République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématiques Appliquées**

Par :

Mr. TOUATI Sami

Intitulé

L'asymptotique des polynômes orthogonaux via la condition polynômiale de Szegő

Dirigé par : Dr. ELLAGGOUNE Fateh

Devant le jury

PRESIDENT	Mme. S. BADI	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Mr. F. ELLAGGOUNE	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Mr. K. FERNANE	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2015

Remerciements

A l'issue de ce modeste travail, je tiens à remercier : Allah qui m'a donné la patience et l'effort pour réaliser ce mémoire .

C'est un plaisir d'exprimer ma profonde gratitude à mon encadreur, monsieur : ELLAGGOUNE Fateh. Ses encouragements et sa disponibilité ont grandement contribué à l'élaboration de ce travail. Ses conseils et son orientation se sont toujours avérés pertinents.

Mes remerciements vont également à Mme. BADI Sabrina et MR .FERNANE Khaireddine qui ont accepté de participer à ce jury et de juger ce travail.

Dédicace

Je tiens à dédier ce modeste travail à

Mes chers parents, pour leur soutien moral et matériel ; les sacrifices et les

encouragements qu'ils m'ont portés durant toute ma vie. Que Dieu

(le tout puissant) les garde pour mois.

Aussi à ma soeur et mon frère.

A toute ma grande famille et toutes mes connaissances.

A mes amis sans exception.

Table des matières

Introduction

Le sujet de polynômes orthogonaux est un classique de mathématique. Une théorie générale de polynômes orthogonaux a commencé avec l'enquête d'un type spécial de fraction continue. Les premiers travaux sur le sujet sont ceux du mathématicien russe Pafnuti Lvovich Chebyshev (1821-1894) et le Néerlandais Thomas Jan Stieltjes (1856-1894). Nous pouvons aussi revenir en arrière dans l'histoire jusqu'à la mémoire classique de Adrien Marie Legendre (1752-1833) sur les mouvements planétaires. On peut également, citer des mathématiciens comme : Carl Jacob Jacobi (1804-1851), Niels Henrik Abel (1802-1829) et Charles Hermite (1822-1901).

Pourquoi se soucier de polynômes orthogonaux ?

Polynômes = des fonctions particulières très simples, tout le monde les comprend.

Orthogonalité = rend les choses simples, en outre, ce phénomène apparaît naturellement dans la vie réelle.

La théorie des polynômes orthogonaux comporte deux parties essentielles qui sont proches. La première traite l'aspect algébrique et l'autre analytique.

a) La partie algébrique de cette théorie est en relation avec les fonctions spéciales, les systèmes orthogonaux concrets comme ceux de Jacobie, Hahn, Askey -Wilson, les polynômes discrets, les polynômes q-orthogonaux,....

Cette partie englobe aussi la théorie des polynômes orthogonaux à plusieurs variables.

b) La deuxième partie analytique traite les questions d'analyse et ceux en rapport avec d'autres parties d'analyse mathématique. Son rôle essentiel est dans l'étude des polynômes orthogonaux sur le cercle et la droite réelle.

Par ailleurs, les polynômes orthogonaux rassemble de nombreux branches mathématique et physique :

- **Analyse complexe** (Approximant de Padé, problème des moments, Conjecture de Bieberbach).
- **Analyse fonctionnelle** (Transformation de Fourier, Analyse spectrale des opérateurs Jacobi).
- **Analyse numérique** (Théorie de l'approximation, quadrature, équation différentielle).
- **Théorie des nombres** (Fraction continue, preuves de l'irrationalité des numéros).
- **Mécanique quantique** (Oscillateur harmonique, opérateur de Schrödinger, état cohérent).
- **Système intégrable** (Solitons,equation de toda).
- Matrice aléatoire, Probleme de Riemann-Hilbert, Théorème de Radon, Harmoniques sphériques zonales, Représentation de groupe, Théorie des codes, Probleme Électrostatique.

L'un des problèmes les plus importants dans la théorie des polynômes orthogonaux est l'étude de leur comportements asymptotiques, Gábor Szego (1895 - 1985) donne une enquête sur le comportement asymptotique des polynômes orthogonaux générales.

Pour une mesure μ et les polynômes $p_n(z)$, il existe une hiérarchie des types de comportement asymptotique.Nous citons ici les plus courants, qui sont appelés fort (Szegö), ratio, et le comportement asymptotique faible (nth-root). Grosso modo, ceux-ci signifient que les suites

(P.1) $\left\{ \frac{p_n(\mu;z)}{\varphi(z)^n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$,

(P.2) $\left\{ \frac{p_{n+1}(\mu;z)}{p_n(\mu;z)} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$,

et

(P.3) $\left\{ \sqrt[n]{p_n(\mu;z)} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$,

respectivement, tend vers une limite sur un certain ensemble de valeurs $z \in \mathbb{C}$ quand $n \to \infty$ (dans (P.1) la fonction φ doit être choisie de manière appropriée).

Jusqu'à présent, la plupart de la théorie asymptotique des polynômes orthogonaux a concentré sur les systèmes orthogonaux pour lequel la mesure d'orthogonalité est supporté sur la droite réelle (OPRL) ou sur le cercle unité (OPUC).

Ce mémoire est organisé comme suit.

Chapitre 1

On commence par rappeler les notions étudiées dans la license concernant la théorie de la mesure , puis on explique la notion du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux aussi les polynômes orthogonaux classiques qui sont les plus connus de ces polynômes On donnera ensuite les principaux cas célèbres fut étudiés .

Chapitre 2

On introduit dans le chapitre 2, les outils fonctionnels de base pour étudier le problème du comportement asymptotique

L'outil fonctionnel de base est l'espace de Hardy dans le disque unité, $H^p(\mathbb{D})$ ($\mathbb{D}$ étant le disque unité ouvert du plan complexe). On donnera la définition de l'espace $H^p(\mathbb{D})$ et ses propriétés fondamentales. On insistera sur l'existence d'une limite non tangentielle pour toute fonction de la classe $H^p(\mathbb{D})$. D'autres espaces de Hardy associées à l'extérieur du disque unité sera également étudié dans ce chapitre. On construit aussi les fonctions dites de Szegö associées aux domaines $\mathbb{D}$ et G .

Chapitre 3

Ce Chapitre et basé sur l'article de Szegö concernant le Comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle . La formule asymptotique des polynômes orthogonaux $\{\varphi_n(z)\}$ associés à σ est :

$$\varphi_n(z) \approx \frac{z^n}{\overline{D}_\rho(\frac{1}{z})}; \ |z| > 1. \tag{1}$$

Chapitre 4

Le travail de Denisov et S. Kupin fait l'objet de notre dernier chapitre , on fait l'étude du problème du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux pour la classe polynomiale de Szegö (pS) en passant par les notions de Représentation de CMV et les règles de somme que nous utilisons pour montrer l'un des Principaux théorèmes , puis nous énonçons les deux théorèmes du Comportement asymptotique ponctuellement et au sens L^2 .

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Rappel de théorie de la mesure

L'un des outils les plus importants que nous utiliserons dans ce mémoire est la théorie de la mesure , on va voir certains de ses notions [3] , [23]

Définition 1.1 [23]

- Une mesure de Borel est une mesure définie sur la tribu des boréliens $\mathcal{B}$ d'un espace topologique X séparé et localement compact.
- Une mesure de Borel σ est dite positive si $\sigma(E) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ pour tout boréliens E de X.
- Une mesure de Borel σ est dite réelle (resp. complexe) si σ (E), $\mathbb{R}$ (resp. σ (E), $\mathbb{C}$) pour tout borélien E de X. Naturellement les mesures de Borel réelles sont des mesures de Borel complexes et ce sont des mesures finies.

Définition 1.2 [23]

Soit m une mesure positive sur une tribu $\mathcal{T}$ et soit σ une mesure arbitraire sur $\mathcal{T}$, σ pouvant être positive ou complexe.

Si $\sigma(E) = 0$ pour tout $E \in \mathcal{T}$ tel que $m(E) = 0$, nous disons que σ est absolument continue par rapport à m, et écrivons

$$\sigma \ll m.$$

S'il existe un ensemble $A \in \mathcal{T}$ tel que $\sigma(E) = \sigma(A \cap E)$ pour tout $E \in \mathcal{T}$, on dit que σ est portée par A. Ceci équivaut à l'hypothèse $\sigma(E) = 0$ pour tout E tel que $E \cap A = \emptyset$.

Soient σ_1, et σ_2 deux mesures sur $\mathcal{T}$ et supposons qu'il existe deux ensembles disjoints A et B tels que σ_1, soit portée par A et σ_2 soit portée par B. On dit que σ_1, et σ_2 sont mutuellement singulières, et on écrit

$$\sigma_1 \perp \sigma_2.$$

Théorème 1.1 (Théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym) [23]
Soit m une mesure positive σ-finie sur un tribu $\mathcal{T}$ sur un ensemble X, et soit σ une mesure complexe sur $\mathcal{T}$.

(a) Il existe un couple unique de mesures complexes σ_a et σ_s sur $\mathcal{T}$ telles que

- $\sigma = \sigma_a + \sigma_s$
- $\sigma_a \ll m$
- $\sigma_a \perp m$

Si σ est positive et finie, σ_a et σ_s le sont aussi et $\sigma_a \perp \sigma_a$.

(b) Il existe un unique élément $h \in L^1(m)$ tel que pour tout $E \in \mathcal{T}$

$$\sigma_a(E) = \int_E hdm.$$

Le couple (σ_a, σ_s) s'appelle la décomposition de Lebesgue de σ relative à m.

L'énoncé (b) est connu sous le nom de Théorème de Radon-Nikodym.

La fonction h est connue sous le nom de la dérivée de Radon-Nikodym (densité)de σ_a par rapport à m. on peut l'exprimer sous la forme $h = d\sigma_a/dm$,ou meme $d\sigma_a = hdm$.

1.2 Système de polynômes orthogonaux

Soit α une mesure de Borel positive, finie, dont le support noté $F = supp\,(\alpha)$, est un sous ensemble infini du plan complexe $\mathbb{C}$. On désigne par $L^2(\mathbb{C}, \alpha)$, l'espace vectoriel :

$$L^2(\mathbb{C}, \alpha) = \left\{ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \, d\alpha(z) < +\infty \right\} \tag{1.1}$$

$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \, d\alpha(z)$, étant l'intégrale de Lebesgue relativement à la mesure α.

On note par $\langle f,g\rangle_\alpha$ le produit scalaire complexe

$$\langle f,g\rangle_\alpha=\int_{\mathbb{C}} f(z)\,\overline{g(z)}d\alpha(z)\,, \tag{1.2}$$

pour $f,\ g\in L^2(\mathbb{C},\alpha)$.

