République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par :

Hasnaoui Mourad

Chaabna Amin

Intitulé

Existence et unicité des solutions d'une équation différentielle du troisième ordre à valeurs aux limites en trois points

Dirigé par : Dr.Frioui Assia

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.Ouanes Nawel	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.Frioui Assia	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.Mellal Roumaissa	MCB	Univ-Guelma

Session Juillet 2019

Table des matières

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions Allah, le tout Puissant, de nous avoir donné la santé, la volonté, la patience et la persévérance pour réaliser ce modeste travail.

Nous adressons aussi toute notre gratitude et nos remerciements les plus sincères à notre encadreure Madame FRIOUI ASSIA pour son grand soutien au travail.

Nous tenons également à remercier vivement les membres de jury pour l'honneur qu'elles nous ont fait en acceptant de siéger à notre soutenance et d'examiner notre travail.

Enfin notre grande gratitude aux professeurs qui nous ont enseignés durant toute la période de notre étude à l'université 08 mai 1945 Guelma.

Dédicace

A mes chers parents pour leur amour leur patience et leurs encouragements

A mes chères frères saleh et mehdi mes sœurs Meriem et Rima

A toute la famille Hasnaoui

A mes amis : Amin , Chamss dine , Salah,Tahir, chokri, Wahid, Bassem.

et tous les étudiants du dépatement de mathématiques

MOURAD

Dédicace

Je dédie ce travail en guise d'amour et d'affection à mes trés chers parents, qui par leurs prières m'ont éclaire le chemin de la vie

A ma soeur et mes trés chers fréres

A toute ma famille et mes proches

A mes amis : Mourad, Chamss dine , Salah,Tahir, Seif, Omar,Alla

et tous ceux qui m'ont soutenu dans les moments les plus difficiles.

AMIN

Résumé

L'objectif de ce mémoire s'inscrit dans l'étude de l'existence et l'unicité de la solution d'un problème à valeurs aux limites en trois points généré par une équation différentielle ordinaire du troisième ordre suivante :

$$(P)\begin{cases} u''' + f\left(t, u(t), u'(t)\right) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u(0) = \alpha u(1) \ , \ u'(1) = \beta u'(\eta)\, , \ u'(0) = 0 \end{cases}$$

où $\eta \in (0,1)$, et α, β deux paramètres tels que $(1-\alpha)(1-\beta\eta) \neq 0$, et $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses. Au fait, nous nous proposons d'étudier l'existence et l'unicité de la solution du probléme (P) via l'alternative non linéaire de Leray Schauder et le principe de contraction de Banach. Comme applications les résultats sont illustrés par des exemples.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة يكمن في دراسة وجود حلول لمعادلة غير خطية من الدرجة الثالثة ذات الشروط الحدية عند ثلاث نقاط

نهتم في هذه المذكرة على إثبات وجود و وحدانية الحلول باستخدام أو الإعتماد على نظرية المتناوبة الغير خطية للاري- شودار و مبدأ تقلص لبناخ

0.1 Introduction

Les équations différentielles constituent aujourd'hui l'un des thèmes importants de la compréhension scientifiques et sont d'une grande utilité dans la modélisation de nombreux problèmes de la physique mathématiques. D'ailleurs Newton disait que traiter mathématiquement un problème physique revient à trouver l'équation différentielle qui le décrit. Mais il semble que la plus part de ces équations sont globalements non linéaires d'où la pertinence d'en faire une étude sur ce type d'équations. D'ailleurs c'est dans ce contexte, que ce mémoire s'inscrit et l'objectif est donc l'étude de l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites associé à une équations différentielle non linéaire d'ordre trois à conditions aux limites en trois points suivant :

$$(P)\begin{cases} u''' + f\left(t, u(t), u'(t)\right) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) = \alpha u(1)\ ,\ u'(1) = \beta u'(\eta), u'(0) = 0 \end{cases}$$

où $\eta \in (0,1)$, $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard et α , β deux paramètres tels que $(1-\alpha)(1-\beta\eta) \neq 0$.

L'idée général du travail consiste alors à transformer le problème aux limites (P) en un problème de point fixe. Au fait la théorie du point fixe se révèle être un outil trés important dans l'étude de ce type d'équations, plus particulièrement et en se basant sur l'alternative non linéaire de Leray- Schauder, le principe de la contraction de Banach nous nous proposons alors d'étudier l'éxistence et l'unicité de la solution du problème aux limites (P) .

Ce mémoire est structuré comme suit :

Chapitre 1 : Nous présentons dans ce chapitre quelques notations et définitions fondamentales concernant les opérateurs compacts et leurs propriétés ainsi que le théorème d'Ascoli-Arzela.

Chapitre 2 : Ce chapitre est dédié à quelques théorèmes de point fixe tels que le théorème de Banach, Brouwer, de Schauder et notamment l'alternative non linéaire de Leray- Schauder et le principe de contraction de Banach.

Chapitre 3 : Ce dernier est consacré entièrement à l'étude du problème aux limites (P) qui porte sur l'éxistence et l'unicité de la solution.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

1.1 Notations et définitions

- $L^2(\Omega)$: L'espace de classe des fonctions à carrées intégrables.
- $C(X,Y)$: L'ensemble des fonctions continues de X dans Y.
- $L(X,Y)$: L'ensemble des opérateurs linéaires de X dans Y.
- $K(X,Y)$: L'ensemble de tout les opérateurs compacts de X dans Y.
- $\overline{\Omega}$: L'adhérence de Ω.
- $\partial\Omega$: La frantière de Ω.
- $B_r(0,r)$:La boule borné de centre 0 et de rayon r.

