

République Algérienne Démocratique & Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université 08 Mai 1945 de Guelma  
Faculté des Sciences et de Technologie  
Département de Génie Mécanique



**MEMOIRE DE MAGISTER**  
Option : Mécanique et Maintenance Industrielle

## **Reconstruction des charges dynamiques réparties sur la poutre de Bernoulli par la méthode de sélection des modes**

**Présenté et soutenu publiquement par : Braghta Salah**  
**Sous la direction de :**  
**Pr. N. Ouelaa**

Devant le jury composé de MM :

Président	: BEZAZI Abderrezak	Pr.	Université de Guelma
Rapporteur	: OUELAA Nouredine	Pr.	Université de Guelma
Examineur	: DJAMAA Mohamed Cherif	MC.	Université de Guelma
Examineur	: GUENFOUD Mohamed	Pr.	Université de Guelma

2012



En hommage à mes parents

## ***Remerciements***

*Je remercie tout d'abord mon encadreur Mr Nouredine Ouelaa Professeur à l'université de Guelma pour m'avoir accordé la possibilité de mener ce travail, je le remercie aussi pour sa très grande disponibilité et ses bons conseils, je lui en suis très reconnaissant.*

*Je souhaiterais remercier aussi Mr Bezazi Abderrezak qui a accepté de présider mon jury et également Dr. Djamaa Mohamed Cherif pour son aide précieuse et pour sa participation autant qu'examineur, j'exprime ma reconnaissance à Mr Guenfoud Mohamed Professeur à l'université de Guelma qui a bien voulu se joindre au jury et examiner mon travail.*

*Un grand merci également à mon frère Amar de l'université de Guelma, sans son aide ce travail n'aurais pas vu le jour.*

*Merci aux copains de l'école doctorale, A.Boudjehem, A.Zerti, R.Khaldoun, A.Laabidi, N.Talbi, A.Boukharouba et S.Cheddadi qui ont contribué à la bonne ambiance des études et de travail.*

*Enfin, un merci particulier à ma famille, pour la patience et pour les encouragements qui m'ont permis de surmonter les moments difficiles et mener à bien se travail.*

# SOMMAIRE

<b>Introduction</b> .....	<b>1</b>
<b>Étude bibliographique</b> .....	<b>3</b>
<b>Chapitre I : Définitions et rappels, équations des vibrations des poutres</b> .....	<b>18</b>
<b>I.1 Définitions</b> .....	<b>18</b>
<b>I.1.1 Poutre</b> .....	<b>18</b>
<b>I.1.2 Barre</b> .....	<b>18</b>
<b>I.1.3 Champ de déplacement</b> .....	<b>19</b>
<b>I.1.4 Hypothèses de condensation</b> .....	<b>19</b>
<b>I.1.5 Vibrations longitudinales</b> .....	<b>20</b>
<b>I.1.6 Vibrations de torsion</b> .....	<b>20</b>
<b>I.1.7 Vibrations de flexion</b> .....	<b>21</b>
<b>I.2 Equations des vibrations de flexion des poutres droites</b> .....	<b>21</b>
<b>I.2.1 Equations de base en variables mixtes, poutre de Timoshenko</b> .....	<b>21</b>
<b>I.2.2 Equations de base en variables déplacement</b> .....	<b>23</b>
<b>I.2.3 Equation de mouvement de la poutre de Bernoulli</b> .....	<b>25</b>
<b>a) Formulation mixte</b> .....	<b>25</b>
<b>b) Formulation en déplacement</b> .....	<b>26</b>
<b>I.2.4 Equation classique des vibrations de flexion des poutres, équation d'Euler</b> .....	<b>26</b>
<b>Chapitre II : Résolution de l'équation homogène, schéma modal, cas de la poutre encastrée-libre</b> .....	<b>27</b>
<b>II.1 Résolution de l'équation homogène par la méthode de séparation des variables</b> ....	<b>27</b>
<b>II.1.1 Poutre d'Euler-Bernoulli</b> .....	<b>27</b>
<b>II.1.2 Modèle avec inertie rotationnelle</b> .....	<b>31</b>
<b>II.1.3 Equation de mouvement et solution homogène du modèle avec cisaillement transversal</b> .....	<b>38</b>
<b>II.1.4 Poutre de Timoshenko</b> .....	<b>46</b>
<b>II.2. Synthèse des résultats et comparaison des quatre modèles</b> .....	<b>57</b>

<b>Chapitre III : Calcul de la réponse forcée par décomposition modale .....</b>	<b>60</b>
<b>III.1 Objet du chapitre .....</b>	<b>60</b>
<b>III.2 Les étapes de calcul de la réponse par décomposition modale .....</b>	<b>60</b>
<b>III.2.1 Pose du problème .....</b>	<b>60</b>
<b>III.2.2 Orthogonalité des déformées propres .....</b>	<b>61</b>
<b>III.2.2.1 Cas de la poutre d'Euler-Bernoulli, du modèle avec cisaillement transversal et de la poutre de Timoshenko .....</b>	<b>61</b>
<b>III.2.2.2 Cas du modèle avec inertie rotationnelle .....</b>	<b>63</b>
<b>III.2.3 Décomposition modale de la réponse, équation modale .....</b>	<b>65</b>
<b>III.2.3.1 Cas du modèle d'Euler, du modèle avec cisaillement et de Timoshenko .....</b>	<b>66</b>
<b>III.2.3.2 Cas du modèle avec inertie rotationnelle .....</b>	<b>67</b>
<b>III.2.4 Réponse de la poutre encastrée libre .....</b>	<b>69</b>
<b>Chapitre IV : Reconstruction des charges dynamiques par la méthode de sélection des modes .....</b>	<b>71</b>
<b>IV.1 Introduction .....</b>	<b>71</b>
<b>IV.2 Sélection des modes .....</b>	<b>72</b>
<b>IV.3 Théorie de la reconstruction des charges dynamiques réparties .....</b>	<b>74</b>
<b>IV.4 Régularisation .....</b>	<b>76</b>
<b>IV.5 Principe de la courbe en L et choix du paramètre de régularisation .....</b>	<b>78</b>
<b>IV.6 Cas étudiés .....</b>	<b>80</b>
<b>IV.7 Conclusion .....</b>	<b>91</b>
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>92</b>
<b>Bibliographie .....</b>	<b>95</b>

## **Résumé**

*L'objectif de ce travail est double. D'une part l'étude de l'influence des effets secondaires sur le comportement en vibrations transversales des poutres, suite à l'application d'une charge dynamique, mérite un intérêt particulier pour répondre à des besoins de construction et de conception, et d'autre part, l'identification de cette charge à partir de la réponse est nécessaire lorsque sa mesure directe par les moyens conventionnelles est impossible, à cette fin, la mise en équation du problème des vibrations transversales d'une poutre par l'application du principe d'Hamilton et sa résolution, par la méthode de séparation des variables dans le cas homogène c'est-à-dire le calcul de la réponse à une perturbation initiale de l'état d'équilibre (réponse libre), et par la méthode de décomposition modale dans le cas non homogène (réponse forcée), ont été réalisées conformément aux quatre modèles descriptifs des vibrations transversales d'une poutre, à savoir le modèle d'Euler, le modèle avec inertie rotationnelle, le modèle avec cisaillement transversal et le modèle de Timoshenko, le cas des conditions limites encasturé-libre a été choisi parce que c'est celui qui suscite le plus d'intérêt pour les vibrations transversales et qui modélise énormément de structures industrielles.*

*Pour la reconstruction de la charge dynamique répartie une approche récente qui s'appelle méthode de sélection des modes est alors proposée et vérifiée par des simulations numériques. Le cas étudié est celui d'une poutre soumise à une excitation harmonique répartie et l'idée consiste à déterminer le nombre de modes optimal nécessaire à l'identification de la charge avec une précision satisfaisante.*

*Mots clés : Charge dynamique répartie, Inertie rotationnelle, Cisaillement transversal, Reconstruction de charge, Sélection des modes.*

## *Summary*

*The objective of this work is twofold. On the one hand the study of the influence of side effects on behavior in transverse vibrations of beams, following the application of dynamic loading, deserves particular interest to meet the needs of construction and design, and secondly, the identification of the load from the response is required when the direct measurement by conventional means is impossible, for this purpose, development of the equation of the beam transverse vibrations problem by the application of Hamilton's principle and its resolution, by the method of separation of variables in the homogeneous case that is to say, the calculation of the response to an initial disturbance of the equilibrium state (free response), and the modal decomposition method in the case inhomogeneous (forced response), summers have made according to four descriptive models of transverse vibrations of a beam, namely the Euler model, the model with rotational inertia, the model with transverse shear and the Timoshenko model, where the clamped-free boundary conditions was chosen because it is one that creates the most interest for the transverse vibrations enormously and that models of industrial structures .*

*For reconstruction of distributed dynamic load, a recent approach called mode selection method, is then proposed and verified by numerical simulations. The case studied, is that of a beam under distributed harmonic excitation and the idea is to determine the optimal number of modes needed to identify the load with satisfactory accuracy.*

*Keywords: Distributed dynamic load, rotational inertia, transverse shear, load reconstruction, mode selection.*

## ملخص

الهدف من هذا العمل مزدوج. فمن ناحية فان دراسة تأثير مفعول الآثار الثانوية على السلوك في الاهتزازات العرضية ، بعد تطبيق حمولة ديناميكية، يستحق اهتماما خاصا لتلبية احتياجات البناء والتصميم ، و من ناحية أخرى ، هناك حاجة ماسة لتحديد هذه الحمولة من قياس الاستجابة عندما يكون القياس المباشر لها عن طريق الوسائل التقليدية أمر مستحيل ، لهذا الغرض، تم تحديد معادلة مسألة الاهتزازات العرضية عن طريق تطبيق مبدأ هاملتون وتم حلها من خلال طريقة الفصل بين المتغيرات في الحالة المتجانسة أي حساب الاستجابة للاضطرابات الأولية للحالة المستقرة (الاستجابة الحرة) ، و بطريقة التحليل الصيغي في الحالة الغير متجانسة (الاستجابة القسرية)، وذلك وفقا لأربعة نماذج وصفية للاهتزازات العرضية ، وهي نموذج يولر، نموذج الجمود المتناوب ، نموذج القص العرضي و طراز تيموشينكو، تم اختيار حالة شرط الحدود مثبت-حر لأنها هي التي تثير أكبر قدر من الاهتمام في دراسة الاهتزازات العرضية كما تعتبر نموذج للكثير من الهياكل الصناعية. ومن أجل إعادة تكوين الحمولة الديناميكية اقترحت مقارنة حديثة تحمل اسم طريقة اختيار الصيغة وتم التحقق منها عن طريق عمليات المحاكاة العددية. الحالة التي تمت دراستها تتعلق بعارضة تحت تأثير حمولة توافقية موزعة والفكرة هي تحديد العدد الأمثل للصيغ اللازمة لتحديد الحمولة بدقة مرضية.

الكلمات الرئيسية : حمولة ديناميكية موزعة، الجمود المتناوب، القص العرضي، إعادة تكوين الحمولة اختيار الصيغة.

## **Notation**

### **Variables avec dimensions**

$S$	Aire de la section droite, $m^2$
$a, b, \tilde{b}$	nombres d'onde, $1/m$
$E$	Module de Young, $N/m^2$
$f$	Effort normale appliqué par unité de longueur, $N/m$
$G$	Module de cisaillement, $N/m^2$
$I$	moment d'inertie de la section par rapport à l'axe neutre, $m^4$
$Q$	Effort tranchant, $N$
$L$	Longueur de la poutre, $m$
$M$	moment fléchissant, $Nm$
$r$	rayon de giration de la section $I/A$ , $m$
$k'$	Coefficient de cisaillement
$T$	Energie cinétique, $kgm^2/s^2$
$V$	Energie potentielle, $kgm^2/s^2$
$r_i$	$i^{\text{ème}}$ racine de l'équation caractéristique, $1/m$
$t$	Temps, $s$
$x$	Coordonnée axiale de la poutre, $m$
$w(x, t)$	déplacement transversal de la poutre, $m$
$\beta(x, t)$	angle de rotation de la section due au cisaillement, $rad$
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\rho$	Densité de la poutre, $kg/m^3$
$\omega_i$	$i^{\text{ème}}$ fréquence naturelle, $rad/s$

### **Variables sans dimension**

$\bar{x}$	Coordonnée axiale, $x/L$
$\bar{t}$	Temps, $t/T_1$
$\bar{w}(\bar{x}, \bar{t})$	Déplacement Transversal, $w(x, t)/L$
$\bar{f}(\bar{x}, \bar{t})$	Effort normale, $L^3 f / (EI)$
$\bar{\omega}_m$	Fréquence naturelle d'ordre $m$ , $2m^2\pi$
$\bar{\omega}_r$	Fréquence d'excitation
$\bar{\kappa}_m$	Nombre d'onde d'ordre $m$ , $m\pi$
$W_m(\bar{x})$	Déformée propre du mode $m$ , $\sqrt{2} \sin(\bar{\kappa}_m \bar{x})$
$F_r(\bar{x})$	Distribution spatiale de l'amplitude de la force excitatrice
$\bar{c}_{mr}$	$\int_0^1 W_m(\bar{x}) F_r(\bar{x}) d\bar{x}$
$\bar{g}_r^{\bar{w}}(\bar{x})$	$\sum_{m=1}^{\infty} \bar{c}_{mr} S F_{\bar{w}}(m, r) W_m(\bar{x})$

## Introduction

La dynamique des structures, au sens vibratoire du terme est une discipline récente, qui se développe pour répondre à des besoins de construction, de conception et de maintenance industrielle, elle repose sur l'utilisation de modèles simples afin de permettre l'analyse de façon rapide. Ces modèles sont des solides déformables tridimensionnelles, avec des dimensions qui n'ont pas le même ordre de grandeur et qui sont classés en deux catégories principales.

– Les structures *minces* dont une dimension (l'épaisseur) est très petite devant les deux autres, et qui sont appelées *plaques* ou *coques* selon que leur surface moyenne est plane ou non.

– Les structures *élancées* dont une dimension (la longueur) est très grande devant les deux autres, et qui sont appelées *poutre* ou *arc* selon que leur ligne moyenne est droite ou non.

L'étude des vibrations du deuxième type de ces structures qui sont les poutres, fait intervenir des équations aux dérivées partielles qui sont généralement intégrées par le procédé de séparation entre les variables de situation et la variable  $t$ .

Ce travail consacré à ce sujet est divisé en trois parties.

La première partie passe en revue les théories existantes, par une étude bibliographique sur le sujet, et par un chapitre consacré d'une part aux notions et définitions des hypothèses nécessaires pour l'aborder, et d'autre part à la formulation mixte et en déplacement des équations de base *poutre de Timoshenko ; de Bernoulli et d'Euler* relatives à la description du mouvement des vibrations de flexion des poutres.

Dans la deuxième partie, deux chapitres (*Ch. II et III*) sont consacrés à la résolution et à l'étude de l'influence des effets secondaires sur la solution du problème des vibrations transversales d'une poutre. L'étude comporte, dans le chapitre II, la résolution de l'équation homogène par la méthode de séparation des variables et la détermination des nombres d'onde, des fréquences et des modes propres (*schéma modal*) du cas encastré-libre et pour les quatre modèles représentatifs des vibrations de flexion des poutres, à savoir le modèle classique d'Euler, le modèle avec inertie rotationnelle ou modèle de Rayleigh, le modèle avec cisaillement transversal et le

modèle le plus complet représenté par l'équation de Timoshenko. Ces modèles se distinguent par l'introduction des effets secondaires (*Inertie rotationnelle et cisaillement transversal*) sur l'équation d'Euler. Une étude comparative des résultats est donnée à la fin du chapitre. Le chapitre III complète et illustre les résultats du chapitre II par le calcul de la réponse forcée à une excitation harmonique répartie et pour tous les cas susmentionnés. La méthode employée pour le calcul de la réponse est celle de la décomposition modale qui est une méthode très générale et qui permet de traiter tous les types d'efforts locaux ou répartis, permanents ou transitoires.

En fin, la troisième partie de ce mémoire inverse la situation et part à la recherche de ce qui a été supposé acquis depuis Newton (*les efforts appliqués*).

Or, dans le cas de structures réelles, les efforts sont la principale inconnue des problèmes de vibrations et constituent l'information la plus inaccessible à la mesure directe. Leur détermination dans ce cas nécessite leur identification à partir de la mesure de la réponse, elle a fait et continue à faire l'objet de plusieurs études. Le but de cette troisième partie du travail est de reconstruire une charge répartie appliquée à la poutre par une méthode novatrice qui est celle de la sélection des modes, à cet effet un concept de choix empirique d'un facteur d'échelle est proposé pour dévoiler la relation entre l'information temporelle et spatiale dans la réponse. Ce concept est ensuite appliqué dans le processus de sélection des modes afin de déterminer le nombre approprié de modes nécessaires à la reconstruction des efforts avec une précision acceptable.

## Etude bibliographique

Da Vinci et Galileo prévoient le besoin d'une théorie des vibrations des poutres minces. Ils suggèrent alors des théories qui s'avèrent par la suite incomplètes ou erronées, malgré que la théorie proposée par Da Vinci a été parfois jugée plus descriptive et basée sur des esquisses comparables aux équations et lois de la physique moderne, à cette époque les outils mathématiques indispensables, telles que la loi de Hooke, la loi de Newton et le calcul infinitésimal manquaient.

C'est aux Bernoulli qu'on doit la première théorie valable sur les poutres minces. Jacob Bernoulli (1654-1705) développe une théorie d'élasticité dans laquelle la courbure d'une poutre élastique est proportionnelle aux efforts appliqués. Se basant sur la théorie d'élasticité de son oncle, Daniel Bernoulli (1700-1782) a fini par décrire le mouvement d'une poutre mince à l'aide d'une équation aux dérivées partielles.

Leonard Euler (1707-1783) accepte la théorie des Bernoulli, l'étend aux différents types de charges et l'applique dans ses recherches de la déformée d'une poutre chargée.

La théorie d'Euler-Bernoulli pour les poutres, appelée parfois, théorie classique des poutres minces, théorie de la poutre d'Euler, théorie de la poutre de Bernoulli ou théorie de la poutre de Bernoulli-Euler, reste par sa simplicité, et grâce aux résultats raisonnables qu'elle procure, la théorie la plus utilisée dans l'approximation des vibrations des poutres. Seulement, le modèle d'Euler ou d'Euler-Bernoulli tend à légèrement surestimer les fréquences naturelles, un problème qui devient important pour les fréquences des modes de rang supérieur ou lorsque l'épaisseur de la poutre est importante.

La formulation exacte du problème de la poutre dans le cadre des équations de l'élasticité, a été donnée pour la première fois par Pochhammer (1876) et Chree (1889) qui réussissent à établir les équations de vibration d'un corps cylindrique.

Lord Rayleigh (1877) apporte une première amélioration à la théorie classique des vibrations des poutres, et parvient, en introduisant l'effet de la rotation des sections droites (Inertie rotationnelle), à corriger partiellement le problème de surestimation des fréquences naturelles, qui malgré tout restent surestimées.

Une autre alternative au problème de surestimation des fréquences naturelles du modèle de la poutre d'Euler est la considération de l'effet de cisaillement transversal. Avec l'apparition de ce modèle, l'estimation des fréquences naturelles de vibration d'une poutre a été considérablement améliorée.

Timoshenko (1921) [1], proposa un modèle plus complet de la poutre en associant l'effet de l'inertie rotationnelle et du cisaillement transversal au modèle de la poutre d'Euler. Le modèle de Timoshenko constitue l'amélioration majeure de la théorie des poutres pour les fréquences de haut rang, ou lorsque l'épaisseur de la poutre devient importante, c'est-à-dire lorsque l'inertie rotationnelle des sections droites et l'effet de cisaillement transversal ne peuvent plus être négligés.

La différence principale entre le modèle d'Euler et celui de Timoshenko réside dans le fait que dans le premier les sections droites restent planes et perpendiculaires à l'axe neutre, alors que dans le deuxième, les sections droites restent planes mais ne sont plus perpendiculaires à cet axe, la différence entre la normale à l'axe neutre et le plans de la section constitue l'angle de déformation due à l'effet de cisaillement.

Sur le chemin de Timoshenko, plusieurs auteurs ont parvenus à déterminer l'équation aux fréquences et les modes propres d'une poutre sous différentes conditions limites. On peut citer Kruszewski (1952), Traill-Nash et Collar (1953), Dolph (1954), et Huang (1961).

Kruszewski obtient les trois premiers modes antisymétriques d'une poutre encastree-libre, et les trois premiers modes symétriques et antisymétriques de la poutre libre-libre [3].

Traill-Nash et Collar [4], donnent une étude théorique complète et un traitement expérimental d'une poutre de section uniforme. Dans la première partie de leurs travaux, ils déterminent l'expression de l'équation aux fréquences et des modes propres pour les six conditions aux limites standards, à savoir : encastree-libre ; libre-libre ; appuyé-libre ; appuyé-appuyé ; encastree-encastree et encastree-appuyé. Dans la deuxième partie ils présentent les résultats expérimentaux obtenus pour la poutre d'Euler, le modèle avec cisaillement transversal et la poutre de Timoshenko en utilisant une poutre épaisse ou l'effet de cisaillement et de l'inertie rotationnelle ne sont pas négligeables. Une partie de leurs résultats expérimentaux donnant une

comparaison entre les fréquences naturelles du premier et du deuxième mode calculées et ceux mesurées est présentée dans le tableau 1.

Modèle de la poutre	1 <sup>ère</sup> fréquence naturelle	2 <sup>ème</sup> fréquence naturelle
Euler-Bernoulli	+14% à +26%	+78% à +133%
Cisaillement	0% à +3%	-1% à +6%
Timoshenko	-1% à +2%	-1% à +6%

**Tableau 1. Ecart en % entre les fréquences naturelles calculées et mesurées obtenus par Traill-Nash and Collar (1953)**

Indépendamment Huang [5], obtient l'équation aux fréquences et l'expression des modes propres pour les six conditions limites citées plus haut. Les équations aux fréquences sont difficiles à résoudre sauf dans le cas de la poutre simplement appuyée ou une solution analytique est souvent facile à obtenir. Tous les auteurs cités plus haut ont donné des expressions de l'équation aux fréquences et des modes propres, mais sans la résolution du problème de vibration de la poutre, c'est-à-dire le calcul de la réponse à une excitation extérieure et avec des conditions initiales, la résolution d'un tel problème nécessite la connaissance des conditions d'orthogonalité des fonctions propres (modes propres). Les conditions d'orthogonalité des modes propres de la poutre de Timoshenko ont été indépendamment données par Dolph (1954) et Herrmann (1955). On trouve une méthode générale de résolution du problème de la poutre de Timoshenko, avec calcul de la réponse à une excitation extérieure et des conditions initiales, dans le livre de Reismann et Pawlik (1974) leur méthode est basée sur la décomposition modale de la réponse.

Un paramètre crucial dans la théorie de la poutre de Timoshenko est le facteur de cisaillement, ce paramètre doit intervenir lorsque le cisaillement n'est pas constant sur toute la section de la poutre, il est fonction du coefficient de Poisson, de la fréquence de vibration et de la forme de la section. Typiquement la dépendance de ce coefficient à la fréquence des vibrations est souvent ignorée. Plusieurs auteurs ont suggéré des méthodes de calcul du facteur de cisaillement en fonction de la forme de la section et du coefficient de Poisson, à cet égard on peut citer Davis (1948), Mindlin et Deresiewicz [6] et Cowper [7]. Stephen [08] montre la variation du facteur de

cisaillement avec la fréquence de vibration. F. Gruttmann et W. Wagner [9] calculent le facteur de correction au cisaillement pour différentes formes arbitraires de sections en se basant sur les équations de l'élasticité linéaire et en développant une formulation variationnelle du problème.

Malgré les efforts contemporains employés dans le but de parvenir à une meilleure théorie des poutres Levinson [10], la théorie d'Euler-Bernoulli et celle de Timoshenko restent les plus communément utilisées, par exemple les vibrations libres de la poutre de Timoshenko pour des différentes conditions limites ont été étudiées selon différentes méthodes et par plusieurs auteurs.

Récemment B. Posiadala [11] a étudié les vibrations libres de la poutre de Timoshenko en utilisant le formalisme des multiplicateurs de Lagrange. Ho et Chen [12] présentent l'analyse d'une poutre dont les caractéristiques sont non uniforme. Karami et al. [13] étudient les vibrations d'une poutre soumise à des contraintes de cisaillement et à des conditions limites standards par une méthode qu'ils présentent sous le nom de '*differential quadrature element method*'. Lee et Schultz [14] développent la méthode pseudo spectrale dans l'analyse du problème de la poutre de Timoshenko. Vojin Jovanovic [15] utilise les séries de Fourier dans la résolution du problème de vibrations transversales de la poutre d'Euler pour des conditions limites non standards.

Les méthodes récentes les plus populaires et où la littérature abonde sont la méthode LTMM (*lumped-mass (model) transfer matrix method*) et la méthode CTMM (*continuous-mass (model) transfer matrix method*) ces méthodes sont semblables à la méthode des éléments fini conventionnelle (*FEM*). De la littérature existante qui concerne la méthode LTMM Jong-Shyong Wu et al [16]. On peut conclure que l'équation aux fréquences et les variables d'état associées (ou paramètres initiaux) requis pour la détermination des fréquences naturelles et des modes propres correspondants d'une poutre, doivent être modifiées cas par cas selon les différentes conditions aux limites, parce que dans cette méthode la poutre est remplacée par un nombre fini de masses  $m_i$  (*lumped*) concentrées et connectées par un nombre de segments rigides mais sans masse de longueur  $l_i$  et de caractéristiques mécaniques et géométriques  $E_i$ ,  $G_i$ ,  $A_i$ , et  $I_i$ . Les positions occupées par les  $n$  masses concentrées

sont appelées stations (*stations*), et les segments sans masse responsables de la rigidité de la poutre sont appelés champs (*fields*). Une station associée à un champ s'appelle section.

Dans leur texte Jong-Shyong Wu et Chin-Tzu Chen [16] donnent une comparaison en quatre points entre la MEF et la TMM :

- i. Dans le cas de la méthode des éléments finis l'ordre des matrices de transfert croît très vite avec le nombre d'éléments, ce qui implique une lourdeur de calcul plus importante.
- ii. Les variables d'état de la MEF sont les déplacements, la vitesse et l'accélération, alors que ceux de la TMM sont les déplacements, les rotations, le moment fléchissant et l'effort tranchant, dans certains cas ou en plus des modes propres 'déplacements', les modes propres 'moment fléchissant' ou 'courbure' qui leurs sont associés sont requis la TMM s'avère plus utile que la MEF.
- iii. En générale la TMM est utilisée dans l'analyse des vibrations libres, seulement lorsqu'elle est incorporée avec la méthode de superposition modale elle peut constituer une approche simple pour l'étude des vibrations forcées des poutres soumises à des charges en mouvement.
- iv. La méthode des éléments finis est plus pratique dans les problèmes de grande taille, mais pour les problèmes de petite taille ou de taille moyenne la TMM est l'une des plus simples outils de vérification des résultats de la MEF.

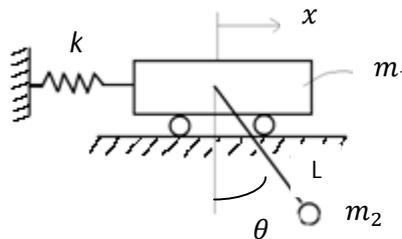
Tous les travaux susmentionnés concernaient le problème des vibrations longitudinales ou transversales d'une poutre sous différentes conditions et selon l'un ou l'autre des quatre modèles (Euler-Bernoulli, Rayleigh, Cisaillement, Timoshenko).

Nous allons donner quelques détails à ce sujet concernant la détermination de l'équation de mouvement d'une poutre en vibrations transversales d'une part, et sur les méthodes standard de résolution de ces équations d'autre part, mais tout d'abord donnons en guise d'introduction, quelques notions sur les vibrations des systèmes mécaniques.

Les systèmes mécaniques vibrants sont classés selon la nature des paramètres considérés en deux catégories principales :

- Les systèmes discrets (*lumped systems*)
- Les systèmes continus (*continuous systems*)

Dans le cas des systèmes dits discrets les composantes sont discrètes, avec la masse supposée rigide et concentrée, et la raideur représentée par des ressorts sans masse reliant les masses ponctuelles. Le mouvement de tels systèmes est régi par des équations différentielles ordinaires, ou il ya une équation pour chaque masse et ou le nombre de masses définit généralement le nombre de degré de liberté. Les équations de petits mouvements autour de la position d'équilibre son par commodité représentées sous forme matricielle et résolues par des techniques propres aux systèmes linéaires.



**Fig.1 Exemple de système discret à deux degrés de libertés**

Les plaques minces, les barres en déformation axiale, les arbres en torsion et les poutres en flexion, constituent les principaux sujets d'étude dans le cas des systèmes continus ou systèmes à paramètres distribués (*Distributed-parameter systems*), en effet, dans le cas de tels systèmes, la masse et la rigidité sont en générale fonctions des variables d'espace, avec la masse donnée sous forme de masse par unité de longueur représentant la densité, de plus, le déplacement dépend de deux variables indépendantes d'espace et de temps. En conséquence le mouvement d'un système continu est régi par une équation aux dérivées partielles qui doit être satisfaite sur tout le domaine et qui est soumise à des conditions limites aux extrémités de ce domaine. De tels problèmes sont connus sous le nom de problèmes aux limites (*boundary-value problems*).

Le cas qui nous intéresse est celui des vibrations transversales d'une poutre auquel nous allons illustrer la dérivation de l'équation de mouvement par deux

méthodes une approche newtonienne en premier lieu, et une formulation variationnelle selon le principe d'Hamilton étendue (*extended Hamilton's principle*).

Considérons une poutre FIG.2 de rigidité à la flexion  $EI(x)$  et de masse par unité de longueur  $m(x)$  en mouvement transversal  $w(x, t)$  et soumise à une force par unité de longueur  $f(x, t)$ ,  $E$  étant le module d'élasticité ou module de Young et  $I(x)$  le moment d'inertie de l'aire de la section droite par rapport à un axe perpendiculaire à  $x$  et  $y$  et passant par le centre de la section.

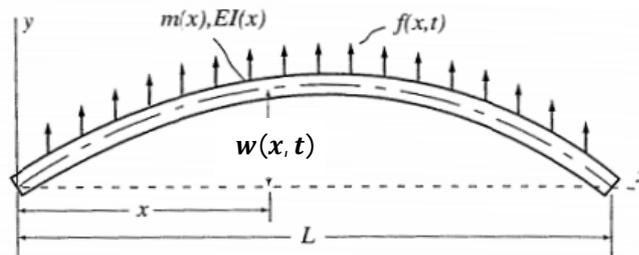


Fig. 2 Exemple de système continu 'poutre en vibration transversale'.

Commençons par l'approche newtonienne et considérons le schéma d'une section droite de la poutre Fig.3 où  $M(x, t)$  est le moment fléchissant et  $Q(x, t)$  l'effort tranchant sur la section. On suppose que la rotation de l'élément différentielle considéré est négligeable comparée à la translation et que l'angle de déformation due au cisaillement est petit devant la déformation due à la flexion de la poutre, c'est-à-dire qu'on se met dans le cas de la poutre d'Euler-Bernoulli, ces hypothèses sont valables pour un rapport entre la longueur et l'épaisseur supérieure à 10.

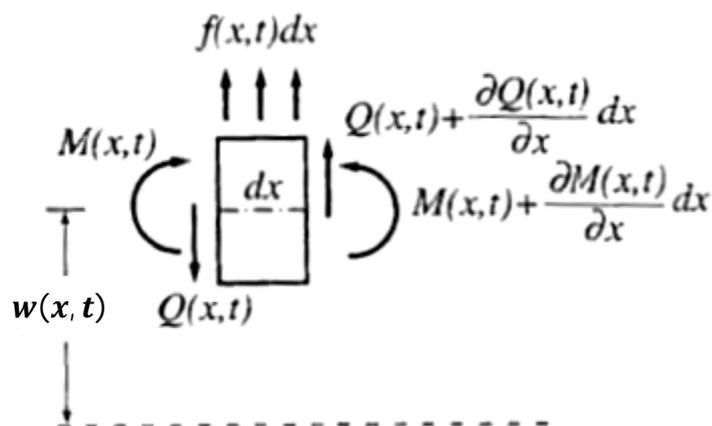


Fig. 3 Élément infinitésimale de la poutre de la figure 2.

De la Fig. [3] l'équilibre des forces dans la direction  $w$  permet d'écrire :

$$\left[ Q(x, t) + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dx \right] - Q(x, t) + f(x, t) dx = m(x) dx \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}, 0 < x < L$$

De même sous l'hypothèse que le produit du moment d'inertie de l'élément par l'accélération angulaire est faible l'équilibre des moments s'écrit :

$$\left[ M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx \right] - M(x, t) + \left[ Q(x, t) + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dx \right] dx + f(x, t) dx \frac{dx}{2} = 0, 0 < x < L$$

Ignorant les termes de second ordre en  $dx$  l'équation aux moments s'écrit :

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} + Q(x, t) = 0, 0 < x < L$$

Ce qui nous permet d'écrire après division par  $dx$  dans l'équation des forces :

$$-\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t) = m(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}, 0 < x < L$$

Sachant que :

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}$$

On obtient l'équation de mouvement des vibrations transversales d'une poutre :

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + f(x, t) = m(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}, 0 < x < L$$

C'est une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre qui nécessite donc quatre conditions aux limites.

La résolution des problèmes aux limites par l'approche newtonienne est souvent pénible, surtout pour les problèmes d'ordre élevé, car elle nécessite un schéma de l'élément différentiel de masse du système et une convention de signes pour les forces et les moments qui sont parfois difficile à établir.

Le principe d'Hamilton est sans aucun doute le plus puissant principe variationnelle de la mécanique L. Meirovitch [2], il dérive du principe de d'Alembert qui représente l'extension à la dynamique du principe des travaux virtuels. Le principe d'Hamilton est très utile là où d'autres approches rencontrent des difficultés, particulièrement aux problèmes liés aux systèmes continus.

L'énoncé mathématique de ce principe est le suivant :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta \bar{W}) dt = 0, \delta w(x, t) = 0 \text{ pour } t = t_1 ; t_2$$

Le symbole  $\delta(\cdot)$  a été introduit la première fois par Lagrange pour souligner le caractère virtuel d'une variation instantanée, la propriété principale de ce symbole est qu'il commute avec l'opérateur de différentiation, c'est-à-dire que :

$$\delta \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\cdot) \right] = \frac{\partial}{\partial x} [\delta(\cdot)]$$

Il est plus commode de diviser le travail virtuel  $\overline{\delta W}$  en deux parties l'une due aux forces conservatives et l'autre aux forces non conservatives :

$$\overline{\delta W} = \overline{\delta W}_c + \overline{\delta W}_{nc} = -\delta V + \overline{\delta W}_{nc} \text{ Où } V \text{ est l'énergie potentielle du système.}$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \overline{\delta W}_{nc}) dt = 0, \quad \delta w(x, t) = 0 \text{ pour } t = t_1 ; t_2$$

Toutes les équations de mouvement peuvent donc être obtenus à partir de trois quantités scalaires, l'énergie cinétique  $T$ , l'énergie potentielle  $V$  et le travail virtuel des forces non conservatives  $\overline{W}_{nc}$ .