L'espace $\left(L^2(\mathbb{C},\alpha)\,,\langle .,.\rangle_\alpha\right)$ devient un espace de Hilbert complexe. (voir [15]).

Définition 1.3

Soit α une mesure de Borel positive, finie, dont le support F contient un nombre infini de points dans le plan complexe. On appelle système de polynômes orthogonaux associés à la mesure α, le système de polynômes $\{L_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $L_n(z)$ est un polynôme normalis é de degré n, c'est à dire : $L_n(z)=z^n+....$

2) Le système $\{L_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonal dans l'espace $L^2(\mathbb{C},\alpha)$; c'est à dire :

$$\int_F L_n(z)\,\overline{L_m(z)}d\alpha(z)=0;\ si\quad n\neq m. \tag{1.3}$$

Proposition 1.1

Si α vérifie les conditions de la définition 1.1 et si les moments de la mesure α existent; c'est à dire :

$$z^n\in L^2(\mathbb{C},\alpha)\,;\ n=0,\ 1,\ 2...; \tag{1.4}$$

alors le système de polynômes orthogonaux associés à la mesure α existe et il est unique.

Preuve

Il suffit d'appliquer le procédé d'orthogonalisation au système libre $\{1,z,z^2,...\}$ dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{C},\alpha)$ (voir [15]).

1.3 Propriété extrémale

Les polynômes orthogonaux $\{L_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ possèdent une propriété extrémale qui nous sera très utile par la suite.

Théorème 1.2 (propriété extrémale)

Soit $\{L_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ le système de polynômes orthogonaux relativement à la mesure α; α vérifiant les conditions de la proposition 1.1 Notons par $P_{n,1}$ l'ensemble *des polynômes normalisés de degré n. Dans ce cas L_n est la solution du problème extrémal suivant :*

$$\|L_n\|_\alpha^2 = \min_{Q \in P_{n,1}} \|Q\|_\alpha^2 \tag{1.5}$$

avec : $\|f\|_\alpha^2 = \langle f, f \rangle_\alpha ;\ \forall f \in L^2(\mathbb{C}, \alpha)$.

Preuve

Soit $Q \in P_{n,1}$, alors :

$$Q = \sum_{k=0}^{n} a_k L_k \text{ avec } a_n = 1.$$

d'autre part

$$\|Q\|_\alpha^2 = \|L_n\|_\alpha^2 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 \|L_k\|_\alpha^2 .$$

Cette expression est minimale si et seulement si $a_0 = a_1 = ... = a_{n-1} = 0$.

1.4 Comportement asymptotique

Définition 1.4

On appelle problème du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux relativement à la mesure α l'étude du problème suivant :

Etudier : $\lim_{n \to \infty} L_n(z) ;\ z \in F \text{ ou } z \in K;\ K \text{ compact de } \mathbb{C} \backslash F;\ \text{avec } F = supp(\alpha)$.

La solution de ce problème dépend en général de α et de son support F.

1.5 Polynomes orthogonaux classiques

Certaines familles de polynômes orthogonaux revêtent une importance particulière puisqu'elles apparaissent dans de nombreuses applications, entre autres comme solutions d'équations différrentielles ayant une signification physique.

Les systèmes de polynômes orthogonaux qui portent le nom de Hermite, Laguerre, et Jacobi (y compris les cas particuliers nommés d'après Tchebychev, Legendre, Gegenbauer) sont incontestablement les systèmes les plus étudiés et largement appliqués. Ces trois systèmes sont appelé collectivement les polynômes orthogonaux classiques.

Les polynômes de Jacobi, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ sont les polynômes définis par la formule

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-2)^{-n}(n!)^{-1}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}]$$

ici α et β sont des paramètres tq $\alpha > -1$, $\beta > -1$

cette formule s'appelle la formule de Rodrigues .

Parmi les nombreux cas particuliers qui ont reçu une attention particulière, le Voici les plus importants.

(i) Les polynômes de Legendre ($\alpha = \beta = 0$)

$$P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x).$$

(ii) Les polynômes de Tchebychev de première espèce ($\alpha = \beta = -1/2$)

$$T_n(x) = 2^{2n}\binom{2n}{n}^{-1} P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x).$$

(iii) Les polynômes de Tchebychev de seconde espèce ($\alpha = \beta = 1/2$)

$$U_n(x) = 2^{2n}\binom{2n+1}{n+1}^{-1} P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x).$$

(iv) Les polynômes Gegenbauer ($\alpha = \beta$)

$$C_n^{(\lambda)}(x) = \binom{2\alpha}{\alpha}^{-1}\binom{n+2\alpha}{\alpha} P_n^{(\alpha,\alpha)}(x),$$

$$\alpha = \lambda - 1/2 \neq -1/2$$

Le polynôme Laguerre, $L_n^{(\alpha)}(x)$ sont definis

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (n!)^{-1}x^{-\alpha}e^{x}\frac{d^n}{dx^n}[x^{n+\alpha}e^{-x}].$$

La plupart des relations formelles restent valables si α n'est pas un nombre entier négatif .

Les polynômes d'Hermite, $H_n(x)$ sont définis comme suit

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}.$$

Remarque 1.1

1. *Il existe une caractéristique commune des familles classiques de polynômes orthogonaux permet de les caractériser. En effet , elles satisfont une équation différentielle de la forme*

$$a_1(X)y'' + a_2(x)y' + \lambda y = 0.$$

2. *Le comportement asymptotique des polynômes orthogonaux classiques a été étudié par Szegö dans son livre Szegö est lui même qui a développé la théorie asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle unité, et l'intervalle unité pour des poids qui répondent à la condition dite de Szegö.*

1.6 Synthèse de quelques cas étudiés

Nous allons résumer dans cette partie selon la mesure σ et son support F, le comportement asymptotique d'une classe assez large de polynômes orthogonaux ou extrémaux relativement à la mesure σ et qui s'avèrent la plus intéressante pour notre étude.

a) $F = [-\pi, \pi]$; σ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[-\pi, \pi]$; c'est à dire :

$$d\sigma = \rho(\theta)\, d\theta; \;\; \rho \in L^1\left([-\pi, \pi], d\theta\right); \;\; \rho \geq 0.$$

Ce cas correspond au comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle avec fonction poids. Ce problème a été étudi é profondément par Szegö en 1921 ([32]) . La formule asymptotique des polynômes orthogonaux $\{T_n(z)\}$ associés à σ est :

$$T_n(z) \approx \frac{z^n}{\overline{D}_\rho(\frac{1}{z})}; \;\; |z| > 1, \tag{1.6}$$

où D_ρ est une fonction holomorphe dans le disque unité ouvert, construite par Szegö et porte son nom. Szegö a utilisé la propriété extrémal des polynômes orthogonaux pour trouver la formule (1.6) . Sa méthode a été reprise et d éveloppée pour trouver la formule asymptotique d'autres types d polynômes orthogonaux.

Krein ([18]), et Gueronimus ([7]), ont généralisé cette étude dans le cas o ù σ est non absolument continue.

b) $F = [-1, +1]$; $d\sigma = \rho(x)\, dx$; $\rho \geq 0$; $\rho \in L^1([-1, +1], dx)$.

Ce cas correspond au comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le segment avec fonction poids. Szegö dans ([32]) a établi une relation entre les polynômes orthogonaux sur le cercle et ceux du segment, en utilisant cette relation, il a déduit la formule asymptotique des polynômes orthogonaux sur le segment de celle du cercle. Cette formule a la même forme que la formule (1.6).

c) $F = E$, E est un contour de Jordan rectifiable ; σ est absolument continue par rapport à la mesure longueur d'arc, c'est à dire :

$$d\sigma = \rho(\xi)\, |d\xi| ; \ \xi \in E; \ \rho \in L^1(E, |d\xi|); \ \rho \geq 0.$$

La formule asymptotique a toujours la forme suivante :

$$T_n(z) = [C(E)\, \Phi(z)]^n \varphi(z) [1 + \varepsilon_n(z)] \tag{1.7}$$

où, $C(E)$ est une constante qui dépend de E, Φ est l'application conforme du domaine $\Omega = ext(E)$ vers l'ext érieur du cercle unité ; φ est une fonction holomorphe dans Ω, solution d'un problème extrémal, et enfin $\varepsilon_n \to 0$ uniformément sur les compacts de Ω.

Szegö ([34]) en 1921, avait étudié ce problème mais dans le cas où $\rho \equiv 1$, et E est analytique. Cette théorie s'est développée en considérant des classes de fonctions poids et de contours de plus en plus larges. On peut citer par exemple : Smirnov ([26], [28]), Korovkine ([17]), Geronimus ([6], pour $0 < p < \infty$) ; Souetine ([29]).

d) $F = \bigcup_{i=1}^{S} E_i$ où tout E_i est un contour de Jordan rectifiable ou un arc. σ est absolument continue sur chaque E_i.

Ce cas a été profondément étudié en 1969 par H. Widom ([35]).

e) $F = \Gamma \cup \{z_k\}_{k=1}^{\ell}$; Γ étant le cercle unité, $z_k \in ext(\Gamma)$, $\sigma = \alpha + \gamma$, α est concentrée sur Γ assez générale, et $\gamma = \sum_{k=1}^{\ell} A_k \delta_{z_k}$; $A_k > 0$.

Ce problème a été étudié en 1994 par X. Li et K. Pan [20], et a été appliqué à l'étude de la distribution des zéros des polynômes orthogonaux associés à σ.

f) $F = E \cup \{z_k\}_{k=1}^{\ell}$, $E = \bigcup_{k=1}^{S} E_k$ est l'union de contours et arcs dans le plan complexe de la classe C^{2+}, avec $E_j \cap E_k = \emptyset$, $j \neq k$, $z_k \in ext(E)$ et $\sigma = \alpha +$

$\sum_{k=1}^{\ell} A_k \delta_{z_k}$, $A_k > 0$.

En 2000, V. Kaliaguine et A. Kononova [14] donnent le résultat dans le cas général.

g) $F = E$, E est un contour de Jordan analytique, la mesure étant variable de la forme :

$$d\sigma_n = \frac{d\sigma}{|Y_n|^p} \tag{1.8}$$

où σ est une mesure de Borel positive concentrée E, $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de polynômes tel que, pour tout n, Y_n est de degré n, de zéros $w_{n,i}$, $i = 1, ..., n$ appartient à l'extérieur du contour $|\Phi(z)| = R > 1$, où Φ est la transformation conforme de l'extérieur de E vers l'extérieur du cercle unité.