Définition 1.1 [2] *Une équation différentielle ordinaire* ***(EDO)*** *est une expression de la forme :*

$$F\left(t, x, x^{'}, x^{''}, ...x^{n}\right) = 0$$

où

$$F : U \subset [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$\cdot$ x^n *represente la dérivée d'ordre* n *de* x *par rapport à* t.

*· L'ordre d'une **EDO** est défini comme le plus grand ordre de dérivation présent dans l'équation c'est à dire n.*

· La variable t représente en général le temps dans les équations qui modilisent un processus d'évolution en temps.

Conditions aux limites

Une équation différentielle seule n'a que peu de sens sans la donnée des conditions aux limites. Deux grandes types de conditions aux limites peuvent être données pour les **EDO** qui conduisent aux problèmes à valeurs initiales ou problème de Cauchy, soit aux problèmes à valeurs aux limites.

1.2 Espaces Fonctionnels

1.2.1 Définitions (Rappels)

Commençons par rappeler la définition d'un espace vectoriel normé.

Définition 1.2 *(Espace vectoriel normé)*

Nous considérerons des espaces vectoriels sur le corp $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. Une norme sur l'espace vectoriel* E *est une application* $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ *vérifiant pour tout* x, y *dans* E *et* α *dans* $\mathbb{k}$

i) $\|x\| = 0$ *si seulement si* $x = 0$.

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$.

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Exemple 1.1 *Soit* $C([a,b],\mathbb{R})$*, l'espace vectoriel des fonctions continues sur* $[a,b]$ *à valeurs réelles.*

Pour tout $f \in C([a,b],\mathbb{R})$*, on pose*

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \, dx \quad et \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \, .$$

Les applications $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_\infty$ *sont des normes sur* $C([a,b],\mathbb{R})$.

Définition 1.3 *(Espace métrique complet)*

On dit que E *est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de* E *converge dans* E.

Définition 1.4 *(Espace de Banach)*

Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

Exemple 1.2 $(C([a,b],\mathbb{R}),\|.\|_\infty)$ *est un espace de Banach.*

Définition 1.5 *(Espace* $C[a,b]$*)*

Des fonctions continues sur $[a,b]$, *de norme* $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$.

Définition 1.6 *(Espace* $C^k[a,b]$ *)*

Des fonctions k *fois continument dérivables sur* $[a,b]$, *de norme* $\|x\| = \sum\limits_{i=0}^{k} \max |x^i(t)|$, *telle que* $x^0(t) = x(t)$.

1.2.2 Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.7 *(Espaces* $L^1(\Omega)$*)*

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, *on désigne par* $L^1(\Omega)$ *des fonctions intégrable sur* Ω *à valeur dans* $\mathbb{R}$, *on pose*

$$\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)|\,dx$$

Définition 1.8 *Soit* $1 \le p \le +\infty$, *on pose*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } |f(x)|^p \in L^1(\Omega) \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, on a $L^{\infty}(\Omega)$ est l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, vérifiant

$$\exists c > 0 \text{ telle que } |f(x)| < c, \quad p.p. \text{ sur } \Omega.$$

La norme est notée par

$$\|f\|_{L^{\infty}} = \|f\|_{\infty} = \inf \{c > 0, |f(x)| \leq c, \; p.p. \text{ sur } \Omega.\}$$

1.3 Quelques propriétés

Définition 1.9 *(Espace de Hilbert)*

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.

Théorème 1.1 *[1] $L^{p}(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^{p}(\Omega)}$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Remarque 1.1 *En particulier lorsque $p = 2$, $L^{2}(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$\langle f.g \rangle_{L^{2}(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)\, g(x)\, dx$$

est un espace de Hilbert.

Théorème 1.2 *(Fubini)*

Si $f : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors les intégrales

$$\int_{c}^{d} \left(\int_{a}^{b} f(x,t)\, dx \right) dt \quad \text{et} \quad \int_{a}^{b} \left(\int_{c}^{d} f(x,t)\, dt \right) dx$$

existent et sont égales.

1.4 Notions sur les opérateurs

1.4.1 Les opérateurs linéaires bornés

Définition 1.10 *Soient X et Y deux espaces normés, un opérateur A défini sur X dans Y et dite linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :*

pour tout u, v dans X et α, β dans $\mathbb{R}$

i) $Au \in Y$.

ii) $A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$.

Définition 1.11 *Un opérateur linéaire A défini sur X dans Y et dite borné s'il existe une constante positive C, telle que :*

$$\|Au\|_Y \leq C \|u\|_X \, , \forall u \in X.$$

Définition 1.12 *Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach , et soit $M \subset E$. Une application $T : M \to M$, est dite continue sur M, si pour toute suite $\{x_n\}$ de M;*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0 \text{ entraine que } \lim_{n\to\infty} \|Tx_n - Tx\| = 0$$

Proposition 1.1 *Le plus petit de nombres C vérifiant cette inégalité s'appelle norme de l'opérateur et se note $\|A\|$, on a*

$$\|A\| = \sup_{\|u\|\leq 1} \|Au\| = \sup_{u\neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$$

Proposition 1.2 *Soient X et Y deux espaces normés et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire, les proprietés suivantes sont équivalentes*

i) L'opérateur T est continu sur X.

ii) L'opérateur T est continu au point 0_x.

iii) L'opérateur T est borné.