Pour les systèmes conservatifs  $\overline{\delta W}_{nc} = 0$  l'équation précédente se réduit à :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0, \quad \delta w(x, t) = 0 \text{ pour } t = t_1 ; t_2$$

Où,  $L = T - V$  est le Lagrangien du système.

L'application du lemme fondamental du calcul des variations à la forme précédente conduit aux équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

Où  $q_i = q_1, q_2 \dots q_n$  sont les coordonnées généralisées du système.

Nous allons utiliser l'approche variationnelle par le principe d'Hamilton pour déterminer l'équation de mouvement d'une poutre en vibration transversale.

L'énergie cinétique de la poutre s'écrit :

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} m(x) \left[ \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx$$

Sa variation est :

$$\delta T = \int_0^L m \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) dx = \int_0^L m \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\delta w) dx$$

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_0^L m \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\delta w) dx \right) dt \\
 &= \int_0^L \left( \int_{t_1}^{t_2} m \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\delta w) dt \right) dx \\
 &= \int_0^L \left[ \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dt \right] dx \\
 &= - \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_0^L m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx \right) dt, \quad \delta w = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = L
 \end{aligned}$$

L'énergie potentielle et sa variation sont données par :

$$\begin{aligned}
 V(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left[ \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \\
 \delta V &= \int_0^L EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \\
 &= \int_0^L EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta w dx \\
 &= EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} \delta w \Big|_0^L - \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w \Big|_0^L + \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w dx
 \end{aligned}$$

Finalement le travail virtuel des forces non conservatives est :

$$\overline{\delta W}_{nc} = \int_0^L f \delta w dx$$

A ce stade tout les ingrédients sont disponibles pour appliquer le principe d'Hamilton ce qui donne :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ - \int_0^L \left[ m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - f \right] \delta w dx - EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} \delta w \Big|_0^L + \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w \Big|_0^L \right\} dt = 0$$

On conclue vite que cette équation est satisfaite lorsque l'équation différentielle :

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + f = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Est satisfaite sur tout le domaine  $0 < x < L$  et :

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_0^L = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w \Big|_0^L$$

Sont satisfaites sur les bords.

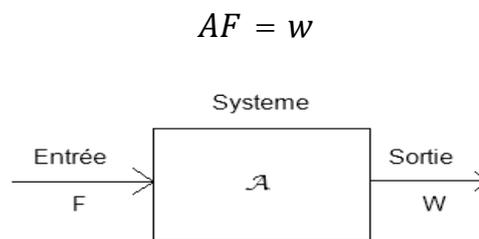
On retrouve ainsi l'équation de mouvement et les conditions limites possibles.

Le problème des vibrations des poutres consiste à résoudre l'équation de mouvement étant données, les conditions aux limites et les conditions initiales dans le cas d'un problème homogène (vibrations libres), et la force excitatrice  $f$  dans le cas d'un

problème non-homogène (calcul de la réponse forcée), c'est le problème direct auquel est consacrée la première partie de ce travail avec une étude détaillée du cas de la poutre encastrée-libre par la méthode de décomposition modale et selon les quatre modèles de base.

La deuxième partie de ce mémoire est consacrée à un problème inverse lié aux vibrations transversales d'une poutre, qui concerne la reconstruction de l'effort appliqué à partir d'informations données sur la réponse.

Les problèmes physiques et en particulier en vibration linéaire peuvent se poser de la façon suivante :



Où  $F$  est la grandeur d'entrée,  $A$  les paramètres physiques du système sollicité, et  $w$  la réponse de ce système. Pour un problème de vibration, par exemple,  $F$  pourrait être la force excitatrice extérieure,  $A$  les caractéristiques de la structure, et  $w$  le champ de déplacement vibratoire.

Ainsi, l'étude des systèmes vibrants propose trois problèmes de base :

1. Calculer la réponse  $w$  du système à partir de la connaissance des données d'entrée  $F$  et des paramètres  $A$  de ce système.
2. Calculer les paramètres  $A$  du système à partir de la connaissance des données d'entrée  $F$  et de la réponse  $w$  de ce dernier.
3. Calculer les données d'entrée  $F$  à partir de la connaissance de la réponse  $w$  et des paramètres  $A$  de celui-ci.

Les problèmes du premier type sont communément appelés problèmes directs. Les problèmes du deuxième type (identification de paramètre) et du troisième type (identification de sources) sont appelés problèmes inverses. La résolution des 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> types de problèmes nécessite généralement l'inversion du modèle étudié. Ces problèmes d'identification des grandeurs d'entrée ou de reconstruction de paramètres

du système sont souvent du type mal posé (*ill posed*), un concept qui a été introduit par le mathématicien français J. Hadamard au début du siècle dernier, selon lequel un problème est dit mal posé s'il ne vérifie pas les conditions suivantes :

- i. La solution existe
- ii. La solution est unique
- iii. La solution est stable

Le champ d'application des problèmes inverses couvre plusieurs branches de la physique et de l'engineering, imagerie médicale, optique, radar, calorimétrie, spectroscopie, géophysique, météorologie, océanographie, radioastronomie, génie biomédicale, instrumentation, génie civile, contrôle non destructif, acoustique et génie mécanique. Cette théorie c'est largement développée pendant les dernières décennies tout d'abord pour son application et aussi grâce au développement considérable du matériel informatique et des méthodes numériques associées. Pour leur mise en exécution les problèmes inverses requièrent des méthodes de calcul performantes avec des calculateurs puissants.

En pratique les problèmes inverses sont typiquement du genre où le bruit omniprésent dans les données mène à une instabilité qui se manifeste par des erreurs importantes dans la solution, pour cette raison la suppression du mauvais conditionnement ; le développement du modèle d'inversion approprié et le choix de l'algorithme de régularisation ou d'optimisation constitue un rôle vital dans la recherche d'une solution.

Pour résoudre un problème inverse deux approches sont possibles Pierre Argoul [17] :

- Une approche qualifiée de *déterministe* où les méthodes mathématiques employées relèvent de l'analyse fonctionnelle, et où on peut introduire des contraintes globales sur les classes de solutions, leur choix n'est pas dicté par les mathématiques mais par des considérations physiques. La solution du problème inverse n'existe en général pas. On redéfinit alors un nouveau problème d'inversion « régularisé » (équations normales) avec une nouvelle solution (quasi-solution, solution approchée..) de telle sorte que la solution régularisée dépende continument des données et qu'elle tende vers la solution exacte lorsqu'un petit paramètre tend vers zéro (en supposant que la solution

exacte existe pour des données proches des valeurs effectivement obtenues par la mesure) (régularisation de Tikhonov).

- Une approche *probabiliste* développée essentiellement par Albert Tarantola[18] fondée sur le traitement statistique des données. Ici on considère comme aléatoires toutes les variables du problème afin de prendre en compte toutes les incertitudes. Dans ce cas, le caractère fini du problème est postulé au départ (la discrétisation est déjà faite) et on introduit une information *a priori* élaborée au travers de modèles probabilistes.

En dynamique des structures cette nouvelle branche de la science concerne essentiellement la reconstruction des paramètres tels que, la distribution de masse volumique, les propriétés mécaniques, ou l'estimation des efforts appliqués. Ce dernier point constitue la majeure partie des travaux effectués dans ce domaine à cause de la difficulté d'effectuer des mesures directes des efforts sur les structures réelles. Une difficulté due aux problèmes d'inaccessibilité à la source ou de l'ignorance des points d'application sur des machines opérationnelles, limitant ainsi les méthodes directes, et donnant une préférence à faire le diagnostic des sources de vibrations et de bruit par leurs effets (accélération, vitesse, déplacement, intensité et pression acoustiques) Djamaa [30]. Et bien qu'ils restent de nombreux enjeux et obstacles à franchir avant que ces méthodes puissent être mises en œuvre en pratique, certains résultats donnent de bons indicateurs pour orienter les futurs travaux dans le domaine.

Les pionniers de la reconstruction tel que Barcilon [19], Gladwell [20] et autres ont commencé par la détermination des propriétés élastiques (distribution de masse et de raideur) d'un corps en vibration, par exemple Barcilon étudie le problème d'une poutre discrétisée libre d'un côté, et libre ; simplement appuyée ; encadrée ; ou soumise à une condition non standard de l'autre. Un choc est alors appliqué à l'extrémité libre de la poutre, la déformation et la pente qui en résultent sont mesurées à l'autre extrémité. La connaissance de ces informations (pentes et déformations) équivaut selon Barcilon à la donnée de trois ensembles de fréquences naturelles, nécessaires à la reconstruction des propriétés élastiques de la poutre. Barcilon nome se trio ' *The sympathetic spectra*'. La connaissance de ces trois *sympathetic spectra* permet d'assurer l'unicité de la solution du problème inverse lorsqu'elle existe.

Gladwell [20] modélise la poutre par des barres rigides reliées par des ressorts avec des masses concentrées aux points de liaison. Une extrémité de la poutre est encastree alors que l'autre est soumise à l'une des quatre conditions standards : libre, appuyé, guidé, ou encastree. Gladwell établit les conditions nécessaires et suffisantes à l'existence d'un modèle discret ayant un spectre donné, et met en place une procédure pour mettre en évidence le modèle. Dans un travail ultérieur Gladwell fait une critique des méthodes de résolution des problèmes inverses en vibration, essentiellement ceux concernant la détermination des propriétés du système à partir des mesures indirectes.

Les deux dernières décennies ont témoigné de plusieurs travaux dans le cadre de la reconstruction des efforts appliqués à un système à plusieurs degrés de liberté, les charges roulantes sur les ponts, et la mesure indirecte d'une charge impulsive ou localisée, C.Pezerat et J.L. Guyader [21], T.S.Jang et al [22], Z.Boukria et al [23], M.Kazemi et M.R.Hematiyan.[24] Fergyanto et al[25].

L'identification des charges dynamiques réparties sur une structure est relativement un problème récent X.Q. Jiang, H.Y. Hu [26]. Par exemple Frank G. Polanco[27] modélise une pale d'hélicoptère par une poutre encastree-libre sur laquelle il identifie l'effort réparti connaissant la déformation initiale et utilisant l'information sur l'accélération ou la déformation en un seul point. Yi Liu et W.Steve Shepard.Jr[28] présentent une amélioration de la méthode traditionnelle pour la reconstruction d'une force harmonique appliquée sur une poutre, ou la fonction spatiale qui donne la répartition de la charge est décomposée uniquement sur le domaine d'application de l'effort supposé connue d'avance. C.Pezerat et J.L. Guyader [21] exploitent la mesure des déplacements transversaux et développent une méthode appelée technique d'analyse des charges (*Force Analysis Technique*) ou (FAT) pour la reconstruction des charges réparties sur les poutres et les plaques. Le principe de leur méthode consiste à la discrétisation de l'équation de mouvement par un schéma aux différences finies et le calcul de la force à partir des déplacements mesurés en différents points de la structure. La régularisation de la solution se fait par un fenêtrage spatial et un filtrage des nombres d'onde, une méthode développée aussi par les deux chercheurs et qui porte le nom de 'Régularisation Inverse Filtrée Fenêtrée' ou méthode RIFF, cette

méthode a été appliquée par Djamaa et al [29] dans leurs investigations de la charge appliquée à une coque cylindrique.

La reconstruction des charges dynamiques réparties sur une structure mécanique est un problème inverse complexe qui montre un mauvais conditionnement (*ill-posedness*) souvent difficile à surmonter, on ignore d'où résulte ce mauvais conditionnement de la nature physique ou mathématique du problème X.Q. Jiang, H.Y. Hu [26].

La discrétisation de ce genre de problèmes inverse mène à un système d'équations linéaire mal-conditionné et dans le but de trouver une solution stable à ce système il est nécessaire d'appliquer une méthode de régularisation. Les plus courantes de ces méthodes sont la régularisation de Tikhonov et la troncature des valeurs singulières '*Truncated singular value decomposition*' ou (TSVD).

# Chapitre I

## Définitions et rappels

### Equations des vibrations des poutres

#### I.1. Définitions

##### I.1.1 Poutre

Une poutre est un milieu continu ayant une dimension très grande par rapport aux deux autres, c'est-à-dire que, pour que la théorie des poutres soit applicable, il est nécessaire que les sections droites soient lentement variables ou constantes en fonction de l'abscisse curviligne  $s$ , et que la plus grande dimension de la section droite soit petite devant le rayon de courbure  $R$  et devant la longueur de la poutre.

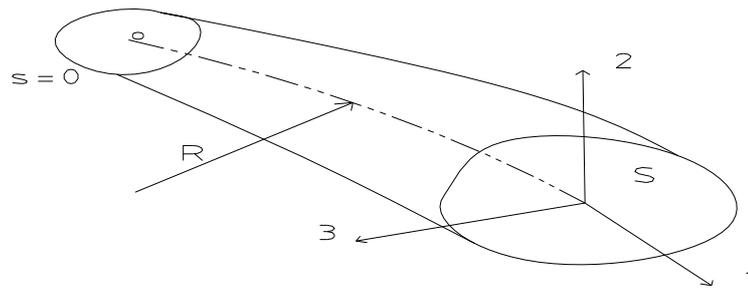


Fig. I.1 : Représentation géométrique d'une poutre

On définit le long de la poutre une ligne moyenne  $C$ , de point courant  $G$ , avec  $s$  abscisse curviligne à partir de  $o$ , et une section droite  $S$ , dans le plan (2,3), de contour  $\Gamma$ . Le but de la théorie des poutres est de remplacer la solution 3D par une solution « Globale », dans laquelle on écrira des équations de mouvement ou d'équilibre entre les quantités moyennes qui définissent les efforts, une cinématique définissant les déplacements sur la structure simplifiée, et des lois de comportement qui relient les deux.

##### I.1.2 Barre

Une barre désigne une poutre lorsque celle-ci est sollicitée en traction compression.

### I.1.3 Champ de déplacement

On note  $(x_1, x_2, x_3)$  les coordonnées d'un point  $M$  de la poutre dans le repère  $(O, 1, 2, 3)$  et on cherche à exprimer les déplacements  $W_i(M, t)$  avec :

$$W_i(M, t) \begin{cases} W_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ W_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ W_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{cases}$$

### I.1.4 Hypothèses de condensation

La géométrie particulière de la poutre va permettre de simplifier le champ de déplacement  $W_i(M, t)$  qui dépend par ailleurs du type de matériau, de l'excitation, et des conditions limites, ces simplifications ou hypothèses sur le champ de déplacement sont appelées hypothèses de condensation. D'autres hypothèses liées au type d'excitation sont nécessaires pour la résolution du problème et vont conduire à l'étude séparée des vibrations longitudinales, de torsion, ou de flexion des poutres.

Les hypothèses de condensation pour les poutres consistent à effectuer un développement en série de Taylor du déplacement  $W_i(M, t)$  par rapport à  $x_2$  et  $x_3$ .

$$W_i(x_1, x_2, x_3, t) = W_i(x_1, 0, 0, t) + x_2 \frac{\partial W_i(x_1, 0, 0, t)}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial W_i(x_1, 0, 0, t)}{\partial x_3} + \frac{x_2^2}{2} \frac{\partial^2 W_i(x_1, 0, 0, t)}{\partial x_2^2} + \frac{x_3^2}{2} \frac{\partial^2 W_i(x_1, 0, 0, t)}{\partial x_3^2} + x_2 x_3 \frac{\partial^2 W_i(x_1, 0, 0, t)}{\partial x_2 \partial x_3} + \dots \quad (1.1)$$

La théorie des poutres minces consiste à négliger les termes du deuxième ordre et d'ordre supérieur dans ce développement.

$$W_i(x_1, x_2, x_3, t) \approx W_i(x_1, 0, 0, t) + x_2 \frac{\partial W_i(x_1, 0, 0, t)}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial W_i(x_1, 0, 0, t)}{\partial x_3} \quad (1.2)$$

Soit :

$$\begin{cases} W_1(x_1, x_2, x_3, t) \approx W_1^0(x_1, t) + x_2 W_1^2(x_1, t) + x_3 W_1^3(x_1, t) \\ W_2(x_1, x_2, x_3, t) \approx W_2^0(x_1, t) + x_2 W_2^2(x_1, t) + x_3 W_2^3(x_1, t) \\ W_3(x_1, x_2, x_3, t) \approx W_3^0(x_1, t) + x_2 W_3^2(x_1, t) + x_3 W_3^3(x_1, t) \end{cases} \quad (1.3)$$

Avec :

$$W_i^n = \frac{\partial W_i}{\partial x_n} \quad (1.4)$$

Physiquement le déplacement dans chaque direction 1, 2 ou 3 se compose d'un mouvement d'ensemble  $W_i^0$  et de deux rotations  $x_2 W_i^2 + x_3 W_i^3$ .

La théorie des poutres minces suppose que les sections droites restent planes après la déformation (hypothèse de Bernoulli).

L'ensemble du champ de déplacement est connu si les déplacements et les rotations sont connus le long d'un axe moyen de la poutre (Axe neutre ou fibre neutre), l'hypothèse de condensation consiste donc à réduire le milieu 3D en un milieu 1D équivalent et où les inconnues du problèmes après condensation sont les neuf fonctions  $W_i^0, W_i^2, W_i^3$  qui ne dépendent que d'une seule variable d'espace  $x_1$  et du temps  $t$ , les simplifications supplémentaires liées à l'étude séparée des vibrations longitudinales (en traction compression), des vibrations de flexion ou de torsion conduisent aux champs de déplacement suivant :

### **I.1.5 Vibrations longitudinales**

L'effet poisson (contraction de la section droite) est négligé

$$\begin{cases} W_1(x_1, x_2, x_3, t) = W_1^0(x_1, t) \\ W_2(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \\ W_3(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

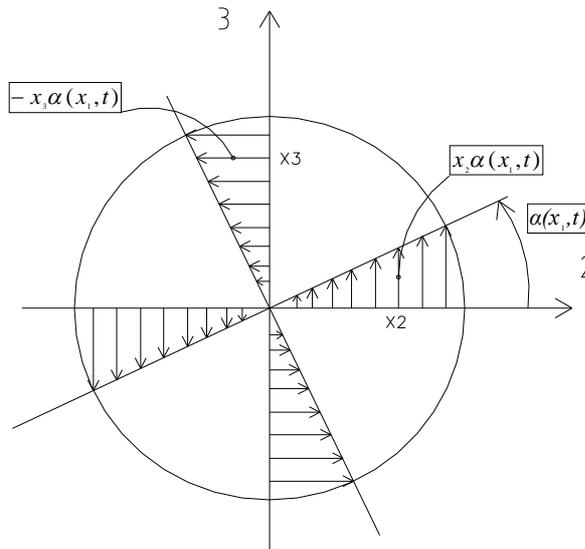
L'effet poisson correspond aux termes  $x_2 W_2^2$  et  $x_3 W_3^2$  de l'équation (1.3)

### **I.1.6 Vibrations de torsion**

L'excitation est un moment autour de l'axe neutre

$$\begin{cases} W_1(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \\ W_2(x_1, x_2, x_3, t) = -x_3 \alpha(x_1, t) \\ W_3(x_1, x_2, x_3, t) = x_2 \alpha(x_1, t) \end{cases} \quad (1.6)$$

Si  $\alpha(x_1, t)$  est le déplacement angulaire, on a utilisé le champ de déplacement simplifié (hypothèse de Saint Venant). La seule fonction cinématique inconnue est l'angle  $\alpha(x_1, t)$ .



**Fig. I.2 : déplacement dans une section droite correspondant au champ (1.6)**

### I.1.7 Vibrations de flexion

Le champ de déplacement qui correspond aux hypothèses de Timoshenko présente deux inconnues : la flèche  $W_2^0$  et la rotation de la section droite  $W_1^2$

$$\begin{cases} W_1(x_1, x_2, x_3, t) = x_2 W_1^2(x_1, t) \\ W_2(x_1, x_2, x_3, t) = W_2^0(x_1, t) \equiv W(x, t) \\ W_3(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

L'hypothèse de Bernoulli qui stipule que les sections droites restent planes et perpendiculaires à l'axe neutre après déformation, ce qui revient à négliger le cisaillement transversale, impose :

$$\frac{\partial W_1^0(x_1, t)}{\partial x_1} = - \frac{\partial W_2^0(x_1, t)}{\partial x_2} \quad (1.8)$$

Et conduit au champ de déplacement à une seule fonction inconnue  $W_2^0(x_1, t)$  suivant :

$$\begin{cases} W_1(x_1, x_2, x_3, t) = -x_2 \frac{\partial W_2^0(x_1, t)}{\partial x_1} \\ W_2(x_1, x_2, x_3, t) = W_2^0(x_1, t) \\ W_3(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

## I.2 Equations des vibrations de flexion des poutres droites

### I.2.1 Equations de base en variables mixtes (poutre de Timoshenko)

Les vibrations de flexion des poutres représentent à la fois un mouvement transversal et longitudinal (rotation de la section droite) introduisant des contraintes longitudinales et de cisaillement.

En partant des hypothèses de condensation (1.1) on définit les contraintes par :

$$\begin{cases} \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3, t) = x_2 \sigma_{11}^2(x_1, t) \rightarrow \text{contrainte longitudinale} \\ \sigma_{22}(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \\ \sigma_{33}(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \\ \sigma_{12}(x_1, x_2, x_3, t) = \sigma_{12}^0(x_1, t) \rightarrow \text{contrainte de cisaillement} \\ \sigma_{13}(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \\ \sigma_{23}(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Ces équations introduisent un effet de cisaillement par l'intermédiaire du terme  $\sigma_{12}^0$ . Sa prise en compte est caractéristique de l'hypothèse de Timoshenko, réaliste lorsque la section droite présente une symétrie par rapport à l'axe 3.

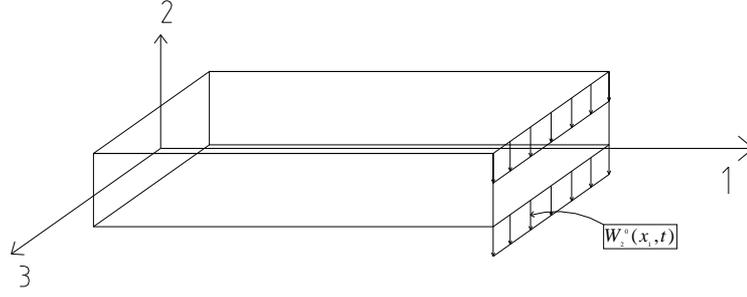


Fig. I.3 Déplacement transversal  $W_2^0(x_1, t)$

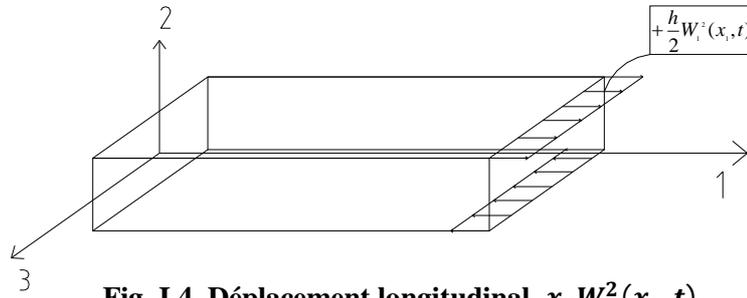


Fig. I.4 Déplacement longitudinal  $x_2 W_1^2(x_1, t)$

La résolution du problème de flexion consiste à déterminer les quatre fonctions inconnues  $W_1^0, W_2^0, \sigma_{11}^2, \sigma_{12}^0$ .

En injectant les champs (1.7) et (1.10) dans la fonctionnelle de Reissner, il vient :

$$R(W_1^2, W_2^0, \sigma_{11}^2, \sigma_{12}^0) = \int_{t_0}^t \int_0^l \int_S \frac{1}{2} \left[ \left( x_2 \frac{\partial W_1^2}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial W_2^0}{\partial t} \right)^2 \right] P - \sigma_{12}^0 \frac{\partial W_2^0}{\partial x_1} - \sigma_{12}^0 W_1^2 - x_2^2 \sigma_{11}^2 \frac{\partial W_1^2}{\partial x_1} + \frac{1}{2} [S_{1111} (x_2 \sigma_{11}^2)^2 + 4S_{1212} (\sigma_{12}^0)^2] dx_1 dS dt \quad (1.11)$$

En notant  $I_3 = \int_S x_2^2 dS$  et  $S = \int_S dS$ , il vient après intégration sur la section droite que :

$$R(W, \sigma) = \int_{t_0}^t \int_0^l \left\{ \rho \frac{I_3}{2} \left( \frac{\partial W_1^2}{\partial t} \right)^2 + \rho \frac{S}{2} \left( \frac{\partial W_2^0}{\partial t} \right)^2 - S \sigma_{12}^0 W_1^2 - S \sigma_{12}^0 \frac{\partial W_2^0}{\partial x_1} - I_3 \sigma_{11}^2 \frac{\partial W_1^2}{\partial x_1} + I_3 \frac{S_{1111}}{2} (\sigma_{11}^2)^2 + 2.S.S_{1212} (\sigma_{12}^0)^2 \right\} dx_1 dt \quad (1.12)$$

L'extrémalisation de la fonctionnelle (1.11) conduit aux équations :

$$-S \sigma_{12}^0 - \rho I_3 \frac{\partial^2 W_1^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} (I_3 \sigma_{11}^2) = 0 \quad (1.13)$$

$$-\rho S \frac{\partial^2 W_2^0}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} (S \sigma_{12}^0) = 0 \quad (1.14)$$

$$-S \left( W_1^2 + \frac{\partial W_2^0}{\partial x_1} \right) + 4S \cdot S_{1212} \sigma_{12}^0 = 0 \quad x_1 \in ]0, l[ \text{ et } \forall t \quad (1.15)$$

$$-I_3 \left( \frac{\partial W_1^2}{\partial x_1} - S_{1111} \sigma_{11}^2 \right) = 0 \quad (1.16)$$

Les équations (1.13) et (1.14) sont les équations de mouvement suivant les axes 1 et 2.

Les équations (1.15) et (1.16) sont les relations de comportement pour  $\sigma_{12}^0$  et  $\sigma_{11}^2$ .

Les conditions aux limites sont données par les relations :

$$\begin{cases} W_2^0 = 0 \text{ ou } S \sigma_{12}^0 = 0 \\ \text{et} \\ W_1^2 = 0 \text{ ou } I_3 \sigma_{11}^2 = 0 \end{cases} \quad x_1 = 0 \text{ et } x_1 = l, \forall t \quad (1.17)$$

Le terme  $S \sigma_{12}^0$  est homogène à une force qui s'oppose au déplacement transversal. On l'appelle effort tranchant, il est introduit par la contrainte de cisaillement  $\sigma_{12}$ .

Le terme  $I_3 \sigma_{11}^2$  est homogène à un moment s'opposant à la rotation des sections droites.

On l'appelle moment fléchissant.

On aura donc un ensemble de quatre conditions aux limites pour chaque extrémité de la poutre.

$$W_2^0 = 0 \text{ et } W_1^2 = 0 \quad \text{Encastrement}$$

$$W_2^0 = 0 \text{ et } W_1^2 \neq 0, \quad I_3 \sigma_{11}^2 = 0 \quad \text{Appui}$$

$$W_2^0 \neq 0, \quad S \sigma_{12} = 0 \text{ et } W_2^1 \neq 0, \quad S \sigma_{11}^2 = 0 \quad \text{Extrémité libre}$$

$$W_1^2 = 0 \text{ et } W_2^1 \neq 0, \quad I_3 \sigma_{12}^0 = 0 \quad \text{Guidée}$$

### **I.2.2 Equations de base en variables déplacement**

Il suffit de tirer  $\sigma_{12}^0$  et  $\sigma_{11}^2$  des équations (1.15) et (1.16) et les introduire dans (1.13), (1.14) et (1.17)

$$\sigma_{12}^0 = \frac{1}{4S_{1212}} \left( W_1^2 + \frac{\partial W_2^0}{\partial x_1} \right) \quad x_1 \in ]0, l[ , \quad \forall t \quad (1.18)$$

$$\sigma_{11}^2 = \frac{1}{S_{1111}} \frac{\partial W_1^2}{\partial x_1} \quad (1.19)$$

Les équations de mouvement (1.13) et (1.14) deviennent :

$$-I_3 \rho \frac{\partial^2 W_1^2}{\partial t^2} - \frac{S}{4S_{1212}} \left( W_1^2 + \frac{\partial W_2^0}{\partial x_1} \right) + I_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{S_{1111}} \frac{\partial W_1^2}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (1.20)$$

$$-\rho S \frac{\partial^2 W_2^0}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{S}{4S_{1212}} \left( W_1^2 + \frac{\partial W_2^0}{\partial x_1} \right) \right) = 0 \quad (1.21)$$

Et les conditions aux limites (1.17) deviennent :

$$\text{soit } W_2^0 = 0 \quad ; \quad \text{soit } \frac{S}{4S_{1212}} \left( W_1^2 + \frac{\partial W_2^0}{\partial x_1} \right) = 0$$

$$\text{soit } W_1^2 = 0 \quad ; \quad \text{soit } \frac{I_3}{S_{1111}} \frac{\partial W_1^2}{\partial x_1} = 0 \quad (1.22)$$

$$x_1 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = l \quad ; \quad \forall t$$

L'écriture en variable déplacement ne fait plus apparaître que deux inconnues la flèche  $W_2^0$  et la rotation des sections droites  $W_1^2$ .

Dans la pratique, les rotations des sections droites ne sont pas accessibles expérimentalement et la manifestation principale de la flexion des poutres est le déplacement transversale  $W_2^0$ .

Il est donc intéressant de ne donner qu'une seule équation fonction de  $W_2^0$ , ceci est possible pour les poutres homogènes en effectuant les opérations suivantes sur les équations (1.20) et (1.21).

On tire de (1.21) la valeur de  $\frac{\partial W_1^2}{\partial x_1}$  en fonction de  $W_2^0$

$$\frac{\partial W_1^2}{\partial x_1} = 4\rho S_{1212} \frac{\partial^2 W_2^0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 W_2^0}{\partial x_1^2}$$

On dérive (1.20) par rapport à  $x_1$  :

$$\rho I_3 \frac{\partial}{\partial t^2} \left( \frac{\partial W_1^2}{\partial x_1} \right) - \frac{S}{4S_{1212}} \left( \frac{\partial W_1^2}{\partial x_1} \right) - \frac{S}{4S_{1212}} \frac{\partial^2 W_2^0}{\partial x_1^2} + I_3 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{1}{S_{1111}} \left( \frac{\partial W_1^2}{\partial x_1} \right) \right) = 0$$

En remplaçant  $\frac{\partial W_1^2}{\partial x_1}$  par sa valeur on obtient :

$$\frac{I_3}{S_{1111}} \frac{\partial^4 W_2^0}{\partial x_1^4} + \rho S \frac{\partial^2 W_2^0}{\partial t^2} + 4\rho^2 I_3 S_{1212} \frac{\partial^4 W_2^0}{\partial t^4} - \rho I_3 \left( 1 + \frac{4S_{1212}}{S_{1111}} \right) \frac{\partial^4 W_2^0}{\partial x_1^2 \partial t^2} = 0 \quad (1.23)$$

Si on introduit les modules d'Young  $E = \frac{1}{S_{1111}}$  et de Coulomb  $G = \frac{1}{4S_{1212}}$  et on notant

$W_2^0(x_1, t)$  par  $W(x, t)$  il vient :

$$EI_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \rho^2 \frac{I_3}{G} \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} - \rho I_3 \left( 1 + \frac{E}{G} \right) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (1.24)$$

C'est l'équation la plus synthétique des poutres avec cisaillement et inertie rotationnelle.

### 1.2.3 Equation de mouvement de la poutre de Bernoulli

#### a) Formulation mixte

En première approximation la contrainte de cisaillement  $\sigma_{12}^0$  est faible.

En utilisant la relation (1.15) qui relie dans le modèle de Timoshenko cette contrainte et

le déplacement  $W_1^2$  et  $W_2^0$  on constate que si  $\sigma_{12}^0 = 0$  on a aussi  $W_1^2 = -\frac{\partial W_2^0}{\partial x_1}$

Ces remarques conduisent à prendre les hypothèses de condensation suivantes, quand on néglige le cisaillement transversal.

Champ des déplacements :

$$\begin{cases} W_1(x_1, x_2, x_3, t) = -x_2 \frac{W_1^2(x_1, t)}{\partial x_1} \\ W_2(x_1, x_2, x_3, t) = W_2^0(x_1, t) \equiv W(x, t) \\ W_3(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

Ce qui traduit l'égalité de l'angle de rotation des sections droites avec la pente du déplacement transversal.

Champ des contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3, t) = x_2 \sigma_{11}^2(x_1, t) \\ \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \quad \text{si } (i, j) \neq (1, 1) \end{cases} \quad (1.26)$$

En introduisant ces champs dans la fonctionnelle de Reissner on a :

$$R(W_2^0, \sigma_{11}^2) = \int_{t_0}^t \int_0^l \left\{ \rho \frac{I_3}{2} \left( \frac{\partial^2 W_2^0}{\partial x_1 \partial t} \right)^2 + \rho \frac{S}{2} \left( \frac{\partial W_2^0}{\partial t} \right)^2 - I_3 \sigma_{11}^2 \frac{\partial^2 W_2^0}{\partial x_1^2} + I_3 \frac{S_{1111}}{2} (\sigma_{11}^2)^2 \right\} dx_1 dt$$

L'extrémalisation de cette fonctionnelle conduit aux équations suivantes:

Equation de mouvement :

$$-\rho S \frac{\partial^2 W_2^0}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \rho I_3 \frac{\partial^3 W_2^0}{\partial x_1 \partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (I_3 \sigma_{11}^2) = 0 \quad (1.27)$$

Relation de comportement :

$$-I_3 \frac{\partial^2 W_2^0}{\partial x_1^2} + I_3 S_{1111} \sigma_{11}^2 = 0 \quad x_1 \in ]0, l[, \forall t \quad (1.28)$$

Conditions aux limites :

$$\text{Soit } W_2^0 = 0 \quad \text{soit } \frac{\partial}{\partial x_1} (I_3 \sigma_{11}^2) = 0 \quad (1.29)$$

Et

$$\text{Soit } \frac{\partial W_2^0}{\partial x_1} = 0 \quad \text{soit } I_3 \sigma_{11}^2 = 0 \quad (1.30)$$

**b) Formulation en déplacement**

Il suffit de tirer  $\sigma_{11}^2$  de l'équation (1.28) puis de remplacer dans (1.27), (1.29) et (1.30).

$$\sigma_{11}^2 = \frac{1}{S_{1111}} \frac{\partial^2 W_2^0}{\partial x_1^2} \tag{1.31}$$

L'équation de mouvement s'écrit alors :

$$-\rho S \frac{\partial^2 W_2^0}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \rho I_3 \frac{\partial^3 W_2^0}{\partial x_1 \partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{I_3}{S_{1111}} \frac{\partial^2 W_2^0}{\partial x_1^2} \right) = 0 \tag{1.32}$$

Et les conditions aux limites :

Soit  $W_2^0 = 0$  soit  $\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{I_3}{S_{1111}} \frac{\partial^2 W_2^0}{\partial x_1^2} \right) = 0$

Et

Soit  $\frac{\partial W_2^0}{\partial x_1} = 0$  soit  $\frac{I_3}{S_{1111}} \frac{\partial^2 W_2^0}{\partial x_1^2} = 0$

**I.2.4 Equation classique des vibrations de flexion des poutres, équation d'Euler**

Pour obtenir l'équation classique des vibrations de flexion des poutres, on introduit une simplification supplémentaire en négligeant l'effet d'inertie rotationnelle représenté par le deuxième terme de l'équation (1.32), ce qui donne en remplaçant  $\frac{1}{S_{1111}}$  par E le module d'Young du matériau dans la direction longitudinale :

Equation d mouvement :

$$-\rho S \frac{\partial^2 W_2^0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( EI \frac{\partial^2 W_2^0}{\partial x_1^2} \right) = 0 \tag{1.33}$$

Conditions aux limites :

Soit  $W_2^0 = 0$  soit  $\frac{\partial}{\partial x_1} \left( EI \frac{\partial^2 W_2^0}{\partial x_1^2} \right) = 0$

Et

Soit  $\frac{\partial W_2^0}{\partial x_1} = 0$  soit  $EI \frac{\partial^2 W_2^0}{\partial x_1^2} = 0 \quad x_1 \in ]0, l[ , \forall t$

Le mouvement vibratoire est alors décrit par des équations qui ne font plus apparaître les contraintes, ces dernières peuvent se calculer avec l'expression (1.31) dès que l'on connaît  $W_2^0$ .