Ce cas a été étudié en 2005 par M. Bello Hernandez, J. Minguez Ceniceros [1]
.

h) $F = \Gamma$; Γ est le cercle unité. Ce problème a été étudié en 2006 par S. Denisov et S. Kupin [5] et sera développé au chapitre IV , pour une mesure plus générale σ appartient à la classe polynomiale de Szegö définie par

$$d\sigma\left(e^{i\theta}\right) = \sigma'_{ac}\left(e^{i\theta}\right) d\theta + d\sigma_s\left(e^{i\theta}\right),$$

σ_s est singulière et la partie absolument continue σ'_{ac} de σ vérifie la condition généralisé e de Szegö

$$\int_0^{2\pi} p\left(e^{i\theta}\right) \log \sigma'_{ac}\left(e^{i\theta}\right) d\theta > -\infty,$$

où p est un polynôme trigonométrique, non négatif sur le cercle unité Γ.

Chapitre 2

Espaces de Hardy et fonctions de Szegö

2.1 Espaces de Hardy dans le disque unité ouvert

Les espaces de Hardy H^p sont certains espaces de fonctions holomorphes. Ils ont été introduits par Riesz en 1923, ils étaient nommés par lui en l'honneur de G. H. Hardy[9], en raison de son papier publié en 1915 .

La théorie des espaces de hardy possède une proche connexions à de nombreuses branches des mathématiques, notamment l'analyse de Fourier, l'analyse harmonique, la théorie de la probabilité.

Depuis le travail de G .H .hardy dans le disque unité ouvert, on trouve beaucoup des mathematiciens parmi eux V. J. Smirnov [26], [27], [28] J.E Littlewood, R. Nevanlinna et notamment W. Rudin qui a généralisé en 1951 l'étude de ces espaces dans un ouvert connexe quelconque .

Des ouvrages de K. Hoffman [10], de P. Koossis [16] , de S. Zygmund [36], sont intéressants pour une étude générale sur les espaces de Hardy dans le disque unité ouvert.

Espace $H^p(\mathbb{D})$

Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, le disque unité ouvert. Notons par $H(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$.

Théorème 2.1 [23]

Soit $f \in H(\mathbb{D})$, définissons pour $r : 0 \leq r < 1$;

$$M_p(f,r) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}, \; (0 < p < \infty).$$

Les fonctions M_p sont croissantes par rapport à la variable r dans $[0,1[$.

Ce théorème suggère la définition suivante :

Définition 2.1

Soit $f \in H(\mathbb{D})$ et $0 < p < \infty$. Posons :

$$\|f\|_p = \lim_{r \to 1^-} M_p(f,r)$$

où $M_p(f,r)$ est définie au théorème 2.1. La classe $H^p(\mathbb{D})$ est définie comme l'ensemble des fonctions $f \in H(\mathbb{D})$ pour lesquelles $\|f\|_p < \infty$.

Remarque 2.1

Comme les fonctions M_p sont croissantes par rapport à la variable r dans $[0,1[$, si $f \in H(\mathbb{D})$ alors $\|f\|_p$ existe toujours dans $\overline{\mathbb{R}}$ et

$$\|f\|_p = \sup_{0 \leq r < 1} \{M_p(f,r)\}. \tag{2.1}$$

Théorème 2.2 [23]

Pour $1 \leq p < \infty$; l'espace $\left(H^p(\mathbb{D}), \|\cdot\|_p\right)$ est un espace de Banach.

Définition 2.2

La classe de Nevanlinna $\mathcal{N}$ est la classe de toutes les fonctions $f \in H(\mathbb{D})$ telles que :

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < \infty$$

on a $\log^+ x = (|\log x| + \log x)/2$ aussi $\log^- x = (|\log x| - \log x)/2$.

Théorème 2.3 [23]

Nous avons les inclusions suivantes :

$$H^p(\mathbb{D}) \subset H^s(\mathbb{D}) \subset \mathcal{N}$$

pour $0 < s < p < \infty$.

Démonstration. pour $0 < s < p$ d 'après l 'inégalité de Holder, pour f mesurable sur le cercle centré en 0 de rayon r $\in]0,1[$ on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^s d\theta < \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{s/p} (2\pi)^{1-s/p},$$

et donc $M_s(f,r) \leq M_p(f,r)$. ainsi $H^p(\mathbb{D}) \subset H^s(\mathbb{D})$ pour $0 < s < p$ Enfin, pour tout $s > 0$, comme $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^s} = 0$, il existe $A > 0$ tel que $\frac{\log x}{x^s} \leq A$ pour tout $x \geq 1$. Par conséquent, si f mesurable sur le cercle centré en 0 de rayon r $\in]0,1[$ on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta = \int_{\theta\in[-\pi,\pi]:|f(re^{i\theta})|\geq 1} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \leq A \int_{\theta\in[-\pi,\pi]:|f(re^{i\theta})|\geq 1} |f(re^{i\theta})|^s d\theta$$

□

2.2 Etude particulière de $H^2(\mathbb{D})$

L'importance particulière de l'espace $H^2(\mathbb{D})$ est due au fait qu'il s'agit d'un espace de Hilbert et qu'on peut l'identifier à un sous ensemble de $L^2(\mathbb{T})$, où $\mathbb{T}$ est le cercle unité. D'autre part $H^2(\mathbb{D})$ est l'espace fonctionnel de base qu'on utilisera pour étudier le comportement asymptotique des polynômes orthogonaux. Avant de donner les propriétés fondamentales de $H^2(\mathbb{D})$, définissons les espaces $L^p(\mathbb{T})$.

Espace $L^p(\mathbb{T})$

Soit $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle unité du plan complexe. Si F est une fonction définie sur $\mathbb{T}$ et à valeurs complexe et si on définit la fonction f par :

$$f(\theta) = F\left(e^{i\theta}\right) \tag{2.2}$$

alors f est définie sur $\mathbb{R}$, périodique, de période 2π.

Réciproquement, si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique, de période 2π, alors il existe une fonction F définie sur $\mathbb{T}$ vérifiant (2.2).

On peut ainsi identifier les fonctions définies sur $\mathbb{T}$ avec les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, périodique, de période 2π. Cette identification nous permet de donner la définition suivante :

Définition 2.3

Pour $1 \leq p < +\infty$, $L^p(\mathbb{T})$ *désigne la classe de toutes les fonctions à valeurs complexes, mesurables au sens de Lebesgue, périodique, de période* 2π, *définies sur* $\mathbb{R}$, *pour lesquelles la norme :*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}} \text{ est finie.} \tag{2.3}$$

Théorème 2.4

$L^2(\mathbb{T})$ *est un espace de Hilbert complexe pour le produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, . \overline{g(t)} dt \tag{2.4}$$

pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$ *et tout* $g \in L^2(\mathbb{T})$. Les propriétés fondamentales de l'espace $H^2(\mathbb{D})$ sont résumées dans le théorème suivant :

Théorème 2.5 [23]

a) Une fonction $f \in H(\mathbb{D})$ *de la forme*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (z \in \mathbb{D})$$

appartient à $H^2(\mathbb{D})$ *si et seulement si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Dans ce cas

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 .$$

b) Si $f \in H^2(\mathbb{D})$ *alors* $\lim_{r \to 1^-} f(re^{i\theta})$ *existe en presque tous les points de* $\mathbb{T}$. *Cette limite sera notée* $f^*(e^{i\theta})$, *on l'appelera limite non tangentielle de* f; $f^* \in L^2(\mathbb{T})$ *et* $\|f\|_2 = \|f^*\|_{L^2(\mathbb{T})}$. *De plus* f *et l'intégrale de Cauchy de* f^*, *c'est-à -dire :*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1} \frac{f^*(\xi)}{\xi - z} d\xi, \; z = re^{i\theta}, \; 0 \leq r < 1;$$

où C_1 *est le cercle unité orienté positivement.*

2.3 Espace de Hardy à l'exterieure du disque unité

Notons par : $G = \{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\} \cup \{\infty\}$, $H(G)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans G (∞ y compris) et par $C_r = \{w \in \mathbb{C} : |w| = r\}$.

Définition 2.4

Soit $f \in H(G)$, on dit que $f \in H^2(G)$ s'il existe une constante C positive, indépendante de r, telle que :

$$\int_{C_r} |f(w)|^2 |dw| \leq C; \forall r : 1 < r \leq 2.$$

Si $f \in H^2(G)$, on note par :

$$\|f\|^2_{H^2(G)} = \sup_{1<r\leq 2} \int_{C_r} |f(w)|^2 |dw|. \tag{2.5}$$

Remarque 2.2

La définition de l'espace de Hardy dans le disque unité ouvert est équivalente à celle donnée dans la définition 2.4

En effet d'après la remarque 2.1, on a :

$$f \in H^2(\mathbb{D}) \Longleftrightarrow \sup_{0\leq r<1} \int_{C_r} |f(z)|^2 |dz| < +\infty.$$

Poroposition 2.1

Soit $f \in H(\mathbb{D})$, définissons g par :

$$\begin{aligned} g(w) &= f\left(\frac{1}{w}\right), \text{ pour } w \in G\backslash\{\infty\}, \\ g(\infty) &= f(0); \end{aligned}$$

alors $f \in H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si $g \in H^2(G)$.

Notons par :

$$L^2(C_r, |dz|) = \left\{ f : C_r \to \mathbb{C} : \int_{C_r} |f(z)|^2 |dz| < \infty \right\};\ r > 0$$

où $|dz|$ est la mesure longueur d'arc.

Ceci étant les propriétés de l'espace $H^2(G)$ sont résumées dans le théorème suivant :

Théorème 2.6

Soit $f \in H^2(G)$ alors :

a) $\lim_{r \to 1^+} f(re^{i\theta})$ existe en presque tous les points du cercle unité, Cette limite est appelée limite non tangentielle et elle se note f_1.

b) $f_1 \in L^2(C_1, |dw|)$ et $\int_{C_1} |f_1(w)|^2 |dw| = \|f\|^2_{H^2(G)} = \lim_{r \to 1^+} \int_{C_r} |f(w)|^2 |dw|$.

c) L'espace $H^2(G)$ est un espace de Hilbert complexe pour le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{H^2(G)} = \int_{C_1} f_1(w) . \overline{g_1(w)} |dw|$$

d) $\forall w \in G \setminus \{\infty\}$, $f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1} \frac{f_1(\xi)}{\xi - w} \frac{d\xi}{w}$.

Preuve

a) Soit $f \in H^2(G)$, alors : $\exists\, C > 0$ tel que : $\int_{C_r} |f(w)|^2 |dw| \leq C; \forall r : 1 < r \leq 2$.