1.4.2 Opérateurs compacts

Définition 1.13 *Soit* U *un ensemble d'un espace normé* X, U *est dit compact si de tout recouvrement de* U *par des ouverts de* U *on peut extaire un sous-recouvrement fini i.e.*

$$\forall V_j, j \in J(\textit{ouvert});\ U \subset \bigcup_{j\in J} V_j, \exists V_{j(k)},\ j(k) = 1, 2, ..., n \textit{ tel que } U \subset \bigcup_{k=0}^{n} V_j\,(k)$$

Définition 1.14 *Un sous ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compacte.*

Définition 1.15 *[3] Soit* T *un opérateur d'un espace normé* X *dans un espace normé* Y, *on dit que* T *est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans* X *à un ensemble relativement compact dans* Y *.*

Définition 1.16 *L'opérateur* T *est compact, si et seulement si pour toute suite bornée* $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$, *la suite* $\{Tx_n\}_{n\geq 1}$ *admet une sous suite convergente dans* Y *.*

Définition 1.17 *(Opérateur complètement continu)*

L'opérateur T *est dit complètement continu, si il est continu et compact.*

Définition 1.18 *Une famille de fonctions* $F \subset C(X, R)$ *est dite uniformément bornée s'il existe* $M > 0$ *telle que :*

$$|u(x)| \leq M, \quad \forall x \in X, \quad \forall u \in F.$$

Définition 1.19 *Soit* (X, d) *un espace métrique donné, une famille de fonctions* $F \subset C(X, R)$ *est dite équicontinue si et seulement si :*

$$\forall \epsilon \in X, \exists \delta > 0 : \forall (x, y) \in X^2, d(x, y) < \delta, \forall u \in F, \textit{on a} : |u(x) - u(y)| < \epsilon.$$

Théorème 1.3 *[1] (Ascoli-Arzela)*

Soit X un espace métrique complet, alors une famille de fonctions $F \subset C(X, R)$ est relativement compact si et seulement si :

1) F est uniformément bornée.

2) F est équicontinue sur X.

Théorème 1.4 *Soit T un opérateur borné de X dans Y , à image $T(X)$ de dimension finie. Alors T est compact.*

Théorème 1.5 *Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.*

Preuve. En effet, si on désigne par

$$B(0,1) = \{x \in X, \|x\| \leq 1\},$$

alors $T(B(0,1))$ est relativement compact d'ou

$$\|Tx\| \leq C, \forall x \in B(0,1).$$

Alors T est borné.

Réciproquement, l'opérateur indentique I de X dans X est borné, mais il n'est pas compact car $I(B(0,1)) = B(0,1)$, n'est pas relativement compacte sauf si X est de dimension finie. ■

Remarque 1.2 *Tout opérateur linéaire compact est continu*

La condition de compacité est généralement utilisée sous la forme :

Pour toute suite bornée $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$, il existe une sous suite $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ telle que Tx_{n_k} converge.

Théorème 1.6 *[5](Convergence dominée) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\Omega)$ telle que*

i. $f_n(x) \to f(x)$ presque partout sur Ω , *ii.* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *presque partout sur* Ω, $\forall n$ *avec* $g \in L^p(\Omega)$. *Alors,*

$$f \in L^p(\Omega) \;\; et \;\; \|f_n - f\|_{L^p} \to 0.$$

Chapitre 2

Transformation du problème (P) et théorèmes de point fixe

2.1 Théorèmes de point fixe

Dans ce chapitre nous allons donner quelques résultats concernant les théorèmes de point fixe de Brouwer, de Schauder, L'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le principe de contraction de Banach où ces deux derniers sont utilisés pour prouver l'existence et l'unicité des solutions du problème (P).

Définition 2.1 *Soit T une application d'un ensemble X dans lui même. On appelle point fixe tout point $x \in X$ tel que :*

$$T(x) = x.$$

2.1.1 Théorème du point fixe de Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer fait partie de la grande famille des théorèmes de point fixe qui énonce que si une fonction continue f vérifie certaines propriétés alors il existe un point fixe x^* tel que $f(x^*) = x^*$.

Théorème 2.1 *Toute application continue de la boule unité fermée de* $\mathbb{R}^n$ *dans elle même admet un point fixe.*

Théorème 2.2 *Soit* M *une partie convexe, compacte et non vide d'un espace normé de dimension finie* $(X, \|.\|)$ *et soit* $A : M \longrightarrow M$ *une application continue, alors* A *admet un point fixe.*

2.1.2 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de brouwer pour monter l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de banach.

Théorème 2.3 *(Premier théorème de Schauder)*

Soit M *une partie non vide, compacte et convexe d'un espace de Banach* X*. Alors toute application continue* $A : M \longrightarrow M$ *admet un point fixe dans* M*.*

Théorème 2.4 *(Deuxième théorème de Schauder)*

Soit M *une partie non vide et convexe d'un espace normé* X *et soit* $A : M \longrightarrow K$ *une application continue, ou* K *est un sous ensemble compact de* M*. Alors* A *possède un point fixe dans* K*.*

2.1.3 Théorème du point fixe de Banach

Ce théorème est dit principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

Théorème 2.5 *Soit* (M, d) *un espace métrique complet et soit* $T : M \rightarrow M$ *une application contractante i.e qu'il existe* $0 < k < 1$ *telle que* $d(T(x), T(y)) \leq k\ d(x,y)$ *;* $\forall$

$x, y \in M$, alors T admet un unique point fixe $x^* \in M$, de plus pour tout $x \in M$ on a : $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = x^*$ et,

$$d(T^n(x), x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, T(x)).$$

Remarque 2.1 *Les conditions du théorème sont nécessaires, pour s'en convaincre considérons les exemples suivants :*