La quantité  $\frac{\partial}{\partial x_1} \left( E_1 I_3 \frac{\partial^2 W_2^0}{\partial x_1^2} \right)$  est homogène à une force on lui donne le nom d'effort

tranchant et la quantité  $E_1 I_3 \frac{\partial^2 W_2^0}{\partial x_1^2}$  est homogène à un moment on lui donne le nom de moment fléchissant.

## Chapitre II

### Résolution de l'équation homogène, schéma modal, cas de la poutre Encastrée-libre

#### II.1 Résolution de l'équation homogène par la méthode de séparation des variables

La formulation du problème des vibrations de flexion des poutres à montré l'existence de deux modèles de base, le modèle de Timoshenko qui tient compte de l'inertie rotationnelle et de l'effet de cisaillement transversal, et le modèle de Bernoulli qui néglige l'effet de cisaillement et conduit après élimination de l'inertie rotationnelle à l'équation d'Euler-Bernoulli qui est l'équation la plus représentative des vibrations de flexion des poutres lorsque toutes les hypothèses simplificatrices sont présentes.

A partir de ces deux modèles de base naissent deux autres qui sont souvent en compétition avec les premiers et qui montrent un intérêt particulier aux limites de l'hypothèse de Bernoulli ou lorsque les charges sont importantes.

Le premier est celui qui tient compte de l'effet de l'inertie rotationnelle seule et est représenté par l'équation (1.32), le deuxième est celui qui tient compte de l'effet de cisaillement transversal seul et dont l'équation sera donnée ultérieurement.

La résolution de l'équation homogène par la méthode de séparation des variables des quatre modèles sera représentée avec une description du schéma modale de la poutre encastrée-libre pour tous les cas.

##### II.1.1 Poutre d'Euler-Bernoulli

L'équation d'Euler-Bernoulli (1.33) représente un modèle de base des vibrations de flexion des poutres lorsque toutes les hypothèses simplificatrices sont respectées. C'est celui que nous allons d'écrire en premier lieu avec la notation suivante (cette notation sera respectée dans toutes la suite).

Poutre homogène de section constante avec :

$$W_2^0 \equiv W, \quad E_1 \equiv E, \quad I_3 \equiv I, \quad x_1 \equiv x$$

$$EI = \text{constante} \quad \rho S = \text{constante}$$

Equation de mouvement :

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad x_1 \in ]0, l[ \quad , \quad \forall t \quad (2.1)$$

Les conditions aux limites dans le cas de la poutre encastrée en  $x=0$  et libre en  $x=l$  se traduisent par :

$$\begin{aligned} W(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial W(0, t)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 W(l, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^3 W(l, t)}{\partial x^3} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

En séparant  $W(x, t)$  en deux fonctions  $w(x, t) = T(t).A(x)$  et en remplaçant dans l'équation de mouvement il vient :

$$\frac{EI}{\rho S} \frac{1}{A(x)} \frac{d^4 A(x)}{dx^4} = - \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \text{conste} = \omega^2$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \\ \frac{d^4 A(x)}{dx^4} - \frac{\rho S}{EI} \omega^2 A(x) = 0 \end{aligned}$$

La première de ces deux équations est une équation différentielle ordinaire du 2<sup>ème</sup> ordre sa solution peut être écrite sous la forme :

$$T(t) = d_1 \sin \omega t + d_2 \cos \omega t \quad \text{Ou } d_1 \text{ et } d_2 \text{ sont déterminées par les conditions initiales.}$$

La deuxième équation peut-être transformée sous la forme :

$$\frac{d^4 A(x)}{dx^4} - a^4 A(x) = 0 \quad (2.3)$$

Avec :

$$a^4 = \frac{\rho S}{EI} \omega^2 \quad (2.4)$$

$a$  est appelée nombre d'onde et la relation (2.4) relation de dispersion.

L'introduction des conditions aux limites dans la solution spatiale va permettre de déterminer  $a$  et par la suite les fréquences propres  $\omega$ .

La forme spatiale (2.3) présente une solution en deux termes l'un sinusoidale et l'autre hyperbolique.

$$A(x) = C_1 \sin(ax) + C_2 \cos(ax) + C_3 \sinh(ax) + C_4 \cosh(ax)$$

En introduisant les conditions limites dans cette équation il vient :

$$\text{encastrement} \quad \begin{cases} W(0, t) = 0 & \rightarrow & A(0) = 0 & (a) \\ \frac{\partial W(0, t)}{\partial x} = 0 & \rightarrow & \left. \frac{dA(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0 & (b) \end{cases}$$

$$\text{extrémité libre} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 W(l, t)}{\partial x^2} = 0 & \rightarrow & \left. \frac{d^2 A(x)}{dx^2} \right|_{x=l} = 0 & (c) \\ \frac{\partial^3 W(l, t)}{\partial x^3} = 0 & \rightarrow & \left. \frac{d^3 A(x)}{dx^3} \right|_{x=l} = 0 & (d) \end{cases}$$

Ces équations s'écrivent :

$$\begin{cases} C_2 + C_4 = 0 \\ C_1 + C_3 = 0 \\ -C_1 \sin(al) - C_2 \cos(al) + C_3 \sinh(al) + C_4 \cosh(al) = 0 \\ -C_1 \cos(al) + C_2 \sin(al) + C_3 \cosh(al) + C_4 \sinh(al) = 0 \end{cases}$$

En remplaçant  $C_3$  et  $C_4$  par leurs valeurs dans les deux dernières équations et en écrivant le système sous forme matricielle on obtient :

$$\begin{bmatrix} \sin(al) + \sinh(al) & \cos(al) + \cosh(al) \\ \cos(al) + \cosh(al) & -\sin(al) + \sinh(al) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solution non triviale qui annule le déterminant est :

$$\mathbf{\cos(al) \cosh(al) + 1 = 0} \quad (2.5)$$

C'est l'équation aux fréquences, elle peut s'écrire sous la forme :

$$\cos(al) + \frac{1}{\cosh(al)} = 0$$

Et peut être approximée pour  $al \gg 1$  par  $\cos(al) = 0$  ie  $a_n l = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right)$ ,  $n > 3$

Notant ici qu'on peu obtenir les valeurs numériques des nombres d'onde sans dimension par la résolution directe de l'équation aux fréquences (2.5), ce qui n'est pas le cas pour les autres modèles comme nous allons le voir.

Les premières racines de cette équation sont :

$$a_1 l = 1,87510 \quad a_2 l = 4,69409 \quad a_3 l = 7,85476 \quad a_4 l = 10,99554$$

Si on norme  $C_l = 1$  on trouve :

$$A(x) = \sin(ax) - \sinh(ax) + \varphi(al)(\cos(ax) - \cosh(ax)) \quad (2.6)$$

Avec :

$$\varphi(al) = -\frac{\sin(al) + \sinh(al)}{\cos(al) + \cosh(al)} \quad (2.7)$$

La solution générale de l'équation homogène représentative des vibrations de flexion selon le modèle d'Euler dans le cas d'une poutre encastrée-libre est :

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)A_n(x)$$

$$T_n(t) = d_1 \sin(\omega_n t) + d_2 \cos(\omega_n t)$$

$$A_n(x) = \sin(a_n x) - \sinh(a_n x) + \varphi_n(al)(\cos(a_n x) - \cosh(a_n x))$$

$d_1$  et  $d_2$  sont déterminées par les conditions initiales

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} (a_n l)^2$$

$$\varphi_n(al) = -\frac{\sin(a_n l) + \sinh(a_n l)}{\cos(a_n l) + \cosh(a_n l)}$$

Les huit premières valeurs des nombres d'onde de ce modèle et les fréquences propres du mode correspondant pour une poutre encastré-libre présentant les caractéristiques suivantes :

$$E=200Gpa, \quad I=0.0001171m^2, \quad \rho=7830Kg/m^3 \text{ et } S=0.0097389m^2$$

Sont donnés dans le tableau II.1

Mode n	Nombre d'onde ( $a_n l$ )	Fréquence Propre $\omega_n$ (rd / s)	$\omega_n / \omega_1$
1	1.875	1948.536	1
2	4.694	12211.265	6,267
3	7.855	34191.895	17,547
4	10.996	67002.467	34,386
5	14.137	110759.879	56,842
6	17.279	165456.081	84,913
7	20.420	231091.552	118,597
8	23.562	307666.268	157,896

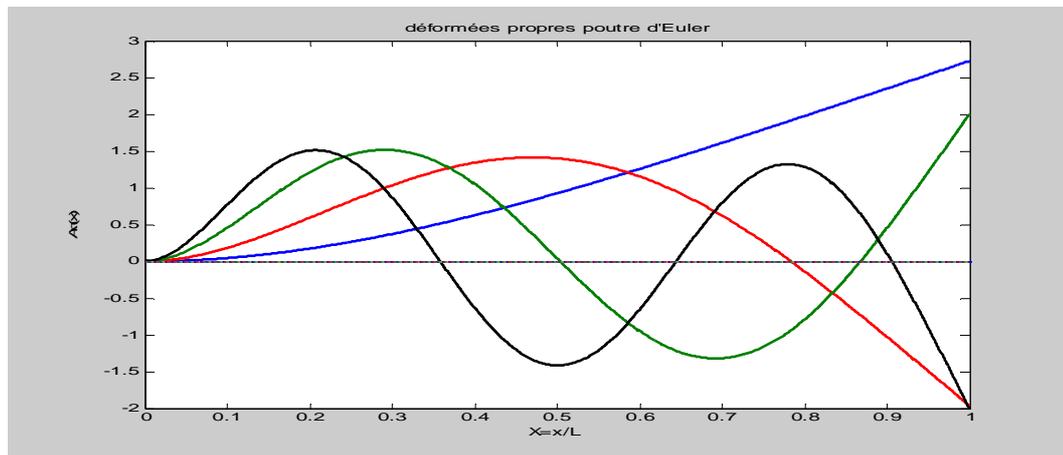
**Tableau II.1 nombres d'onde et fréquences propres de la poutre d'Euler**

Les fréquences naturelles peuvent être exprimées sous la forme :  $\omega_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho S l^4}} \alpha_n^2$

Relation à partir de laquelle on peut écrire  $\omega_n l \sqrt{\frac{\rho}{E}} = r \alpha_n^2$  ou  $r$  est le rayon de giration donné par  $r = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{I}{S}}$  pouvant ainsi tracer  $\omega_n l \sqrt{\frac{\rho}{E}}$  en fonction de  $r$ . Ceci va nous être utile lorsque nous allons comparer les fréquences naturelles avec ceux prédit par les autres modèles.

Les fonctions  $A_n(x)$  sont appelées fonctions propres ou déformées propres et constituent une base sur laquelle peut être projeté la solution du problème.

Les quatre premiers modes de vibration selon le modèle d'Euler pour une poutre encastré-libre de longueur unitaire sont donnés Figure II.1



**Fig.II.1 Déformées propres de la poutre d'Euler encastrée libre**

### **II.1.2 Modèle avec inertie rotationnelle (Rayleigh)**

L'équation qui représente ce modèle a été donnée au chapitre précédent (Eq.1.32) elle s'écrit dans le cas de la poutre homogène :

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (2.8)$$

On cherche toujours une solution sous la forme :

$$W(x, t) = T(t).A(x)$$

La partie temporelle  $T(t)$  obéit à la même équation différentielle que le modèle

précédent  $\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0$

L'équation différentielle de la partie spatiale s'écrit :

$$EI \frac{d^4 A(x)}{dx^4} + \rho I \omega^2 \frac{d^2 A(x)}{dx^2} - \rho S \omega^2 A(x) = 0 \quad (2.9)$$

Ou bien :

$$A''''(x) + \frac{\rho \omega^2}{E} A''(x) - \frac{\rho S \omega^2}{EI} A(x) = 0$$

La solution temporelle  $T(t)$  est comme il a été mentionné sinusoïdale

$$T(t) = d_1 \sin \omega t + d_2 \cos \omega t$$

Et la solution spatiale est constituée de deux termes l'un sinusoïdale et l'autre hyperbolique

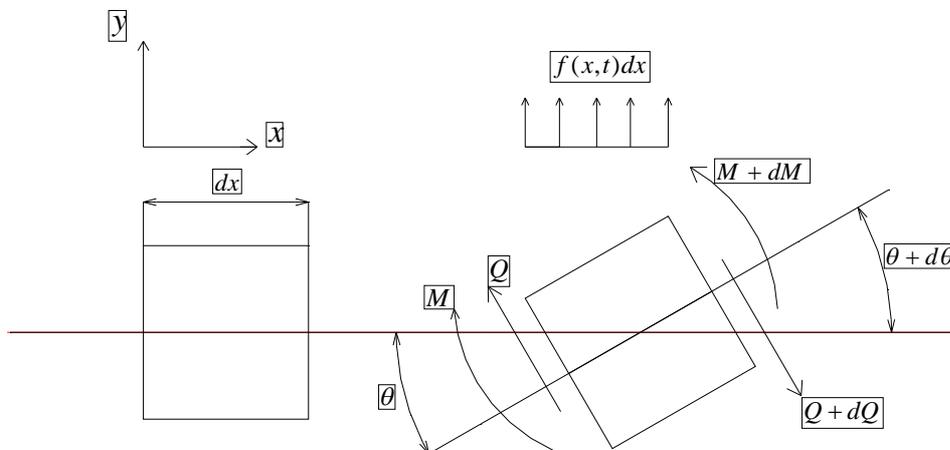
$$A(x) = C_1 \sin(ax) + C_2 \cos(ax) + C_3 \sinh(bx) + C_4 \cosh(bx) \quad (2.10)$$

Les relations de dispersion s'écrivent dans ce cas :

$$a = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{2E} + \sqrt{\left(\frac{\rho \omega^2}{2E}\right)^2 + \frac{\rho S \omega^2}{EI}}} \quad (2.11)$$

$$b = \sqrt{-\frac{\rho \omega^2}{2E} + \sqrt{\left(\frac{\rho \omega^2}{2E}\right)^2 + \frac{\rho S \omega^2}{EI}}} \quad (2.12)$$

Dans le modèle avec inertie rotationnelle ce qui fait la différence avec le modèle d'Euler est surtout l'expression de l'effort tranchant SEON M. HAN et al [3]. Or celui-ci est présent dans les conditions aux limites ; il est donc nécessaire de déterminer son expression avant de les introduire dans la forme spatiale (2.10).



**Fig. II.2. Élément d'une poutre avec rotation de la section droite.**

La somme des forces appliquées à l'élément de la poutre dans la direction y est :

$$\sum F_y = \rho S dx \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} = -(Q + dQ) \cos(\theta + d\theta) + Q \cos \theta + f(x, t) dx$$

$$\theta \cong \frac{\partial W(x, t)}{\partial x}, dQ \text{ et } d\theta \text{ représentent respectivement } \frac{\partial Q}{\partial x} dx \text{ et } \frac{\partial \theta}{\partial x} dx$$

En développant  $\cos(\theta + d\theta)$  en série de Taylor et en utilisant l'approximation pour  $\theta$  petit on trouve :

$$-\frac{\partial Q}{\partial x} = \rho S \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} - f(x, t) \quad (2.13)$$

De même en considérant l'équilibre des moments par rapport au point milieu de l'élément  $\left(\frac{dx}{2}\right)$  on obtient :

$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q = \rho I \frac{\partial^3 W(x, t)}{\partial t^2 \partial x} \quad (2.14)$$

En dérivant (2.14) par rapport à x et remplaçant  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  par sa valeur dans (2.13) on a :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \rho I \frac{\partial^4 W(x, t)}{\partial t^2 \partial x^2} - \rho S \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} + f(x, t) \quad (2.15)$$

Comparant avec l'équation de mouvement avec second membre :

$$EI \frac{\partial^4 W(x, t)}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 W(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} = f(x, t)$$

On conclue que  $\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4}$  ou  $M = EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$

Et d'après (2.14)

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} - \rho I \frac{\partial^3 W(x, t)}{\partial t^2 \partial x} = EI \frac{\partial^3 W(x, t)}{\partial x^3} - \rho I \frac{\partial^3 W(x, t)}{\partial t^2 \partial x} \quad (2.16)$$

(2.16) est l'expression de l'effort tranchant qui va intervenir dans les conditions aux limites à l'extrémité libre de la poutre.

A ce stade on peut introduire les conditions limites dans la forme spatiale et déterminer l'équation aux fréquences de ce modèle.

Conditions aux limites :

En  $x=0$  (encastrement) :

- Déplacement nul :

$$W(0, t) = 0 \rightarrow A(0) = 0 \quad \text{ie} \quad C_2 + C_4 = 0 \quad (2.17)$$

- Rotation de la section droite nulle :

$$\left. \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \rightarrow A'(0) = 0 \quad \text{ie} \quad aC_1 + bC_3 = 0 \quad (2.18)$$

En  $x=l$  (extrémité libre) :

- Moment fléchissant nul :

$$\left. \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0 \rightarrow A''(l) = 0$$

$$\text{ie} \quad -a^2 C_1 \sin(al) - a^2 C_2 \cos(al) + b^2 C_3 \sinh(bl) + b^2 C_4 \cosh(bl) = 0$$

Tenant compte de (2.17) et (2.18) on trouve :

$$[a^2 \sin(al) + ab \sinh(bl)]C_1 + [a^2 \cos(al) + b^2 \cosh(bl)]C_2 = 0 \quad (2.19)$$

- Effort tranchant nul :

$$Q(x, t)|_{x=l} = 0 \Rightarrow \left[ A'''(x) + \frac{\rho\omega^2}{E} A'(x) \right]_{x=l} = 0$$

$$\text{Or d'après (2.11) et (2.12)} \quad \frac{\rho\omega^2}{E} = a^2 - b^2$$

L'expression qui annule l'effort tranchant en  $x=l$  s'écrit alors :

$$-a^3 C_1 \cos(al) + a^3 C_2 \sin(al) - ab^2 C_1 \cosh(bl) - b^3 C_2 \sinh(bl) + (a^2 - b^2)[aC_1 \cos(al) - aC_2 \sin(al) - aC_1 \cosh(bl) - bC_2 \sinh(bl)] = 0 \quad (2.20)$$

Soit tout calcul fait :

$$[-b^2 \cos(al) - a^2 \cosh(bl)]C_1 + [b^2 \sin(al) - ab \sinh(bl)]C_2 = 0 \quad (2.21)$$

(2.19) et (2.21) sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} a^2 \sin(al) + ab \sinh(bl) & a^2 \cos(al) + b^2 \cosh(bl) \\ -b^2 \cos(al) - a^2 \cosh(bl) & b^2 \sin(al) - ab \sinh(bl) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.21. bis)$$

La solution non triviale (celle qui annule le déterminant) est :

$$ab(b^2 - a^2) \sin(al) \sinh(bl) + (b^4 + a^4) \cos(al) \cosh(bl) + 2a^2 b^2 = 0 \quad (2.22)$$

C'est l'équation aux fréquences pour le modèle avec inertie rotationnelle de la poutre encastrée-libre.

Notant qu'à partir des relations de dispersion (2.11) et (2.12) on peut exprimer  $b$  en fonction de  $a$  en écrivant :

$$a^2 = B_1 + \sqrt{B_1^2 + B_2} \quad \text{et} \quad b^2 = -B_1 + \sqrt{B_1^2 + B_2} \quad (i)$$

$$\text{avec : } B_1 = \frac{\rho\omega^2}{2E} \quad \text{et} \quad B_2 = \frac{\rho S \omega^2}{EI} \quad (a)$$

$$a^2 - b^2 = 2B_1 \quad , \quad a^2 b^2 = B_2 \quad (b)$$

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{a^2 - b^2}{2} \frac{1}{a^2 b^2} = \frac{\rho \omega^2}{2E} \frac{EI}{\rho S \omega^2}$$

On notant  $\frac{I}{S} = r^2$  ou  $r$  est le rayon de giration on a :

$$b = a \sqrt{\frac{1}{a^2 r^2 + 1}} \quad (2.23)$$

Les équations (a) et (b) nous permettent aussi d'écrire la relation de dispersion :

$$\frac{\rho \omega^2}{2E} = \frac{a^2 - b^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{E}{\rho} (a^2 - b^2)}$$

On remarque alors que contrairement au modèle d'Euler où les nombres d'onde sont indépendants des propriétés géométriques de la section de la poutre, les nombres d'onde du modèle avec inertie rotationnelle sont reliés par le rayon de giration  $r$ .

Considérant le cas où  $r=0$ , alors  $a=b$  d'après l'équation (2.23) et  $B_1=0$ , soit en comparant l'équation (i) avec l'équation (2.4) on trouve que  $a$  et  $b$  sont égales au nombre d'onde de la poutre d'Euler, c'est-à-dire que pour une poutre mince ( $r$  petit), les deux nombres d'ondes  $a$  et  $b$  sont voisins et la solution est proche de celle que donne le modèle d'Euler.

Puisque les deux nombres  $a$  et  $b$  apparaissent dans l'équation aux fréquences et sont d'après (2.23) reliés par  $r$ , cela signifie que les propriétés géométriques de la section droite représentées par le rayon de giration  $r$  influencent la solution, et comme il a été mentionné lorsque  $r$  approche zéro la solution est identique à celle d'Euler.

La meilleure façon de représenter la solution de l'équation aux fréquences est d'exprimer  $a$  et  $b$  en fonction de  $r$ .

Pour obtenir une solution régulière  $a(r)$  nous allons utiliser l'analyse suivante :

Notant par  $F(a,b)=0$  l'équation aux fréquences (2.22), d'après (2.23)  $b$  est fonction de  $a$  et  $r$ , il s'écrit donc  $b(a,r)$ .  $dF$  et  $db$  sont donnés par :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial a} da + \frac{\partial F}{\partial b} db \quad \text{et} \quad db = \frac{\partial b}{\partial a} da + \frac{\partial b}{\partial r} dr$$

En combinant les deux expressions  $dF$  sera donnée par :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial a} da + \frac{\partial F}{\partial b} \left( \frac{\partial b}{\partial a} da + \frac{\partial b}{\partial r} dr \right)$$

Or  $dF=0$  car  $F=0$

En résolvant pour  $\frac{da}{dr}$  on trouve :

$$\frac{da}{dr} = - \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial b}\right) \left(\frac{\partial b}{\partial r}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial a}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial b}\right) \left(\frac{\partial b}{\partial a}\right)} \quad (\mathbf{E. D. O})$$

L'expression à droite est fonction de  $a$  ;  $b$  et  $r$ , et lorsque  $b$  est exprimé en fonction de  $a$  et de  $r$ ,  $\frac{da}{dr}$  est alors exprimée uniquement en fonction de  $a$  et  $r$  ce qui nous amène à la résolution d'une équation différentielle ordinaire une fois connue la valeur initiale  $a(r=0)$ , qui n'est autre que la valeur du nombre d'onde de la poutre d'Euler comme il a été montré en comparant (i) et (2.4) pour  $r=0$  , il suffit ensuite de calculer  $b$  par la relation (2.23).

En prenant respectivement les nombres d'onde de la poutre d'Euler  $a_1, a_2, a_3 \dots$  comme valeurs initiales du problème, on peut alors traquer les nombres d'ondes  $a$  et  $b$  du modèle avec inertie rotationnelle en fonction du rayon de giration  $r$ .

Le problème est résolu sur MATLAB et les résultats pour les quatre premiers modes sont représentés figure II.3

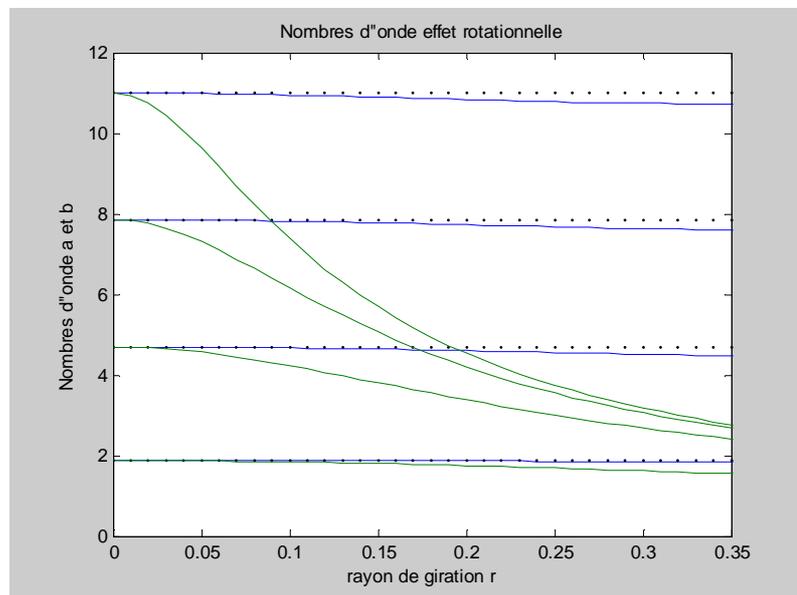


Fig. II.3 : Nombres d'onde du modèle avec effet rotationnelle  $a_i$  en bleu et  $b_i$  en vert  $i=1,4$

Les lignes horizontales en pointiez correspondent aux nombres d'onde d'Euler.

Une fois ces courbes tracées on peut immédiatement obtenir les nombres d'onde  $a_{i,l}$  et  $b_{i,l}$  connaissant le rayon de giration  $r$ , ces nombres avec les propriétés physiques de la

poutre permettent, par les relations de dispersion (a) et (b) de trouver les fréquences propres du système :

$$(a) \text{ et } (b) \rightarrow \omega^2 = (a^2 - b^2) \frac{E}{\rho l^2} \quad \text{ou} \quad \omega^2 = r^2 a^2 b^2 \frac{E}{\rho l^2}$$

$$\omega_n l \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \sqrt{(a_n^2 - b_n^2)}$$

$a_n$  et  $b_n$  étant donnés en fonction de  $r$  on peut donc procéder comme pour le modèle précédent et tracer  $\omega_n l \sqrt{\frac{\rho}{E}}$  en fonction de  $r$  ce qui va nous permettre de comparer les résultats pour les deux modèles.

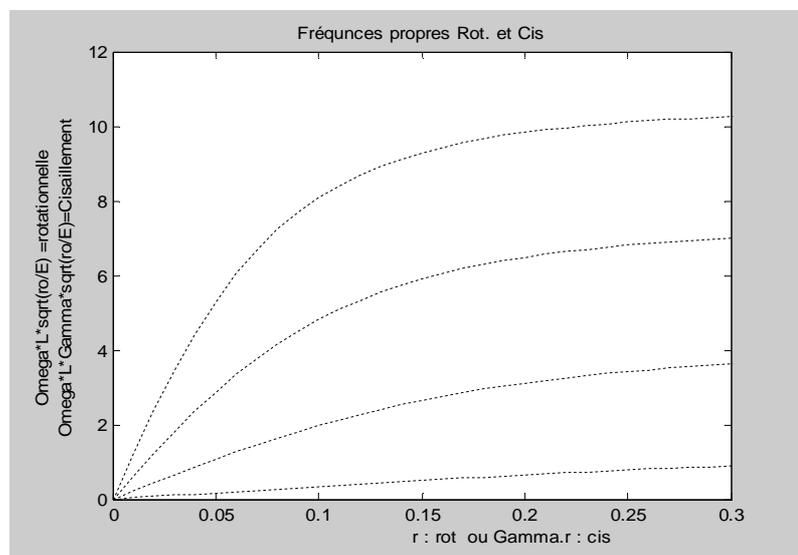


Fig. II.4 fréquences propres du modèle avec inertie rotationnelle et du modèle avec cisaillement transversal

Par exemple les quatre premières paires des nombres d'onde lorsque  $r = 0.11$  peuvent être obtenues à partir des courbes de la Fig. II.3, et les fréquences naturelles, lorsque  $l = 1m$ ,  $\rho = 7830 \text{Kg/m}^3$  et  $E = 200 \text{GPa}$  sont obtenus à partir de la figure. II.4

Mode	$a_n$	$b_n$	$\omega_n$	$\omega_n/\omega_1$
1	1.869	1.831	1896.16	1
2	4.571	4.086	10351.14	5,459
3	7.628	5.851	24737.49	13,046
4	10.685	6.937	41078.65	21,664

Tableau II.2 Les quatre premières paires des nombres d'onde et des fréquences propres du modèle avec inertie rotationnelle de la poutre encastrée-libre

La déformée propre donnée par l'équation (2.10) sera tracée en reprenant la forme matricielle (2.21bis).

On norme alors  $C_1$  ( $C_1 = 1$ ) puis on détermine  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_4$  sont données par les conditions aux limites (Eq. 2.17 et 2.18),  $C_3 = (-a/b)C_1$  et  $C_4 = -C_2$

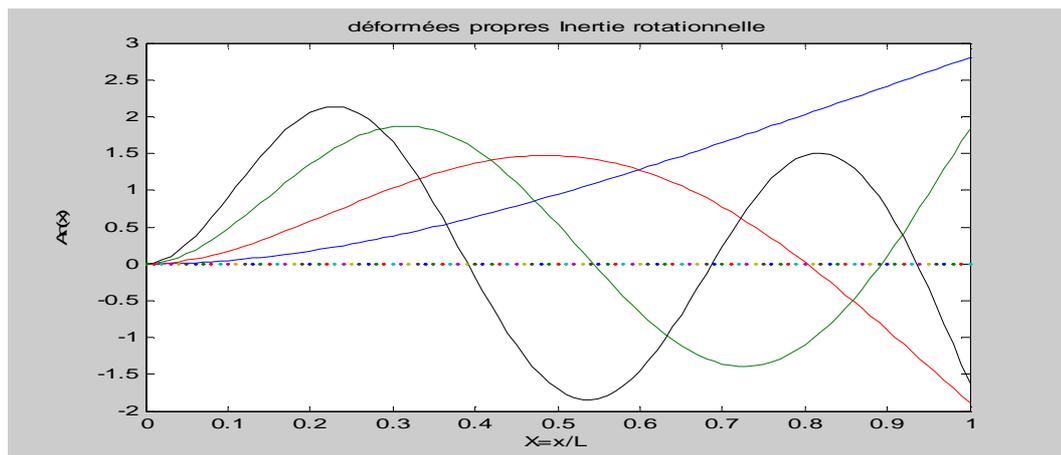
On trouve :

$$C_2 = -\frac{a^2 \sin(al) + ab \sinh(bl)}{a^2 \cos(al) + b^2 \cosh(bl)}$$

Et la déformée propre du mode  $n$  est alors :

$$A_n(x) = \sin(a_n x) + C_2 \cos(a_n x) - \frac{a_n}{b_n} \sinh(b_n x) - C_2 \cosh(b_n x)$$

Les quatre premiers modes pour une poutre de longueur unitaire et de rayon de giration  $r=0.11$  sont donnés figure II.5



**Fig. II.5 : Déformées propres du modèle avec inertie rotationnelle de la poutre encastrée libre avec  $r=0.11$**

### **II.1.3 Equation de mouvement et solution homogène du modèle avec cisaillement transversal**

L'équation de mouvement du modèle avec cisaillement transversal seul n'a jusqu'à présent pas été donnée, pour la déterminer nous allons utiliser la fonctionnelle d'Hamilton qui est la plus traditionnellement utilisée, sa simplicité réside dans le fait qu'elle ne dépend que du champ de déplacement  $W$  et permet alors de donner une formulation en déplacement du problème étudié.

Dans ce modèle on ajoute l'effet de cisaillement transversal au modèle d'Euler sans tenir compte de l'inertie rotationnelle, on introduit alors une nouvelle variable  $\alpha(x, t)$

qui désigne l'angle de rotation des sections droites due au moment fléchissant et  $\beta(x, t)$  angle de rotation due au cisaillement transversal.

L'angle de rotation total d'une section droite est la somme de  $\alpha$  et  $\beta$  et est approximativement égal à  $\frac{\partial W(x, t)}{\partial x}$

L'énergie potentielle d'une poutre droite en flexion est :

$$E_p(\text{flexion}) = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

L'énergie potentielle due au cisaillement est :

$$E_p(\text{cis}) = \frac{1}{2} \int_0^l k' GS \left( \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} - \alpha(x, t) \right)^2 dx$$

L'énergie cinétique due au déplacement transversal est :

$$E_c(\text{trans}) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho S \left( \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx$$

Le lagrangien  $L = E_c - E_p$  s'écrit alors :

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \rho S \left( \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} \right)^2 - EI \left( \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} \right)^2 - k' GS \left( \frac{\partial W}{\partial x} - \alpha \right)^2 \right] dx$$

On appliquant le principe d'Hamilton (principe de la moindre action) on aboutit aux équations de mouvement :

$$\begin{cases} \rho S \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} - k' GS \left( \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} \right) = f(x, t) \\ EI \frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial x^2} + k' GS \left( \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} - \alpha(x, t) \right) = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Et aux conditions aux limites :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} \delta \alpha \Big|_{0, l} \quad \text{et} \quad k' GS \left( \frac{\partial W}{\partial x} - \alpha \right) \delta W \Big|_{0, l} = 0 \quad (2.24\text{bis})$$

Ou  $k'$  est le coefficient de cisaillement qui dépend de la forme de la section, quelque valeurs de ce coefficient sont données à titre de référence dans le tableau qui suit et sont dues aux travaux de Cowper [7].