En éffectuant le changement de variables $w = \frac{1}{w'}$, on a : $dw = -\frac{1}{w'^2} dw'$, ceci nous donne :

$$\begin{aligned} \int_{C_r} |f(w)|^2 |dw| &= \int_{C_{r'}} \left| f\left(\frac{1}{w'}\right)\right|^2 \frac{1}{|w'|^2} |dw'| \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(\frac{1}{r'e^{i\theta}}\right)\right|^2 \frac{1}{r'^2} r' d\theta \\ &= \frac{1}{r'} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(\frac{1}{r'e^{i\theta}}\right)\right|^2 d\theta;\ \frac{1}{2} \leq r' < 1. \end{aligned}$$

donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(\frac{1}{r'e^{i\theta}}\right)\right|^2 d\theta \leq r'.C \leq C$$

possons :

$$f_1(r'e^{i\theta}) = f\left(\frac{1}{r'e^{i\theta}}\right);$$

alors $f_1 \in H^2(U)$, ce qui implique que $\lim\limits_{r' \to 1^-} f_1\left(r'e^{i\theta}\right)$ existe presque partout pour $-\pi \leq \theta \leq \pi$;
or

$$\lim_{r' \to 1^-} f_1\left(r'e^{i\theta}\right) = \lim_{r' \to 1^-} f_1\left(\frac{1}{r'e^{i\theta}}\right) = \lim_{r \to 1^+} f\left(re^{i\theta}\right);$$

ce qui donne le point a).
Les points b) et c) sont une conséquence immédiate de a) et du th éorème 2.5

2.4 Fonction de Szegö associées au disque unité

Pour l'avancement de notre memoire il faut se rendre compte que la partie absolument continue d'une mesure est la valeur absolue de la limite non tangentielle d'une fonction analytique ,souvent appelé la fonction de Szegö.

La fonction de Szegö prendra des formes différentes dans divers contextes. Une forme commune sera la fonction que nous noterons $D_f(z)$ définie sur $\mathbb{D}$ et elle est utile dans le contexte de la théorie des polynômes orthogonaux sur le cercle unité .Cependant, afin de définir $D_f(z)$,nous avons besoin de faire quelques hypothèses à propos de la mesure en question. Comme on vient de l'indiquer , La fonction $D_f(z)$ dépendra uniquement sur la partie absolument continue de la mesure μ, alors nous exigerons que la mesure μ a un composant absolument continu, mais nous devons assumer encore plus. Soit μ une mesure définie sur le cercle unité, telle que

$$d\mu(\theta) = f(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} + d\mu_s(\theta).$$

ou $d\mu_s$ est la partie singuliare par rapport à la mesure de Lebesgue linéaire sur $[0, 2\pi]$ et$f(\theta)$ est la dérivée de Radon Nikodym de μ (fonction poids), que nous pouvons également notée $\mu'(\theta)$. Pour définir la fonction Szegö nous exigeons :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} > -\infty, \tag{2.6}$$

2.6 s'appelle la condition de Szegö, 2.6 équivaut à dire $\log f(\theta) \in L^1(\frac{d\theta}{2\pi})$.

Maintenant, pour une mesure de Szegö μ sur $\mathbb{T}$, la fonction de Szegö est définie par

$$D_f(z) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log(f(\theta))\frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}d\theta\right\} \qquad (|z|<1)$$

Théorème 2.7

$D_f(z)$ dite la fonction de Szegö associée à $\mathbb{D}$ et à la fonction poids f, possède les propriétés suivantes :

1) $D_f \in H^2(\mathbb{D})$.

2) $D_f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{D}$.

3) $|D_f^*(e^{ix})|^2 = f(x)$ presque partout sur $[-\pi,\pi]$.

où D_f^* est la limite non tangentielle de D_f.

4) $D_f(0) > 0$.

Preuve

Construction de D_f

Considérons l'intégrale de Poisson associée à la fonction $\log(f)$ qu'on note par :

$$u(r,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log(f(\theta))\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta.$$

La fonction u est harmonique dans le disque unité puisque $\log(f) \in L^1([-\pi,\pi], d\theta)$ [23] .

Considérons maintenant la fonction holomorphe $h(z)$ dont $u(r,x)$ est la partie réelle et éxigeons que $h(0)$ soit réelle pour avoir l'unicité de h. La fonction cherchée sera donc

$$g(z) = \exp\left\{\frac{1}{2}h(z)\right\}$$

on montre facilement que :

$$\mathrm{Re}D_f(z) = \mathrm{Re}g(z); \ (z = re^{ix},\ 0 \le r < 1)$$

alors

$$D_f(z) = g(z)$$

1) Montrons que :

$$\exists c > 0 \ tel\ que : \forall r : 0 \le r < 1; \ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_f(re^{ix})|^2 dx \le c$$

en effet

$$\begin{aligned}
|D_f(z)| &= \left|\exp\left\{\frac{1}{2}\left(\mathtt{Re}h\,(z)+i\mathtt{Im}h(z)\right)\right\}\right| \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2}\mathtt{Re}h\,(z)\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2}u\,(r,x)\right\}.
\end{aligned}$$

Par suit, pour $z=re^{ix}$, $0\leq r<1$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|D_f(re^{ix})\right|^2 &= \exp\{u\,(r,x)\} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left(f\,(\theta)\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta\right\} \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\,(\theta)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta \text{ (}\textit{inégalité de Jensen}\text{[33].}
\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à x on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|D_f(re^{ix})\right|^2dx &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\,(\theta)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta\right)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\,(\theta)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}dx\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\,(\theta)\,d\theta=C. \quad \forall r:\ 0\leq r<1.
\end{aligned}$$

ce qui donne le point 1).

2) est évident.

3) $D_f\in H^2\,(\mathbb{D})$, notons par D_f^* la limite non tangentielle de D_f; et comme :

$$\left|D_f\left(re^{ix}\right)\right|^2=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log(f\,(\theta))\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta\right\}$$

il vient :

$$\begin{aligned}
\left|D_f^*\left(e^{ix}\right)\right|^2 &= \lim_{r\to1^-}\left|D_f\left(re^{ix}\right)\right|^2 \\
&= \exp\left\{\lim_{r\to1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\log\left(f\left(\theta\right)\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}d\theta\right\} \\
&= \exp\left\{\log f\left(x\right)\right\},\ p.p\ sur\ \left[-\pi,\pi\right];\ (voir[23],[34],[36]).
\end{aligned}$$

4) $D_f(0)=\exp\left\{\frac{1}{2}h\left(0\right)\right\}>0$. ($h(0)$ est réel par construction).

2.5 Fonction de Szegö associée à l'extérieur du cercle unité

Théorème 2.8

Soit f une fonction non négative intégrable de Lebesgue sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ et vérifiant la condition de Szegö

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log f(t)dt>-\infty.$$

Alors il existe une fonction unique notée D_f^e et appelée fonction de Szegö associée à l'extérieur de $\mathbb{T}$ et à la fonction poids f, possédant les propriétés suivantes :

1) $D_f^e\in H^2\left(G\right)$.

2) $D_f^e\left(w\right)\neq0\quad\forall w\in G$.

3) $\left|\left(D_f^e\right)^*\left(e^{ix}\right)\right|^2=f\left(x\right)$ presque partout sur $\left[-\pi,\pi\right]$.

où $\left(D_f^e\right)^*$ est la limite non tangentielle de D_f^e.

4) $D_f^e\left(\infty\right)>0$.

Preuve

Considérons la fonction de Szegö D_f introduite dans le théorème 2.7 et construisons la fonction D_f^e de la façon suivante :

$D_f^e\left(w\right)=D_f\left(\frac{1}{w}\right)$ pour $w\in G\setminus\left\{\infty\right\}$.

$D_f^e\left(\infty\right)=D_f\left(0\right)$.

Alors les propriétés de D_f et la proposition 2.1 nous donne les propriétés de D_f^e.

Notons que la forme explicite de D_f^e est exactement la fonction :

$$D_f^e(w) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log(f(\theta))\frac{w+e^{-i\theta}}{w-e^{-i\theta}}d\theta\right\} \quad (|w|>1).$$

2.5.1 Compacité et convergence dans $H(\Omega)$

La convergence sur les sous-ensembles compacts, est la convergence qui intervient le plus naturellement en rapport avec les opérations de limite sur les fonctions holomorphes.

Pour définir cette notion, on commence par énoncer une propriété des sous ensembles ouverts du plan complexe, qui nous permet de construire une métrique sur $H(\Omega)$.

Théorème 2.9 [4] ,[23]

Tout ouvert Ω du plan est la réunion d'une suite $\{K_n\}$, $n = 1, 2, ...$, de compacts tels que :

(a) K_n soit inclus dans l'intérieur de K_{n+1} pour $n = 1, 2, ...$

(b) Tout sous-ensemble compact de Ω soit inclus dans l'un des K_n.

(c) Toute composante de $S^2 - K_n$ contienne une composante de $S^2 - \Omega$, pour $n = 1, 2, ...$

S^2 étant la sphère de Riemann.

Ceci étant, pour f et g deux fonctions quelconques de $H(\Omega)$, définissons :

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{d_n(f,g)}{1+d_n(f,g)}, \text{ o ù } d_n(f,g) = \sup_{z\in K_n}\{|f(z)-g(z)|\}.$$

On montre dans [23] que$(H(\Omega), d)$ est un espace métrique complet et qu'une suite de fonctions de $H(\Omega)$ converge au sens de la métrique d si et seulement si elle converge uniformément sur chaque sous-ensemble compact de Ω. Cette dernière caractérisation de la convergence au sens de la mé trique d, nous permet de donner et justifier la définition suivante :

Définition 2.5

Soient $\{f_n\}$ une suite de $H(\Omega)$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que $\{f_n\}$ converge vers f dans le sens de $H(\Omega)$, si $\{f_n\}$ converge uniformément vers f sur chaque sous-ensemble compact de Ω.

Théorème 2.10

Soit $\{f_n\}$ *une suite de* $H(\Omega)$. *Si* $f_n \to f$ *au sens de* $H(\Omega)$. *Alors* $f \in H(\Omega)$, *et* $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ *au sens de* $H(\Omega)$ *pour chaque* $k \geq 1$.

Chapitre 3

Comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle

3.1 Introduction

On présente dans ce Chapitre une étude du problème de comportement asymptotique des polynômes orthonormés sur le cercle avec fonction poids . Tout les résultats cités dans ce Chapitre sont largement inspirés de l'article de Szegö [31] .
Cet article est une référence de base dans l'étude des comportements asymptotiques des polynômes orthogonaux. Szegö a considéré des fonctions poids assez générales. Sa méthode a été largement utilisée, avec des améliorations convenables, pour étudier les comportements asymptotiques des polynômes orthogonaux pour d'autres types d'ensembles et de mesures (contour, arc, mesures non absolument continues...).