Exemple 2.1 *$T : [0,1] \to \mathbb{R}$, $T(x) = \frac{x}{2} + 1$, est contractante mais n'admet pas de point fixe. Le problème est que $T([0,1]) \nsubseteq [0,1]$ et on ne peut pas itérer : $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1.5$, mais x_3 n'est pas défini !*

Exemple 2.2 *$T :]0,1] \to]0,1]$, $T(x) = \frac{x}{2}$, est contractante et vérifie $T(]0,1]) \subset]0,1]$ mais n'admet pas de point fixe. Le problème est que $]0,1]$ n'est pas fermé : $\lim u_n = 0$ n'est pas contenue dans $]0,1]$.*

Exemple 2.3 *$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = x + \frac{1}{1+e^x}$ vérifie $|T(x) - T(y)| < |x - y|$ pour tout $x \neq y$, mais n'admet pas de point fixe. Le problème est que T n'est pas contractante, et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ on obtient $x_n \to +\infty$*

2.1.4 L'alternative non linéaire de Leray-Schauder

Théorème 2.6 *[5] (L'alternative non linéaire)*

Soit X un espace de Banach et Ω sous-ensemble borné , ouvert de X tel que $0 \in \Omega$. Soit $T : \overline{\Omega} \to X$ est un opérateur complètement continue, alors :

i) Où bien il existe $x \in \partial\Omega$, $\lambda > 1$ telle que $T(x) = \lambda x$

ii) Où bien il existe un point fixe $x^* \in \overline{\Omega}$ de T.

Au fait, le succés de la théorie du point fixe a été l'une des grandes avancées dans l'étude des problèmes aux limites, cette théorie consiste à transformer le problème donné en un problème de point fixe en construisant un opérateur T.

2.2 Solution du problème (P)

Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $||y||_1 = ||y|| + ||y'||$, où $||.||$ dénote la norme dans $C([0,1], \mathbb{R})$ définie par $||y|| = \max_{t\in[0,1]} |y(t)|$; et $L^1[0,1]$ l'espace de fonctions intégrables dans $[0,1]$ doté de la norme $||.||_{L^1} = \int_0^1 |y(t)|\, dt$ pour tout $y \in L^1[0,1]$.

L'idée générale du travail consiste alors à transformer le problème aux limites (P) en un problème de point fixe. Pour commencer étudions un problème auxilliaire donné par le lemme préliminaire suivant :

Lemme 2.1 *soit* $y \in E$, *si* $\zeta = (1-\alpha)(1-\beta\eta) \neq 0$, *alors le problème aux limites*

$$\begin{cases} u''' + y(t) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ u(0) = \alpha u(1) \ , \ u'(1) = \beta u'(\eta), u'(0) = 0 \end{cases}$$

admet une solution unique

$$u(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 y(s)\, ds - \frac{\beta}{2\zeta}\left(t^2(1-\alpha)+\alpha\right)\int_0^\eta (\eta - s) y(s)\, ds$$

$$+\frac{1}{2\zeta}\int_0^1 (1-s)\left(t^2(1-\alpha) + \alpha\beta\eta(1-s) + \alpha s\right) y(s)\, ds.$$

Preuve. On intègre trois fois l'équation suivante :

$$u''' + y(t) = 0$$

on obtient

$$u''(t) = -\int_0^t y(s)\, ds + C_1.$$

$$u'(t) = -\int_0^t \left(\int_0^x y(s)\, ds\right) dx + C_1 t + C_{2,}$$

$$u'(t) = -\int_0^t (t-s)\, y(s)\, ds + C_1 t + C_2,$$

$$u(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2\, y(s)\, ds + C_1 \frac{t^2}{2} + C_2 t + C_3,$$

Cherchons C_1, C_2 et C_3

de

$$u'(0) = 0$$

on a

$$C_2 = 0$$

de

$$u'(\eta) = -\int_0^\eta (\eta - s) y(s)\, ds + \eta C_1 + C_2$$

et

$$u'(1) = -\int_0^1 (1-s) y(s)\, ds + C_1 + C_2 = \beta u'(\eta)$$

on a

$$C_1 = -\frac{\beta}{1-\beta\eta}\int_0^\eta (\eta - s) y(s)\, ds + \frac{\beta}{1-\beta\eta}\int_0^1 (1-s) y(s)\, ds + (\beta - 1)\, C_2.$$

on remplace C_2 dans C_1 on trouve

$$C_1 = -\frac{\beta}{1-\beta\eta}\int_0^\eta (\eta - s) y(s)\, ds + \frac{\beta}{1-\beta\eta}\int_0^1 (1-s) y(s)\, ds$$

de

$$u(1) = -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)^2\, y(s)\, ds + \frac{C_1}{2} + C_2 + C_3$$

et

$$u(0) = C_3 = \alpha u(1),$$

alors, on a

$$C_3 = -\frac{\alpha}{2(1-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^2 y(s)\, ds + \frac{\alpha}{2(1-\alpha)} C_1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} C_2,$$

on remplace C_1 et C_2 dans C_3 on trouve

$$C_3 = -\frac{\alpha(1-\beta\eta)}{2\zeta} \int_0^1 (1-s)^2 y(s)\, ds - \frac{\alpha\beta}{2\zeta} \int_0^\eta (\eta-s) y(s)\, ds + \frac{\alpha}{2\zeta} \int_0^1 (1-s) y(s)\, ds$$

avec $\zeta = (1-\alpha)(1-\beta\eta) \neq 0$;
en remplaçant C_1 , C_2 et C_3 dans

$$u(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t (t-s)^2 y(s)\, ds + C_1 \frac{t^2}{2} + C_2 t + C_3,$$

on obtient

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{1}{2} \int_0^t (t-s)^2 y(s)\, ds - \frac{\beta}{2\zeta} \left(t^2(1-\alpha) + \alpha\right) \int_0^\eta (\eta-s) y(s)\, ds \\ &\quad + \frac{1}{2\zeta} \int_0^1 (1-s) \left(t^2(1-\alpha) + \alpha\beta\eta(1-s) + \alpha s\right) y(s)\, ds. \end{aligned}$$