*The shear factor*

<i>Cross section</i>	<i>k'</i>
Circle	$\frac{6(1 + \nu)}{7 + 6\nu}$
Hollow circle with $m = r_{inner}/r_{outer}$	$\frac{6(1 + \nu)(1 + m^2)^2}{(7 + 6\nu)(1 + m^2)^2 + (20 + 12\nu)m^2}$
Rectangle	$\frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu}$
Thin-walled round tube	$\frac{2(1 + \nu)}{4 + 3\nu}$
Thin-walled square tube	$\frac{20(1 + \nu)}{48 + 39\nu}$

Pour résoudre le problème homogène, les équations de mouvement (2.24) vont être découplées de manière à aboutir à deux équations en  $W(x, t)$  seul et  $\alpha(x, t)$  seule on utilisant une notation plus simple, ou l'indice désigne la variable par rapport à laquelle on dérive.

$$(2.24) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho S W_{tt} - k' G S (W_{xx} - \alpha_x) = 0 & (a) \\ EI \alpha_{xx} + k' G S (W_x - \alpha) = 0 & (b) \end{cases}$$

En dérivant deux fois (a), et une fois (b), par rapport à  $x$  on trouve :

$$\alpha_{xxx} = W_{xxxx} - \frac{\rho}{k' G} W_{xxtt} \quad (c)$$

$$EI \alpha_{xxx} + k' G S (W_{xx} - \alpha_x) = 0 \quad (d)$$

En remplaçant dans (d),  $\alpha_{xxx}$  par sa valeur dans (c) et  $k' G S (W_{xx} - \alpha_x)$  par sa valeur extraite de (a) il vient :

$$EI W_{xxxx} + \rho S W_{tt} - \rho \frac{EI}{k' G} W_{xxtt} = 0 \quad (2.26)$$

De la même manière en dérivant deux fois (b) par rapport à  $t$  puis deux fois par rapport à  $x$ , et une fois (a) par rapport à  $x$  on a :

$$W_{xtt} = \alpha_{tt} - \frac{EI}{k' G S} \alpha_{xxtt} \quad (e)$$

$$EI \alpha_{xxxx} + k' G S (W_{xxx} - \alpha_{xx}) = 0 \quad (f)$$

$$\rho S W_{xtt} - k' G S (W_{xxx} - \alpha_{xx}) = 0 \quad (g)$$

En remplaçant dans (g),  $W_{xtt}$  par sa valeur dans (e) et  $k' G S (W_{xxx} - \alpha_{xx})$  par sa valeur extraite de (f) on trouve :

$$EI\alpha_{xxxx} + \rho S\alpha_{tt} - \rho \frac{EI}{k'G} \alpha_{xxtt} = 0 \quad (2.27)$$

On remarque que la forme des équations (2.26) et (2.27) est la même pour  $W(x, t)$  et  $\alpha(x, t)$ , cela signifie que  $W(x, t)$  et  $\alpha(x, t)$  sont synchronisés dans le temps et peuvent donc être représentés par la même fonction de temps  $T(t)$  ce qui va nous permettre d'écrire :

$$T_n(t) = d_1 \sin(\omega_n t) + d_2 \cos(\omega_n t)$$

$$\begin{bmatrix} W(x, t) \\ \alpha(x, t) \end{bmatrix} = T(t) \begin{bmatrix} A(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Si on reporte la forme séparée de la solution (2.28) dans les équations de mouvement (2.26) et (2.27) on trouve :

$$\begin{cases} \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \Rightarrow T_n(t) = d_1 \sin(\omega_n t) + d_2 \cos(\omega_n t) \\ EI \frac{d^4 A(x)}{dx^4} + \rho \frac{EI}{k'G} \omega^2 \frac{d^2 A(x)}{dx^2} - \rho S \omega^2 A(x) = 0 \\ EI \frac{d^4 \psi(x)}{dx^4} + \rho \frac{EI}{k'G} \omega^2 \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} - \rho S \omega^2 \psi(x) = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Les deux dernières équations ont la même forme, les solutions  $A(x)$  et  $\psi(x)$  seront donc de la même forme et ne diffèrent alors que par une constante  $d$ .

$$\begin{bmatrix} A(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = d \bar{u} e^{rx} \quad (2.30)$$

Où  $\bar{u}$  est un vecteur constant et  $r$  le nombre d'onde

En introduisant (2.30) dans (2.29) il vient :

$$r^4 + \frac{\rho}{k'G} \omega^2 r^2 - \frac{\rho S}{EI} \omega^2 = 0 \quad (2.31)$$

D'où :

$$r_i = \pm \sqrt{-\frac{\rho \omega^2}{2k'G} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho \omega^2}{2k'G}\right)^2 + \frac{\rho S \omega^2}{EI}}} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Nous avons ici quatre racines dont deux sont imaginaires la solution spatiale correspondante est :

$$\begin{bmatrix} A(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 d_i \bar{u}_i e^{r_i x}$$

Ou bien en écrivant:

$$a = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{2k'I G} + \sqrt{\left(\frac{\rho\omega^2}{2k'I G}\right)^2 + \frac{\rho S\omega^2}{EI}}} \quad (2.32) \quad \text{et} \quad b = \sqrt{-\frac{\rho\omega^2}{2k'I G} + \sqrt{\left(\frac{\rho\omega^2}{2k'I G}\right)^2 + \frac{\rho S\omega^2}{EI}}} \quad (2.33)$$

$$\text{On a: } \begin{bmatrix} A(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = d_1 \bar{u}_1 e^{bx} + d_2 \bar{u}_2 e^{-bx} + d_3 \bar{u}_3 e^{iax} + d_4 \bar{u}_4 e^{-iax} \quad (2.34)$$

La solution (2.34) peut être écrite en termes de fonctions sinusoidales et hyperboliques avec arguments réelles :

$$\begin{bmatrix} A(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \sin(ax) + \begin{bmatrix} C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \cos(ax) + \begin{bmatrix} C_3 \\ D_3 \end{bmatrix} \sinh(bx) + \begin{bmatrix} C_4 \\ D_4 \end{bmatrix} \cosh(bx) \quad (2.35)$$

A ce stade l'introduction des conditions aux limites (au nombre de quatre) ne permettrai pas de déterminer les constantes  $C_i$  et  $D_i$  qui sont au nombre de huit.

Nous devons donc réduire le nombre de constantes inconnues, en cherchant à trouver des relations entres elles.

Pour cela revenons aux équations de mouvement couplées (2.24)

$$\begin{cases} \rho S W_{tt} - k'GS(W_{xx} - \alpha_x) = 0 \\ EI\alpha_{xx} + k'GS(W_x - \alpha) = 0 \end{cases}$$

Et l'écriture en variables séparées de la solution (2.28) qu'on introduit dans (2.24) :

$$\rho S A(x) \ddot{T}(t) - k'GS(A''(x) - \psi'(x))T(t) = 0 \quad (2.36a)$$

$$EI\psi''(x)T(t) + k'GS(A'(x) - \psi(x))T(t) = 0 \quad (2.36b)$$

$$(2.36a) \Rightarrow \begin{cases} \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \\ \rho S \omega^2 A(x) + k'GS(A''(x) - \psi'(x)) = 0 \end{cases} \quad (2.37a)$$

$$(2.36b) \Rightarrow EI\psi''(x) + k'GS(A'(x) - \psi(x)) = 0 \quad (2.37c)$$

(2.37b) et (2.37c) forment le système :

$$\begin{cases} k'GSA''(x) + \rho S \omega^2 A(x) - k'GS\psi'(x) = 0 \\ EI\psi''(x) - k'GS\psi(x) + k'GSA'(x) = 0 \end{cases}$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} k'GS & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A''(x) \\ \psi''(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -k'GS \\ k'GS & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'(x) \\ \psi'(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho S \omega^2 & 0 \\ 0 & -k'GS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

En remplaçant  $A(x)$ ,  $\psi(x)$  et leurs dérivées calculées à partir de la forme spatiale (2.35) on trouve :

$$\begin{aligned}
 & (\rho S \omega^2 C_1 - k' G S a^2 C_1 + k' G S a D_2) \sin(ax) + (\rho S \omega^2 C_2 - k' G S a^2 C_2 - k' G S a D_1) \cos(ax) \\
 & + (k' G S b^2 C_3 + \rho S \omega^2 C_3 - k' G S b D_4) \sinh(bx) \\
 & + (k' G S b^2 C_4 + \rho S \omega^2 C_4 - k' G S b D_3) \cosh(bx) = 0
 \end{aligned}$$

Cette équation est vérifiée sur tous le domaine lorsque tous les coefficients sont nuls ce qui nous amène à conclure que :

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \frac{\rho \omega^2 - a^2 k' G}{a k' G} C_2 & D_2 &= \frac{-\rho \omega^2 + a^2 k' G}{a k' G} C_1 \\
 D_3 &= \frac{\rho \omega^2 + b^2 k' G}{b k' G} C_4 & D_4 &= \frac{\rho \omega^2 + b^2 k' G}{b k' G} C_3
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Or d'après les relations de dispersion (2.32) et (2.33) nous avons :  $a^2 - b^2 = \frac{\rho \omega^2}{k' G}$  soit en combinant avec (2.39) on obtient :

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \frac{1}{a} \left( \frac{\rho \omega^2}{k' G} - a^2 \right) C_2 = -\frac{b^2}{a} C_2 & ; & & D_2 &= \frac{1}{a} \left( -\frac{\rho \omega^2}{k' G} + a^2 \right) C_1 = \frac{b^2}{a} C_1 \\
 D_3 &= \frac{1}{b} \left( \frac{\rho \omega^2}{k' G} + b^2 \right) C_4 = \frac{a^2}{b} C_4 & ; & & D_4 &= \frac{1}{b} \left( \frac{\rho \omega^2}{k' G} + b^2 \right) C_3 = \frac{a^2}{b} C_3
 \end{aligned} \tag{2.39bis}$$

Nous avons ainsi établi quatre relations qui réduisent le nombre de constantes à déterminer à quatre au lieu de huit, on peut maintenant introduire les conditions aux limites dans la forme spatiale et déterminer l'équation aux fréquences.

Les conditions aux limites (2.24bis) s'écrivent dans le cas de la poutre encastree en  $x=0$  et libre en  $x=l$  :

$$\text{Encastrement : } x = 0, \alpha(0, t) = 0 \text{ et } W(0, t) = 0 \Rightarrow D_2 + D_4 = 0 \text{ et } C_2 + C_4 = 0$$

$$\text{Extrémité libre : } x = l, \left. \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right|_l = 0 \text{ et } k' G S \left( \frac{\partial W}{\partial x} - \alpha \right) \Big|_l = 0$$

$$\left. \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right|_l = 0 \Rightarrow \psi'(l) = 0 \text{ ie } a D_1 \cos(al) - a D_2 \sin(al) + b D_3 \cosh(bl) + b D_4 \sinh(bl) = 0 \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
 k' G S \left( \frac{\partial W}{\partial x} - \alpha \right) \Big|_l = 0 \Rightarrow [A'(x) - \psi(x)]_{x=l} = 0 \text{ ie } a C_1 \cos(al) - a C_2 \sin(al) + b C_3 \cosh(bl) + \\
 b C_4 \sinh(bl) - D_1 \sin(al) - D_2 \cos(al) - D_3 \sinh(bl) - D_4 \cosh(bl) = 0
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

En tenant compte des relations (2.39bis) les équations (2.40) et (2.41) s'écrivent tout calcul fait et sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} \sin(al) + \frac{b}{a} \sinh(bl) & \cos(al) + \frac{a^2}{b^2} \cosh(bl) \\ \cos(al) + \frac{b^2}{a^2} \cosh(bl) & -\sin(al) + \frac{b}{a} \sinh(bl) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solution non triviale  $\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$  nous permet de trouver la même équation aux fréquences que celle du modèle avec inertie rotationnelle seul, pour laquelle on peut faire la même analyse dans le but d'exprimer les nombres d'ondes en fonction des caractéristiques géométrique et mécanique de la poutre.

$$ab(b^2 - a^2) \sin(al) \sinh(bl) + (b^4 + a^4) \cos(al) \cosh(bl) + 2a^2b^2 = 0 \quad (2.42)$$

Les relations de dispersion (2.32) et (2.33) s'écrivent :

$$a^2 = B_1 + \sqrt{B_1^2 + B_2} \quad \text{et} \quad b^2 = -B_1 + \sqrt{B_1^2 + B_2}$$

$$\text{avec : } B_1 = \frac{\rho\omega^2}{2k'G} \quad \text{et} \quad B_2 = \frac{\rho S\omega^2}{EI} \quad (a)$$

$$a^2 - b^2 = 2B_1 \quad , \quad a^2b^2 = B_2 \quad (b)$$

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{a^2 - b^2}{2} \frac{1}{a^2b^2} = \frac{EI}{2k'GS}$$

On notant :

$$\gamma^2 = \frac{E}{k'G} \quad (c)$$

on trouve :

$$b = a \sqrt{\frac{1}{(\gamma r)^2 a^2 + 1}} \quad (2.43)$$

$$\omega^2 = \frac{k'G}{\rho} (a^2 - b^2) \quad \text{ou} \quad \omega^2 = \frac{EI}{\rho S} a^2 b^2 \quad (2.44)$$

On remarque tout de suite que l'expression donnant  $b$  en fonction de  $a$  est identique à celle du modèle avec inertie rotationnelle il suffit seulement de remplacer  $r$  par  $\gamma r$ .

Et comme l'équation aux fréquences est la même on peut donc utiliser le même graphe pour la détermination des nombres d'onde en lisant sur l'axe des abscisses  $\gamma r$  au lieu de  $r$ .

Connaissant les nombres d'onde et à partir des équations (a) et (b) on peut retrouver aussi une relation analogue à celle du modèle précédent qui exprime  $\omega_n$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et les caractéristiques physiques de la poutre.

A partir des relations (2.44) et (c) on a :

$$\omega^2 = \frac{E}{\gamma^2 \rho l^2} (a^2 - b^2)$$

$$\omega_n l \gamma \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \sqrt{(a^2 - b^2)}$$

Encore une fois les mêmes courbes conviennent pour obtenir facilement les fréquences propres en lisant  $\omega_n l \gamma \sqrt{\frac{\rho}{E}}$  au lieu de  $\omega_n l \sqrt{\frac{\rho}{E}}$ .

Des figures II.3 et II.4 pour  $r=0.11$ ,  $l=1m$ ,  $\gamma=2.205$ ,  $\rho=7830Kg/m^3$  et  $E=200GPa$  les paires des nombres d'ondes et les fréquences naturelles sont :

Mode	$a_n$	$b_n$	$\omega_n$	$\omega_n/\omega_1$
1	1,861	1,776	1268,949	1
2	4,487	3,691	5847,735	4,608
3	7,576	5,238	12546,258	9,887
4	10,666	6,404	19549,404	15,406

Tableau II.3 Les quatre premières paires des nombres d'onde et des fréquences propres du modèle avec cisaillement transversal de la poutre encastrée-libre

Une analyse similaire pourrait être utilisé pour donner les déformées propres dans le cas du cisaillement, cette analyse conduira à la même expression de la déformée par le fait que les deux modèles ont la même expression de l'équation de fréquence, la seule différence réside dans la valeur que prennent à chaque fois les nombres d'onde  $a$  et  $b$ .

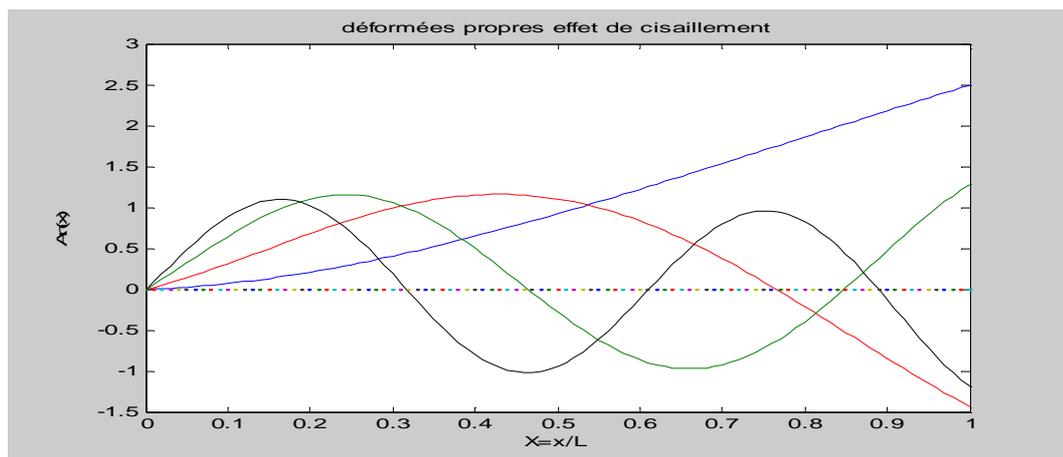


Fig. II.6 : Déformées propres du modèle avec cisaillement de la poutre encastrée libre avec  $r=0.11$  et  $\gamma=2.205$

### II.1.4 Poutre de Timoshenko

S.Timoshenko propose une théorie des poutres par laquelle il ajoute l'effet de cisaillement transversal et de l'inertie rotationnelle au modèle d'Euler de telle manière que le Lagrangien inclut l'effet du moment fléchissant  $E_p$  (*flexion*), le déplacement transversal  $E_c$  (*trans*), l'inertie rotationnelle, et le cisaillement transversal  $E_p$  (*cis*), et ou l'expression de l'énergie cinétique due à la rotation des sections droites (effet de l'inertie rotationnelle) est donnée par :

$$E_c(rot) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho I \left( \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t \partial x} \right)^2 dx \quad (2.45)$$

et est seulement due à la rotation des sections associée au moment fléchissant, c'est-à-dire que  $E_c(rot)$  est calculée de façon à n'inclure que l'angle de rotation des sections droites due au moment fléchissant en remplaçant  $\frac{\partial W(x,t)}{\partial x}$  par  $\alpha(x,t)$ , ce qui nous permet d'écrire :

$$E_c(rot) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho I \left( \frac{\alpha(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.46)$$

En combinant l'équation (2.46) avec les équations qui donnent  $E_p$  (*flexion*),  $E_p$  (*cis*) et  $E_c$  (*trans*) nous avons :

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \rho S \left( \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left( \frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial t} \right)^2 - EI \left( \frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial x} \right)^2 - k'GS \left( \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} - \alpha(x,t) \right)^2 \right] dx \quad (2.47)$$

Les équations de mouvement par :

$$\left\{ \rho S \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} - k'GS \left( \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial x} \right) = f(x,t) \right. \quad (2.48)$$

$$\left. \left\{ \rho I \frac{\partial^2 \alpha(x,t)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \alpha(x,t)}{\partial x^2} - k'GS \left( \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} - \alpha(x,t) \right) = 0 \right. \right. \quad (2.49)$$

Et les conditions aux limites :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} \delta \alpha \Big|_{0,l} \quad \text{et} \quad k'GS \left( \frac{\partial W}{\partial x} - \alpha \right) \delta W \Big|_{0,l} = 0 \quad (2.49bis)$$

Les conditions aux limites sont identiques à ceux données pour le modèle avec cisaillement seul.

Dans le but de résoudre le problème homogène  $f(x, t) = 0$  les équations de mouvement seront découplées de la même manière que précédemment.

$$\begin{cases} EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \rho I \left(1 + \frac{E}{k'G}\right) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho S \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \rho^2 \frac{I}{k'G} \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} = 0 \\ EI \frac{\partial^4 \alpha}{\partial x^4} - \rho I \left(1 + \frac{E}{k'G}\right) \frac{\partial^4 \alpha}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho S \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \rho^2 \frac{I}{k'G} \frac{\partial^4 \alpha}{\partial t^4} = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

On constate encore une fois que les équations de mouvement découplées ont la même forme pour  $W$  et  $\alpha$  cela signifie que  $W(x, t)$  et  $\alpha(x, t)$  sont synchronisés dans le temps et obéissent à la même fonction de temps  $T(t)$

$$\begin{bmatrix} W(x, t) \\ \alpha(x, t) \end{bmatrix} = T(t) \begin{bmatrix} A(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} A(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = d\bar{u}e^{rx}$$

Où  $\bar{u}$  est un vecteur constant et  $r$  désigne le nombre d'onde.

Nous allons ensuite introduire cette forme de la solution dans les équations de mouvement (2.48) et (2.49) sans second membre auxquelles nous allons appliquer tout d'abord la méthode de séparation des variables pour obtenir la forme temporelle et la forme spatiale.

En utilisant une notation plus simple où l'indice désigne la variable par rapport à laquelle on dérive (2.48) et (2.49) s'écrivent :

$$\begin{cases} \rho S W_{tt} - k'GS W_{xx} + k'GS \alpha_x = 0 \\ \rho I \alpha_{tt} - EI \alpha_{xx} - k'GS W_x + k'GS \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} W(x, t) \\ \alpha(x, t) \end{bmatrix} = T(t) \begin{bmatrix} A(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} \quad , \quad T(t) = d_1 \sin(\omega t) + d_2 \cos(\omega t) \quad , \quad \ddot{T}(t) = -\omega^2 T(t)$$

Soit en remplaçant  $W(x, t)$  et  $\alpha(x, t)$  et leurs dérivées successives :

$$\begin{cases} \rho S \ddot{T}(t) A(x) - k'GS T(t) A''(x) + k'GS T(t) \psi'(x) = 0 \\ \rho I \ddot{T}(t) \psi(x) - EI T(t) \psi''(x) - k'GS T(t) A'(x) + k'GS T(t) \psi(x) = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} k'GS & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A''(x) \\ \psi''(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -k'GS \\ k'GS & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'(x) \\ \psi'(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho S \omega^2 & 0 \\ 0 & -k'GS + \rho I \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Or  $\begin{bmatrix} A(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = d\bar{u}e^{rx}$  soit en combinant avec (2.52) on obtient:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{k'GS} \end{bmatrix} r^2 \begin{bmatrix} A(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} r \begin{bmatrix} A(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\rho\omega^2}{k'G} & 0 \\ 0 & \frac{\rho I\omega^2}{k'GS} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ie$$

$$\begin{bmatrix} r^2 + \frac{\rho\omega^2}{k'G} & -r \\ r & \frac{EI}{k'GS} r^2 + \frac{\rho I\omega^2}{k'GS} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solution non triviale de ce système va nous donner l'équation caractéristique et les relations de dispersion du modèle de Timoshenko.

$$r^4 + \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{k'G} \right) \rho\omega^2 r^2 + \frac{\rho^2 \omega^4}{Ek'G} - \frac{\rho\omega^2 S}{EI} = 0 \quad (2.53)$$

Les solutions de cette équation caractéristique sont :

$$r = \pm \sqrt{-\left( \frac{1}{E} + \frac{1}{k'G} \right) \frac{\rho\omega^2}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{1}{k'G} - \frac{1}{E} \right)^2 \frac{\rho^2 \omega^4}{4} + \frac{\rho\omega^2 S}{EI}}} \quad (2.54)$$

Dont deux sont imaginaires :

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{-\left( \frac{1}{E} + \frac{1}{k'G} \right) \frac{\rho\omega^2}{2} - \sqrt{\left( \frac{1}{k'G} - \frac{1}{E} \right)^2 \frac{\rho^2 \omega^4}{4} + \frac{\rho\omega^2 S}{EI}}} \quad (2.55)$$

Les deux autres données par :

$$r_{3,4} = \pm \sqrt{-\left( \frac{1}{E} + \frac{1}{k'G} \right) \frac{\rho\omega^2}{2} + \sqrt{\left( \frac{1}{k'G} - \frac{1}{E} \right)^2 \frac{\rho^2 \omega^4}{4} + \frac{\rho\omega^2 S}{EI}}} \quad (2.56)$$

Sont :

- Réelles si :

$$\left( \frac{1}{k'G} - \frac{1}{E} \right)^2 \frac{\rho^2 \omega^4}{4} + \frac{\rho\omega^2 S}{EI} > \left[ \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{k'G} \right) \frac{\rho\omega^2}{2} \right]^2 \quad ie \quad \omega < \sqrt{\frac{k'GS}{\rho I}} \quad (2.57)$$

- Et imaginaires lorsque :

$$\omega > \sqrt{\frac{k'GS}{\rho I}} \quad (2.58)$$

On appelle cette pulsation  $\omega_c = \sqrt{\frac{k'GS}{\rho I}}$  la pulsation limite ou critique, elle délimite deux comportements vibratoires différents que nous allons étudier.

- a) Lorsque  $\omega < \omega_c$  nous avons deux solutions imaginaires  $r_{1,2}$  qui génèrent deux ondes progressives, et deux solutions réelles  $r_{3,4}$  qui génèrent deux ondes évanissantes, c'est-à-dire que la solution générale est de la forme :

$$\begin{bmatrix} A(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \sin(ax) + \begin{bmatrix} C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \cos(ax) + \begin{bmatrix} C_3 \\ D_3 \end{bmatrix} \sinh(bx) + \begin{bmatrix} C_4 \\ D_4 \end{bmatrix} \cosh(bx) \quad (2.59)$$

Avec :

$$a = \sqrt{\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{k'G}\right) \frac{\rho\omega^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{k'G} - \frac{1}{E}\right)^2 \frac{\rho^2\omega^4}{4} + \frac{\rho\omega^2 S}{EI}}} \quad (2.60)$$

$$b = \sqrt{-\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{k'G}\right) \frac{\rho\omega^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{k'G} - \frac{1}{E}\right)^2 \frac{\rho^2\omega^4}{4} + \frac{\rho\omega^2 S}{EI}}}$$

Et où les coefficients  $C_i$  et  $D_i$  sont (en substituant (2.59) dans (2.52)) reliés par les relations :

$$D_1 = \frac{\rho\omega^2 - a^2 k'G}{a k'G} C_2 \quad D_2 = \frac{-\rho\omega^2 + a^2 k'G}{a k'G} C_1 \quad (2.61)$$

$$D_3 = \frac{\rho\omega^2 + b^2 k'G}{b k'G} C_4 \quad D_4 = \frac{\rho\omega^2 + b^2 k'G}{b k'G} C_3$$

- b) Lorsque  $\omega > \omega_c$  les quatre racines  $r_{1,2,3,4}$  deviennent imaginaires et génèrent donc quatre ondes progressives, la solution est donnée par :

$$\begin{bmatrix} A(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{D}_1 \end{bmatrix} \sin(ax) + \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 \\ \tilde{D}_2 \end{bmatrix} \cos(ax) + \begin{bmatrix} \tilde{C}_3 \\ \tilde{D}_3 \end{bmatrix} \sin(\tilde{b}x) + \begin{bmatrix} \tilde{C}_4 \\ \tilde{D}_4 \end{bmatrix} \cos(\tilde{b}x) \quad (2.62)$$

Avec :

$$a = \sqrt{\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{k'G}\right) \frac{\rho\omega^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{k'G} - \frac{1}{E}\right)^2 \frac{\rho^2\omega^4}{4} + \frac{\rho\omega^2 S}{EI}}}$$

$$\tilde{b} = \sqrt{\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{k'G}\right) \frac{\rho\omega^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{k'G} - \frac{1}{E}\right)^2 \frac{\rho^2\omega^4}{4} + \frac{\rho\omega^2 S}{EI}}} = -ib \quad (2.63)$$

Et où les coefficients  $\tilde{C}_i$  et  $\tilde{D}_i$  sont reliés par des relations du même type que les relations (2.61)

$$\begin{aligned} \tilde{D}_1 &= \frac{\rho\omega^2 - a^2k'G}{ak'G} \tilde{C}_2 & ; \quad \tilde{D}_2 &= \frac{-\rho\omega^2 + a^2k'G}{ak'G} \tilde{C}_1 \\ \tilde{D}_3 &= \frac{-\rho\omega^2 + b^2k'G}{bk'G} \tilde{C}_4 & ; \quad \tilde{D}_4 &= \frac{-\rho\omega^2 + b^2k'G}{bk'G} \tilde{C}_3 \end{aligned} \quad (2.64)$$

A présent on peut passer à l'introduction des conditions aux limites dans la forme spatiale pour déterminer l'équation aux fréquences et trouver ainsi les nombres d'onde  $a$  et  $b$ . Mais il faut tout d'abord réduire le nombre des constantes  $C_i$  et  $D_i$  comme nous l'avons fait pour le modèle avec cisaillement seul, et ceci en réécrivant les relations (2.61) en fonction des nombres d'onde uniquement, il suffit alors d'extraire  $\frac{\rho\omega^2}{k'G}$  des équations (2.60) et de le remplacer dans (2.61).

$$(2.60) \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{(B_1 + B_2) + \sqrt{(B_1 - B_2)^2 + B_3}} \\ b = \sqrt{-(B_1 + B_2) + \sqrt{(B_1 - B_2)^2 + B_3}} \end{cases} \quad (2.60bis)$$

Avec :

$$B_1 = \frac{\rho\omega^2}{2k'G} \quad , \quad B_2 = \frac{\rho\omega^2}{2E} \quad \text{et} \quad B_3 = \frac{\rho\omega^2 S}{EI}$$

$$\text{En posant } \frac{E}{k'G} = \gamma^2 \text{ , on trouve } \frac{\rho\omega^2}{k'G} = \frac{\gamma^2(a^2 - b^2)}{1 + \gamma^2}$$

Soit en remplaçant dans (2.61) on obtient :

$$\begin{aligned} D_1 &= -\frac{1}{a} \left( \frac{\gamma^2 b^2 + a^2}{1 + \gamma^2} \right) C_2 & , \quad D_2 &= \frac{1}{a} \left( \frac{\gamma^2 b^2 + a^2}{1 + \gamma^2} \right) C_1 \\ D_3 &= \frac{1}{b} \left( \frac{\gamma^2 a^2 + b^2}{1 + \gamma^2} \right) C_4 & , \quad D_4 &= \frac{1}{b} \left( \frac{\gamma^2 a^2 + b^2}{1 + \gamma^2} \right) C_3 \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\text{Si on note } M = -\frac{1}{a} \left( \frac{\gamma^2 b^2 + a^2}{1 + \gamma^2} \right) \text{ et } N = \frac{1}{b} \left( \frac{\gamma^2 a^2 + b^2}{1 + \gamma^2} \right)$$

La solution spatiale (2.59) s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} A(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ MC_2 \end{bmatrix} \sin(ax) + \begin{bmatrix} C_2 \\ -MC_1 \end{bmatrix} \cos(ax) + \begin{bmatrix} C_3 \\ NC_4 \end{bmatrix} \sinh(bx) + \begin{bmatrix} C_4 \\ NC_3 \end{bmatrix} \cosh(bx)$$

Et les conditions aux limites (2.49bis) se traduisent dans le cas de la poutre encastrée-libre par :

- *Encastrement en  $x = 0$ :*

$$W(0, t) = 0 \Rightarrow A(0) = 0 \rightarrow C_2 + C_4 = 0 \quad (a)$$

$$\alpha(0, t) = 0 \implies \psi(0) = 0 \rightarrow MC_1 - NC_3 = 0 \quad (b)$$

- *Extremité libre en  $x = l$ :*

$$\left. \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} \right|_l = 0 \implies \psi'(l) = 0 \rightarrow aMC_2 \cos(al) + aMC_1 \sin(al) + bNC_4 \cosh(bl) +$$

$$bNC_3 \sinh(bl) = 0$$

$$k'GS \left( \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} - \alpha(x, t) \right) \Big|_l = 0 \implies A'(l) - \psi(l) = 0 \rightarrow (a + M) C_1 \cos(al) -$$

$$(a + M) C_2 \sin(al) + (b - N) C_3 \cosh(bl) + (b - N) C_4 \sinh(bl) = 0$$

En éliminant  $C_4$  et  $C_3$  par les relations (a) et (b) et en réécrivant les deux dernières équations sous forme matricielle on obtient :

$$\begin{bmatrix} aM \sin(al) + bM \sinh(bl) & aM \cos(al) - bN \cosh(bl) \\ (a + M) \cos(al) + \frac{M(b-N)}{N} \cosh(bl) & -(a + M) \sin(al) - (b - N) \sinh(bl) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'expression qui annule le déterminant et permet de trouver la solution non triviale du système est :

$$aM(a + M) - bM(b - N) + [aM(b - N) + bM(a + M)] \sin(al) \sinh(bl) + \left[ \frac{aM^2(b - N)}{N} - bN(a + M) \right] \cos(al) \cosh(bl) = 0 \quad (2.66)$$

En multipliant (2.66) par  $\frac{a}{M(b-N)}$  et en remarquant que  $\frac{a+M}{b-N} = -\frac{b}{a}$  on trouve :

$$-2ab + (a^2 - b^2) \sin(al) \sinh(bl) + \left( \frac{a^2 M}{N} + \frac{b^2 N}{M} \right) \cos(al) \cosh(bl) = 0$$

Soit tout calcul fait :

$$(a^2 - b^2) \sin(al) \sinh(bl) - ab \frac{a^4 + \gamma^4 a^4 + 4\gamma^2 a^2 b^2 + \gamma^4 b^4 + b^4}{(\gamma^2 b^2 + a^2)(\gamma^2 a^2 + b^2)} \cos(al) \cosh(bl) - 2ab = 0 \quad (2.67)$$

C'est l'équation aux fréquences de la poutre de Timoshenko encastré libre, dans cette

équation figure les deux nombres d'onde  $a$  et  $b$  et le rapport  $\gamma^2 = \frac{E}{k'G}$

Une analyse similaire pourrait être faite pour le cas  $\omega > \omega_c$  en remplaçant  $b$  par  $i\tilde{b}$  et  $\sinh(bl)$  et  $\cosh(bl)$  par  $\sinh(\tilde{b}l)$  et  $\cosh(\tilde{b}l)$  ce qui conduit à l'expression finale de l'équation aux fréquences suivante:

$$(a^2 + \tilde{b}^2) \sin(al) \sinh(\tilde{b}l) - a\tilde{b} \frac{a^4 + \gamma^4 a^4 - 4\gamma^2 a^2 \tilde{b}^2 + \gamma^4 \tilde{b}^4 + \tilde{b}^4}{(-\gamma^2 \tilde{b}^2 + a^2)(\gamma^2 a^2 - \tilde{b}^2)} \cos(al) \cosh(\tilde{b}l) - 2a\tilde{b} = 0 \quad (2.68)$$

La résolution des équations aux fréquences (2.67) et (2.68) par la méthode jusqu'à présent employée pour les modèles précédents nécessite la connaissance de la relation qui existe entre les nombres d'onde  $a$  et  $b$  d'une part et  $a$  et  $i\tilde{b}$  d'autre part.