3.2 Polynômes orthonormés sur le cercle

Soit $\rho \in L^1(\mathbb{T})$ tel que $\rho \geq 0$ et $\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta)\, d\theta > 0$. On désigne par $L^2_\rho(\mathbb{T})$ la classe des fonctions g définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, périodiques de période 2π, mesurables au sens de Lebesgue dans $[-\pi, \pi]$, pour lesquelles $\int_{-\pi}^{\pi} |g(\theta)|^2 \rho(\theta)\, d\theta < +\infty$. Si φ et ψ sont deux fonctions dans $L^2_\rho(\mathbb{T})$; alors l'espace $\left(L^2_\rho(\mathbb{T}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2_\rho(\mathbb{T})}\right)$

devient un espace de Hilbert complexe pour le produit scalaire suivant :

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2_\rho(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta)\,\overline{\psi(\theta)}\rho(\theta)\,d\theta;$$

notons sa norme par

$$\|\varphi\|^2_{L^2_\rho(\mathbb{T})} = \langle \varphi, \varphi \rangle_{L^2_\rho(\mathbb{T})}.$$

Définition 3.1

Soit ρ une fonction poids vérifiant : $\rho \in L^1(\mathbb{T})$; ρ non négative et $\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta)\,d\theta > 0$. On dit que le système de polynômes $\{\varphi_n(z) : n = 0, 1, 2, ...;\ z \in \mathbb{C}\}$ est un système orthonormal relativement au cercle et à la fonction poids ρ, si $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions suivantes :

1) $\varphi_n(z)$ est un polynôme de degré n exactement dont le coefficient de z^n est réel et strictement positif.

2) Le système $\{\tilde{\varphi}_n(\theta) = \varphi_n(e^{i\theta})\}_{n=0,1,2,...}$ est orthonormé dans $L^2_\rho(\mathbb{T})$; c'est-à-dire :

$$\langle \tilde{\varphi}_n, \tilde{\varphi}_m \rangle_{L^2_\rho(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(z)\,\overline{\varphi_m(z)}\rho(\theta)\,d\theta = \delta_{n,m};\ n, m = 0, 1, 2, ...;\ z = e^{i\theta}. \tag{3.1}$$

Remarque 3.1

Si on définit la fonction ρ_1 par $\rho_1(e^{i\theta}) = \rho(\theta)$ et $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, on obtient :

$$\langle \tilde{\varphi}_n, \tilde{\varphi}_m \rangle_{L^2_\rho(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi}\int_{C_1} \varphi_n(z)\,\overline{\varphi_m(z)}\rho_1(z)\,|dz| = \delta_{n,m};\ n, m = 0, 1, 2, ...;\ z = e^{i\theta}.$$

Donc l'orthogonalité (3.1) est l'orthogonalité sur le cercle avec la présence d'une fonction poids ρ_1 ; ce qui justifie le titre du paragraphe 3.1.

Proposition 3.1

Soit ρ une fonction poids vérifiant : $\rho \in L^1(\mathbb{T})$; ρ non négative et $\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta)\,d\theta > 0$; alors il existe un système de polynômes orthogonaux unique $\{\varphi_n(z)\}_{n=0,1,2,...}$ relativement au cercle et à la fonction poids ρ, c'est- à-dire vérifiant les conditions 1) et 2) de la définition 3.1.

Preuve

La construction du système $\{\varphi_n\}$ pourra se faire de plusieurs façon ; citons deux façons qui nous serons utiles plus tard.

Première construction :

Considérons le système $\{z^n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ et posons

$$\tilde{\psi}_n(\theta) = \psi_n\left(e^{i\theta}\right) = \left(e^{i\theta}\right)^n = z^n; \ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Alors $\tilde{\psi}_n \in L^2_\rho(\mathbb{T})$ car :

$$\left\|\tilde{\psi}_n\right\|^2_{L^2_\rho(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\tilde{\psi}_n(\theta)\right|^2 \rho(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\rho(\theta)\, d\theta < +\infty;$$

de plus le système $\left\{\tilde{\psi}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $L^2_\rho(\mathbb{T})$. Donc en appliquant le procédé d'orthogonalisation de Grahm Schmidt au système $\left\{\tilde{\psi}_n\right\}_{n=0,1,2,\ldots}$; on obtient :

$\exists\ \{\tilde{\varphi}_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$; $\tilde{\varphi}_n \in L^2_\rho(\mathbb{T})$ tel que :

1) $\tilde{\varphi}_n = \lambda_{n,n}\tilde{\psi}_n + \lambda_{n,n-1}\tilde{\psi}_{n-1} + \ldots + \lambda_{n,0}\tilde{\psi}_0;\quad \lambda_{n,n} > 0.$

2) $\langle\tilde{\varphi}_n, \tilde{\varphi}_m\rangle_{L^2_\rho(\mathbb{T})} = \delta_{n,m};\ n, m = 0, 1, 2, \ldots.$

Développons 1) et 2) :

1) $$\tilde{\varphi}_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}\tilde{\psi}_k(\theta) = \sum_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}\psi_k\left(e^{i\theta}\right)$$

donc : $\varphi_n(z) = \sum_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}z^k;\quad \lambda_{n,n} > 0,\ \ z = e^{i\theta}.$

2) $$\begin{aligned}\langle\tilde{\varphi}_n, \tilde{\varphi}_m\rangle_{L^2_\rho(\mathbb{T})} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{\varphi}_n(\theta)\,\overline{\tilde{\varphi}_m(\theta)}\rho(\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(z)\,\overline{\varphi_m(z)}\rho(\theta)\, d\theta;\quad \left(z = e^{i\theta}\right) \\ &= \delta_{n,m};\ n, m = 0, 1, 2, \ldots.\end{aligned}$$

Deuxième construction :

Exigeons que $\log(\rho) \in L^1(\mathbb{T})$; ceci nous permet de considérer la fonction de Szegö D_ρ associée à ρ et au disque unité U.

Considérons le système $\{h_n(z)\}_{n=0,1,2,\ldots}$ d éfini par :

$$h_n(z) = D_\rho(z).z^n;\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Alors on a :

a) $h_n \in H^2(U)$; $n = 0, 1, 2, ...$

En effet :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|h_n(re^{i\theta})\right|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|D_\rho(re^{i\theta})\right|^2 r^{2n} d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|D_\rho(re^{i\theta})\right|^2 d\theta; \ pour : 0 \leq r < 1 \\
&< +\infty; \ car \ D_\rho \in H^2(U).
\end{aligned}$$

b) $\{h_n\}$ est libre dans $H^2(U)$.

Ceci nous permet d'appliquer le procédé d'orthogonalisation de Grahm Schmidt au système $\{h_n\}$ dans l'espace de Hilbert $H^2(U)$; on obtient :

$\exists\ \{r_n\}_{n=0,1,2,...}$; $r_n \in H^2(U)$ tel que :

1) $r_n = k_n h_n + k_{n,n-1}h_{n-1} + ... + k_{n,0}h_0$; $k_n > 0$. (on a confondu $k_{n,n}$ avec k_n)

2) $\langle r_n, r_m\rangle_{H^2(U)} = \delta_{n,m}$; $n, m = 0, 1, 2, ...$

Développons 1) et 2) :

1) $r_n(z) = D_\rho(z).q_n(z)$; avec $q_n(z) = k_n z^n + \sum\limits_{p=0}^{n-1} k_{n,p}z^p$; $k_n > 0$.

Le système de polynômes $\{q_n(z);\ n = 0, 1, 2, ...;\ z \in \mathbb{C}\}$ est le système cherché; q_n est un polynôme de degré n exactement dont le coefficient de z^n est réel et strictement positif.

$$\begin{aligned}
2)\ \langle \tilde{q}_n, \tilde{q}_m\rangle_{L^2_\rho(\mathbb{T})} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} q_n\left(e^{i\theta}\right)\overline{q_m\left(e^{i\theta}\right)}\rho(\theta)\,d\theta; \ (\text{avec } \tilde{q}_n(\theta) = q_n(e^{i\theta})\ \forall n \in \mathbb{N}). \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} q_n\left(e^{i\theta}\right)\overline{q_m\left(e^{i\theta}\right)}\left|D^*_\rho(e^{i\theta})\right|^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r_n\left(e^{i\theta}\right)\overline{r_m\left(e^{i\theta}\right)}d\theta \\
&= \langle r_n, r_m\rangle_{H^2(U)} = \delta_{n,m}; \ n, m = 0, 1, 2, ...
\end{aligned}$$

L'unicité nous donne : $\varphi_n \equiv q_n$.

Pour trouver la formule asymptotique des polynômes orthogonaux $\{\varphi_n\}$, Szegö a utilisé une propriété fondamentale des polynômes $\{\varphi_n\}$, dite Propriété extrémale. Notons par $P_{n,1}$ l'ensemble des polynômes normalis és de degré n.

Théorème 3.1

Posons $\varphi_n(z) = k_n z^n + k_{n,n-1}z^{n-1} + ... + k_{n,0}$; $k_n > 0$.

Le polynôme $k_n^{-1}\varphi_n(z)$ vérifie : (pour $z = e^{i\theta}$)

$$k_n^{-2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|k_n^{-1}\varphi_n(z)\right|^2 \rho(\theta)\, d\theta = \min_{Q_n \in P_{n,1}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |Q_n(z)|^2 \rho(\theta)\, d\theta \overset{notation}{=} m_n(\rho)$$

Preuve

C'est un cas particulier du théorème 1.2 en remarquons que $k_n^{-1}\varphi_n(z)$ est un polynôme normalisé de degrè n.

3.3 Comportement asymptotique des polynômes orthonormés sur le cercle avec fonction poids :$(|z| > 1)$

Notons par S l'ensemble des fonctions poids ρ vérifiant les conditions suivantes : $\rho \in L^1(\mathbb{T})$; $\rho \geq 0$ et $\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta)\, d\theta > 0$ et la condition de Szegö :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log(\rho(\theta))d\theta > -\infty.$$

Lemme 3.1 [31]

Soit ρ une fonction poids sur le cercle unité telle que $\rho \in S$, $m_n(\rho) = k_n^{-2}$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} m_n(\rho) = \{D_\rho(0)\}^2 ;$$

où D_ρ est la fonction de Szegö associée au cercle unité et à la fonction poids ρ;

Théorème 3.2 [31]

Soit ρ une fonction poids sur le cercle unité telle que $\rho \in S$, et $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ le système de polynômes orthonormés associé à ρ et au cercle unité. Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n(z)}{z^n} = \frac{1}{\overline{D}_\rho\left(\frac{1}{z}\right)}; \qquad |z| > 1 \tag{3.2}$$

avec

$$\overline{D}_\rho\left(\frac{1}{z}\right) = \overline{D_\rho\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}.$$

La convergence est uniforme pour $|z| \geq R > 1$.

