gamma_1)} 2 dx dy,$$

d'après A, B, et C concluons qu' il existe au moins un cycle limite pour le système (3.12).

(ii) On va montrer que γ_2 est non-singulière, invariante pour le système (3.13)et $\int\limits_0^T \operatorname{div}(\gamma_2)\, dt \neq 0$.

A- La courbe γ_2 est non singulière pour le système (3.13) si le système suivant n'a pas de solution réelle.

$$\begin{cases} ax^4 + bx^2 + cy^6 + dy^3 + h = 0 \\ -3xy^3\left(d + 2cy^3\right) = 0 \\ 2yx^2\left(b + 2ax^2\right) = 0, \end{cases}$$

d'après un calcul simple on trouve qu'il ya deux points critiques de ce système sont $M\left(-\sqrt[2]{\frac{-b}{2a}}, \sqrt[3]{\frac{-d}{2c}}\right)$, $\acute{M}\left(\sqrt[2]{\frac{-b}{2a}}, \sqrt[3]{\frac{-d}{2c}}\right)$. On a $h \neq \frac{b^2}{4a} + \frac{d^2}{4c}$, alors ce point n'appartient pas à γ_2, ce qui implique que γ_2 est une courbe non singulière pour le système (3.13).

B- γ_2 est une courbe invariante pour le système(3.13)

$$\begin{aligned} \frac{dU_2}{dt} &= \frac{\partial U_2}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U_2}{\partial y}\dot{y} \\ &= \left[(xy + p(y))\left(4ax^4 + bx^2\right) + (xy + q(x))\left(6cy^6 + dy^3\right)\right] U_2, \end{aligned}$$

tel que

$$U_2 = ax^4 + bx^2 + cy^6 + dy^3 + h$$

et

$$R_2(x, y) = (xy + p(y))\left(4ax^4 + bx^2\right) + (xy + q(x))\left(6cy^6 + dy^3\right).$$

C- On doit vérifier que

$$\int\limits_0^T \operatorname{div}(\gamma_2)\, dt \neq 0.$$

on a

$$\int\limits_0^T \operatorname{div}(\gamma 2)\, dt = \int\limits_0^T R_2(x(t), y(t))\, dt,$$

alors

$$\begin{aligned}
\int_0^T R_2(x(t), y(t))\, dt &= \int_0^T \left[(xy + p(y)) \left(4ax^4 + bx^2 \right) \right] dt \\
&\quad + \int_0^T \left[(xy + q(x)) \left(6cy^6 + dy^3 \right) \right] dt \\
&= \oint_{\gamma_2} \frac{(xy + p(y))(4ax^4 + bx^2)}{y(4ax^4 + bx^2)} dy \\
&\quad - \oint_{\gamma_2} \frac{(xy + q(x))(6cy^6 + dy^3)}{x(6cy^6 + dy^3)} dx \\
&= \oint_{\gamma_2} \left(x + \frac{p(y)}{y} \right) dy - \oint_{\gamma_2} \left(y + \frac{q(x)}{x} \right) dx.
\end{aligned}$$

En appliquant la formule de Green ($page15$) :

$$\oint_{\gamma_2} \left(x + \frac{p(y)}{y} \right) dy - \oint_{\gamma_2} \left(y + \frac{q(x)}{x} \right) dx = \iint_{int(\gamma_2)} 2dxdy,$$

d'après A, B et C on conclut qu' il existe au moins un cycle limite pour le système (3.13).

Exemple 3.4.1 *Posons* $a = 2,\ b = -1,\ c = 1,\ d = -3,\ h = 2$ *et* $p(y) = y$, $q(x) = x$, *alors le système* (3.12) *devient*

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left((xy + y) \left(2x^2 + y^2 - 3y - x + 2 \right) + 3y - 2y^2 \right) \\ \dot{y} = y \left((xy + x) \left(2x^2 + y^2 - 3y - x + 2 \right) - x + 4x^2 \right), \end{cases} \tag{3.14}$$

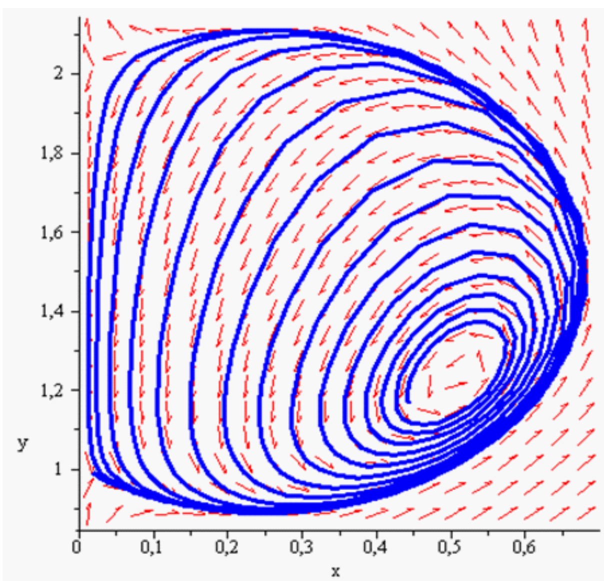
Ce système est un système qui admet un seul point critique $M\left(\sqrt{\frac{1}{4}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, *le cofacteur de ce système est*

$$R_1(x, y) = 4x^3y + 2y^3x + 3x^2y + y^2x - 4xy,$$

$\gamma_1 = 2x^2 + y^2 - 3y - x + 2 = 0$ *est leur courbe, elle est non singulière et invariante. D'autre part*

$$\begin{aligned}\int_0^T \operatorname{div}(\gamma_1(t))\,dt &= \oint_{\gamma_1}(x+1)\,dy - \oint_{\gamma_1}(y+1)\,dx \\ &= \iint_{int(\gamma_1)} 2dxdy \neq 0.\end{aligned}$$

Donc le système (3.14) admet un cycle limite.