Ces relations peuvent être déterminées en reprenant les relations de dispersion (2.60) et (2.63) et la forme (2.60bis), soit :

$$a = \sqrt{(B_1 + B_2) + \sqrt{(B_1 - B_2)^2 + B_3}}$$

$$b = \sqrt{-(B_1 + B_2) + \sqrt{(B_1 - B_2)^2 + B_3}}$$

$$B_1 = \frac{\rho\omega^2}{2k'G}, \quad B_2 = \frac{\rho\omega^2}{2E} \quad \text{et} \quad B_3 = \frac{\rho\omega^2 S}{EI} \quad (iii)$$

En résolvant pour  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$  on trouve :

$$B_1 = \frac{\gamma^2(a^2 - b^2)}{2(1 + \gamma^2)} \quad B_2 = \frac{a^2 - b^2}{2(1 + \gamma^2)} \quad \text{et} \quad B_3 = \frac{1}{4} \left[ (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 \frac{(\gamma^2 - 1)^2}{(\gamma^2 + 1)^2} \right]$$

Nous avons donc d'une part :

$$\frac{B_3}{B_2} = \frac{\rho\omega^2 S}{EI} \frac{2E}{\rho\omega^2} = \frac{2}{r^2} \quad \text{ou} \quad \left( r = \sqrt{\frac{I}{S}} : \text{rayon de giration} \right)$$

Et d'autre part :

$$\frac{B_3}{B_2} = \frac{1}{4} \left[ (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 \frac{(\gamma^2 - 1)^2}{(\gamma^2 + 1)^2} \right] \frac{2(1 + \gamma^2)}{a^2 - b^2} = 2 \frac{(\gamma^2 b^2 + a^2)(\gamma^2 a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)(1 + \gamma^2)}$$

Soit alors :

$$\frac{(\gamma^2 b^2 + a^2)(\gamma^2 a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)(1 + \gamma^2)} = \frac{1}{r^2} \quad (2.69)$$

Nous avons ainsi établi une relation entre les nombres d'onde  $a$  et  $b$  qui fait intervenir les caractéristiques géométriques ( $r$ ) et les caractéristiques mécaniques ( $\gamma$ ) de la poutre.

La relation entre  $a$  et  $\tilde{b}$  s'obtient aussi en remplaçant  $b$  par  $\tilde{b}$  dans (2.69) ce qui donne :

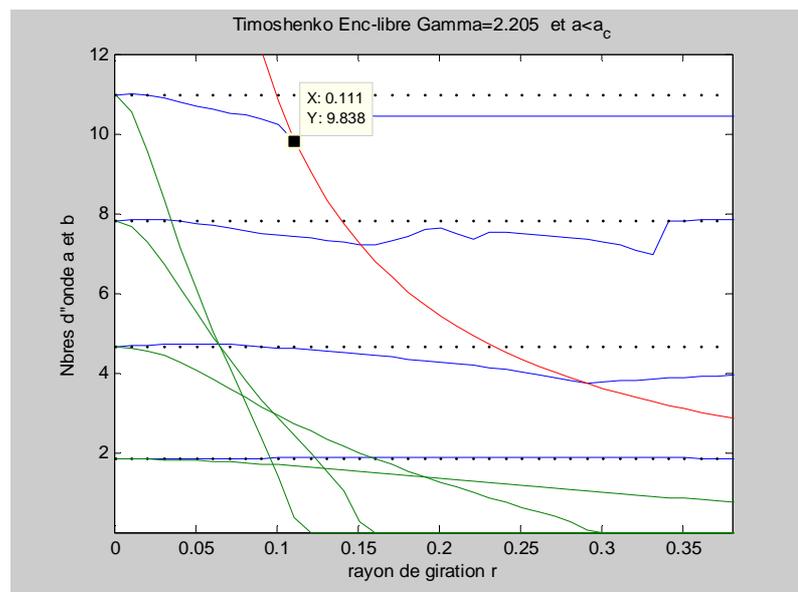
$$\frac{(a^2 - \gamma^2 \tilde{b}^2)(\gamma^2 a^2 - \tilde{b}^2)}{(a^2 + \tilde{b}^2)(1 + \gamma^2)} = \frac{1}{r^2} \quad (2.70)$$

La meilleure façon de représenter la solution de l'équation aux fréquences est de donner une représentation 3D des nombres d'onde  $a$  et  $b$  (ou  $\tilde{b}$ ) en fonction de  $\gamma$  et  $r$ , notant que les racines de l'équation aux fréquences du modèle avec cisaillement seul sont aussi fonction de  $\gamma$  et  $r$ , seulement  $\gamma$  et  $r$  pour ce dernier apparaissent toujours sous forme d'un produit  $\gamma r$ , ce qui nous a permis de les traiter comme une seule variable et de donner une représentation 2D de  $a$  et  $b$  en fonction du produit  $\gamma r$ .

Pour la poutre de Timoshenko, une telle simplification n'est pas possible parce que  $\gamma$  et  $r$  apparaissent séparément dans les équations qui donnent les relations entre  $a$  et  $b$  (ou  $\tilde{b}$ ), ceci va nous conduire à fixer l'une des constantes et donner une représentation des nombres d'onde en fonction de l'autre.

Une illustration est fournie pour  $\gamma=2,205$  qui est une valeur raisonnable pour une section épaisse.

Pour obtenir les paires de nombres d'onde  $a_n$  et  $b_n$  (cas  $a < a_c$ ) qui vérifient l'équation aux fréquences (2.67) on résous l'équation différentielle ordinaire (**E. D. O**) en prenant comme valeurs initiales les nombres d'onde de la poutre d'Euler pour obtenir  $a_n$  puis on calcul  $b_n$  par l'expression (2.69), exactement comme il a été fait pour les modèles avec inertie rotationnelle et avec cisaillement transversal.

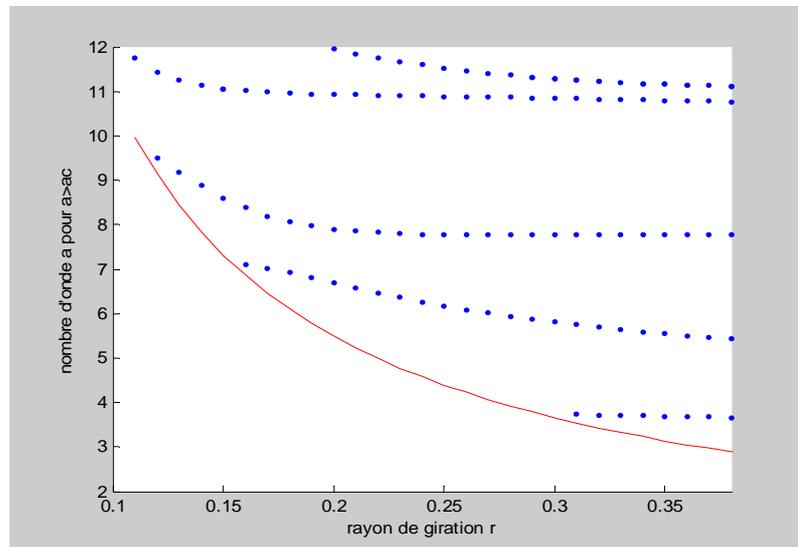


**Fig. II.7** nombres d'onde de la poutre de Timoshenko  $a < a_c$

doit être ignorée parce que ce domaine est géré par une autre équation aux fréquences.

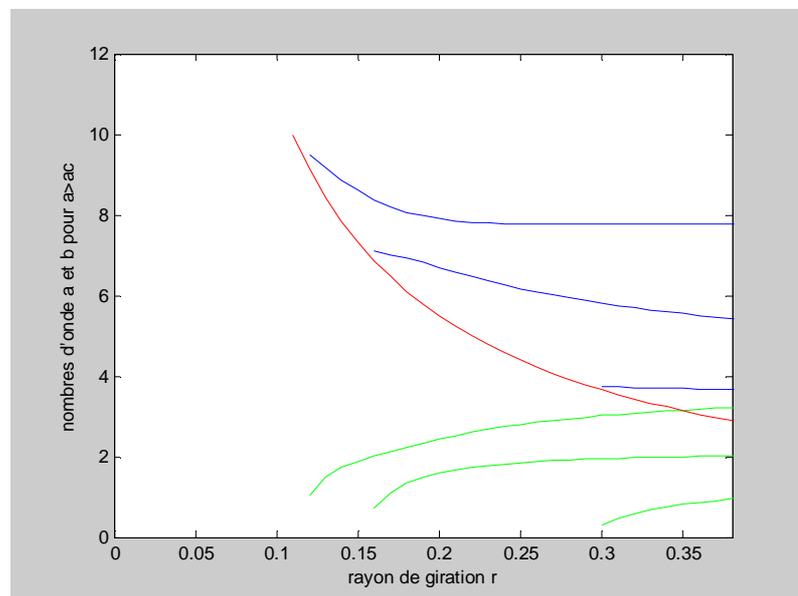
Pour obtenir les nombres d'onde  $a_n$  et  $\tilde{b}_n$  dans le cas  $a > a_c$  on peut résoudre le même problème pour  $a_n$  en prenant  $a_c$  comme valeur de départ, à cet effet il ya lieu de traquer les valeurs  $r_c$  pour chaque mode à partir de la solution  $a < a_c$ , une autre méthode consiste en la résolution directe de l'équation aux fréquences sur le domaine défini par  $a^2 r^2 > 1.206$  en fixant  $r$  par pas de 0.01 (suffisamment petit pour ne pas manquer

une racine entre deux autres), et à partir des résultats on peut par le classement des racines par ordre croissant à extraire ceux qui définissent la solution de chaque mode.



**Fig. II.8 Résultats de la résolution directe de l'équation (2.68)**

Et à la base de ces résultats on va tracer les courbes donnant  $a_n$  et  $\tilde{b}_n$



**Fig. II.9 nombres d'onde de la poutre de Timoshenko  $a > a_c$**

En portant les résultats sur la même figure et éliminant la partie ( $a > a_{critique}$ ) de la première solution on obtient la solution finale.

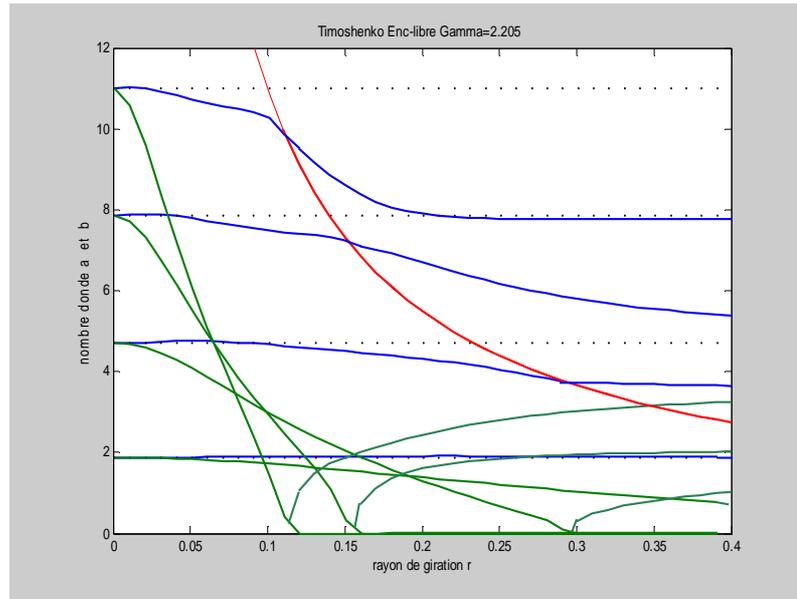


Fig. II.10 nombres d'onde de la poutre de Timoshenko pour  $\gamma=2,205$

Les fréquences naturelles qui correspondent à chaque paire de nombres d'onde seront calculées à partir de l'une des relations (iii) donnant les valeurs  $B_i$ , exemple pour  $B_2$ .

$$B_2 = \frac{\rho\omega^2}{2E} = \frac{a^2 - b^2}{2(1 + \gamma^2)} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\left(\frac{a_n^2 - b_n^2}{1 + \gamma^2}\right) \frac{E}{\rho}} \quad \text{pour } r < r_c$$

$$\text{et } \omega_n = \sqrt{\left(\frac{a_n^2 + \tilde{b}_n^2}{1 + \gamma^2}\right) \frac{E}{\rho}} \quad \text{pour } r > r_c$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{k'GS}{\rho I}}$$

### Remarque

Examinons les courbes  $a(r)$ ,  $b(r)$  et  $\tilde{b}(r)$  Figure II.7 et considérant le cas  $r=0,11$

$\gamma = 2,205$ , le nombre d'onde critique obtenu par l'équation  $a_c = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + 1}$  est dans ce cas égal à 9,882 qui est légèrement supérieur à  $a_4$ , alors  $a_5$  n'est pas représenté ( $a_5 > a_c$ ) et seul les quatre premières fonctions propres ont des termes hyperboliques.

Les nombres d'onde et les fréquences propres des huit premiers modes de la poutre de Timoshenko sont donnés dans le tableau II.4.

Mode	$a < a_c$	$b$	$\omega_n$ (rd/s)
1	1.596	1.468	1307,25301
2	4.269	2.728	6854,36994
3	7.350	2.548	14391,1363
4	9.798	0.779	20387,8171

Mode	$a > a_c$	$\tilde{b}$	$\omega_n$ (rd/s)
5	11.758	2.591	25132,76
6	13.458	3.833	29209,72
7	15.376	5.039	33775,81
8	17.166	6.074	38009,72

Tableau II.4 nombres d'ondes et fréquences propres de la poutre de Timoshenko

La même analyse sera effectuée pour exprimer les déformées propres, en norme  $C_1$ , on calcul  $C_2$  et tenant compte des relations (a) et (b) déterminées à partir de la condition limite en  $x=0$  (encastrement)  $C_4=-C_2$  et  $C_3=(M/N) C_1$ , on déduit l'expression finale de la déformée propre du mode  $n$  :

$$A_n(x) = \sin(a_n x) + C_2 \cos(a_n x) + \left(\frac{M}{N}\right) \sinh(b_n x) - C_2 \cosh(b_n x) \quad \text{Avec :}$$

$$C_2 = -\frac{aM \sin(al) + bM \sinh(bl)}{aM \cos(al) - bN \cosh(bl)}$$

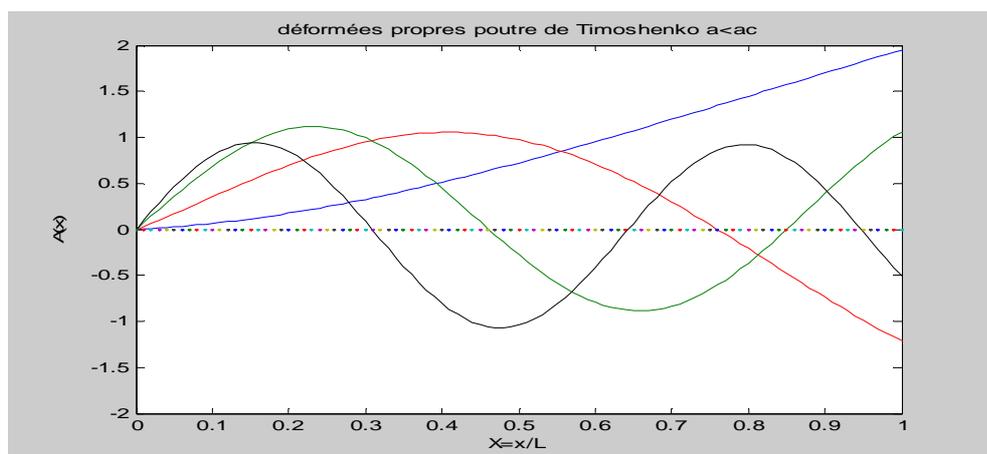


Fig. II.11: Déformées propres du modèle de Timoshenko de la poutre encastree libre pour  $r=0.11$  et  $\gamma=2.205$ ,  $a < a_c$

## **II.2. Synthèse des résultats et comparaison des quatre modèles**

Dans ce chapitre, les nombres d'onde, les fréquences propres ainsi que le schéma modale pour quatre modèles représentatifs des vibrations transversales d'une poutre encastré-libre ont été obtenus. La différence entre eux est l'introduction des termes de second ordre qui décrivent l'influence des effets secondaires, à savoir l'inertie rotationnelle et le cisaillement transversal.

Le premier modèle défini par l'équation d'Euler inclue seulement les termes du premier ordre. Le deuxième, dans lequel on a introduit l'inertie rotationnelle, est représenté par l'équation de Bernoulli. Le troisième appelé modèle avec cisaillement, considère l'effet de cisaillement transversal qui a été négligé dans les deux modèles précédents et enfin le modèle de Timoshenko dans lequel on tient compte de tous les effets secondaires, à savoir l'inertie rotationnelle et le cisaillement transversal.

Dans cette partie, nous allons comparer l'influence relative des effets secondaires sur les vibrations transversales de la poutre encastré-libre et expliquer leurs manifestations sur les fréquences naturelles et les modes propres.

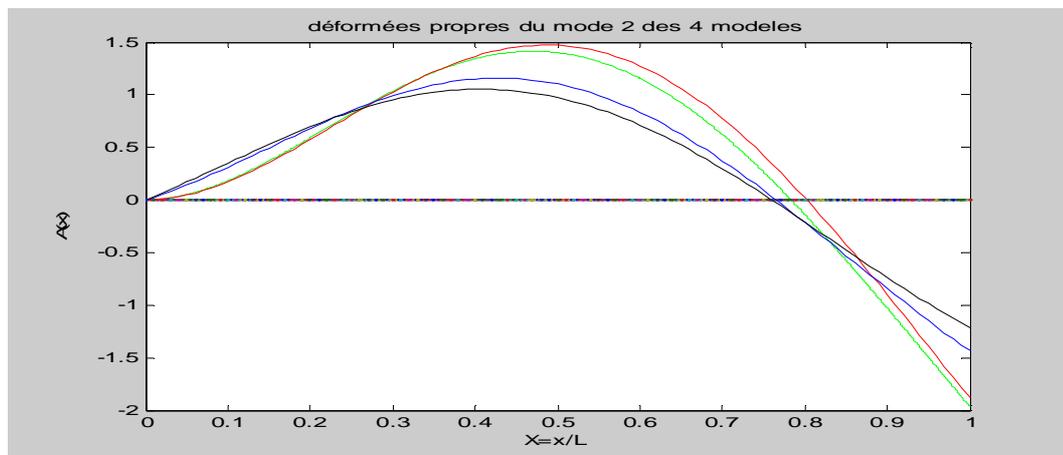
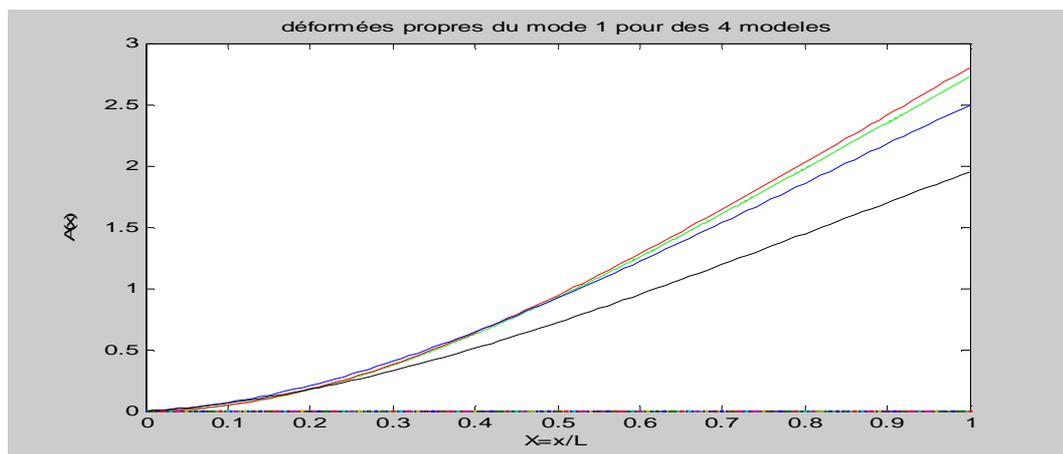
Une première remarque est que l'inertie rotationnelle est représentée dans l'équation de Timoshenko par le terme  $\rho I$  et le cisaillement transversal par  $\rho I \frac{E}{G}$  égal à  $\rho I \gamma^2$ .

Or pour les matériaux usuels  $\frac{E}{G} = 3$  à  $6$  ce qui signifie que l'effet de cisaillement est 3 à 6 fois plus important que l'inertie rotationnelle, et si on examine sous quelles circonstances ces effets deviennent importants, on constate d'abord que l'équation aux fréquences de la poutre d'Euler ne dépend ni de  $r$  ni de  $\gamma$  et par conséquent les nombres d'onde d'Euler sont indépendants des caractéristiques géométriques ou mécaniques de la poutre c'est-à-dire qu'ils sont définis uniquement par les conditions aux limites, alors que le modèle avec inertie rotationnelle est décrit par une équation aux fréquences, dans laquelle les nombres d'onde  $a$  et  $b$  sont reliés par le rayon de giration  $r$ , et dépendent donc des caractéristiques géométriques de la section de la poutre. Les équations aux fréquences du modèle avec effet de cisaillement et celui de Timoshenko sont fonction de  $r$  et  $\gamma$ , ce qui signifie que les nombres d'onde dans ces cas dépendent des caractéristiques géométriques de la section et des propriétés physiques  $\gamma$  de la poutre. L'influence de  $r$  et de  $\gamma$  sur les nombres d'onde est représentée figure II.3 pour

l'inertie rotationnelle et le cisaillement transversal et figure II.10 pour la poutre de Timoshenko.

Généralement les nombres d'onde s'écartent de ceux d'Euler lorsque  $\gamma$  et  $r$  augmentent et comme  $\gamma^2$  varie de 3 à 6 qui est un domaine assez restreint on peut dire que les nombres d'onde sont principalement fonction de  $r$ .

La figure II.12 représente les quatre premiers modes propres de la poutre encastrée-libre pour  $r=0.11$  et  $\gamma =2,205$  on note ici une similitude entre les modes propres d'Euler et inertie rotationnelle d'une part et entre le modèle avec cisaillement et celui de Timoshenko d'autre part (les courbes ont une allure très voisine, surtout à partir du deuxième mode, ceci confirme l'affirmation que l'effet du cisaillement transversal est plus important que celui de l'inertie rotationnelle.



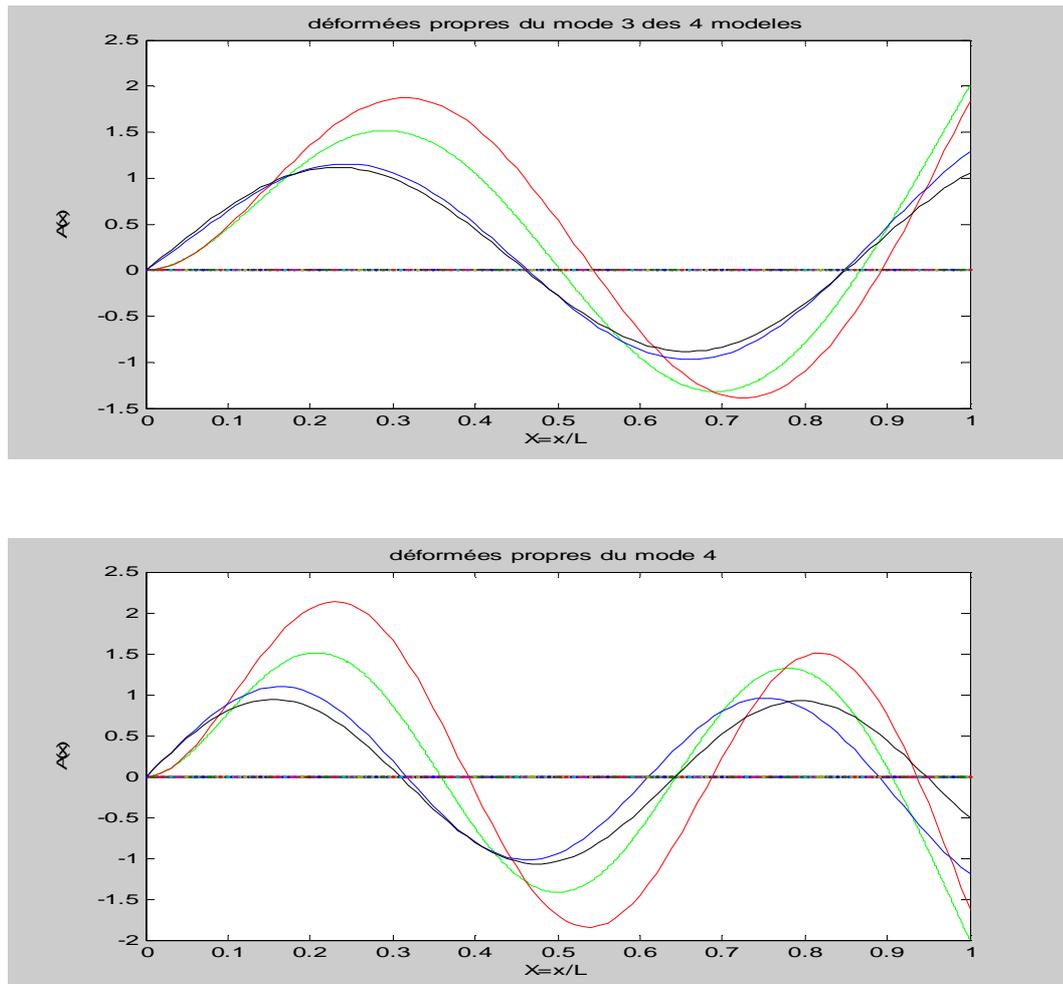


Fig. II.12 : Déformées propres des quatre premiers modes pour les quatre modèles

--- Euler    --- Rotationnelle    --- Cisaillement    --- Timoshenko

En résumé, lorsque le rayon de giration  $r$  est petit ( $r < 0,01$ ) le modèle d'Euler suffit pour décrire les vibrations transversales de la poutre encastrée-libre et lorsque  $r$  est grand on est amené à utiliser le modèle avec cisaillement transversal ou celui de Timoshenko.

## Chapitre III

### Calcul de la réponse forcée par décomposition modale

#### III.1 Objet du chapitre

Les problèmes de vibrations libres traités dans le chapitre précédent, étudient les mouvements vibratoires consécutifs à une perturbation initiale de l'état d'équilibre.

Les calculs de la réponse forcée sont des problèmes plus complexes puisqu'ils superposent l'effet des conditions initiales et de l'application des efforts, ces problèmes seront résolus par la méthode de décomposition modale.

Cette méthode est générale et permet de traiter tous les types d'efforts locaux ou répartis, permanent ou transitoire.

L'amplitude associée à chaque mode de vibration est la solution de l'équation modale c'est-à-dire l'équation d'un système vibrant à un degré de liberté, caractérisé par une masse généralisée, un amortissement généralisé et une force généralisée.

Les calculs dans les deux cas de base, l'excitation harmonique et l'excitation impulsionnelle sont utilisés pour résoudre le cas d'une excitation quelconque, dans l'espace fréquence grâce à la transformée de Fourier et dans l'espace temps par une intégrale de convolution.

La méthode de décomposition modale est générale, c'est sa force mais aussi sa faiblesse [34] à cause des lourdeurs de calculs, il existe aussi des méthodes adaptées à des cas particuliers qui offrent un traitement plus rapide telle que la méthode des ondes forcées très performante dans les problèmes de poutres.

#### III.2 Les étapes de calcul de la réponse par décomposition modale

##### III.2.1 Pose du problème

Le problème des vibrations forcées est complètement défini par trois groupes d'équations. Le respect de toutes ces équations est nécessaire pour assurer l'unicité de la solution :

- Equation de mouvement forcé de la poutre en flexion :

$$\mathfrak{S} \left( \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} \right) + \mathfrak{Q}(W(x, t)) = p(x, t) \quad x \in ]0, l[ \quad , \quad \forall t \quad (3.1)$$

$\mathfrak{S}$  et  $\mathfrak{Q}$  sont deux opérateurs différentiels d'espace  $\mathfrak{S}$  est l'opérateur de masse et  $\mathfrak{Q}$  est l'opérateur de raideur.

- Conditions aux limites :

Les conditions aux limites doivent être définies de telle sorte que la symétrie des opérateurs de masse et de raideur soit vérifiée c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned} \int_0^l \mathfrak{S}(\mathbf{A}_p(x)) \mathbf{A}_n(x) dx &= \int_0^l \mathfrak{S}(\mathbf{A}_n(x)) \mathbf{A}_p(x) dx \\ \int_0^l \mathfrak{Q}(\mathbf{A}_p(x)) \mathbf{A}_n(x) dx &= \int_0^l \mathfrak{Q}(\mathbf{A}_n(x)) \mathbf{A}_p(x) dx \end{aligned} \quad (3.2)$$

$A_i(x)$  désigne la  $i^{\text{ième}}$  fonction propre, c'est-à-dire  $A_i(x)$  pour le modèle d'Euler et inertie rotationnelle et le  $i^{\text{ième}}$  vecteur de fonctions propres  $[A_i(x), \psi_i(x)]^T$  pour Timoshenko et le modèle avec cisaillement, ceci va nous permettre par la suite de démontrer les propriétés d'orthogonalité des fonctions propres ou modes propres.

La difficulté qui peut apparaître dans certains cas est la mise en évidence des propriétés d'orthogonalité lorsque les conditions aux limites sortent des cas dit standards (appui, encastrement, libre ou guidé).

- Conditions initiales :

Pour assurer enfin l'unicité de la solution le problème doit être muni de conditions initiales qui sont généralement données sous forme de déplacement initial et vitesse initiale en tout point  $x$  :

$$W(x, 0) = d_0(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial W(x, 0)}{\partial t} = v_0(x) \quad x \in [0, l] \quad (3.3)$$

### III.2.2 Orthogonalité des déformées propres

#### III.2.2.1 Cas de la poutre d'Euler-Bernoulli, du modèle avec cisaillement transversal et de la poutre de Timoshenko

Dans le but d'obtenir la réponse forcée de la poutre, nous allons utiliser la méthode de décomposition modale, ainsi les propriétés d'orthogonalité des fonctions propres doivent être établies pour les quatre modèles.

Considérant les modèles discutés avant, à l'exception du modèle avec inertie rotationnelle seule, les solutions spatiales du problème homogène peuvent être écrites en utilisant le formalisme des opérateurs sous la forme :

$$\mathfrak{L}(A_n) = \omega_n^2 \mathfrak{S}(A_n) \quad (3.4)$$

Si on examine les solutions des problèmes homogènes (2.3), (2.38) et (2.52) on en déduit aussitôt l'expression des opérateurs de raideur et de masse :

Euler :

$$\mathfrak{L}(A_n) = EI \frac{d^4 A_n(x)}{dx^4}, \quad \mathfrak{S}(A_n) = \rho S A_n(x) \quad (3.5)$$

Modèle avec cisaillement :

$$\mathfrak{L}(A_n) = \begin{bmatrix} k'GS \frac{d^2}{dx^2} & -k'GS \frac{d}{dx} \\ k'GS \frac{d}{dx} & EI \frac{d^2}{dx^2} - k'GS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n(x) \\ \psi_n(x) \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{S}(A_n) = \begin{bmatrix} \rho S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n(x) \\ \psi_n(x) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Modèle de Timoshenko :

$$\mathfrak{L}(A_n) = \begin{bmatrix} k'GS \frac{d^2}{dx^2} & -k'GS \frac{d}{dx} \\ k'GS \frac{d}{dx} & EI \frac{d^2}{dx^2} - k'GS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n(x) \\ \psi_n(x) \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{S}(A_n) = \begin{bmatrix} \rho S & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n(x) \\ \psi_n(x) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Examinons la symétrie des opérateurs de masse et de raideur de l'équation (3.2), définies par :

$$\int_0^l [A_n^T \mathfrak{L}(A_m) - A_m^T \mathfrak{L}(A_n)] dx = 0 \quad (3.8)$$

$$\int_0^l [A_n^T \mathfrak{S}(A_m) - A_m^T \mathfrak{S}(A_n)] dx = 0 \quad (3.9)$$

L'équation (3.9) est automatiquement vérifiée pour les trois modèles, on utilisant l'équation (3.4) on peut écrire (3.8) sous la forme :

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_0^l A_n^T \mathfrak{S}(A_m) dx = 0 \quad (3.10)$$

Puisque les valeurs propres (carrées des fréquences naturelles) sont différents lorsque  $m \neq n$  l'expression est nulle lorsque l'intégrale est nulle.

$$\int_0^l A_n^T \mathfrak{S}(A_m) dx = 0 \quad \text{pour } m \neq n \quad (3.11)$$

C'est la condition d'orthogonalité des fonctions propres. Lorsque  $m=n$ , on définit la masse généralisée du mode  $n$  par :

$$\mathcal{M}_n = \int_0^l \mathbf{A}_n^T \mathfrak{S}(\mathbf{A}_n) dx \quad \text{pour } n = 1, 2, 3 \dots \quad (3.12)$$

Combinant (3.11) et (3.12) on peut écrire :

$$\int_0^l \mathbf{A}_n^T \mathfrak{S}(\mathbf{A}_m) dx = \delta_{nm} \mathcal{M}_n \quad (3.13)$$

Où  $\delta_{nm}$  est le symbole de Kronecker

Examinons maintenant qu'elles conditions limites laissent l'opérateur de raideur symétrique ou vérifie (3.8). Ces conditions vont être déterminées en substituant l'expression de l'opérateur  $\mathfrak{L}$  dans l'équation (3.8) et en intégrant par partie. Par exemple pour le modèle d'Euler, l'équation (3.8) devient en substituant (3.5) :

$$EI \int_0^l \left[ \mathbf{A}_n^T \frac{d^4 A_m(x)}{dx^4} - \mathbf{A}_m^T \frac{d^4 A_n(x)}{dx^4} \right] dx = 0 \quad (3.14)$$

En intégrant deux fois par partie, on obtient :

$$\left( A_n \frac{d^3 A_m(x)}{dx^3} - A_m \frac{d^3 A_n(x)}{dx^3} \right) \Big|_0^l + \left( -\frac{dA_n(x)}{dx} \frac{d^2 A_m(x)}{dx^2} + \frac{dA_m(x)}{dx} \frac{d^2 A_n(x)}{dx^2} \right) \Big|_0^l = 0 \quad (3.15)$$

Où les intégrales subsistantes s'annulent deux à deux par la propriété de symétrie.

Notons ici que les conditions aux limites (2.2) vérifient cette condition.

Pour le modèle avec cisaillement seul et le modèle de Timoshenko, les conditions aux limites correspondantes sont :

$$k'GS A_n \left( \frac{dA_m}{dx} - \psi_m \right) - A_m \left( \frac{dA_n}{dx} - \psi_n \right) \Big|_0^l + \psi_n \frac{d\psi_m}{dx} - \psi_m \frac{d\psi_n}{dx} \Big|_0^l = 0 \quad (3.16)$$

On remarque aussi que les conditions aux limites (2.24bis) et (2.49bis) vérifient (3.16).

Les systèmes considérés sont donc symétriques et les fonctions propres sont orthogonales comme il a été donné dans (3.11).