Preuve

Notons : $\varphi_n^*(z) = z^n \overline{\varphi_n}\left(\frac{1}{z}\right) = z^n \overline{\varphi_n\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}$.

Considérons la fonction $D_\rho(z)\varphi_n^*(z)$ qui est analytique dans le disque unité ouvert U, on a :

$$D_\rho(z)\varphi_n^*(z) = D_\rho(0)\, k_n + \sum_{p=1}^{\infty} d_{np} z^p; \ car \ \varphi_n^*(0) = k_n$$

alors :

$$(D_\rho(z)\varphi_n^*(z) - 1) = (D_\rho(0)\, k_n - 1) + \sum_{p=1}^{\infty} d_{np} z^p \tag{3.3}$$

et d'après le théorème 2.5 on a :

$$\| D_\rho \varphi_n^* - 1\|^2_{H^2(U)} = |D_\rho(0)\, k_n - 1|^2 + \sum_{p=1}^{\infty} |d_{np}|^2 .$$

Donc :

$$\sum_{p=1}^{\infty} |d_{np}|^2 \leq \| D_\rho \varphi_n^* - 1\|^2_{H^2(U)} \tag{3.4}$$

Montrons que : $\| D_\rho \varphi_n^* - 1\|^2_{H^2(U)} = 2 - 2D_\rho(0)\, k_n$.

Pour $r < 1$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|D_\rho(re^{i\theta})\varphi_n^*(re^{i\theta}) - 1\right|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|D_\rho(re^{i\theta})\right|^2 \left|\varphi_n^*(re^{i\theta})\right|^2 d\theta + 1 \\
&\quad -2Re\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_\rho(re^{i\theta})\varphi_n^*(re^{i\theta}) d\theta\right\}.
\end{aligned}$$

Comme la fonction $D_\rho(z)\varphi_n^*(z)$ est analytique dans U, alors $Re\left\{D_\rho(re^{i\theta})\varphi_n^*(re^{i\theta})\right\}$ est harmonique dans U, et ainsi :

$$2Re\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_\rho(re^{i\theta})\varphi_n^*(re^{i\theta}) d\theta\right\} = 2D_\rho(0)\, k_n.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|D_\rho(re^{i\theta})\right|^2 \left|\varphi_n^*(re^{i\theta})\right|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta) \left|\varphi_n^*(e^{i\theta})\right|^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\varphi_n(e^{i\theta})\right|^2 \rho(\theta)\, d\theta = 1
\end{aligned}$$

Par suite, on obtient :

$$\|D_\rho\varphi_n^* - 1\|^2_{H^2(U)} = \lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|D_\rho(re^{i\theta})\varphi_n^*(re^{i\theta}) - 1\right|^2 d\theta = 2 - 2D_\rho(0)\,k_n.$$

L'inégalité de Cauchy et la relation (3.4) nous donne :

$$\left|\sum_{p=1}^{\infty} d_{np}z^p\right|^2 \leq \left(\sum_{p=1}^{\infty}|d_{np}|^2\right)\left(\sum_{p=1}^{\infty}(|z|^2)^p\right) \leq (2 - 2D_\rho(0)\,k_n)\left(\frac{|z|^2}{1-|z|^2}\right).$$

En considérant le lemme 3.1.1, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{p=1}^{\infty} d_{np}z^p\right|^2 = 0 \tag{3.5}$$

uniformément pour $|z| \leq r < 1$.
En utilisant les relations (3.3) et (3.5) on trouve pour $|z| < 1$:

$$\lim_{n\to\infty}(D_\rho(z)\varphi_n^*(z) - 1) = 0,$$

alors :

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n^*(z) = \frac{1}{D_\rho(z)}; \qquad |z| < 1,$$

donc :

$$\lim_{n\to\infty} z^n\overline{\varphi_n}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{D_\rho(z)}; \qquad |z| < 1.$$

Finalement :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_n(z)}{z^n} = \frac{1}{\overline{D}_\rho\left(\frac{1}{z}\right)}; \qquad |z| > 1.$$

Ce qui donne la relation (3.2) du théorème.

3.4 Des exemples pour les polynômes orthogonaux sur le cercle unité

Ces exemples sont, en fait, très important car ils sont solubles (illustratifs) basé sur des formules explicites

Exemple 3.1. *Cas libre voir [25]*
pour $\Phi_n(z) = z^n$, $z \in \mathbb{D}$
et comme $D(z) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n^*(z)^{-1}$ *on trouve*
$D(z) = 1$ *pour* $\varphi_n^*(z) = 1$.

Exemple 3.2. *(Polynôme de Bernstein-Szegö) [25]*
Soit $\zeta \in \mathbb{D}$, *pour* $n \geq 1$ *on a* $\Phi_n(z) = z^n - \overline{\zeta} z^{n-1}$
Pour

$$d\mu(z) = \frac{1 - |\zeta|^2}{|1 - \zeta e^{i\theta}|^2} \frac{d\theta}{2\pi},$$

si $\varphi_n^* = (1 - \zeta z)/(1 - |\zeta|^2)^{1/2}$ *pour tout* $n > 0$ *on a*

$$D(z) = \frac{(1 - |\zeta|^2)^{1/2}}{1 - \zeta z}.$$

Chapitre 4

Comportement asymptotique des polynômes orthogonaux pour la classe polynomiale de Szegö

4.1 Introduction

Soit σ une mesure de probabilité de borel qui n'est pas triviale (le support de σ est un ensemble infini) dans le cercle unité $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ on considère les polynomes orthonormés φ_n associés a la mesure σ,

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi_n \overline{\varphi_m} \mathrm{d}\sigma = \delta_{nm}$$

ou δ_{nm} est le symbole de kroneker. Parfois, il est plus commode de travailler avec les plynomes normalisés orthogonaux $\{\Phi_n\}$, $\Phi_n(z) = z^n + a_{nn-1}z^{n-1} + \cdots + a_{n0}$. Ces polynomes satisfont :

$$\int_{\mathbb{T}} \Phi_n \overline{\Phi_m} d\sigma = c_n \delta_{nm}$$

avec

$$c_n = ||\Phi_n||_\sigma^2 = \int_{\mathbb{T}} |\Phi_n|^2 d\sigma.$$

Les polynomes Φ_n génèrent une suite α_n, $|\alpha_n| < 1$ dite coefficient de Verblunsky par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} \Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \overline{\alpha}_n \Phi_n^*(z) \\ \Phi_{n+1}^*(z) = \Phi_n^*(z) - \alpha_n z \Phi_n(z) \end{cases}$$

ou $\Phi_0(z) = 1$, $\Phi_0^*(z) = 1$ et $\Phi_n^*(z) = z^n\overline{\Phi_n(\frac{1}{\bar{z}})}$, inversement la mesure σ(et les polynomes (φ_n) sont completement determiner par las suite (α_k) d'ou il est naturel d'etudier les propriétés de la suite (α_k) et les polynomes $\varphi_n)$ en terme de σ.

On rappelle que σ est une mesure de szego ($\sigma \in (S)$) si $d\sigma = d\sigma_{ac} + d\sigma_s = \sigma'_{ac}dm + d\sigma_s$ et σ'_{ac} la densité de la partie absolument continue de σ est tq :

$$\int_{\mathbb{T}} \log \sigma'_{ac} dm > -\infty.$$

Ici σ_s est la partie singuliare de σ et m est la mesure de probabilité de lebesgue sur $\mathbb{T}$, $dm(t) = dt/(2\pi it) = 1/(2\pi)d\theta, t = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$.

Le théorème suivant est classique

Théorème 4.1. *(Théorème de Szegö) [25] Soit σ une mesure de probabilité qui n'est pas triviale , $\{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty}$ sont les coefficients de Verblunsky associés alors,*

$$\prod_{j=0}^{\infty}(1 - |\alpha|^2) = \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \log \sigma'_{ac} dm\right). \tag{4.1}$$

Corollaire 4.1. *Une consequence du Théorème de Szegö est :*

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j|^2 < \infty \Leftrightarrow \int_{\mathbb{T}} \log \sigma'_{ac} dm > -\infty.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j|^2 < \infty \quad &\Leftrightarrow \quad |\alpha_j|^2 < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \prod_{j=0}^{\infty}(1 - |\alpha|^2) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \log \sigma'_{ac} dm\right) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \int_{\mathbb{T}} \log \sigma'_{ac} dm > -\infty.
\end{aligned}$$

□

Proposition 4.1. *[25] Soit P la projection des polynômes sur la fermeture dans $L^2(\mathbb{T}, d\sigma)$ pour σ une mesure de probabilité qui n'est pas triviale . Alors*

$$||(1 - P)z^{-1}|| = \lim_{n\to\infty} ||\Phi_n|| = \prod_{j=0}^{\infty}(1 - |\alpha|^2)^{1/2}.$$

Lemme 4.1. *[25] Si z^{-1} est dans la fermeture du vect des polynômes dans $L^2(\mathbb{T}, d\sigma)$, il en est pour z^{-l} Pour tout $l \in \mathbb{N}$.*

Théorème 4.2. *[25]*

Soit $d\sigma$ une mesure de probabilité non triviale sur $\mathbb{T}$ avec $\{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty}$ sont les coefficients de Verblunsky. Les polynômes sont denses dans $L^2(\mathbb{T}, d\sigma)$ si et seulement si

$$\prod_{j=0}^{\infty}(1 - |\alpha|^2) = 0. \tag{4.2}$$

Démonstration. Si (4.2) omet la Proposition (4.1) montre que z^{-1} n'est pas dans la fermeture, et donc la fermeture n'est pas toutes L^2 .Inversement, si (4.2) fonctionne par la proposition (4.1) et le lemme (4.1), tous les polynômes de Laurent sont dans fermeture des polynômes . par le Théorème de Weierstrass, tous les polynômes de Laurent sont denses dans les fonctions continues dans $||.||_\infty$, donc dans L^2, alors les polynômes sont denses .