■

Définissons l'opérateur intégral $T : E \to E$, par

$$\begin{aligned} Tu(t) &= -\frac{1}{2} \int_0^t (t-s)^2 f(s, u(s))\, ds \\ &\quad -\frac{\beta}{2\zeta} \left(t^2(1-\alpha) + \alpha\right) \int_0^\eta (\eta-s) f(s, u(s))\, ds \\ &\quad +\frac{1}{2\zeta} \int_0^1 (1-s) \left(t^2(1-\alpha) + \alpha\beta\eta(1-s) + \alpha s\right) f(s, u(s))\, ds. \end{aligned} \tag{2.1}$$

En accord avec le lemme 2.1, le problème (P) a une solution si et seulement si l'opérateur T admet un point fixe dans E. Pour ce faire, nous prouvons d'abord un résultat d'unicité basé sur le principe de contraction de Banach où nous montrons que T est une contraction et un résultat d'éxistence basé sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder où nous prouvons par le théorème d'Ascolie-Arzela que T est un opérateur complètement continu.

Chapitre 3

Solutions non triviales du problème aux limites (P)

3.1 Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette partie, pour établir les résultats d'éxistence nous supposons la fonction $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory c'est à dire une fonction vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) $t \to f(t,x,y)$ est mesurable pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) $(x,y) \to f(t,x,y)$ est continue presque pour tout $t \in [0,1]$.

On assume que $\zeta = (1-\alpha)(1-\beta\eta) \neq 0$.

D'abord, nous étudions l'existence de la solution non triviale en utilisant le théorème 2.6.

Théorème 3.1 *Supposons que f est une fonction de Carathéodory, $f(t,0,0) \neq 0$ et qu'ils existent trois fonctions positives $k, g, h \in L^1([0,1], \mathbb{R}_+)$ telles que*

$$|f(t,x,\overline{x})| \leq k(t)|x|^p + g(t)|\overline{x}|^q + h(t), \quad (t,x,\overline{x}) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2, \tag{3.1}$$

$$0 < \left(2 + \frac{(|\beta|+1)(2+3|\alpha|) + |\alpha\beta|}{|\zeta|}\right)\left(\|k\|_{L^1[0,1]} + \|g\|_{L^1[0,1]}\right) < \frac{1}{2} \tag{3.2}$$

$$\left(2+\frac{(|\beta|+1)(2+3|\alpha|)+|\alpha\beta|}{|\zeta|}\right)\|h\|_{L^1[0,1]}<\frac{1}{2} \tag{3.3}$$

Alors le problème (P) a au moins une solution non triviale $u^* \in E$.

Preuve. Transformons le problème (P) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $T : E \to E$ défini par

$$\begin{aligned} Tu(t) &= -\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 f(s,u(s),u'(s))\,ds \\ &\quad -\frac{\beta}{2\zeta}\left(t^2(1-\alpha)+\alpha\right)\int_0^\eta (\eta-s) f(s,u(s),u'(s))\,ds \\ &\quad +\frac{1}{2\zeta}\int_0^1 (1-s)\left(t^2(1-\alpha)+\alpha\beta\eta(1-s)+\alpha s\right) f(s,u(s),u'(s))\,ds, \end{aligned}$$

d'aprés le lemme 2.1, les points fixes de l'opérateur T sont les solutions du problème (P).

Posons

$$M=\left(2+\frac{(|\beta|+1)(2+3|\alpha|)+|\alpha\beta|}{|\zeta|}\right)\left(\|k\|_{L^1[0,1]}+\|g\|_{L^1[0,1]}\right)$$

et

$$N=\left(2+\frac{(|\beta|+1)(2+3|\alpha|)+|\alpha\beta|}{|\zeta|}\right)\|h\|_{L^1[0,1]}.$$

On vertu de l'hypothèse (3.1), nous avons $0 < M < \frac{1}{2}$. Comme $f(t,0,0) \neq 0$, alors il existe un intervalle $[\sigma,\tau] \subset [0,1]$ tel que $\min\limits_{\sigma \le t \le r} |f(t,0,0)| > 0$ par conséquent $N > 0$. Posons $\|u\|_1^\sigma = \max(\|u\|_1^p, \|u\|_1^q)$, $(\sigma = p$ où $\sigma = q)$, n partie entière de σ et $m = \left(\frac{N}{M}\right)^{\frac{1}{n}}$. Définissons l'ouvert, borné Ω par $\Omega = \{u \in C[0,1] : \|u\|_1 < m\}$.

Montrons que T est un opérateur complètement continu dans Ω.