Cycle limite du système (3.14)

Exemple 3.4.2 *Posons* $a = \frac{1}{8}$, $b = -1$, $c = 1$, $d = -4$, $h = 5$ *et* $p(y) = y^3 - y$, $q(x) = x^3 + x$. *Le système (3.13) devient*

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(\left(xy + y^3 - y\right)\left(\frac{1}{8}x^4 - x^2 + y^6 - 4y^3 + 5\right) - 6y^6 + 12y^3\right) \\ \dot{y} = y\left(\left(xy + x^3 + x\right)\left(\frac{1}{8}x^4 - x^2 + y^6 - 4y^3 + 5\right) + \frac{1}{2}x^4 - 2x^2\right), \end{cases} \tag{3.15}$$

Ce système est un système qui admet deux points critiques $M\left(-2, \sqrt[3]{2}\right)$ *et* $\acute{M}\left(2, \sqrt[3]{2}\right)$, *le cofacteur de ce système est*

$$R_2(x,y) = \left(xy + y^3 - y\right)\left(\frac{1}{2}x^4 - 2x^2\right) + \left(xy + x^3 + x\right)\left(6y^6 - 12y^3\right),$$

$\gamma_2 = 2x^2 + y^2 - 3y - x + 2 = 0$ *est leur courbe, elle est non singulière et invariante. D'autre part*

$$\begin{aligned}\int_0^T \operatorname{div}(\gamma_2(t))\,dt &= \oint_{\gamma_2}\left(x + y^2 - 1\right)dy - \oint_{\gamma_2}\left(y + x^2 + 1\right)dx \\ &= \iint_{int(\gamma_2)} 2dxdy \neq 0.\end{aligned}$$

Donc le système (3.15) *admet au moins un cycle limite.*

Chapitre 4

Conclusion et perspectives

Le nombre de cycles limites d'une équation différentielle polynômiale fait l'objet de la seconde partie du seizième problème de hilbert. Le théorème de poincaré-Bendixon et celui de Bendixon-Dulac prédisent l'existence, respectivement l'absence, de cycles limites pour les équations différentielles non linéaires en deux dimensions.

Dans le chapitre 3, nous avons étudié l'existence des cycles limites d'une classe des systèmes de kolmogorov (3.1) (*page* 28), on projette généraliser ici aux systèmes différentiels de kolmogorov généraliser de degré n, plus précisément dans $\mathbb{R}^2$, on considéré le système différentiel de kolmogorov

$$\begin{cases} \dot{x} = x\ p\,(x, y) \\ \dot{y} = y\ q\,(x, y)\,, \end{cases}$$

où les polynômes p et q sont de degré n.

Bibliographie

[1] A. Bendjeddou, A Berbache, R. Cherfa, A class of Kolmogorov system with exact algebraic limit cycle, IJDEA, V14 no 3, 2015, 159-165.

[2] F. Dumortier and C. li.On the uniqueness of limit cycles surrounding oneor more singularities for liÈnard equations. Nonlinearity. 9 : (1996),1489-1500.

[3] H. Giacomini, J. Llibre and M. Viano, On the non existence, existence, and uniquenn of limit cycles, Nonlinearity 9 (1996), 501–516.

[4] P. Giao, Hamiltonian structure and first integrals for the Lotka–Volterra systems, Phys. Lett. A 273 (2000) 85–96.

[5] D. Hilbert, Mathematische Problem (lecture), Second Internat. Congress Math. Paris, 1900, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.–Phys. Kl. 1900, pp253–297.

[6] X. Huang, Y. Wang, A. Cheng, Limit cycles in a cubic predator–prey differential system, J. Korean Math. Soc. 43 (2006) 829–843.

[7] Jaume Giné, Maite Grau, A note on : "Relaxation oscillators with exact limit cycles", J. Math. Anal. Appl. 324 (2006) 739–745.

[8] C. Li and J. Llibre, Uniqueness of limit cycles for Liénard differential equations of degree four, J. Differential Equations. 252 (2012), 3142–3162.

[9] J. Li, M. Zhang and S. Li. Bifurcations of limit cycles in a Z2 - equivariantplanar polynimial vector Öeld of degree 7. Int. J. Bifurc. Chaos 16 :(2006), 925-943.

[10] J. Llibre and Y. Zhao, Algebraic Limit Cycles in Polynomial Systems of Differential Equations, J. Phys. A : Math. Theor. 40 (2007), 14207-14222.

[11] L. Perko, Differential equations and dynamical systems, Third edition. Texts in Applied Mathematics, 7. Springer-Verlag, New York, 2001.

[12] H. Poincaré, Sur les courbes définies par une équation différentielle, Journal de maMathématiqu espures et appliquées, (III) 7 (1881), 375-422.

[13] F. Verhulst, Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Universitext, .2nd Edition, Springer, Berlin, 1996.

[14] D.W. Jordon et P. Smith, nonlinear ordinary differential equations, Oxford applied mathematics and computing science series, second edition 1987.

[15] X. Yu, X. Zhang, The hyperelliptic limit cycles of the Liénard systems, J. Math. Anal. Appl. 376 (2011) 535–539.

[16] X. Zhang, The 16th Hilbert problem on algebraic limit cycles, J. Differential Equations 251 (2011) 1778–1789.

[17] P.Zhang, Uniqueness of limit cycles of quadratic systems with a second weak focus, chinese, Acta math. Sinica 41(2) 1999, 289-304.