□

Rappelons que si $\sigma \in$ (S) on définie la fonction D située dans l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ dans $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ le disque unité , comme :

$$D(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \frac{t+z}{t-z} \log \sigma_{ac}^{'} dm(t)\right). \tag{4.3}$$

On a vu dans le chapitre 3 pour tout $\sigma \in$(S). Alors

$$\lim_{n\to\infty} D(z)\varphi_n^*(z) = 1 \tag{4.4}$$

pour chaque z $\in \mathbb{D}$,de plus,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} |D\varphi_n^* - 1|^2 dm = 0. \tag{4.5}$$

Considérons le polynôme trigonometrique p avec $p(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{T}$. Sans pérte de généralité on peut supposer qu'il est de la forme :

$$p(t) = \prod_{k=1}^{N} |t - \zeta_k|^{2K_k} \tag{4.6}$$

ou ζ_k sont des points de $\mathbb{T}$ et $K_k > 0$ sont leur muliplicities . On dit que σ est dans la classe polynomiale de Szegö ($\sigma \in$ (PS)), si $d\sigma = \sigma'_{ac}dm + d\sigma_s$ et

$$\int_{\mathbb{T}} p(t) \log \sigma'_{ac} dm > -\infty. \tag{4.7}$$

Le resultat principal dans ce chapitre et l'homologue des formules 4.4 , 4.5 pour les polynomes orthogonaux associé a la classe polynomiale de Szegö .

Soit $\sigma \in$(pS).Considérons le noyau de schwarz modifié :

$$K(t,z) = \frac{t+z}{t-z}\frac{q(t)}{q(z)} = \frac{t+z}{t-z}\frac{q_0(t)}{q_0(z)} \tag{4.8}$$

ou $q_0(t) = \prod_{k=1}^{N}(t-\zeta_k)^{2K_k}/t^{N'}$,$N' = \sum_k K_k$, et $q(t) = Cq_0(t)$ tq la constante $C = (\prod_k(-\zeta)^{K_k})^{-1}$,alors $|C| = 1$ et $q(t) = \prod_{k=1}|t-\zeta_k|^{2K_k} = p(t)$ pour $t \in \mathbb{T}$ soit :

$$\widetilde{D}(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} K(t,z)\log \sigma'_{ac} dm\right) \tag{4.9}$$

$$\widetilde{\varphi}_n^*(z) = \exp\left(\int_{\mathbb{T}} K(t,z)\log |\varphi_n^*| dm\right) \tag{4.10}$$

$$\psi_n(z) = \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{t+z}{t-z}\left(\frac{q(t)}{q(z)} - 1\right)\log|\varphi_n^*|dm(t)\right) = \frac{\widetilde{\varphi}_n^*}{\varphi_n^*}.$$

4.2 Représentation CMV

Dans cette section, nous discutons la représentation de Cantero, Moral, et Velazquez , dite la représentation CMV voir [24] .

D'abord, Nous définissons la Base de CMV explicitement . Soit $\mathcal{H}_{(k,l)}$ l'espace des polynômes de Laurent engendré par $\{z^j\}_{j=k}^{l}$, $P_{(k,l)}$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{H}_{(k,l)}$ dans $L^2(\partial\mathbb{D},\sigma)$. On définit :

$$\mathcal{H}^{(n)} = \begin{cases} \mathcal{H}_{(-k,k)} & \text{si } n = 2k, \\ \mathcal{H}_{(-k,k)} & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

et $P^{(n)}$ est la projection sur $\mathcal{H}^{(n)}$.

On définit aussi $\chi_n^{(0)}$ par :

$$\chi_n^{(0)} = \begin{cases} z^{-k} & \text{si } n = 2k, \\ z^{k+1} & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

et la Base CMV par :

$$\chi_n = \frac{(1 - P^{(n-1)})\chi_n^{(0)}}{||(1 - P^{(n-1)})\chi_n^{(0)}||}$$

avec $(1 - P^{(n-1)})\chi_n^{(0)} \neq 0$.

On introduit $\mathcal{C}$ qui est la représentation CMV defnie comme suit :

$$\mathcal{C}_{ij}(\sigma) = < \chi_i, z\chi_j > .$$

4.3 Condition polynomiale de Szegö et les règles de somme correspondants

Fixons pour le reste de ce chapitre p par la formule (4.6) on définit le polynôme analytique P tq :

$$p_1 = 2P_+(p), P'(t) = \frac{p_1(t) - p_1(0)}{t}, P(0) = 0$$

ici $P_+ : L^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{D})$ est la projection de riesz .

Posons maintenant

$$\Phi(\mathcal{C}) = \int_{\mathbb{T}} p \log \sigma'_{ac} dm$$

$$\Psi(\mathcal{C}) = A_0 t_0 + Re\, tr(P(\mathcal{C}) - P(\mathcal{C}_0))$$

ou $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_0$ sont les representations CMV associé à la mesure σ et la mesure de lebesgue m respectivement , on a rang $(\mathcal{C} - \mathcal{C}_0) < \infty$ aussi , $t_0 = \sum_k \log(1 - |\alpha_k|^2)^{1/2}$, $A_0 = 2\int_{\mathbb{T}} p(t)dm$.

Nous réécrivons maintenant

$$\Psi(\mathcal{C}) = \sum_{k=0}^{\infty}\{A_0 \log\left(\sum_k \log(1 - |\alpha_k|^2)^{1/2}\right) + Re((P(\mathcal{C}) - P(\mathcal{C}_0)e_k, e_k)\}$$

ici e_k est une base de $l^2(\mathbb{Z}_+)$,on defint $\tau(A) = S^*AS$ ou S et l'operateur de deplacement

Lemme 4.2. *[21] Il existe une fonction γ tq :*

$$\psi(x_1, \ldots, x_{4N+1}) = \eta(x_1, \ldots, x_{4N+1}) - \gamma(x_2, \ldots, x_{4N+1}) + \gamma(x_1, \ldots, x_{4N})$$

et $\eta(x_1, \ldots, x_{4N+1}) \leq 0$ *on definit maintenant*

$$\widetilde{\Psi}(\mathcal{C}) = \sum_{k=0}^{2N+1} \{A_0 \log \left(\sum_k \log(1 - |\alpha_k|^2)^{1/2} \right) + Re((P(\mathcal{C}) - P(\mathcal{C}_0)e_k, e_k)\}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \eta \circ \tau^k(\mathcal{C}) + \gamma(\mathcal{C}). \qquad (4.11)$$

Théorème 4.3. *[21] Une mesure σ soit dans (pS)-classe si et seulement si $\widetilde{\Psi}(C) > -\infty \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \eta \circ \tau^k(C)$ deplus,*

$$\Phi(\mathcal{C}) = \widetilde{\Psi}(\mathcal{C}) = \Psi(\mathcal{C}).$$

4.4 Comportement asymptotique ponctuel pour les polynômes orthogonaux dans le disque unité

Lemme 4.3. *[5] Soit $\sigma \in (pS)$, les polynomes $\widetilde{\varphi}_n^*$ et la fonction $\widetilde{D}$ sont définie dans (4.9)et (4.10). Alors*

(i) $|\widetilde{D}(t)|^2 = \sigma'_{ac}$ *p.p sur* $\mathbb{T}$,

(ii) $\widetilde{\varphi}_n^* = \psi_n \varphi_n^*$,

$$\psi_n(z) = \exp\left(A_0^{(n)} + \sum_k \sum_{j=1}^{2K_n} A_{j,k}^{(n)} \left\{ \frac{z + \zeta_k}{z - \zeta_k} \right\}^j \right),$$

ou $A_0^{(n)}$, $A_{2j,k}^{(n)} \in i\mathbb{R}$ *et* $A_{2j+1,k}^{(n)} \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Pour montre (i), on voit que

$$\log |\widetilde{D}(z)|^2 = Re \int_{\mathbb{T}} \frac{t + z}{t - z} \frac{q(t)}{q(z)} \log \sigma'_{ac}(t) dm(t).$$

Aussi, $\mathrm{Im}(\frac{q(t)}{q(z)})$ tend uniformement vers 0 quand $z \to \mathbb{T}\backslash\{\zeta_k\}$ et $q = Req = p$ sur $\mathbb{T}$. $\Rightarrow$ pour p.p $t_0 \in \mathbb{T}\backslash\{\zeta_k\}$,

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to t_0} \log |\widetilde{D}(z)|^2 &= \lim_{z \to t_0} \frac{1}{\mathrm{Re}q(z)} \int_{\mathbb{T}} \mathrm{Re} \frac{t + z}{t - z} \mathrm{Re}q(t) \log \sigma'_{ac}(t) dm(t) \\
&= \frac{1}{p(t_0)} p(t_0) \log \sigma'_{ac}(t),
\end{aligned}$$

au-dessus, on a utiliser la proprieté de noyau de poisson $\mathrm{Re}\frac{(t+z)}{(t-z)}$.

Un calcul montre que $|\widetilde{\varphi}_n^*| = |\varphi_n^*|$ p.p sur $\mathbb{T}$, aussi $|\psi_n| = 1$ p.p .

D'autre part on a :

$$\psi_n = \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \left\{\frac{t+z}{t-z}\frac{q(t)-q(z)}{q(z)}\right\} \log|\varphi_n^*(t)|dm(t)\right).$$

La fonction dans le crochet est rationnelle de degrée $2N'$, $N' = \Sigma_k K_k$ ses pôles qui ont les multiplicités $2K_k$ situé a $\{\zeta_k\}$

$$\frac{t+z}{t-z}\frac{q(t)-q(z)}{q(z)} = a_0(t) + \sum_k \sum_{j=1}^{2K_k} a_{jk}(t)\left(\frac{z+\zeta_k}{z-\zeta_k}\right)^j,$$

ou a_0 , a_{jk} sont des polynomes trigonometriques. Maintenant , on pose $A_0^{(n)} = \int_{\mathbb{T}} a_0 \log|\varphi_n^*|dm$, $A_{jk}^{(n)} = \int_{\mathbb{T}} a_{jk}\log|\varphi_n^*|dm$, on a $|\psi_n| = 1$ p.p sur $\mathbb{T}$ d'ou la fonction sous l'exponentielle est purement imaginaire .

□

Théorème 4.4. *[5] Soit $\sigma \in (pS)$. alors :*

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{D}(z)\widetilde{\varphi}_n^*(z) = 1$$

pour chaque $z \in \mathbb{D}$.