(i) T est continu,

en effet, soit (u_n) une suite qui converge vers u dans E. Alors,

$$\begin{aligned}
& \left|Tu_n(t) - Tu(t)\right| \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)^2 \left|f\left(s,u_n\left(s\right),u_n'\left(s\right)\right) - f\left(s,u\left(s\right),u'\left(s\right)\right)\right| ds \\
& +\frac{1}{2}\left|\frac{\beta}{\zeta}\right|\left(1+2\left|\alpha\right|\right)\int_0^1 (1-s)\left|f\left(s,u_n\left(s\right),u_n'\left(s\right)\right) - f\left(s,u\left(s\right),u'\left(s\right)\right)\right|
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2\left|\zeta\right|}\int_0^1 (1-s)\left(1+2\left|\alpha\right|+\left|\alpha\beta\right|(1-s)\right)\left|f\left(s,u_n\left(s\right),u_n'\left(s\right)\right) - f\left(s,u\left(s\right),u'\left(s\right)\right)\right| ds$$

$$\leq \left(1+\frac{\left(\left|\beta\right|+1\right)\left(1+2\left|\alpha\right|\right)+\left|\alpha\beta\right|}{\left|\zeta\right|}\right)\left\|f\left(.,u_n\left(.\right),u_n'\left(.\right)\right) - f\left(.,u\left(.\right),u'\left(.\right)\right)\right\|_{L^1} \tag{3.4}$$

En outre, on a

$$\begin{aligned}
& \left|T'u_n(t) - T'u(t)\right| \leq \\
& \int_0^1 (1-s)\left|f\left(s,u_n\left(s\right),u_n'\left(s\right)\right) - f\left(s,u\left(s\right),u'\left(s\right)\right)\right| ds \\
& +\frac{\left|\beta\right|}{\left|\zeta\right|}\left(1+\left|\alpha\right|\right)\int_0^1 (1-s)\left|f\left(s,u_n\left(s\right),u_n'\left(s\right)\right) - f\left(s,u\left(s\right),u'\left(s\right)\right)\right| ds \\
& +\frac{1}{\left|\zeta\right|}\left(1+\left|\alpha\right|\right)\int_0^1 (1-s)\left|f\left(s,u_n\left(s\right),u_n'\left(s\right)\right) - f\left(s,u\left(s\right),u'\left(s\right)\right)\right| ds \\
\leq\ & \left(1+\frac{\left(\left|\beta\right|+1\right)\left(1+\left|\alpha\right|\right)}{\left|\zeta\right|}\right)\times\left\|f\left(.,u_n\left(.\right),u_n'\left(.\right)\right) - f\left(.,u\left(.\right),u'\left(.\right)\right)\right\|_{L^1}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\left\|Tu_n - Tu\right\|_1 \leq\ & \left(2+\frac{\left(\left|\beta\right|+1\right)\left(2+3\left|\alpha\right|\right)+\left|\alpha\beta\right|}{\left|\zeta\right|}\right) \\
& \times\left\|f\left(.,u_n\left(.\right),u_n'\left(.\right)\right) - f\left(.,u\left(.\right),u'\left(.\right)\right)\right\|_{L^1}
\end{aligned}$$

En vu du théorème de convergence dominée de Lebesgue on a $\left\|Tu_n - Tu\right\|_1 \to 0$, quand $n \to \infty$.

(ii) Soit $B_r = \{u \in E; \left\|u\right\|_1 \leq r\}$ un sous ensemble borné. Montrons que $T\left(\Omega \cap B_r\right)$ est relativement compact

a) Soit $u \in \Omega \cap B_r$ et compte tenu de (3.1) on a

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_1 &\leq \left(2 + \frac{(|\beta| + 1)(2 + 3|\alpha|) + |\alpha\beta|}{|\zeta|}\right) \\
&\quad \left(\|u\|_1^p \|k\|_{L^1[0,1]} + \|u\|_1^q \|g\|_{L^1[0,1]}\right) + N \\
&\leq M \max(\|u\|_1^p, \|u\|_1^q) + N,
\end{aligned}$$

Posons $\max(\|u\|_1^p, \|u\|_1^q) = \|u\|_1^\sigma$, $\sigma = p$ ou $\sigma = q$, alors

$$\|Tu\|_1 \leq Mr^\sigma + N$$

ce qui entraine que $T(\Omega \cap B_r)$ est uniformément borné.

b) $T(\Omega \cap B_r)$ est équicontinu. En effet pour $t_1, t_2 \in [0,1]$, $t_1 < t_2$, $u \in \Omega$, nous avons :

$$\begin{aligned}
&|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \\
\leq\ & \frac{1}{2}\int_0^{t_1} \left((t_2 - s)^2 - (t_1 - s)^2\right) |f(s, u(s), u'(s))| \, ds \\
&+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^2 |f(s, u(s), u'(s))| \, ds \\
&+\frac{|\beta(1-\alpha)|}{2|\zeta|}\left(t_2^2 - t_1^2\right)\int_0^\eta (\eta - s)|f(s, u(s), u'(s))| \, ds \\
&+\frac{|(1-\alpha)|\left(t_1^2 - t_2^2\right)}{2|\zeta|}\int_0^1 (1 - s)|f(s, u(s), u'(s))| \, ds,
\end{aligned}$$

Considérons la fonction $\Phi(x) = x^2 - 2x$, il est clair que Φ est décroissante sur $[0,1]$, par conséquent $(t_2 - s)^2 - (t_1 - s)^2 \leq 2(t_2 - t_1)$, d'où on en déduit que

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)|$$

$$\leq 2(t_2 - t_1)\int_0^1 |f(s, u(s), u'(s))| \, ds + \int_{t_1}^{t_2} |f(s, u(s), u'(s))| \, ds$$

$$+\frac{|\beta + 1| |(1-\alpha)|}{|\zeta|}\left(t_2^2 - t_1^2\right)\int_0^1 |f(s, u(s), u'(s))| \, ds$$

lorsque $t_1 \to t_2$, alors $\|Tu(t_1) - Tu(t_2)\|$ tend vers 0, par conséquent $T(\Omega \cap B_r)$ est equicontinu. En vue du théorème d'Ascoli-Arzela, T est complètement continu.