### III.2.2.2 Cas du modèle avec inertie rotationnelle

La forme spatiale (2.9) du modèle avec inertie rotationnelle peut s'écrire sous la forme de l'équation (3.4) avec les opérateurs  $\mathfrak{L}$  et  $\mathfrak{S}$  donnés par :

$$\mathfrak{L}(A_n) = EI \frac{d^4 A_n(x)}{dx^4} \quad ; \quad \mathfrak{S}(A_n) = \left( \rho S A_n(x) - \rho I \frac{d^2 A_n(x)}{dx^2} \right) \quad (3.17)$$

Dans ce cas l'opérateur  $\mathfrak{S}$  est un opérateur différentiel contrairement aux cas précédents. L'équation (3.8), avec l'opérateur  $\mathfrak{L}$  substituée dans l'équation (3.4) est :

$$\int_0^l [A_n \mathfrak{L}(A_m) - A_m \mathfrak{L}(A_n)] dx = \int_0^l [\omega_m^2 A_n \mathfrak{S}(A_m) - \omega_n^2 A_m \mathfrak{S}(A_n)] dx = 0 \quad (3.18)$$

En remplaçant les opérateurs  $\mathfrak{L}$  et  $\mathfrak{S}$  par leurs expressions et en intégrant deux fois par partie, le terme de gauche de l'équation (3.18) devient :

$$\left( A_n \frac{d^3 A_m}{dx^3} - A_m \frac{d^3 A_n}{dx^3} \right) \Big|_0^l + \left( -\frac{dA_n}{dx} \frac{d^2 A_m}{dx^2} + \frac{dA_m}{dx} \frac{d^2 A_n}{dx^2} \right) \Big|_0^l = 0 \quad (3.19)$$

Les intégrales subsistantes s'annulent du fait des propriétés de symétrie.

Le terme à droite de l'équation (3.18) se réduit à :

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_0^l \left[ \rho S A_m A_n + \rho I \frac{dA_m}{dx} \frac{dA_n}{dx} \right] dx - \rho I \left[ \omega_m^2 A_n \frac{dA_m}{dx} - \omega_n^2 A_m \frac{dA_n}{dx} \right] \Big|_0^l \quad (3.20)$$

Combinant les termes de gauche et de droite des équations (3.19) et (3.20) on obtient :

$$\begin{aligned} & \left[ A_n \left( \frac{d^3 A_m}{dx^3} + \rho I \omega_m^2 \frac{dA_m}{dx} \right) - A_m \left( \frac{d^3 A_n}{dx^3} + \rho I \omega_n^2 \frac{dA_n}{dx} \right) \right] \Big|_0^l + \left( -\frac{dA_n}{dx} \frac{d^2 A_m}{dx^2} + \frac{dA_m}{dx} \frac{d^2 A_n}{dx^2} \right) \Big|_0^l \\ & = (\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_0^l \left[ \rho S A_m A_n + \rho I \frac{dA_m}{dx} \frac{dA_n}{dx} \right] dx \end{aligned} \quad (3.21)$$

Le terme de gauche de l'équation (3.21) est nul par les conditions aux limites, la condition d'orthogonalité est alors donnée par :

$$\int_0^l \left[ \rho S A_m A_n + \rho I \frac{dA_m}{dx} \frac{dA_n}{dx} \right] dx = \delta_{nm} \quad (3.22)$$

On peut obtenir d'autres conditions d'orthogonalité en manipulant l'équation (3.4) avec les opérateurs  $\mathfrak{L}$  et  $\mathfrak{S}$  donnés par (3.17).

Multiplions (3.4) par  $A_m$  et intégrons sur le domaine ( $0 \leq x \leq l$ ) on obtient :

$$\int_0^l A_n \frac{d^4 A_m}{dx^4} dx = \int_0^l \omega_m^2 A_n \left( \rho S A_m - \rho I \frac{d^2 A_m}{dx^2} \right) dx \quad (3.23)$$

Qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} & \int_0^l A_n \frac{d^4 A_m}{dx^4} dx + \omega_m^2 \rho I \int_0^l \left[ \frac{dA_n}{dx} \frac{dA_m}{dx} + A_n \frac{d^2 A_m}{dx^2} \right] dx \\ & = \omega_m^2 \int_0^l \left[ \rho S A_n A_m + \rho I \frac{dA_n}{dx} \frac{dA_m}{dx} \right] dx \end{aligned} \quad (3.24)$$

En comparant avec l'équation (3.22) le terme de droite est égal à  $\omega_m^2 \mathcal{R}_n \delta_{nm}$ , soit en intégrant deux fois par partie le terme de gauche on obtient :

$$A_n \left( \frac{d^3 A_m}{dx^3} + \omega_m^2 \rho I \frac{dA_m}{dx} \right) \Big|_0^l - \int_0^l \frac{dA_n}{dx} \frac{d^3 A_m}{dx^3} dx = \omega_m^2 \delta_{nm} \quad (3.25)$$

Par les conditions aux limites le premier terme s'annule et on se retrouve avec :

$$- \int_0^l \frac{dA_n}{dx} \frac{d^3 A_m}{dx^3} dx = \omega_m^2 \delta_{nm} \quad (3.26)$$

Intégrant (3.26) par partie et utilisant les conditions aux limites encore une fois :

$$\int_0^l \frac{d^2 A_n}{dx^2} \frac{d^2 A_m}{dx^2} dx = \omega_m^2 \delta_{nm} \quad (3.27)$$

La condition d'orthogonalité (3.26) sera utilisée ailleurs pour le calcul de la réponse

### III.2.3 Décomposition modale de la réponse, équation modale

Le calcul de la réponse vibratoire forcée est basé sur :

- 1) La connaissance préalable du schéma modale, c'est-à-dire la résolution du problème des vibrations libres où les modes propres sont des solutions de la forme:
 
$$W_n(x, t) = (d_{1n} \cos \omega_n t + d_{2n} \sin \omega_n t) A_n(x)$$
- 2) La décomposition modale de la réponse sur une base de l'espace fonctionnel dans lequel se trouve la solution du problème, cette base est formée des fonctions propres définis par la solution du problème homogène, c'est-à-dire qu'on cherche la solution du problème des vibrations forcées sous la forme :

$$\mathbf{W}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \mathbf{A}_n(x) \quad (3.28)$$

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \mathfrak{F}(\mathbf{A}_n(x)) \quad (3.29)$$

$\mathbf{W}(x, t)$  désigne  $W(x, t)$  pour Euler et  $[W(x, t), \alpha(x, t)]$  pour le modèle avec cisaillement et la poutre de Timoshenko.

Dans cette expression se sont les amplitudes  $q_n(t)$  qui sont inconnues et qu'il convient de calculer pour résoudre le problème.

Ces amplitudes doivent faire en sorte que le développement modal (3.28) vérifie les trois groupes d'équations (3.1), (3.2) et (3.3).

- 3) L'utilisation des propriétés d'orthogonalité associées, ces propriétés sont définies à la base des propriétés de symétrie des opérateurs  $\mathfrak{F}$  et  $\mathfrak{L}$  et qui s'écrivent :

$$\int_0^l \mathfrak{I}(\mathbf{A}_n(x)) \mathbf{A}_m(x) dx = 0 \quad n \neq p \quad \text{orthogonalité/masse}$$

$$\int_0^l \mathfrak{Q}(\mathbf{A}_n(x)) \mathbf{A}_m(x) dx = 0 \quad n \neq p \quad \text{orthogonalité/raideur}$$

Pour  $n=p$  on définit :

La masse généralisée :

$$M_n = \int_0^l \mathfrak{I}(\mathbf{A}_n(x)) \mathbf{A}_n(x) dx$$

Et la raideur généralisée :

$$K_n = \int_0^l \mathfrak{Q}(\mathbf{A}_n(x)) \mathbf{A}_n(x) dx$$

La démarche à suivre consiste à substituer la forme (3.28) dans l'équation de mouvement forcé (3.1) et de découpler les modes en utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions propres, pour cela il suffit de multiplier le résultats par une fonction propre  $\mathbf{A}_m(x)$  et d'intégrer sur tout le domaine, en intervertissant les sommations et les intégrales et en exploitant les propriétés d'orthogonalité par rapport aux opérateurs de masse et de raideur on aboutit alors à une équation avec un seul indice  $n=m$ .

### III.2.3.1 Cas du modèle d'Euler, du modèle avec cisaillement et de Timoshenko

L'expression de  $q(t)$  peut être écrite en appliquant l'opérateur de masse à l'équation (3.28) ; en multiplions par  $\mathbf{A}_m^T$  et intégrant sur le domaine. Des simplifications seront aussi menées en utilisant les propriétés d'orthogonalité (3.13).

$$\int_0^l \mathbf{A}_m^T \mathfrak{I}(\mathbf{W}(x, t)) dx = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \int_0^l \mathbf{A}_m^T \mathfrak{I}(\mathbf{A}_n(x)) dx \quad (3.30)$$

Alors,

$$q_n(t) = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_0^l \mathbf{A}_m^T \mathfrak{I}(\mathbf{W}(x, t)) dx \quad (3.31)$$

De la même façon  $F_n(t)$  peut être trouvée en multipliant (3.29) par  $\mathbf{A}_m^T$  et en intégrant sur le domaine.

$$F_n(t) = \int_0^l \mathbf{A}_m^T f(x, t) dx \quad (3.32)$$

En substituant la solution (3.28) et (3.29) dans les équations de mouvement forcées (2.1), (2.24) et (2.48) respectivement on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} \mathfrak{S}(\mathbf{A}_n(x)) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \mathfrak{Q}(\mathbf{A}_n(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \mathfrak{S}(\mathbf{A}_n(x)) \quad (3.33)$$

Où les expressions des operateurs  $\mathfrak{S}$  et  $\mathfrak{Q}$  sont respectivement données par (3.5), (3.6) et (3.7). En utilisant l'équation (3.4), (3.33) devient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 q_n(t) \right] \mathfrak{S}(\mathbf{A}_n(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \mathfrak{S}(\mathbf{A}_n(x)) \quad (3.34)$$

Multipliant par  $\mathbf{A}_m^T(x)$  et intégrant sur le domaine  $x \in [0, l]$  on obtient :

$$\frac{d^2 q_m(t)}{dt^2} + \omega_m^2 q_m(t) = F_m(t) \quad (3.35)$$

L'équation (3.35) est l'équation modale associée au mode  $m$ , sa résolution fournira l'inconnue du problème  $q_m(t)$ . On remarque que cette équation est celle d'un système à un degré de liberté qui possède la même pulsation propre que le mode de vibration étudié.

La solution de cette équation est donnée par :

$$q_m(t) = \frac{1}{\omega_m} \int_0^l F_m(t) \sin \omega_m(t - \tau) d\tau + q_m(0) \cos \omega_m t + \frac{1}{\omega_m} \left. \frac{dq_m(t)}{dt} \right|_{t=0} \sin \omega_m t \quad (3.36)$$

$F_m(t)$  est donnée par l'équation (3.32),  $q_m(0)$  et  $\left. \frac{dq_m(t)}{dt} \right|_{t=0}$  sont obtenus par les conditions initiales  $W(x, 0)$  et  $\dot{W}(x, 0)$  en utilisant l'équation (3.31)

$$q_m(0) = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_0^l \mathbf{A}_m^T \mathfrak{S}(\mathbf{W}(x, 0)) dx \quad ; \quad \dot{q}_m(0) = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_0^l \mathbf{A}_m^T \mathfrak{S}(\dot{\mathbf{W}}(x, 0)) dx \quad (3.37)$$

Finalement la réponse aux vibrations forcées est :

$$\mathbf{W}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \mathbf{A}_n(x) \quad (3.38)$$

### III.2.3.2 Cas du modèle avec inertie rotationnelle

Nous allons suivre la même procédure dans le but d'obtenir la réponse de la poutre avec inertie rotationnelle par la méthode de décomposition modale. On suppose que la solution  $w(x, t)$  à l'équation de mouvement (2.8) avec second membre peut être décomposée en une série modale par (3.28).

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) A_n(x) \quad (3.39)$$

On peut obtenir les amplitudes  $q_n(t)$  en utilisant les conditions d'orthogonalité données par les équations (3.22), (3.26) ou (3.27). Il est peut commode d'utiliser la première condition, nous allons alors utiliser la condition (3.26). En dérivant (3.39) par rapport à la variable de l'espace  $x$ , on obtient :

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \frac{\partial A_n(x)}{\partial x} \quad (3.40)$$

En multipliant (3.40) par  $\frac{d^3 A_m(x)}{dx^3}$  et intégrant sur le domaine on obtient :

$$q_m(t) = -\frac{1}{\omega_m^2} \int_0^l \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} \frac{d^3 A_m(x)}{dx^3} dx \quad (3.41)$$

L'équation de mouvement peut s'écrire :

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \frac{d^4 A_n}{dx^4} + \frac{d^2 q_n}{dt^2} \left( \rho S A_n - \rho I \frac{d^2 A_n}{dx^2} \right) = f(x, t) \quad (3.42)$$

Les conditions limites du problème de la poutre avec inertie rotationnelle sont données par :

$$\frac{d^2 A_n}{dx^2} \delta \frac{dA_m}{dx} \Big|_0^l = 0 \quad , \quad \left( q \frac{d^3 A}{dx^3} - \rho I \frac{d^2 q}{dt^2} \frac{dA}{dx} \right) \delta A \Big|_0^l = 0 \quad (3.43)$$

Multipliant l'équation (3.42) par  $A_m$  et intégrant sur le domaine on trouve :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l \left[ q_n \frac{d^4 A_n}{dx^4} + \frac{d^2 q_n}{dt^2} \left( \rho S A_n - \rho I \frac{d^2 A_n}{dx^2} \right) \right] A_m dx = \int_0^l f(x, t) A_m dx \quad (3.44)$$

Le terme de gauche de cette équation sera intégré par partie,

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[ q_n \frac{d^4 A_n}{dx^4} + \frac{d^2 q_n}{dt^2} \left( \rho S A_n - \rho I \frac{d^2 A_n}{dx^2} \right) \right] A_m dx &= A_m \left( q_n \frac{d^3 A_n}{dx^3} - \frac{d^2 q_n}{dt^2} \rho I \frac{dA_n}{dx} \right) \Big|_0^l \\ &\quad - q_n \frac{dA_m}{dx} \frac{d^2 A_n}{dx^2} \Big|_0^l + \int_0^l q_n \frac{d^2 A_n}{dx^2} \frac{d^2 A_m}{dx^2} dx \\ &\quad + \frac{d^2 q_n}{dt^2} \int_0^l \left[ \rho S A_n A_m + \rho I \frac{dA_n}{dx} \frac{dA_m}{dx} \right] dx \end{aligned} \quad (3.45)$$

Les termes évalués aux bornes disparaissent par les conditions aux limites (3.43), aussi par les conditions d'orthogonalité (3.22) et (3.27) l'expression (3.45) se simplifie à :

$$\int_0^l \left[ q_n \frac{d^4 A_n}{dx^4} + \frac{d^2 q_n}{dt^2} \left( \rho S A_n - \rho I \frac{d^2 A_n}{dx^2} \right) \right] A_m dx = \left( q_n \omega_n^2 + \frac{d^2 q_n}{dt^2} \right) \delta_{nm} \quad (3.46)$$

En reportant le dernier résultat dans (3.44) on obtient :

$$\frac{d^2 q_m}{dt^2} + \omega_m^2 q_m = \int_0^l f(x, t) A_m dx \quad (3.47)$$

En notant  $F_m(t) = \int_0^l f(x, t) A_m dx$  alors  $q_m(t)$  est par (3.36). Les conditions initiales  $q_m(0)$  et  $\dot{q}_m(0)$  sont obtenues par l'équation (3.41).

$$q_m(0) = -\frac{1}{\omega_m^2} \int_0^l \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{(x,0)} \frac{d^3 A_m(x)}{dx^3} dx, \quad \dot{q}_m(0) = -\frac{1}{\omega_m^2} \int_0^l \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} \Big|_{(x,0)} \frac{d^3 A_m(x)}{dx^3} dx \quad (3.48)$$

### III.2.4 Réponse de la poutre encastree libre

Pour illustrer les résultats jusqu'à présent obtenus nous allons calculer la réponse

d'une poutre encastree libre à une excitation  $f(x, t)$  donnée par :  $f(x, t) = x \cos 100t$

La poutre est en acier avec les propriétés données dans le tableau suivant :

Module d'Young E	200 GPa
Module de rigidité G	77,5 GPa
Coefficient de Poisson $\nu$	0,29
Densité $\rho$	7830 kg/m <sup>3</sup>
Section	tube circulaire avec $\phi_{int} = 0,15 \text{ m}$ , $\phi_{ext} = 0,16 \text{ m}$
Air de la section droite S	0,0097389 m <sup>2</sup>
Moment d'inertie I	0,0001171 m <sup>2</sup>
Longueur l	1 m
Rayon de giration $r = \frac{1}{l} \sqrt{I/A}$	0,10966
Coefficient de cisaillement $k'$	0,53066
$\gamma$	2,205

Noter que la poutre n'est pas mince. Par conséquent, le nombre d'onde critique de la poutre de Timoshenko est relativement bas, et la Différence entre les modèles est assez signifiante. En réalité, il est difficile de réaliser une poutre avec une telle géométrie et d'obtenir des résultats expérimentaux fiables, à cause de l'effet de bord qui domine les vibrations dans ces cas.

Pour le modèle d'Euler et la poutre avec inertie rotationnelle le déplacement initial est donné par :  $W(x, 0) = (1,667x^3 - 5x^2)10^{-3}$

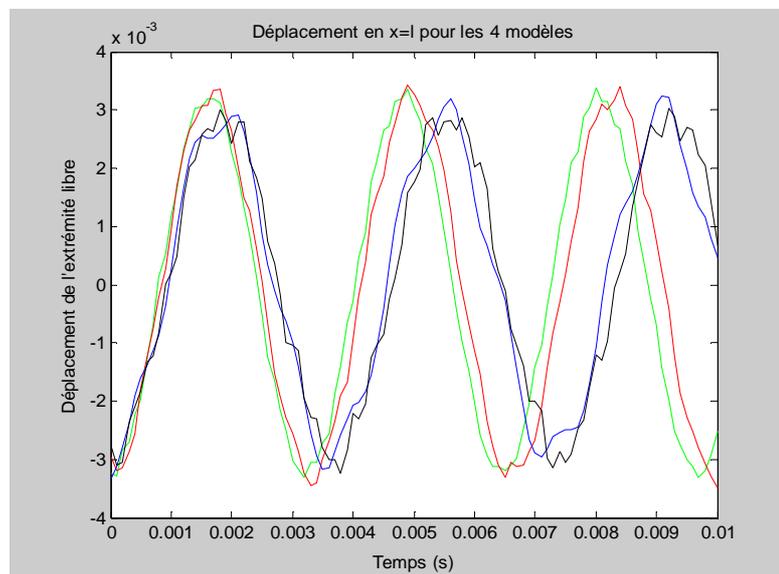
Et pour le modèle avec cisaillement transversal seul et le modèle de Timoshenko, le déplacement et la rotation initiales par :

$$W(x, 0) = (2,021x^3 - 6,0635x^2 + 0,7094x)10^{-3}; \quad \alpha(x, 0) = (6,0635x^2 - 12,127x)10^{-3}$$

Les déplacements initiaux sont choisis de telle manière que les conditions aux limites soient satisfaites, et que le déplacement de l'extrémité libre soit le même. En fait, ces déplacements initiaux correspondent à la forme de la poutre quand elle est statiquement chargée par une force ponctuelle à l'extrémité libre. Les fréquences naturelles ont été déjà obtenus pour les quatre modèles et ils sont donnés dans les tableaux II.1, II.2, II.3 et II.4. Les fréquences naturelles de la poutre de Timoshenko apparaissent au delà de la fréquence critique par paire (*Trame de fond des lignes*), parce que à chacune de ces paires correspond le même nombre de nœuds. Il peut sembler bizarre que seul le modèle de Timoshenko a plus d'un mode avec le même nombre de nœuds. Expérimentalement, Barr (1956) a observé dans son étude des vibrations d'une poutre épaisse libre-libre deux fréquences auxquelles correspond le même nombre de point nodaux.

Les réponses sont obtenues par la méthode de décomposition modale en effectuant la sommation des huit premiers modes des équations (3.28) ou (3.39) pour les modèles d'Euler, inertie rotationnelle, et le modèle avec cisaillement et les douze premiers modes de l'équation (3.39) pour le modèle de Timoshenko.

Les réponses sont montrées sur la figure III



**FIG. III Réponse forcée calculée à l'extrémité libre**

--- Euler    --- Rotationnelle    --- Cisaillement    --- Timoshenko

# **Chapitre IV**

## **Reconstruction des charges dynamiques par la méthode de sélection des modes**

### **IV.1 Introduction**

La reconstruction des efforts dynamiques agissants sur une structure à partir de la réponse est nécessaire lorsque la mesure directe de ces efforts par les moyens conventionnels est impossible. L'approche commune à ce problème consiste à l'inversion du modèle mathématique directe qui donne la réponse en fonction de l'excitation, la mesure de la réponse de la structure, et le calcul des forces dynamique à l'aide d'une formulation par les moindres carrées. Cette approche c'est montrée efficace pour la réduction des erreurs liées à la mesure de la réponse. Malheureusement, la précision de cette méthode se trouve entravée par le processus d'inversion d'une matrice mal conditionnée, pour parer à cette instabilité de l'inversion, on fait recourt aux méthodes de régularisation telle que la troncature des valeurs singulières et la régularisation de Tikhonov qui sont les deux méthodes les plus communément utilisées.

Pour simplifier cette étude, on commence par la reconstruction des charges dynamiques appliquées à une poutre d'Euler simplement appuyée et sans considération de l'amortissement, et ce dans le but de clarifier le processus d'inversion lié au problème d'identification de l'effort réparti sur une structure à partir de la mesure de la réponse. Un concept de choix empirique d'un facteur d'échelle est proposé en premier lieu pour dévoiler la relation entre l'information temporelle et spatiale dans la réponse. Ce concept est ensuite appliqué dans le processus de sélection des modes afin de déterminer le nombre approprié de modes nécessaires à la reconstruction des efforts avec une précision acceptable.

## IV.2 Sélection des modes

La réponse dynamique d'une poutre d'Euler à section uniforme et sans amortissement se rapporte à l'équation aux dérivées partielles sans dimensions suivante X.Q. Jiang et H.Y. Hu [26] :

$$\frac{(\kappa_1 L)^4}{4\pi^2} \frac{\partial^2 \bar{w}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^4} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) \quad (1)$$

Où  $\bar{x} \equiv x/L$  est la variable spatiale non dimensionnée par la longueur de la poutre  $L$ ,  $\bar{t} \equiv t/T_1$  est le temps non dimensionné par  $T_1 \equiv \frac{2\pi}{\omega_1}$ ,  $\omega_1 \equiv \kappa_1^2 \sqrt{EI/\rho S}$ ,  $\bar{w} \equiv w/L$  est le déplacement transversal sans dimension,  $\bar{f} = L^3 f/(EI)$  l'excitation extérieure sans dimension,  $\kappa_1$  le nombre d'onde du premier mode,  $\rho$  la densité du matériau de la poutre,  $E$  le module de Young,  $S$  l'aire de la section de la poutre et  $I$  son moment d'inertie, et en posant :  $\bar{w}(\bar{x}, \bar{t}) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(\bar{x}) q_m(\bar{t})$

La réponse modale qui correspond à l'équation (1) est :

$$\ddot{q}_m(\bar{t}) + \bar{\omega}_m^2 q_m(\bar{t}) = \frac{4\pi^2}{(\kappa_1 L)^4} \bar{f}_m(\bar{t}) \quad (2)$$

$q_m(\bar{t})$  Est la réponse modale,  $\bar{f}_m(\bar{t}) = \int_0^1 W_m(\bar{x}) \bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) d\bar{x}$  la force généralisée et  $W_m(\bar{x})$  la forme propre du mode  $m$ .

Lorsque l'excitation est harmonique et proportionnelle au mode  $j$  dans le domaine spatiale elle s'écrit :

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) = c W_j(\bar{x}) e^{i\bar{\omega}\bar{t}} \quad (3)$$

Ou  $c$  est une constante réelle positive, la force généralisée et la réponse permanente du mode  $m$  correspondant sont :

$$\bar{f}_m(\bar{t}) = c \delta_{jm} e^{i\bar{\omega}\bar{t}} \quad (4) \quad \text{et} \quad q_m(\bar{t}) = c \frac{4\pi^2}{(\kappa_1 L)^4} \delta_{jm} \frac{1}{\bar{\omega}_m^2 - \bar{\omega}^2} e^{i\bar{\omega}\bar{t}} \quad (5)$$

Ou  $\delta$  est le symbole de Kronecker.

La réponse permanente à l'excitation s'écrit donc :

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{t}) = c \frac{4\pi^2}{(\kappa_1 L)^4} \frac{1}{\bar{\omega}_m^2 - \bar{\omega}^2} W_j(\bar{x}) e^{i\bar{\omega}\bar{t}}$$

Pour une poutre d'Euler simplement appuyée  $(\kappa_1 L)^4/(4\pi^2) = \pi^2/4$ , et le nombre d'onde, la fréquence naturelle et la forme propre du mode  $m$  sont respectivement :

$$\bar{\kappa}_m = m\pi, \quad \bar{\omega}_m = 2m^2\pi, \quad \text{et} \quad W_m(\bar{x}) = \sqrt{2} \sin(\bar{\kappa}_m \bar{x})$$

Pour mettre en évidence l'influence de l'ordre du mode  $m$  ainsi que la fréquence d'excitation  $\omega$  sur la réponse il est commode d'introduire le facteur suivant :

$$SF_{\bar{w}} = \frac{1}{\bar{\omega}_m^2 - \bar{\omega}^2} \quad (6)$$

Le déplacement transversal de la poutre s'écrit alors :

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{t}) = c \frac{4\pi^2}{(\kappa_1 L)^4} SF_{\bar{w}} W_j(\bar{x}) e^{i\bar{\omega}\bar{t}} \quad (7)$$

On voit bien que la réponse de la poutre dépend essentiellement de la différence entre la fréquence de l'excitation et les fréquences naturelles correspondant aux composantes modales inclus dans l'expression spatiale de l'excitation. Par exemple étant donnée une excitation répartie dans le domaine spatiale proportionnellement à la forme d'un mode, alors la réponse de la poutre devient importante lorsque la fréquence de l'excitation est proche de la fréquence naturelle du mode considéré. Dans le cas contraire cette réponse s'avère imperceptible.

La reconstruction des charges réparties sur une poutre d'Euler est le résultat d'un processus d'identification partielle lorsque la réponse est décrite par une expression modale tronquée. Cette assertion est vraie pour la reconstruction des efforts réparties sur n'importe quelle structure mécanique. D'où on reconnaît la difficulté de la reconstruction des charges dynamique pour les fréquences élevées. En outre, la reconstruction ne peut être réalisée qu'en partie puisque les composantes spatiales des modes d'ordre élevé ont été tronquées conformément à ce qui précède. Ce qui mène à l'hypothèse suivante sur la reconstruction des charges dynamiques réparties, seules les charges dynamiques réparties d'un certain rang de fréquence et de distribution spatiale selon les formes modales peuvent être reconstruite à partir de la réponse, et il y a un rang optimale pour la reconstruction lorsque un niveau particulier de sensibilité et de bruit dans la mesure de la réponse est donné pour une poutre spécifique.

Conformément à cette hypothèse une méthode appelée '*sélection des modes*' a été développée à la base du concept du facteur d'échelle de l'équation (6).

Seuls les modes vérifiant l'inégalité  $|SF_{\bar{w}}(m, r)| / \max(|SF_{\bar{w}}(m, r)|) \geq \varepsilon_{SF}(r)$  où  $m$  représente l'ordre du mode et  $r$  la composante de l'excitation de fréquence  $\bar{\omega}_r$ , seront sélectionnés pour la reconstruction,  $\varepsilon_{SF}$  est un seuil choisi empiriquement.

### IV.3 Théorie de la reconstruction des charges dynamiques réparties

Sur la base de l'hypothèse citée plus haut, une théorie améliorée à l'aide de la sélection des modes sera développée pour la reconstruction des charges dynamiques sur une poutre. Cette théorie combinée avec une expression spatiale compatible de la force est utilisée surtout dans le but de parer au problème d'identification des charges dynamiques aux extrémités. On considère alors une poutre d'Euler régit par l'équation(1). Si la charge dynamique est formée de  $N_p$  composantes fréquentielles elle peut être exprimée par :

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) = \sum_{r=1}^{N_p} F_r(\bar{x}) e^{i\bar{\omega}_r \bar{t}} \quad (8)$$

La force généralisée du mode  $m$  est :

$$\bar{f}_m(\bar{t}) = \int_0^1 W_m(\bar{x}) \bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) d\bar{x} = \sum_{r=1}^{N_p} \int_0^1 W_m(\bar{x}) F_r(\bar{x}) d\bar{x} e^{i\bar{\omega}_r \bar{t}} \quad (9)$$

Et en utilisant l'équation (5) et en appliquant le principe de superposition :

$$q_m(\bar{t}) = \frac{4\pi^2}{(\kappa_1 L)^4} \sum_{r=1}^{N_p} \frac{1}{\bar{\omega}_m^2 - \bar{\omega}_r^2} \int_0^1 W_m(\bar{x}) F_r(\bar{x}) d\bar{x} e^{i\bar{\omega}_r \bar{t}} \quad (10)$$

Ce qui permet d'écrire le déplacement transversal sous la forme :

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{t}) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(\bar{x}) q_m(\bar{t}) = \frac{4\pi^2}{(\kappa_1 L)^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{N_p} \frac{1}{\bar{\omega}_m^2 - \bar{\omega}_r^2} \int_0^1 W_m(\bar{x}) F_r(\bar{x}) d\bar{x} W_m(\bar{x}) e^{i\bar{\omega}_r \bar{t}} \quad (11)$$

Le facteur d'échelle associé est :

$$SF_{\bar{w}}(m, r) = \frac{1}{\bar{\omega}_m^2 - \bar{\omega}_r^2} \quad (12)$$

Pour séparer l'information temporelle de l'information spatiale il est commode d'introduire les notations suivantes :

$$\bar{c}_{mr} = \int_0^1 W_m(\bar{x}) F_r(\bar{x}) d\bar{x} \quad (13)$$

$$\bar{g}_r^{\bar{w}}(\bar{x}) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{c}_{mr} SF_{\bar{w}}(m, r) W_m(\bar{x}) \quad (14)$$

A l'aide des expressions (12), (13), et (14) l'équation (11) s'écrit :

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{4\pi^2}{(\kappa_1 L)^4} \sum_{r=1}^{N_p} \bar{g}_r^{\bar{w}}(\bar{x}) e^{i\bar{\omega}_r \bar{t}} \quad (15)$$

La reconstruction des charges réparties sur la poutre commence par la donnée de la mesure des déplacements transversaux notés par :

$$\bar{w}(\bar{x}_i, \bar{t}_n), i = 1, \dots, N_m, n = 1, \dots, N_T \quad (16)$$

Où  $N_m$  est le nombre des points de mesure le long de la poutre, et  $N_T$  est le nombre de données dans le temps. Par analyse fréquentielle, on peut déterminer à partir des données précédentes les fréquences dominantes et les amplitudes correspondantes.

$$\bar{\omega}_r, r = 1, \dots, N_p ; \bar{g}_r^{\bar{w}}(\bar{x}_i), r = 1, \dots, N_p ; i = 1, \dots, N_m \quad (17)$$

Où  $N_p$  est le nombre des fréquences dominantes et  $\bar{\omega}_r$  définit de telle manière que  $\bar{\omega}_1 < \bar{\omega}_2 < \dots < \bar{\omega}_{N_p}$ , l'amplitude correspondante à la  $r^{ieme}$  fréquence dominante  $\bar{\omega}_r$  est :

$$\bar{g}_r^{\bar{w}}(\bar{x}_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{c}_{mr} SF_{\bar{w}}(m, r) W_m(\bar{x}_i) , i = 1, \dots, N_m \quad (18)$$

Une fois les fréquences dominantes  $\bar{\omega}_r$  et les amplitudes  $\bar{g}_r^{\bar{w}}(\bar{x}_i)$  disponibles, les facteurs d'échelle  $SF_{\bar{w}}(m, r)$  peuvent être calculés et les modes sélectionnés et notés par un ensemble  $B_m$ . Si le nombre de modes appartenant à  $B_m$  est  $M$ , l'équation (18) sera donc réécrite sous la forme tronquée suivante :

$$\bar{g}_r^{\bar{w}}(\bar{x}_i) = \sum_{m \in B_m} \bar{c}_{mr} SF_{\bar{w}}(m, r) W_m(\bar{x}_i) , i = 1, \dots, N_m \quad (19)$$

Lorsque  $\bar{c}_{mr}$  est déterminé de l'équation (19) la répartition spatiale de l'effort  $F_r(\bar{x})$  est obtenue par la résolution de l'équation (13) par la méthode de projection.

L'équation (19) constitue un problème mal-posé pour la détermination de  $\bar{c}_{mr}$  c'est alors qu'une méthode de régularisation telle que la troncature des valeurs singulières ou la méthode de Tikhonov est nécessaire.

L'application de la méthode de projection pour l'équation (13) consiste à déterminer le vecteur  $\mathbf{a}$  tel que :

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{a} = \bar{\mathbf{c}} \quad (20)$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \left[ \int_0^1 W_m(\bar{x}) \varphi_n(\bar{x}) d\bar{x} \right]_{M \times N}, \quad \bar{\mathbf{c}} = \{\bar{c}_{mr}\}_{M \times 1}$$

$\mathbf{a} = \{a_n\}_{N \times 1}$  sont les coefficients dans l'expression qui donne la solution :

$$F_r(\bar{x}) = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(\bar{x}) \quad (21)$$

$\varphi_n(\bar{x})$  sont des fonctions utilisées comme base de projection, les polynômes de Legendre ou les formes propres peuvent servir à cette fin.

#### IV.4 Régularisation

L'équation (19) peut être écrite sous forme matricielle comme suit :

$$[\mathcal{H}]\{\mathbf{c}\} = \{\mathbf{g}\} \quad (22)$$

Avec :  $[\mathcal{H}] = [SF_{\bar{w}}(m, r)W_m(\bar{x}_i)]_{N_m \times M}$ ,  $\{\mathbf{c}\} = \{\bar{c}_{mr}\}_{M \times 1}$  et  $\{\mathbf{g}\} = \{\bar{g}_r^{\bar{w}}(\bar{x}_i)\}_{N_m \times 1}$

On rappelle que  $N_m$  est le nombre de points de mesure et  $M$  le nombre de modes sélectionnés.

Afin de déterminer  $\{\mathbf{c}\}$  pour calculer les efforts, la solution qui vient en premier lieu est d'inverser la matrice  $[\mathcal{H}]$  ce qui requiert l'égalité des nombres de modes sélectionnés et le nombre de réponses mesurées, cependant afin de stabiliser le problème, il est intéressant de surdimensionner la quantité d'information introduite. Ainsi le nombre de point de mesure est de préférence supérieure au nombre de mode sélectionnés, la matrice  $[\mathcal{H}]$  sera rectangulaire est le système résolu par :

$$\{\mathbf{c}\} = [\mathcal{H}]^+ \{\mathbf{g}\} \quad (23)$$

$[\mathcal{H}]^+$  est la pseudo-inverse de  $[\mathcal{H}]$  et la solution  $\{\mathbf{c}\}$  est appelée solution au sens des moindres carrés car ce n'est pas une solution exacte sur le plan mathématique. En effet si on réinjecte les  $\{\mathbf{c}\}$  calculés, dans l'équation (22) le vecteur  $\{\mathbf{g}\}$  obtenu, ne sera pas strictement égal au vecteur  $\{\mathbf{g}\}$  introduit initialement dans (23).