A présent, nous pouvons appliquer l'alternative non linéaire pour $T : \overline{\Omega} \to E$. Supposons que $u \in \partial\Omega$, $\lambda > 1$ tels que $Tu = \lambda u$. On a

$$\begin{aligned}
|Tu(t)| &\leq \left(1 + \frac{(|\beta|+1)(1+2|\alpha|) + |\alpha\beta|}{|\zeta|}\right) \times \\
&\quad \left[\max|u(t)|^p \|k\|_{L^1[0,1]} + \max|u'(t)|^q \|g\|_{L^1[0,1]} + \|h\|_{L^1[0,1]}\right] \\
&\leq \left(1 + \frac{(|\beta|+1)(1+2|\alpha|) + |\alpha\beta|}{|\zeta|}\right) \times \\
&\quad \left[\|u\|_1^\sigma \left(\|k\|_{L^1[0,1]} + \|g\|_{L^1[0,1]}\right) + \|h\|_{L^1[0,1]}\right]
\end{aligned} \tag{3.6}$$

et

$$|T'u(t)| \leq \left(1 + \frac{(|\beta|+1)(1+|\alpha|)}{|\zeta|}\right) \tag{3.7}$$
$$\left[||u||_1^\sigma \left(\|k\|_{L^1[0,1]} + \|g\|_{L^1[0,1]}\right) + \|h\|_{L^1[0,1]}\right]$$

Et donc en se servant des estimations (3.5) et (3.6) on obtient

$$\begin{aligned}
\lambda m &= \lambda\,||u||_1 = ||Tu||_1 = \max_{0\leq t\leq 1}|(Tu)(t)| + \max_{0\leq t\leq 1}|(T'u)(t)| \leq \\
&\quad \left(2 + \frac{(|\beta|+1)(2+3|\alpha|) + |\alpha\beta|}{|\zeta|}\right) \\
&\quad \left[||u||_1^\sigma \left(\|k\|_{L^1[0,1]} + \|g\|_{L^1[0,1]}\right) + \|h\|_{L^1[0,1]}\right] \\
&= M\|u\|_1^\sigma + N.
\end{aligned}$$

Choisissons n la partie entière de σ. Alors

$$\begin{aligned}
\lambda &\leq M^{\frac{((n+1)-\sigma)}{n}} N^{\frac{(\sigma-1)}{n}} + M^{\frac{1}{n}} N^{1-\frac{1}{n}} \\
&< \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{((n+1)-\sigma)}{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(\sigma-1)}{n}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{n}} = 1,
\end{aligned}$$

Conséquemment $\lambda < 1$, contradiction avec le fait que $\lambda > 1$. En vertu du théorème 2.6, on conclut que T a un point fixe $u^* \in \overline{\Omega}$ et donc le problème (P) a une solution non triviale $u^* \in E$. ■

Le théorème suivant traite l'unicité de la solution.

Théorème 3.2 *Supposons que f est une fonction de Carathéodory et qu'ils existent deux fonctions positives $k_1, k_2 \in L^1([0,1], \mathbb{R}_+)$ telles que*

$$|f(t,x,\overline{x}) - f(t,y,\overline{y})| \leq k_1(t)|x-y| + k_2(t)|\overline{x}-\overline{y}|, \forall x,y \in \mathbb{R}, t \in [0,1]. \tag{3.8}$$

et

$$\left(2 + \frac{(|\beta|+1)(2+3|\alpha|)+|\alpha\beta|}{|\zeta|}\right)\left(\|k_1\|_{L_1[0,1]} + \|k_2\|_{L_1[0,1]}\right) < 1 \tag{3.9}$$

Alors le problème (P) admet une unique solution u^* dans E.

Preuve. Prouvons que T est une contraction. En effet, soient $u, v \in E$, alors

$$\begin{aligned} & |Tu(t) - Tv(t)| \\ \leq\ & \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(|\beta|+1)(1+2|\alpha|)+|\alpha\beta|}{|\zeta|}\right) \\ & \int_0^1 |f(s,u(s),u'(s)) - f(s,v(s),v'(s))|\, ds \end{aligned}$$

Par (3.8) on obtient

$$\begin{aligned} & |Tu(t) - Tv(t)| \\ \leq\ & \left(1 + \frac{(|\beta|+1)(1+2|\alpha|)+|\alpha\beta|}{|\zeta|}\right) \\ & \max|u(t) - v(t)| \int_0^1 k_1(s)ds + \max|u'(t) - v'(t)| \int_0^1 k_2(s)ds \Big] \\ \leq\ & \left(1 + \frac{(|\beta|+1)(1+2|\alpha|)+|\alpha\beta|}{|\zeta|}\right) \|u-v\|_1 \int_0^1 (k_1(s)+k_2(s))\, ds \end{aligned} \tag{3.10}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
T'u(t) &= -\int_0^t (t-s)\, f\left(s, u\left(s\right), u'(s)\right) ds \\
&\quad -\frac{\beta t\left(1-\alpha\right)}{\zeta} \int_0^\eta (\eta - s)\, f\left(s, u\left(s\right), u'(s)\right) ds \\
&\quad +\frac{t\left(1-\alpha\right)}{\zeta} \int_0^1 (1-s)\, f\left(s, u\left(s\right), u'(s)\right) ds, \forall t \in [0,1]
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&\left|T'u(t) - T'v(t)\right| \qquad (3.11)\\
&\leq \left(1 + \frac{\left(|\beta|+1\right)\left(1+|\alpha|\right)}{|\zeta|}\right) \\
&\left[\int_0^1 k_1(s)\left|u(s) - v\left(s\right)\right| ds + \int_0^1 k_2(s)\left|u'(s) - v'\left(s\right)\right| ds\right] \\
&\leq \left(1 + \frac{\left(|\beta|+1\right)\left(1+|\alpha|\right)}{|\zeta|}\right) \left\|u - v\right\|_1 \int_0^1 \left(k_1(s) + k_2(s)\right) ds
\end{aligned}$$