Une solution au sens des moindres carrés implique donc une reformulation mathématique du problème initial formulée de la sorte :

*Déterminer  $\{\mathbf{c}\}$  à partir de  $\{\mathbf{g}\}$  et de  $[\mathcal{H}]$   
Satisfaisant la relation  $[\mathcal{H}]\{\mathbf{c}\} = \{\mathbf{g}\}$*

La formulation au sens des moindres carrés est exprimée par :

*Déterminer  $\{\mathbf{c}\}$  à partir de  $\{\mathbf{g}\}$  et de  $[\mathcal{H}]$   
En minimisant la quantité  $\|\{\mathbf{g}\} - [\mathcal{H}]\{\mathbf{c}\}\|$*

L'appellation moindre carrée vient du fait que l'on cherche à minimiser la norme Euclidienne de cette différence. Cette notion des moindres carrés est très importante et de nombreux ouvrages en traitent Gladwell [20] fait remarquer qu'en ingénierie, l'approche quasi-universelle des problèmes inverses est au travers des moindres carrés, c'est à dire : trouver un système qui minimise la distance entre la réponse mesurée et la réponse désirée.

La résolution d'un problème mal posé doit passer par les notions de solution approchée et de solution stable Chesne [31] : c'est le but des méthodes de régularisation. Il s'agit de réduire l'hypersensibilité de la solution aux variations des données d'entrées. Deux grandes approches de régularisation peuvent être citées : la régularisation de Tikhonov et la TSVD (*Truncated Singular Value Decomposition*).

La méthode utilisée ici est celle de Tikhonov, elle consiste à stabiliser le problème en minimisant la norme  $\|\{g\} - [\mathcal{H}]\{c\}\|$  par l'introduction d'un opérateur régularisant  $\lambda$ . Le problème revient à minimiser la quantité :

$$\|\{g\} - [\mathcal{H}]\{c\}\| + \lambda\|c\| \text{ au lieu de } \|\{g\} - [\mathcal{H}]\{c\}\|$$

On cherche via cette démarche une procédure de calcul d'une approximation qui adoucisce les effets du bruit et qui fournisse une solution physiquement stable.

Le choix du paramètre de régularisation de Tikhonov  $\lambda$  constitue une lourde tâche à laquelle plusieurs travaux ont été consacrés Hansen [32], Golub [33] et O'leary [34].

La validation du choix du paramètre peut se faire selon différentes méthodes, courbe en L, OCV '*Ordinary Cross Validation*', GCV '*Generalized Cross Validation*' ...etc.

La TSVD ou méthode de troncature de valeurs singulières est beaucoup plus répandue.

Le principe est d'exprimer la matrice  $[\mathcal{H}]$  sous cette forme :

$$[\mathcal{H}]_{N_m \times M} = [U]_{N_m \times M} [S]_{M \times M} [V]_{M \times M}^*$$

Où  $[U]_{N_m \times M}$  et  $[V]_{M \times M}^*$  sont des matrices unitaires, et  $[S]_{M \times M}$  est la matrice diagonale des valeurs singulières classées par ordre décroissant. Le nombre de valeurs singulières non nulles de  $[\mathcal{H}]_{N_m \times M}$  définit son rang, c'est à dire le niveau de dépendance linéaire de ses colonnes. En pratique, aucune des valeurs singulières n'est nulle, mais certaines sont très faibles. Ce sont ces faibles valeurs singulières, qui sont la cause de l'hypersensibilité du problème en amplifiant considérablement le bruit de mesure. Le principe de cette régularisation sera donc de considérer comme nulles,

toutes valeurs singulières inférieures à un certain seuil fixé. Ce seuil sera alors le paramètre de régularisation. Pezerat [21] compare la TSVD avec une régularisation par filtrage des hauts nombres d'ondes, initialement développée avec la technique RIFF. L'étude montre que la troncature des valeurs singulières est physiquement équivalente à un filtrage en nombre d'onde.

#### **IV.5 Principe de la courbe en L et choix du paramètre de régularisation**

Soit le système linéaire mal conditionné suivant :

$$[\mathcal{H}]\{c\} = \{g\}$$

La régularisation de Tikhonov, consiste à stabiliser le problème en minimisant la norme  $\|\{g\} - [\mathcal{H}]\{c\}\|$  par l'introduction d'un paramètre régularisant  $\lambda$ . Ce qui revient à minimiser la quantité  $\|\{g\} - [\mathcal{H}]\{c\}\| + \lambda\|c\|$  ou dans sa forme la plus générale à minimiser  $\|\{g\} - [\mathcal{H}]\{c\}\|_2^2 + \lambda^2\|c\|_2^2$

La solution régularisée correspondante à  $\lambda$  est donnée dans ce cas par :

$$\{c\}_\lambda = ([\mathcal{H}]^*[\mathcal{H}] + \lambda^2 I)^{-1}[\mathcal{H}]^*\{g\}$$

$[\mathcal{H}]^*$  est la matrice adjointe de  $[\mathcal{H}]$  et  $I$  la matrice identité

L'outil d'analyse principale est la décomposition en valeurs singulières de la matrice  $[\mathcal{H}]_{m \times n}$  avec  $m \geq n$ , cette décomposition s'écrit P.C HANSEN [32] :

$$[\mathcal{H}] = \sum_{i=1}^n u_i \sigma_i v_i^T$$

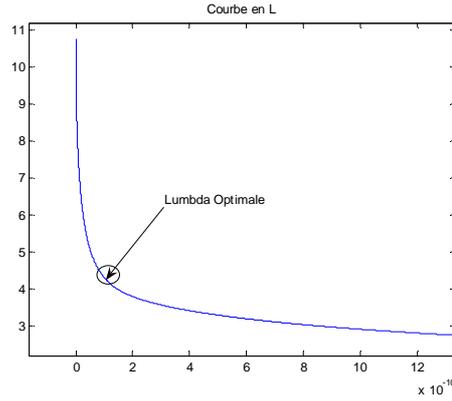
Où les vecteurs singuliers à gauche et à droite  $u_i$  et  $v_i$  sont orthonormales, c'est-à-dire  $u_i^T u_j = v_i^T v_j = \delta_{ij}$ , et les valeurs singulières  $\sigma_i$  sont des quantités positives qui apparaissent dans l'ordre décroissant  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \dots \geq \sigma_n \geq 0$

Les expressions qui se trouve à la base de l'analyse par la courbe en L sont :

$$\|c_\lambda\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left( f_i \frac{u_i^T g}{\sigma_i} \right)^2 \quad \|\{g\} - [\mathcal{H}]\{c\}_\lambda\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left( (1 - f_i) u_i^T g \right)^2$$

Où  $f_i$  est le facteur filtre de Tichonov donné par :  $f_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2}$

La courbe en L est une représentation paramétrique log-log de la norme de la solution  $\eta = \|c_\lambda\|_2^2$  en fonction de la norme du résidu  $\rho = \|\{g\} - [\mathcal{H}]\{c\}_\lambda\|_2^2$  c'est-a-dire une représentation de  $\hat{\eta}/2$  en fonction de  $\hat{\rho}/2$  avec  $\hat{\eta} = \log \eta$  et  $\hat{\rho} = \log \rho$ .



La courbe en L est séparée en deux zones, une zone verticale où la norme de la solution chute très vite pour une très légère augmentation de la norme du résidu et une zone horizontale où la norme de la solution  $\eta$  diminue très progressivement tandis que la norme du résidu  $\rho$  augmente fortement. Le point optimal est l'angle de la courbe en L pour le quel la norme de la solution  $\eta$  est fortement réduite sans pour autant avoir augmenté significativement la norme du résidu Leclère [35]. Ce point optimal correspond à la courbure maximale de la courbe.

La courbure de la courbe en L est donnée par :

$$\kappa = 2 \frac{\hat{\rho}' \hat{\eta}'' - \hat{\rho}'' \hat{\eta}'}{((\hat{\rho}')^2 + (\hat{\eta}')^2)^{3/2}}$$

Notons que  $\hat{\eta}$  et  $\hat{\rho}$  sont fonction de  $\lambda$  de plus  $\hat{\eta}'$ ,  $\hat{\rho}'$ ,  $\hat{\eta}''$  et  $\hat{\rho}''$  sont leurs première et seconde dérivées par rapport à  $\lambda$  sur lesquelles HANSEN [32] effectue plusieurs manipulations pour arriver à une expression plus simple de la courbure où seule la dérivée première de  $\eta$  est présente :

$$\kappa = 2 \frac{\rho \eta \lambda^2 \eta' \rho + 2 \lambda \eta \rho + \lambda^4 \eta \eta'}{\eta' (\lambda^2 \eta^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

$$\text{Avec } \eta' = -\frac{4}{\lambda} \sum_{i=1}^n (1 - f_i) f_i^2 \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2} \quad , \quad \beta_i = u_i^T g$$

## IV.6 Cas étudiés

Dans les cas étudiés, le déplacement transversal de la poutre est déduit de la solution analytique correspondante, et seul la réponse permanente est prise en compte. Pour simuler des mesures réelles, un bruit blanc à distribution uniforme est ajouté aux fréquences naturelles, aux formes propres et aux déplacements, où un bruit additive de borne supérieure égale à  $\omega_1/1000$  est ajouté aux fréquences naturelles sans dimension, un bruit multiplicative de borne supérieure égale à  $1/50$  est ajouté aux formes propres adimensionnés, et un bruit multiplicative de limite supérieure  $1 \times 10^{-3}$  aux déplacements. Cependant aucun bruit n'est associé aux formes propres adimensionnées lorsque celles-ci sont utilisées comme base orthogonale pour la reconstruction de l'effort.

Pour la sélection des modes, un seuil empirique  $\varepsilon_{SF}$  est choisis et seuls les modes vérifiant l'inégalité  $|SF_{\bar{\omega}}(m, r)| / \max(|SF_{\bar{\omega}}(m, r)|) \geq \varepsilon_{SF}(r)$  sont sélectionnés et notés par un ensemble  $B_m$ . L'erreur relative est définie par la valeur absolue du rapport de l'erreur absolu à la valeur exacte.

Le premier cas consiste en la reconstruction d'une excitation harmonique définit par :

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) = \sum_{i=1,5,6,7,10} \bar{f}_i W_i(\bar{x}) \sin(\bar{\omega} \bar{t})$$

Avec  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_3 + 0,8\bar{\omega}_1$  ;  $\bar{f}_i = 1, \forall i$

Le premier facteur de seuil choisi est  $\varepsilon_{SF} = 1 \times 10^{-4}$ , les 16 premiers modes vérifient l'inégalité précédente ils sont alors sélectionnés pour la reconstruction et notés par l'ensemble  $B_m = 1 \dots 16$

La figure IV.1 montre la variation du facteur  $SF_{\bar{\omega}}$  correspondant à  $\bar{\omega}$  avec l'ordre du mode.

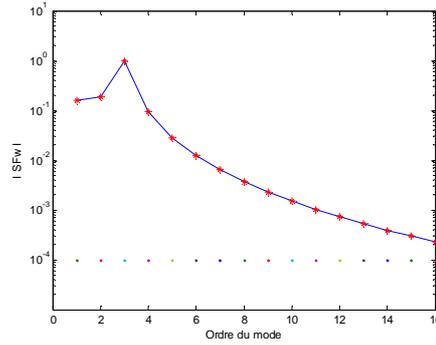


Figure IV.1  $SF_{\overline{W}}$  pour le cas N°1 avec  $\varepsilon_{SF} = 1 \times 10^{-4}$  et  $B_m = 1 \dots 16$

La figure IV.2 montre les résultats de la reconstruction, et illustre la comparaison entre la solution non régularisée et la solution après régularisation ainsi que l'évolution de l'erreur dans les deux cas.

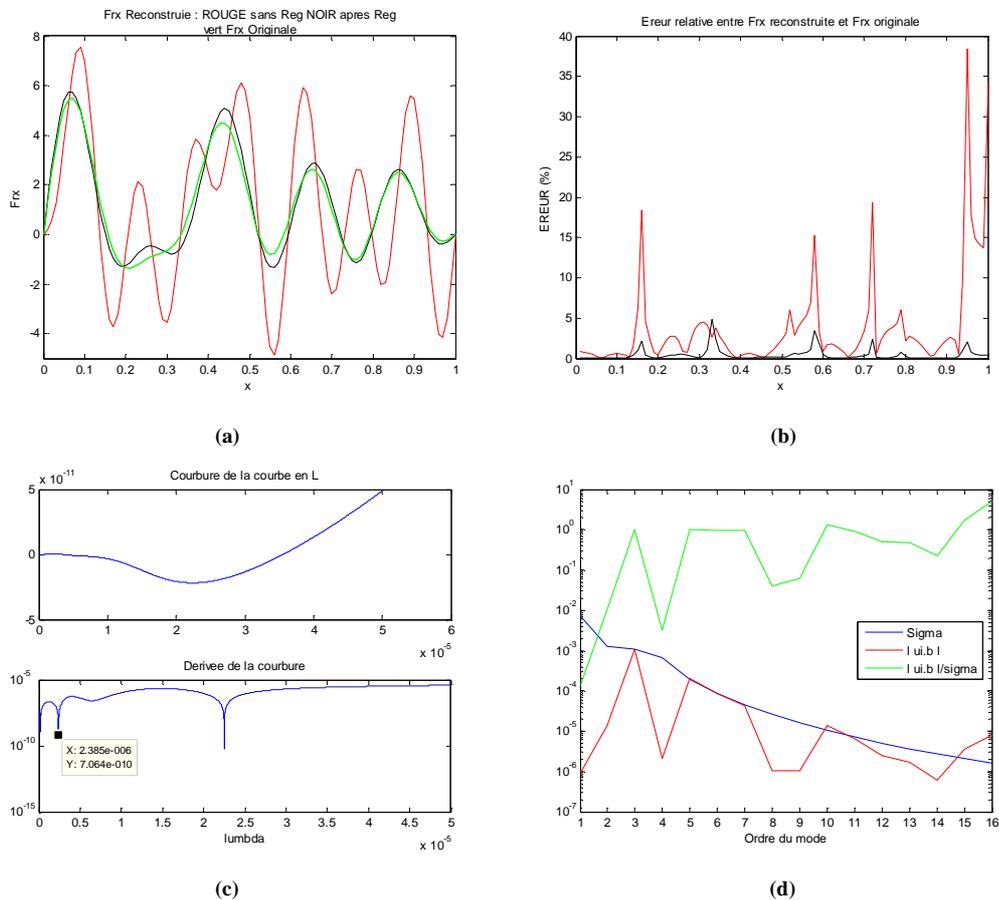


Figure IV.2 Résultats pour le cas N°1  $\varepsilon_{SF} = 1 \times 10^{-4}$   $B_m = 1 \dots 16$

- (a) (---) force Original, (---) force reconstruite sans régularisation (---) force reconstruite après régularisation
- (b) Evolution de l'erreur relative correspondante
- (c) courbure  $\kappa(\lambda)$  et sa dérivée première et validation du choix du paramètre  $\lambda = 2.385 \times 10^{-6}$
- (d) Illustration de la condition de Picard

Un seuil  $\varepsilon_{SF} = 1 \times 10^{-3}$  est ensuite choisit et les 11 premiers modes sont alors sélectionnés, notés par l'ensemble  $B_m = 1 \dots 11$  et représentés figure IV.3

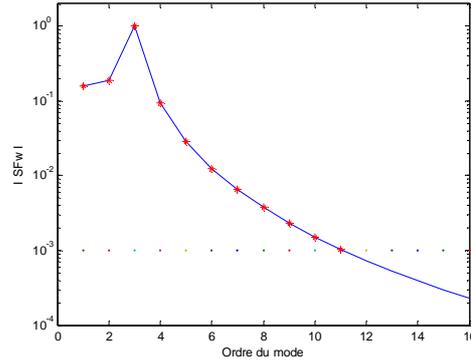


Figure I.V.3  $SF_{\bar{w}}$  pour le cas 1 avec  $\varepsilon_{SF} = 1 \times 10^{-3}$

Les figure IV.4 et IV.5 montre quelques résultats de la reconstruction avec le même niveau de bruit, et illustre la comparaison entre la solution non régularisée et la solution après régularisation ainsi que l'évolution de l'erreur dans les deux cas.

On remarque dans ce cas que l'ensemble  $B_m$  des modes sélectionnés couvre tous les modes utilisés dans l'expression de la force à savoir les modes 1, 5, 6, 7 et 10.

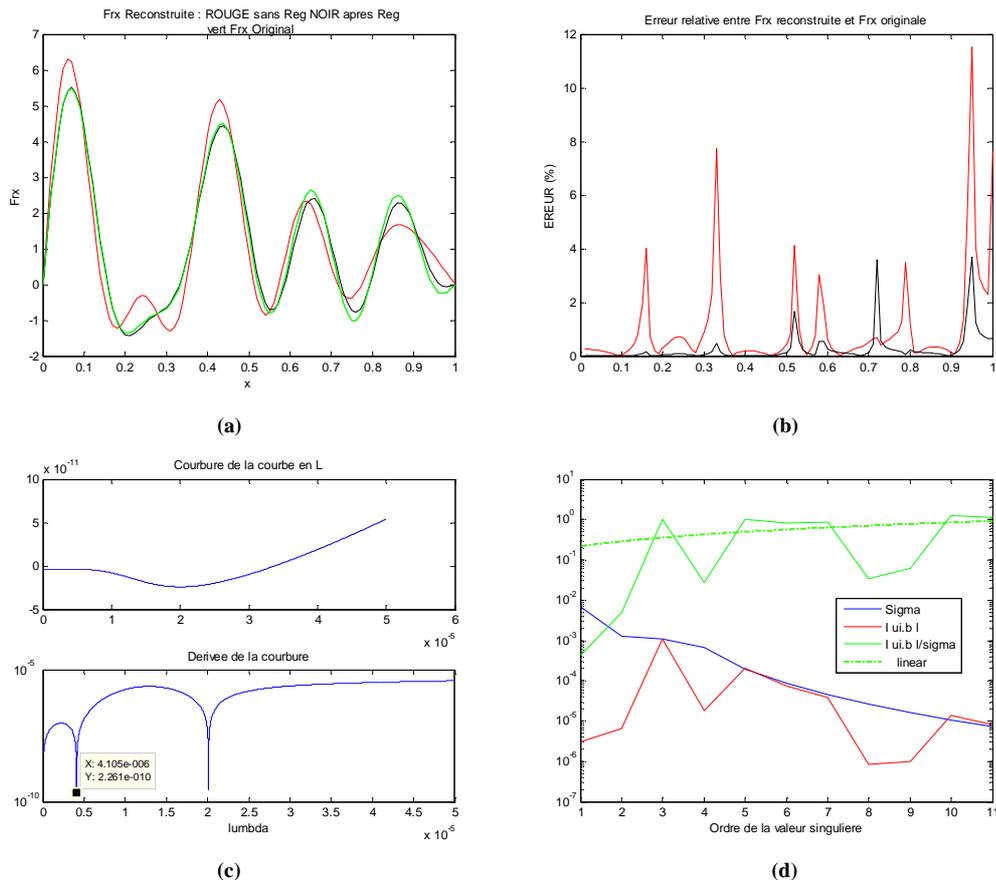


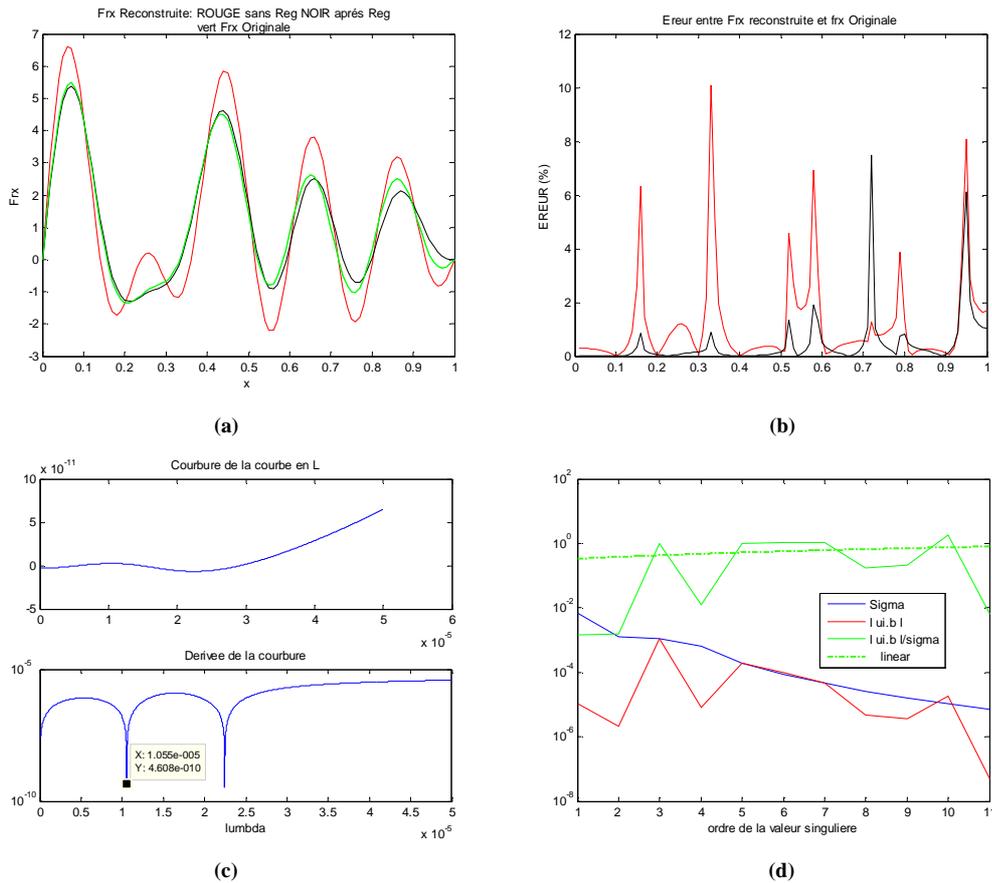
Figure IV.4 Résultats pour le cas N°1  $\varepsilon_{SF} = 1 \times 10^{-3}$   $B_m = 1 \dots 11$

(a) (---) force Original, (---) force reconstruite sans régularisation (---) force reconstruite après régularisation

(b) Evolution de l'erreur relative correspondante

(c) courbure  $\kappa(\lambda)$  et sa dérivée première et validation du choix du paramètre  $\lambda = 4.105 \times 10^{-6}$

(d) Illustration de la condition de Picard

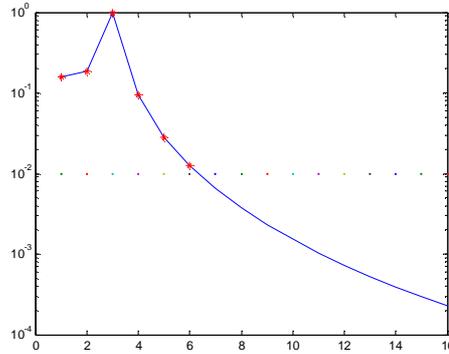


**Figure IV.5 Résultats pour le cas N°1 (Réexécution du programme avec le même niveau de bruit)**  
 (a) (---) force Original, (---) force reconstruite sans régularisation (---) force reconstruite après régularisation  
 (b) Evolution de l'erreur relative correspondante  
 (c) courbure  $\kappa(\lambda)$  et sa dérivée première et validation du choix du paramètre  $\lambda = 1.055 \times 10^{-5}$   
 (d) Illustration de la condition de Picard

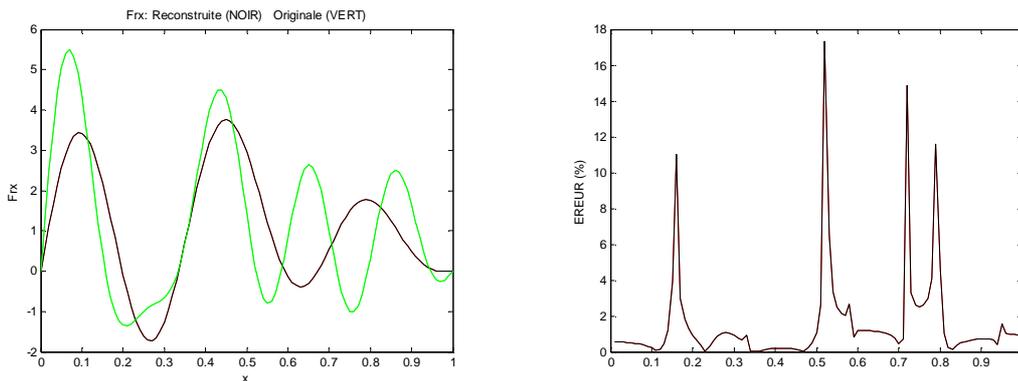
La condition de picard stipule que la régularisation du problème n'est pas utile lorsque les valeurs singulières  $\sigma_i$  tendent vers zéro moins vite que  $|\{u_i\}^T \cdot \{g\}|$  où  $u_i$  est le vecteur colonne de la matrice  $[U]$  issue de la décomposition en valeurs singulières de  $[\mathcal{H}]$  et correspondant à la valeur  $\sigma_i$ .

La condition  $\sigma_i$  tend vers zéro plus vite que  $|\{u_i\}^T \cdot \{g\}|$  signifie que le rapport  $|\{u_i\}^T \cdot \{g\}|/\sigma_i$  représenté par la droite d'interpolation linéaire en vert Fig. IV.4 (d) et IV.5 (d) prend une tendance de croissance monotone, dans ce cas le bruit issue de la mesure présent dans  $\{g\}$  est amplifié à cause de l'instabilité de l'inversion, cette instabilité est justifiée par le mauvais conditionnement de la matrice  $[\mathcal{H}]$ , ce nombre est défini par la valeur absolue du rapport de la plus grande à la plus petite valeur singulière  $Cond(\mathcal{H}) = \left| \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} \right|$  ce nombre est égale à 969 dans le cas de la figure IV.4 et 966 dans le cas de la figure IV.5.

Lorsque le seuil  $\varepsilon_{SF}$  est fixé à  $1 \times 10^{-2}$  l'ensemble des modes  $B_m = 1 \dots 6$  figure IV.6 est sélectionné pour la reconstruction, on remarque que dans ce cas les modes sélectionnés ne couvrent pas les modes 7 et 10 de l'effort original. La figure IV.7 montre les résultats de la reconstruction et la comparaison par l'erreur relative entre l'effort original et l'effort reconstruit.



**Figure IV.6**  $SF_{\bar{w}}$  pour le cas 1 avec  $\varepsilon_{SF} = 1 \times 10^{-2}$



**Figure IV.7** Effort reconstruit et évolution de l'erreur relative pour le cas N° 1 avec  $\varepsilon_{SF} = 1 \times 10^{-2}$

Dans ce cas lorsque six modes seulement sont sélectionnés, on remarque après plusieurs exécutions du programme avec les mêmes données que le cas précédent (*même niveau de bruit*) une dégradation de la précision des résultats et une stabilité de la solution par rapport au données (*la solution est toujours la même*) et la régularisation n'apporte rien à cette solution, ceci est due au fait que la quantité d'information introduite (*16 points de mesure*) est largement surabondante et la solution du problème devient de plus en plus stable par rapport au bruit conformément à ce qui a été annoncé dans la section précédente. Le nombre de conditionnement de la matrice  $[\mathcal{H}]$  chute vers 70 à 80 (*avec 16 modes sélectionnés ce nombre été de l'ordre de 4300 et avec 11 modes sélectionnées aux alentours de 970*).

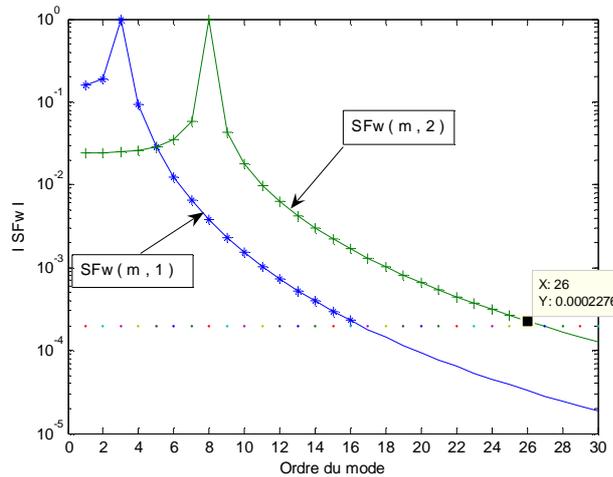
Le deuxième cas étudié concerne la reconstruction d'une charge dynamique à deux composantes harmoniques et répartie le long de la poutre, cette charge dynamique est donnée par :

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) = \sum_{i=1,5,9} \bar{f}_i W_i(\bar{x}) \sin(\bar{\omega}_1 \bar{t}) + \sum_{j=2,6,13} \bar{f}_j W_j(\bar{x}) \sin(\bar{\omega}_2 \bar{t})$$

$$\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_3 + 0,8\bar{\omega}_1 ; \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_8 + 0,8\bar{\omega}_1 ; \bar{f}_i = \bar{f}_j = 1, \forall i; \forall j$$

On commence par fixer le seuil  $\varepsilon_{SF}$  à  $2 \times 10^{-4}$  afin de sélectionner le plus grand nombre de modes sans pour autant dépasser le nombre de points de mesure afin de permettre la régularisation de la solution par la méthode de Tikhonov.

Dans ce cas les modes sélectionnés sont respectivement  $B_m(\bar{\omega}_1) = 1 \dots 16$  et  $B_m(\bar{\omega}_2) = 1 \dots 16$



**Figure IV.8  $SF_{\bar{w}}$  pour le cas N°2 avec  $\varepsilon_{SF} = 2 \times 10^{-4}$**

On remarque que pour la deuxième composante de l'excitation  $\bar{\omega}_2$  que le nombre de modes qui vérifient l'inégalité  $|SF_{\bar{w}}(m, r)| / \max(|SF_{\bar{w}}(m, r)|) \geq \varepsilon_{SF}(r)$  est égale à 26, seulement il est inutile de prendre un nombre de modes pour la reconstruction supérieur au nombre de points de mesure (égale à 16) parce que les résultats de la reconstruction pour les hautes fréquences sont plus précises, comme on peut le remarquer sur la figure IV.8 où ce cas ne nécessite même pas une procédure de régularisation.

Les résultats de la reconstruction avec et sans régularisation de la première composante de l'effort  $F_1(x) = \sum_{i=1,5,9} W_i(\bar{x})$  correspondant à  $\bar{\omega}_1 = 19.6\pi$  sont donnés figure IV.9

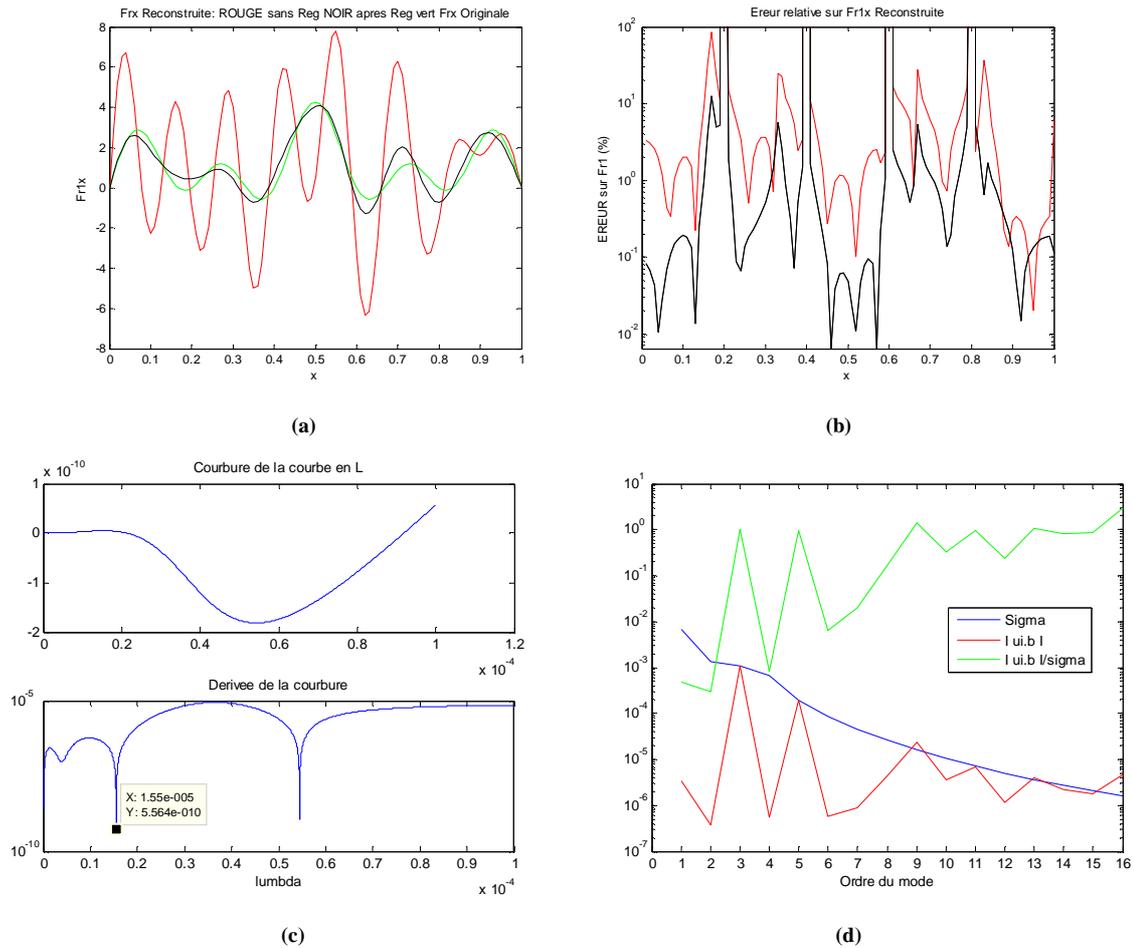


Figure IV.9 Résultats pour la première composante du cas N°2 avec  $\varepsilon_{SF} = 2 \times 10^{-4}$  et  $B_m(\bar{\omega}_1) = 1 \dots 16$

(a) (---) force Original, (---) force reconstruite sans régularisation (---) force reconstruite après régularisation

(b) Evolution de l'erreur relative correspondante

(c) Courbure  $\kappa(\lambda)$  et sa dérivée première et validation du choix du paramètre  $\lambda = 1.55 \times 10^{-5}$

(d) Illustration de la condition de Picard

L'effort reconstruit ainsi que l'effort original  $F_2(x) = \sum_{j=2,6,13} W_j(\bar{x})$  correspondant à la deuxième composante de l'excitation  $\bar{\omega}_2 = 129.6\pi$  est représenté figure IV.10, dans ce cas la reconstruction est meilleure ce qui généralement le cas lorsqu'on s'occupe des hautes fréquences.

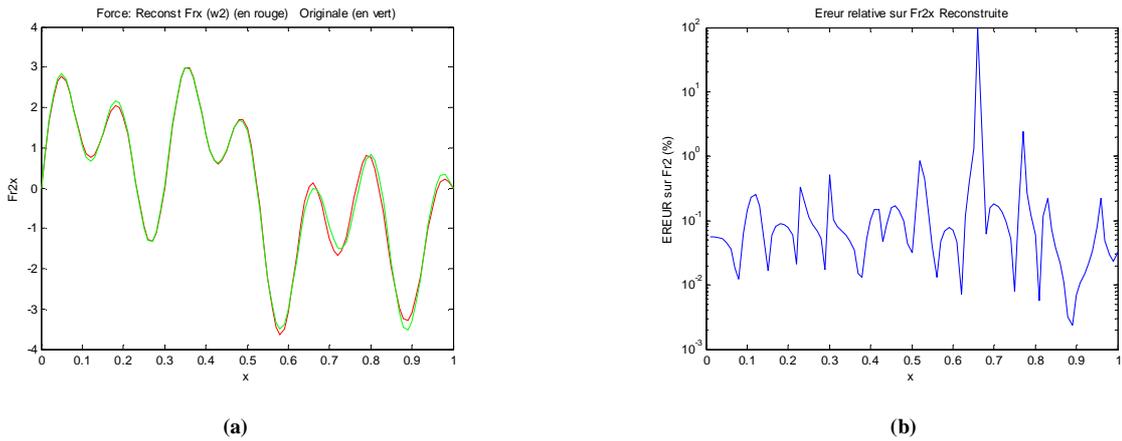


Figure IV.10 Résultats pour la deuxième composante du cas N°2 avec  $\varepsilon_{SF} = 2 \times 10^{-4}$  et  $B_m(\bar{\omega}_2) = 1 \dots 16$

- (a) (---) force Original, (---) force reconstruite
- (b) Evolution de l'erreur relative

En fixe ensuite le seuil  $\varepsilon_{SF}$  à la valeur de  $1 \times 10^{-3}$  ce qui permet de sélectionner les modes  $B_m(\bar{\omega}_1) = 1 \dots 11$  et  $B_m(\bar{\omega}_2) = 1 \dots 16$ , La figure IV.11 représente la variation de  $SF_{\bar{w}}(m, 1)$  et  $SF_{\bar{w}}(m, 2)$  correspondants aux fréquences d'excitation  $\bar{\omega}_1$  et  $\bar{\omega}_2$  en fonction de l'ordre  $m$  des modes.

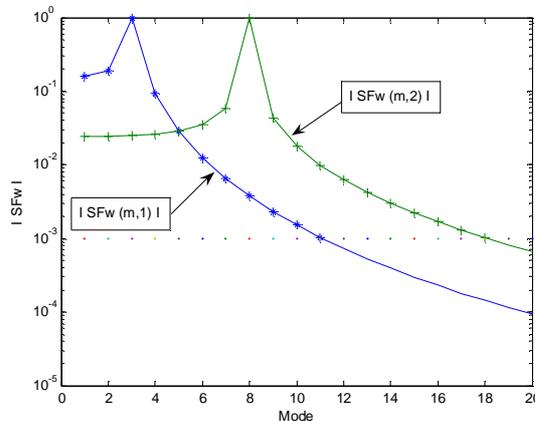
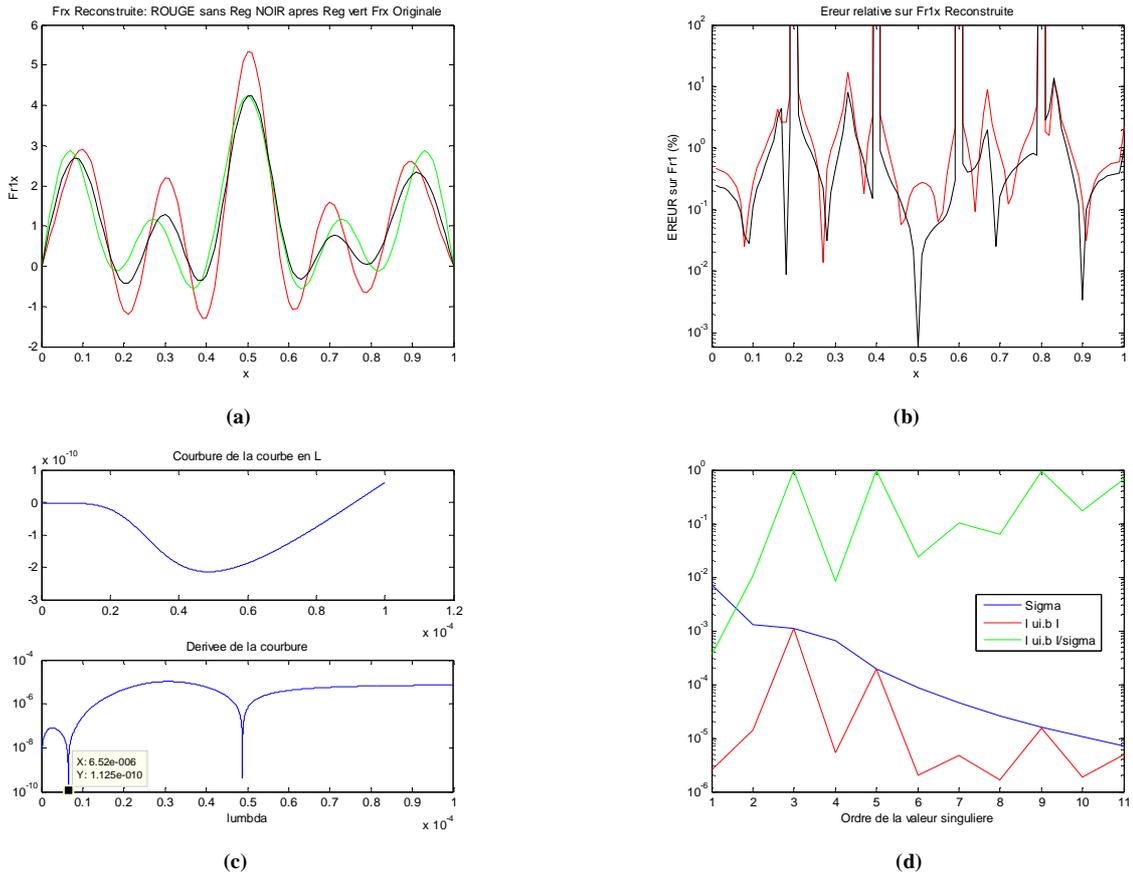


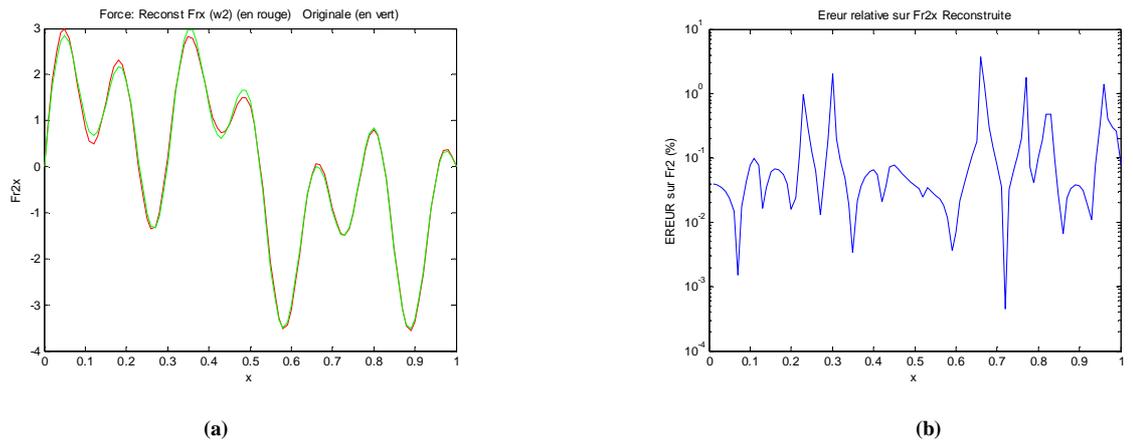
Figure IV.11  $SF_{\bar{w}}(m, 1)$  et  $SF_{\bar{w}}(m, 2)$  pour le cas N° 2 avec  $\varepsilon_{SF} = 1 \times 10^{-3}$ ,  $B_m(\bar{\omega}_1) = 1 \dots 11$ ,  $B_m(\bar{\omega}_2) = 1 \dots 16$

Les résultats de la reconstruction avec et sans régularisation de la première composante de l'effort dans ce cas ( $\varepsilon_{SF} = 1 \times 10^{-3}$ ,  $B_m(\bar{\omega}_1) = 1 \dots 11$ ) sont donnés figure IV.12.

La solution pour la deuxième composante de l'effort  $\varepsilon_{SF} = 1 \times 10^{-3}$ ,  $B_m(\bar{\omega}_2) = 1 \dots 16$  est donnée figure IV.13



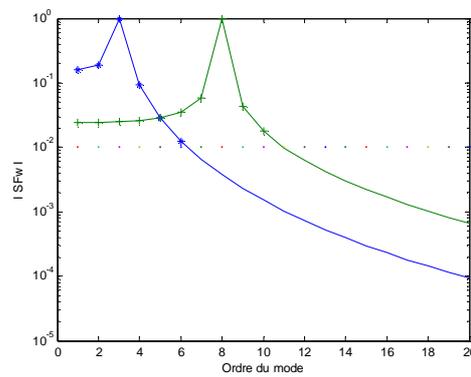
**Figure IV.12 Résultats pour la première composante du cas N°2 avec  $\varepsilon_{SF} = 1 \times 10^{-3}$   $B_m(\bar{\omega}_1) = 1 \dots 11$**   
**(a) (---) force Original, (---) force reconstruite sans régularisation (---) force reconstruite après régularisation**  
**(b) Evolution de l'erreur relative correspondante**  
**(c) Courbure  $\kappa(\lambda)$  et sa dérivée première et validation du choix du paramètre  $\lambda = 6.52 \times 10^{-6}$**   
**(d) Illustration de la condition de Picard**



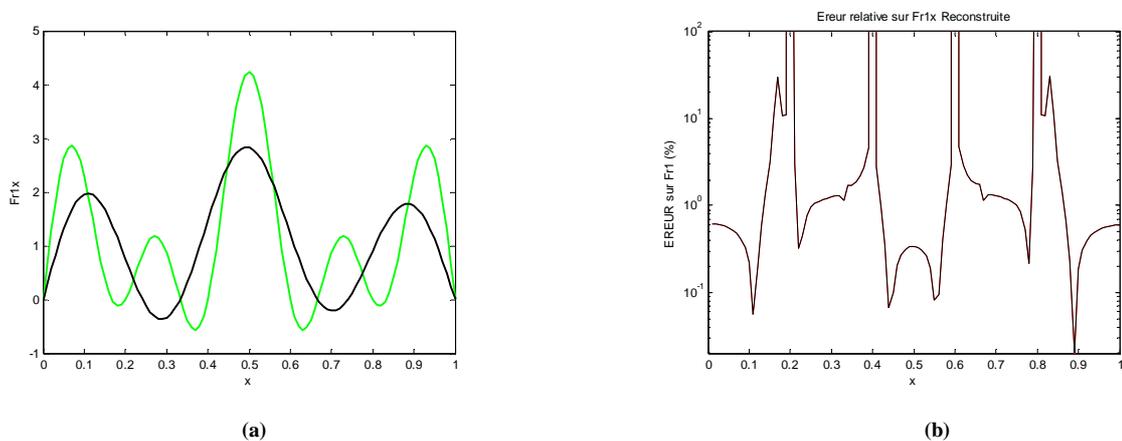
**Figure IV.13 Résultats pour la deuxième composante du cas N°2 avec  $\varepsilon_{SF} = 1 \times 10^{-3}$  et  $B_m(\bar{\omega}_2) = 1 \dots 16$**   
**(c) (---) force Original, (---) force reconstruite**  
**(d) Evolution de l'erreur relative**

Lorsque le facteur de seuil  $\varepsilon_{SF}$  est fixé à  $1 \times 10^{-2}$  les modes sélectionnés sont  $B_m = 1 \dots 6$  pour la première composante et  $B_m = 1 \dots 10$  pour la reconstruction de la deuxième composante, ces modes ne couvrent pas tous les modes présents dans l'expression de l'effort original et la précision des résultats se trouve dégradée et stable par rapport à la quantité d'information introduite qui devient surabondante.

Les résultats sont donnés figures IV.14 pour la sélection des modes ; figure IV.15 pour la reconstruction de la première composante de l'effort et figure IV.16 pour la deuxième composante.



**Figure IV.14 :** (---)  $SF_{\bar{w}}(m, 1)$  et (---) et  $SF_{\bar{w}}(m, 2)$  pour le cas N° 2 avec  $\varepsilon_{SF} = 1 \times 10^{-2}$



**Figure IV.15 Résultats pour la deuxième composante du cas N°2 avec  $\varepsilon_{SF} = 1 \times 10^{-2}$  et  $B_m(\bar{\omega}_1) = 1 \dots 6$**

(a) (---) force Original, (---) force reconstruite

(b) Evolution de l'erreur relative

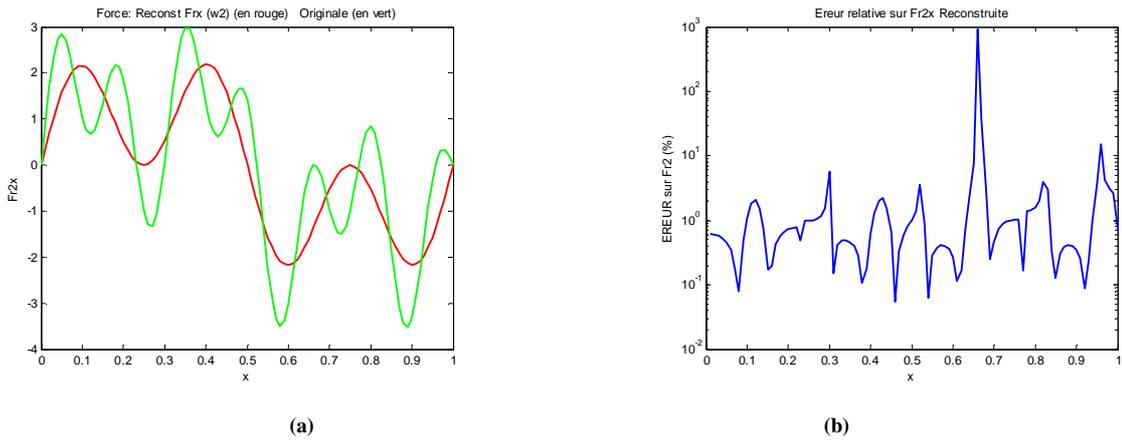


Figure IV.16 Résultats pour la deuxième composante du cas N°2 avec  $\varepsilon_{SF} = 1 \times 10^{-2}$  et  $B_m(\bar{\omega}_2) = 1 \dots 10$

(a) (---) force Original, (---) force reconstruite

(b) Evolution de l'erreur relative

Des résultats similaires ont été obtenus pour l'étude des mêmes cas par X.Q. Jiang et H.Y. Hu [26] dans leurs investigation de la reconstruction des charges répartie sur la poutre d'Euler par la méthode de sélection des modes.

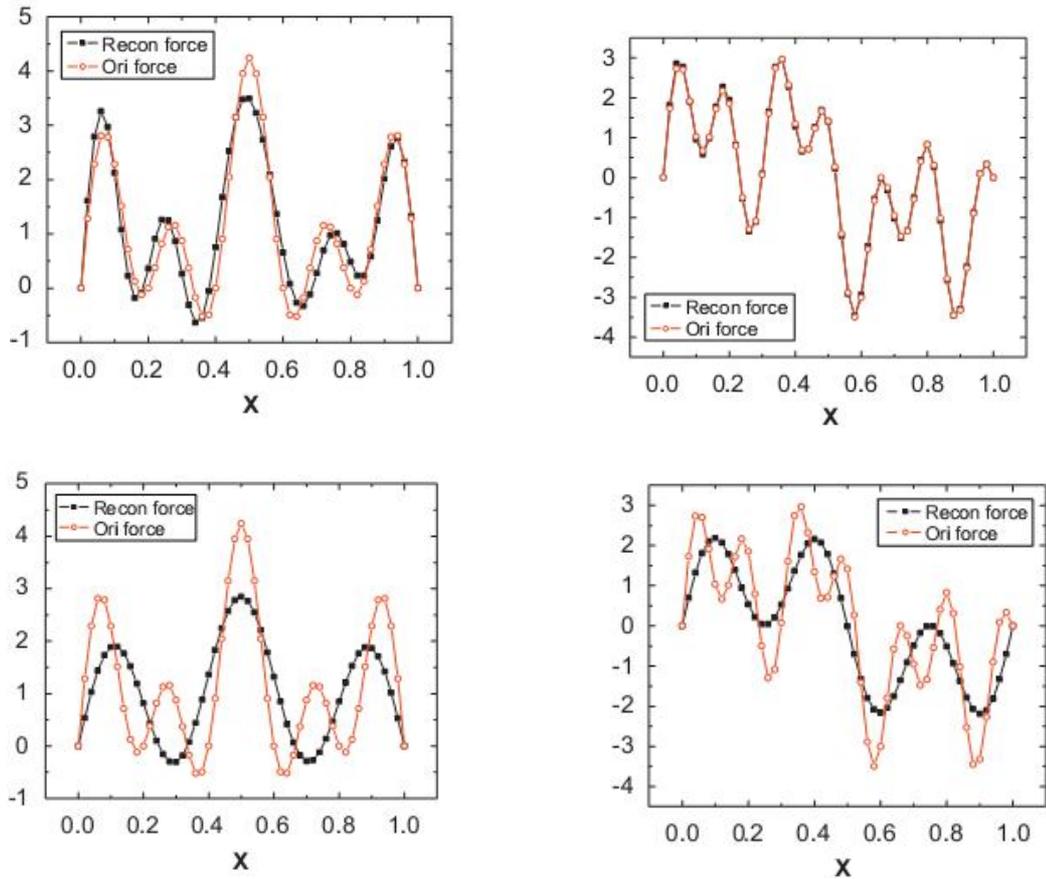


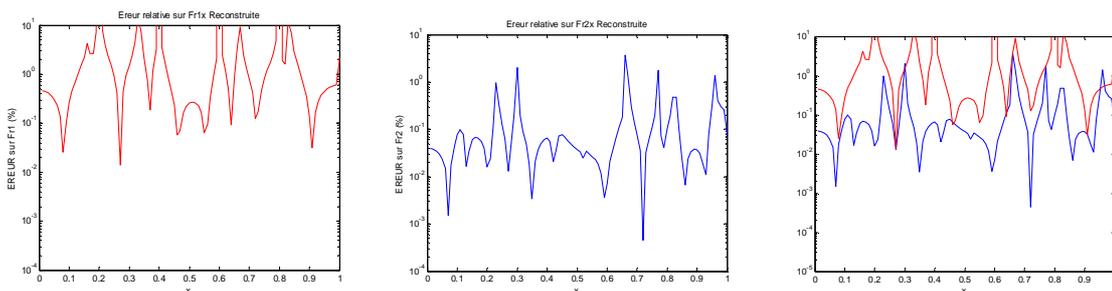
Figure IV.17 Résultats pour le cas N°2 avec  $\varepsilon_{SF} = 1 \times 10^{-3}$  puis  $\varepsilon_{SF} = 1 \times 10^{-3}$  obtenus par X.Q. Jiang et H.Y. Hu [26]

### IV.7 Conclusion

Deux cas de charges réparties sur la poutre ont été reconstruits par la méthode de sélection des modes. Le premier concerne l'identification d'une force harmonique répartie pour laquelle 16, 11 puis 6 modes correspondant respectivement à  $\varepsilon_{SF}$  égale à  $1 \times 10^{-4}$ ,  $1 \times 10^{-3}$  et  $1 \times 10^{-2}$  ont été sélectionnés et notés par l'ensemble  $B_m$ .

Le deuxième, cas montre la reconstruction d'une force à deux composantes harmoniques pour laquelle 16, 11 et 6 modes ont été sélectionnés et notés par  $B_m(\bar{\omega}_1)$  afin de reconstruire la première composante et 16, 16 puis 10 modes notés par  $B_m(\bar{\omega}_2)$  pour la reconstruction de la deuxième composante suite au choix de  $\varepsilon_{SF}$  égale à  $2 \times 10^{-4}$ ,  $1 \times 10^{-3}$  et  $1 \times 10^{-2}$ . La solution est donnée par la résolution de l'équation(19) pour le calcul de  $\bar{c}_{mr}$  et de l'équation (13) pour retrouver l'amplitude de l'effort  $F_r(\bar{x})$  correspondant à  $\bar{\omega}_r$ .

Les résultats nous permettent de tirer une première conclusion commune aux deux cas de l'effort et qui concerne l'influence du nombre de modes choisi sur la précision de la solution. En effet, en comparant les résultats représentés par les figures IV.2(a), IV.4(a), IV.5(a) et IV.7(a) du 1<sup>er</sup> cas de l'effort et par IV.9(a), IV.12(a), IV.15(a) pour le deuxième, on constate que la solution non régularisée n'est satisfaisante que dans le cas des figures IV.4(a), IV.5(a) et IV.12(a). Ces cas correspondent à un nombre de modes choisi assez important (*11 modes dans les deux cas*) pour couvrir tout les modes présents dans l'expression de l'effort original sans pour autant rendre l'information disponible insuffisante. La deuxième conclusion qui peut être tirée de l'analyse du deuxième cas est que, lorsque le nombre de modes optimal est atteint (*16 modes pour la 2<sup>ème</sup> composante du cas N°2*), la précision de la solution est meilleure pour les composantes de hautes fréquences que celle de basses fréquences. Pour le montrer, il suffit de porter sur la même figure l'évolution de l'erreur de la solution non régularisée dans le cas des figures IV.12 et IV.13.



$\bar{\omega}_1 = 19.6\pi$

$\bar{\omega}_2 = 129.6\pi$

**Evolution de l'erreur relative du cas N°2 pour les deux composantes de l'effort**

## Conclusion générale

Le travail présenté ici se compose de deux parties. La première partie est consacrée à la formulation du problème des vibrations transversales des poutres où une étude détaillée du cas de la poutre encastree-libre est présentée.

Le problème formulé en termes d'équations différentielles de mouvement du quatrième ordre ; des conditions limites ; d'une charge extérieure répartie et des conditions initiales est résolu pour les quatre modèles décrits par les théories d'Euler ; Rayleigh ; Cisaillement transversal et Timoshenko. La solution est donnée dans le cas du problème homogène en premier lieu sous forme de nombres d'ondes, fréquences naturelles et formes propres.

La comparaison des résultats montre que l'introduction des termes de second ordre qui décrivent l'influence des effets secondaires à savoir l'inertie rotationnelle et le cisaillement transversal conduit à deux remarques essentielles. Une première remarque est que l'influence de l'inertie rotationnelle représentée dans l'équation de Timoshenko par le terme  $\rho I$  est 3 à 6 fois moins importante que celle du cisaillement transversal représenté par  $\rho I E/G$  ( $E/G = 3$  à  $6$  Matériaux usuelles). La deuxième remarque est que les nombres d'onde de la poutre d'Euler sont définis uniquement par les conditions limites et ne dépendent donc pas des caractéristiques géométriques ou physiques de la poutre, ceux du modèle avec inertie rotationnelle sont fonction du rayon de giration  $r$  de la section droite de la poutre et ceux du modèle avec cisaillement transversal et de Timoshenko sont fonctions de  $r$  et du rapport  $E/G$ .

L'exemple numérique appliqué à une poutre encastree-libre avec un rayon de giration  $r=0.11$  et des caractéristiques mécaniques  $\gamma = \sqrt{\frac{E}{k'G}} = 2.205$  (Données qui rendent l'influence des effets secondaires importante) montre que les déformées propres de la poutre d'Euler sont proches de ceux du modèle avec inertie rotationnelle, et que les déformées propres du modèle avec cisaillement et celui de Timoshenko sont aussi similaires.

L'illustration de ces résultats à été faite par le calcul de la réponse forcée de la même poutre à une excitation harmonique répartie et avec des conditions initiales qui respectent les conditions limites de la poutre encastree-libre et où le déplacement

initial de l'extrémité libre est le même pour les quatre modèles. La réponse donnée par le déplacement de l'extrémité libre de la poutre figure. III montre aussi une allure similaire entre le modèle d'Euler et celui avec inertie rotationnelle d'une part et entre le modèle avec cisaillement transversal et celui de Timoshenko d'autre part.

Ces résultats en plus de la comparaison des nombres d'onde et des fréquences propres calculés en fonction des caractéristiques géométriques et mécaniques d'une poutre, nous permettent de conclure que pour les poutres minces où le rayon de giration est faible, le modèle d'Euler suffit pour décrire les vibrations transversales de la poutre encastree-libre, et lorsque le rayon de giration est important, on est amené à utiliser le modèle avec cisaillement transversal où celui de Timoshenko. Le modèle avec cisaillement seul donne souvent des résultats acceptables pour moins de complications.

La deuxième partie de ce travail a été consacrée à un problème inverse lié aussi aux vibrations transversales des poutres, ce problème concerne la reconstruction des charges dynamiques réparties sur une poutre à partir de la mesure de la réponse par la méthode de sélection des modes.

La méthode de sélection des modes est basée sur la définition d'un facteur d'échelle  $SF_{\bar{w}}$  et le choix empirique d'un facteur de seuil  $\varepsilon_{SF}$  dans le but de parvenir à la détermination du nombre optimal de modes nécessaire à la reconstruction de l'effort dynamique répartie sur la poutre. Des facteurs similaires peuvent naturellement être introduits pour la reconstruction des charges dynamiques appliquées sur d'autres structures.

Deux cas ont été minutieusement étudiés. Le premier concerne la reconstruction d'une excitation harmonique répartie tout au long de la poutre et définit par la fonction spatiotemporelle  $\bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) = \sum_{i=1,5,6,7,10} \bar{f}_i W_i(\bar{x}) \sin(\bar{\omega} \bar{t})$  et le deuxième cas consiste en la reconstruction d'une force à deux composantes fréquentielles harmoniques définit par  $\bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) = \sum_{i=1,5,9} \bar{f}_i W_i(\bar{x}) \sin(\bar{\omega}_1 \bar{t}) + \sum_{j=2,6,13} \bar{f}_j W_j(\bar{x}) \sin(\bar{\omega}_2 \bar{t})$ .

Le seuil  $\varepsilon_{SF}$  à été fixé respectivement à des valeurs égales à  $1 \times 10^{-4}$ ,  $1 \times 10^{-3}$  puis  $1 \times 10^{-2}$  pour le premier cas et  $2 \times 10^{-3}$ ,  $1 \times 10^{-3}$  et  $1 \times 10^{-2}$  pour le deuxième cas de l'effort.

Les résultats montrent que lorsque  $\varepsilon_{SF}$  est trop petit le nombre de modes sélectionnés est important et le nombre de conditionnement de la matrice  $[\mathcal{H}]$  devient élevé (*de l'ordre de 4300 pour les deux cas de l'effort*). Cela signifie que la quantité d'information disponible (*liée directement au nombre de points de mesure*) est plus au moins insuffisante et la solution est dans ces cas trop influencée par le bruit ; seule l'utilisation d'une méthode de régularisation appropriée permettrait d'aboutir à des résultats satisfaisants.

Si  $\varepsilon_{SF}$  est grand le nombre de modes sélectionnés est petit et ne couvre pas tout les modes présents dans l'expression de l'effort et dans ces cas le nombre de conditionnement de la matrice  $[\mathcal{H}]$  chute aux alentours de 75 ce qui signifie que la quantité d'information introduite est surabondante (*le système d'équations à résoudre est largement surdimensionné*). La solution devient excessivement stable c'est-à-dire totalement indépendante du bruit et trop lisse par le fait du manque de modes utilisés dans son expression.

Lorsque le nombre optimal de modes sélectionnés est atteint,  $\varepsilon_{SF} = 1 \times 10^{-3}$  dans les deux cas, la solution augmente de précision comme on peut le remarquer en comparant l'évolution de l'erreur relative des figures IV.4 (b) et IV.5 (b) avec l'erreur sur les figures IV.2 (b) et IV.7 pour le premier cas étudié et entre la figure IV.12 (b) et la figure IV.9 (b) pour le deuxième cas. Cette augmentation de la précision de la reconstruction a été enregistrée surtout pour les composantes de hautes fréquences et sur la solution non régularisée de basses fréquences, ce qui nous permet de dire que le bon choix du nombre de modes utilisées pour la reconstruction constitue en lui même une étape de la régularisation du problème inverse.

## **Bibliographie**

- [1] S.TIMOSHENKO, *Vibration Problems In Engineering* New York, D.Van Nostrand Company, inc
- [2] LEONARD MEIROVITCH, *Fundamentals of vibrations*, McGraw-Hill Companies, Inc 1971
- [3] SEON M. HAN, HAYM BENAROYA AND TIMOTHY WEI, Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and vibration* (1999) 225(5), 935-988
- [4] R. W.TRAILL-NASH and A. R. COLLAR. The effects of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams 1953 *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 6, 186-213.
- [5] T. C. HUANG The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions. *Journal of Applied Mechanics*, 579-584.
- [6] R. D. MINDLIN and H. DERESIEWICZ 1954 *Proceedings of 2nd US. National Congress of Applied Mechanics*, 175-178. New York: ASME.
- [7] G R.COWPER 1966 *Journal of Applied Mechanics*, 335-340. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory.
- [08]N. G. STEPHEN 1978 *ASME Journal of Applied Mechanics* 45, 695-697. On the variation of Timoshenko's shear coefficient with frequency
- [9] F. GRUTTMANN\_W. WAGNER, Shear correction factors in Timoshenko's beam theory for arbitrary shaped cross-sections, *computational mechanics*, 27 2001, p .199-207
- [10]N. G. STEPHEN and M. LEVINSON 1979 *Journal of Sound and vibration* 67, 293}305. A second order beam theory.
- [11] B. POSIADALA, Free vibrations of uniform Timoshenko beams with attachments, *Journal of Sound and Vibration* 204 (2) (1997)
- [12] S.H.HO,C.K.CHEN, Analysis of general elastically restrained non-uniform beams using differential transform, *Applied Mathematical Modelling* 22 (1998) 219-234.
- [13] G. KARAMI, P. MALEKZADEH, S.A. SHAHPARI, A DQEM for vibration of shear deformable nonuniform beams with general boundary conditions, *Engineering Structures* 25 (2003) 1169-1178.
- [14] J. LEE, W.W. SCHULTZ, Eigenvalue analysis of Timoshenko beams and axisymmetric mindlin plates by the pseudo spectral method, *Journal of Sound and Vibration* 269 (2004) 609-621.
- [15] VOJIN JOVANOVIC A Fourier series solution for the transverse vibration response of a beam with a viscous boundary, *Journal of Sound and Vibration*, doi:10.1016/j.jsv.2010.10.007
- [16] JONG-SHYONG WU , CHIN-TZU CHEN, A lumped-mass TMM for free vibration analysis of a multi-step Timoshenko beam carrying eccentric lumped masses with rotary inertias, *Journal of Sound and Vibration* 301 (2007) 878-897
- [17] Pierre Argoul, Mémoire d'habilitation à diriger des recherches Université Claude Bernard-Lyon I
- [18] ALBERT TARANTOLA, *inverse problems theory* , Society for Industrial and Applied Mathematics. 2005
- [19] V.BARCILON , *On the multiplicity of solutions of the inverse problem for a vibrating beam*, *SIAM J. Appl. Math.*, 37 (1979),
- [20] G. M. L. GLADWELL, *The inverse problem for the vibrating beam*, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, 393 (1984), pp. 277-295.
- [21] C.PEZERAT ET J.L GUYADER Identification of vibration sources, *Applied Acoustics* 61 (2000) 309-324

- [22] T.S. JANG , HYOUNGSU BAEK , S.L.HAN , T.KINOSHITA Indirect measurement of the impulsive load to a nonlinear system from dynamic responses: Inverse problem formulation, *Mechanical Systems and Signal Processing* Elsevier Ltd. doi:10.1016/j.ymssp.2010.01.003
- [23] Z. BOUKRIA , P. PERROTIN , A. BENNANI ,Experimental impact force location and identification using inverse problems application for a circular plate INTERNATIONAL JOURNAL OF MECHANICS Issue 1, Volume 5, 2011
- [24] M. KAZEMI1 AND M. R. HEMATIYAN , An Efficient Inverse Method for Identification of the Location and Time History of an Elastic Impact Load, *Journal of Testing and Evaluation*, Vol. 37, No. 6 Paper ID JTE102179
- [25] FERGYANTO E. GUNAWANA, HIROOMI HOMMAB, YASUHIRO KANTO ,Two-step B-splines regularization method for solving an ill-posed problem of impact-force reconstruction *Journal of Sound and Vibration* 297 (2006) 200–214
- [26] X.Q. JIANG, H.Y. HU, Reconstruction of distributed dynamic loads on an Euler beam via mode-selection and consistent spatial expression *Journal of Sound and Vibration* 316 (2008) 122–136
- [27] FRANK G. POLANCO Determining Beam Bending Distribution Using Dynamic Information, *DSTO Aeronautical and Maritime Research Laboratory*, DSTO–RR–0226
- [28] YI. LIU, W.S. SHEPARD JR, An improved method for the reconstruction of a distributed force acting on a vibrating structure, *Journal of Sound and Vibration* 291 (1–2) (2006) 369–387.
- [29] M.C. DJAMAA, N. OUELAA, C. PEZERAT, J.L. GUYADER, Reconstruction of a distributed force applied on a thin cylindrical shell by an inverse method and spatial filtering, *Journal of Sound and Vibration* 301 (3–5) (2007) 560–575.
- [30] MOHAMED CHERIF DJAMAA, résolution du problème inverse de rayonnement d'une coque cylindrique finie et baflée avec Ecoulement interne, thèse de doctorat, *Université Badji Mokhtar Annaba*, 2006
- [31] SIMON CHESNE, Identification d'efforts aux limites des poutres et plaques en flexion par méthode indirecte, Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon Déc.2006
- [32] P.C HANSEN the L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems, *Department of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby, Denmark*
- [33] GENE H. GOLUB, PER CHRISTIAN HANSEN AND DIANNE P. O'LEARY Tikhonov regularization and total least squares, *siam j. sci. comput* AMS subject classifications. 65F20, 65F30
- [34] PER CHRISTIAN HANSEN AND DIANNE PROST O'LEARY the use of the l-curve in the regularization of discrete ill-posed problems. *siam j. sci. comput.vol. 14, no. 6, pp. 1487-1503, november 1993* AMS subject classifications. 65R30, 65F20
- [34] JEAN LOUIS GUYADER, *Vibrations des milieux continus*, Hermès 2000
- [35] QUENTIN LECLERE, Etude et développement de la mesure indirecte d'efforts, application à l'identification des sources internes d'un moteur Diesel, Thèse de doctorat, 2003 INSA Lyon.