En sommant (3.10) et (3.11), il suit en appliquant (3.9) et par passage au supremum que $\left\|Tu - Tv\right\|_1 < \left\|u - v\right\|_1$. Conséquemment T est une contraction dés lors, elle admet un unique point fixe qui est l'unique solution du problème (P). ■

3.2 Exemples

A fin d'illustrer les resultat obtenus, considérons les deux exemples suivants.

Exemple 3.1 *Le problème aux limites en trois points suivant*

$$\begin{cases} u''' = (1+t)^{-10}\left(\sin u + e^{-t}u'(t)\right) + \ln(1+t), \quad 0 < t < 1 \\ u\left(0\right) = 10^{-2}u\left(1\right), u'\left(1\right) = 10^{-4}u'\left(\frac{1}{2}\right), u'\left(0\right) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

a une unique solution $u \in E$.

En effet, on a $\alpha = 10^{-2}$, $\beta = 10^{-4}, \eta = \frac{1}{2}$, $\zeta = 0.989\,95$ et

$$|f(t,x,\overline{x}) - f(t,y,\overline{y})| \leq k(t)\,|x-y| + g(t)\,|\overline{x} - \overline{y}|$$

où $k(t) = (1+t)^{-10}$, $g(t) = (1+t)^{-10}\,e^{-t}$, $k, g \in L_1\left([0,1], \mathbb{R}_+\right)$. En utilisant le théorème 3.1, il vient que

$$\begin{aligned} M &= \left(2 + \frac{(|\beta|+1)\,(2+3\,|\alpha|) + |\alpha\beta|}{|\zeta|}\right)\left(\|k\|_{L^1[0,1]} + \|g\|_{L^1[0,1]}\right) \\ &= 0.209\,76 \times 4.0508 = 0.849\,70 < 1 \end{aligned}$$

et donc le problème (1) admet une unique solution u dans E.

Exemple 3.2 *Le problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} u''' = 10^{-2}\left(\frac{u}{4+u^2}\sin t + u' e^{-u^2}\ln(1+t) + \tan t\right), \quad 0 < t < 1 \\ u\,(0) = -2u\,(1)\,, u'\,(1) = 3u'\left(\frac{1}{2}\right), u'\,(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

possède au moins une solution nontriviale u dans E.

En effet, on a $\alpha = -2$, $\beta = 3, \eta = \frac{1}{2}$, $\zeta = \frac{3}{2}$,

$$f(t,x,y) = 10^{-2}\left(\frac{x}{4+x^2}\sin t + ye^{-x^2}\ln(1+t) + \tan t\right)$$

$f(t,0,0) = 10^{-2}\tan t \neq 0$, $t \in (0,1)$ et

$$|f(t,x,y)| \leq k(t)|x| + g(t)|y| + h(t),$$

où $k(t) = 10^{-2}\sin t$, $g(t) = \frac{\ln(1+t)}{100}$, $h(t) = 10^{-2}\tan t$, $k, g, h \in L_1([0,1], \mathbb{R}_+)$. Vérifions les hypothèses du théorème 3.2, en effet on a

$$\begin{aligned}
M &= \left(2 + \frac{(|\beta|+1)(2+3|\alpha|)+|\alpha\beta|}{|\zeta|}\right)\left(\|k\|_{L^1[0,1]} + \|g\|_{L^1[0,1]}\right) \\
&= 27.333 \times 8.4599 \times 10^{-3} = 0.23123 < \frac{1}{2} \\
N &= \left(2 + \frac{(|\beta|+1)(2+3|\alpha|)+|\alpha\beta|}{|\zeta|}\right)\|h\|_{L^1[0,1]} \\
&= 27.333 \times 0.61563 \times 10^{-2} = 0.16827 < \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Alors le problème (2) admet au moins une solution non triviale u dans E.

Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté un résultat d'existence et d'unicité de la solution d'un problème aux limites associé à une équations différentielle non linéaire d'ordre trois à conditions aux limites en trois points.

Ces résultats ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe, en particulier on a utilisé le théorème de point fixe de Banach et l'alternative non linéaire de Leray-Schauder. Comme application les résultats ont été bien illustrés par des exemples.

Bibliographie

[1] H.Brézis, Analyse Fonctionnelle,Théorie et Applications, Masson Paris1983.

[2] S.D.CHatterji, Cours d'analyse. Equations différentielles ordinaires et aux dérivée partielles, 1998.

[3] A. Kolmogrov, S. Fomine. Elements de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Mir. 1977.

[4] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer, Berlin, 1985.

[5] A. Granas, J. Dugundji. Fixed point theory, Springer, Monographs in mathematics,1985.

[6] A. Guezane-Lakoud, A. Frioui, Existence of solutions of a nonlinear third order boundary value problem, Fixed Point Theory,13 (2012), No.2, 501-506.

[7] A. Guezane-Lakoud, A. Frioui, Nonlinear three point boundary value problem, Sarajevo Journal of Mathematics, Vol.8 (20) (2012), 1-6.

[8] D. R. Smart, Fixed Point Theorems, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980.