Preuve du théorème 4.4 [5]

Choisissons la constante C_1 de façon que $0 \le C_1 p \le 1$ sur $\mathbb{T}$. Il est commode de définir

$$f_n(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \frac{t+z}{t-z}\log\alpha_n(t)dm\right)$$

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \frac{t+z}{t-z}\log\alpha(t)dm\right)$$

avec $\alpha_n(t) = (|\varphi_n^*(t)|^{-2})^{C_1 p}$, $\alpha(t) = \sigma'_{ac}(t)^{C_1 p}$, et $z \in \mathbb{D}$. Bien sûr , il est suffisant de montrer que $\lim_{n\to\infty}\log f_n(z) = \log f(z)$. Rapelons que $\int_{\mathbb{T}}|\varphi_n^*|^{-2}dm = 1$ [25] on a

$$\int_{\mathbb{T}} |f_n|^{-2}dm = \int_{\mathbb{T}}\left(\frac{1}{|\varphi_n^*|^2}\right)^{C_1 p} dm = \int_{\mathbb{T},|\varphi_n^*|^{-2}\le 1}\left(\frac{1}{|\varphi_n^*|^2}\right)^{C_1 p} dm$$

$$+\int_{\mathbb{T},|\varphi_n^*|^{-2}>1}\left(\frac{1}{|\varphi_n^*|^2}\right)^{C_1 p} dm \le 2.$$

Il résulte également que $\int_{\mathbb{T}} |f|^{-2} dm < \infty$. Donc, les fonction f_n, f sont extérieures et $\{f_n\}$ est uniformément bornée dans $H^2(\mathbb{D})$. Une boule dans $H^2(\mathbb{D})$ est faiblement compact, donc la Convergence faible implique la Convergence ponctuelle sur $\mathbb{D}$. Par conséquence , il existe une sous suite $\{f_{nk}\}$ de $\{f_n\}$ qui converge vers une fonction $f_0 \in H^2(\mathbb{D})$ dans $\mathbb{D}$) .

Maintenant on montre que $f_0 = f$. En effet, pour $z \in \mathbb{D}$

$$\limsup_n \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \text{Re}\, \frac{t+z}{t-z} p(t) \log \frac{1}{|\varphi_n^*|^2} dm(t)$$
$$\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \text{Re}\, \frac{t+z}{t-z} p(t) \log \sigma'_{ac} dm(t).$$

Ici , les mesures $|\varphi_n^*|^{-2} dm$ tend faiblement vers σ (voir [24] corollaire 2.4.2), et les expressions ci-dessus sont semi-continues, cela implique $|f_0| \leq |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ également nous observons que

$$\log f_n(0) = \int_{\mathbb{T}} (C_1 p) \log \frac{1}{|\varphi_n^*|^2} dm = \frac{1}{2} C_1 \widetilde{\Psi}(C_n),$$

ou $\widetilde{\Psi}$ est une expression de 4.11 et C_n et la matrice CMV tronquée et d'apres le theoreme 4.3 on a $\log f(0) = (1/2) C_1 \widetilde{\Psi}(C)$. En particulier , on a

$$\lim_{n \to \infty} \widetilde{\Psi}(C_n) = \widetilde{\Psi}(C)$$

qui est équivalent à

$$\log f_0(0) = \lim_{k \to \infty} \log f_{nk}(0) = \log f(0)$$

comme la fonction f est extérieure , $|f_0| \leq |f|$ et $|f_0(0)| = |f(0)|$ cela implique $f = f_0$; donc $\{f_n\}$ converge vers la fonction f .

4.5 Comportement asymptotique des polynômes orthogonaux dans le sens L^2

Pour tout $\epsilon > 0$ soit $B_\epsilon[\zeta] = \{z : |z - \zeta| \leq \epsilon\}$. soit $\Omega_\epsilon = \mathbb{D} \backslash (\cup_k B_\epsilon[\zeta])$, $I_{k,\epsilon} = \mathbb{T} \cap B_\epsilon[\zeta_k]$ et $A_\epsilon = \cup_k I_{k,\epsilon}$. On doit introduire trois lemme pour les utiliser plutard dans le théorème essentiel dans cette partie.

Lemme 4.4. *[5] Soit $\sigma \in (pS)$ alors pour une réunion finie d'intervalles $E \subset \mathbb{T}$*

$$\limsup_n \int_E p|\log(|\varphi_n^*|^2)\sigma_{ac}^{'}|dm < \infty.$$

Démonstration. On commence par montrer que

$$\limsup_n \int_E p\log^+(|\varphi_n^*|^2\sigma_{ac}^{'})dm < \infty$$

on sait que $\log^+ x \leq x$ pour $x > 0$, et on trouve

$$\int_E p\log^+(|\varphi_n^*|^2\sigma_{ac}^{'})dm \leq C\int_E \log^+(|\varphi_n^*|^2\sigma_{ac}^{'})dm \leq C\int_E |\varphi_n|^2\sigma_{ac}^{'}dm$$
$$\leq C\int_{\mathbb{T}} |\varphi_n|^2 d\sigma = C.$$

Pour montrer que

$$\limsup_n \int_E p\log^-(|\varphi_n^*|^2\sigma_{ac}^{'})dm < \infty$$

il suffit de voir que

$$\liminf_n \int_E p\log(|\varphi_n^*|^2\sigma_{ac}^{'})dm > -\infty.$$

Et d'apres [24] on sait que les mesures $\{|\varphi_n^*|^2 dm\}$ tend vers $d\sigma$, et par la semicontinuité :

$$\limsup_n \int_E p\log\frac{1}{|\varphi_n^*|^2}dm \leq \int_E p\log\sigma_{ac}^{'}dm$$

par conséquence,

$$\liminf_n \int_E p\log(|\varphi_n^*|^2\sigma_{ac}^{'})dm \geq 0$$

et le Lemme est prouver. □

Lemme 4.5. *[5] Soit $\sigma \subset (pS)$ et*

$$\xi_n(z) = \widetilde{D}(z)\widetilde{\varphi}_n^*(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} K(t,z)\log(|\varphi_n^*|^2\sigma_{ac}^{'})dm\right).$$

Alors, pour $z \in \Omega_{2\epsilon}$

$$|\xi_n(z)| \leq \frac{C_\epsilon}{\sqrt{1-|z|}},$$

ou C_ϵ ne depend pas de n.

Démonstration. Nous obtenons $\xi_n = f_n' f_n''$ avec

$$f_n'(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{A_\epsilon} K(t,z)\log(|\varphi_n^*|^2\sigma_{ac}')dm\right),$$

$$f_n''(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}\setminus A_\epsilon} K(t,z)\log(|\varphi_n^*|^2\sigma_{ac}')dm\right).$$

Pour $t \in A_\epsilon$, $z \in \Omega_{2\epsilon}$, les expressions $|(t+z)/(t-z)|, |1/q(z)|$ sont bornés. Le Lemme 4.4 montre que

$$\limsup_n \int_{A_\epsilon} p|\log(|\varphi_n^*|^2\sigma_{ac}')|dm < \infty$$

$\Rightarrow |f_n'(z)| \leq C$ pour $z \in \Omega_{2\epsilon}$. Et pour f_n'' on à :

$$f_n''(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} K(t,z)\log(\beta_n(t))dm\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \frac{t+z}{t-z}\left(\frac{q(t)}{q(z)} - 1\right)\log\beta_n(t)dm\right) \times \exp\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \frac{t+z}{t-z}\log(\beta_n(t)dm\right)$$

$= g_n'(z)g_n''(z)$

où

$$\beta_n(t) = \begin{cases} 1 & t \in A_\epsilon, \\ |\varphi_n^*|^2\sigma_{ac}' & t \in \mathbb{T}\setminus A_\epsilon. \end{cases}$$

Le Lemme 4.4 implique

$$\limsup_n \int_{\mathbb{T}} p|\log\beta_n|dm < \infty.$$

Comme $0 < c \leq p(t) \leq C$ pour $t \in \mathbb{T}\setminus A_\epsilon$, on trouve

$$\limsup_n \int_{\mathbb{T}} |\log\beta_n|dm < \infty.$$

De plus,

$$\left|\frac{t+z}{t-z}\frac{q(t)-q(z)}{q(z)}\right| \leq C$$

pour tout z $\in \Omega_{2\epsilon} \Rightarrow |g_n'| \leq C$.

Les fonctions g_n'' compris dans la class nevanlinna sont exterieurs, et on a

$$\int_{\mathbb{T}} |g_n''|^2 dm = \int_{\mathbb{T}} \beta_n dm = \int_{\mathbb{T}\setminus A_\epsilon} |\varphi_n^*|^2 \sigma_{ac}' dm + m(A_\epsilon) \leq C$$

donc $g_n'' \in H^2(\mathbb{D})$ et $||g_n''||_2 \leq C$, on utilise l'intégrale de cauchy sur $H^2(\mathbb{D})$ pour trouver :

$$|g_n''(z)| = \left|\left(g_n'', \frac{1}{1-\overline{z}t}\right)\right| \leq ||g_n''||_2 \left|\left|\frac{1}{1-\overline{z}t}\right|\right|_2 \leq \frac{C}{\sqrt{1-|z|^2}}.$$

□

Lemme 4.6. *[5] Soit $\sigma \in (pS)$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I'} |\widetilde{D}\widetilde{\varphi}_n^* - 1|^2 dm = 0,$$

ou I' est un arc fermé sur $\mathbb{T}$ ne contient pas les points $\{\zeta_k\}$.

Démonstration. On fixe n'import quelle arc I qui ne contient pas les points $\{\zeta_k\}$ et tq $I' \subset I$. Comme avant, $\xi_n = \widetilde{D}\widetilde{\varphi}_n^*$.

Soit Ω le domaine ombrée dans fig .1 et soit aussi $u : \mathbb{D} \to \Omega$ et $v : \Omega \to \mathbb{D}$ des applications conformes mutuallement inverse de ces domaines, $u(v(\zeta)) = \zeta$ et $v(u(z)) = z$ pour $z \in \mathbb{D}$, $\zeta \in \Omega$ et $\partial\Omega$ la frontière de Ω, $\partial\Omega = I \cup I_1 \cup I_2$, ou I est l'arc sur $\mathbb{T}$ et I_1, I_2 deux segment, voir la figure. Les angles entre I, I_1 et I_2 sont π/α, $\alpha > 1$. de plus, soit $\zeta_0 = u(0) \in \Omega$ et η_1 , η_2 sont les coins de Ω. Il est simple de voir pour $i = 1, 2$:

(i) Il existe deux constantes c, $C > 0$ tq

$$c|\zeta - \eta_i|^\alpha \leq |v(\zeta) - v(\eta_i)| \leq C|\zeta - \eta_i|^\alpha$$

pour $\zeta \in B_\delta(\eta_i) \cap \Omega$ et $\delta > 0$.

(ii) Par conséquence

$$c|\zeta - \eta_i|^{\alpha-1} \leq |v'(\zeta)| \leq C|\zeta - \eta_i|^{\alpha-1}$$

pour ce ζ .

(iii)

$$c(1-|\zeta|)^{\alpha-1} \leq |v'(\zeta)| \leq C(1-|\zeta|)^{\alpha-1}\, pour\, \zeta \in I_1 \cup I_2,$$
$$c|\zeta - \eta_i|^{\alpha-1} \leq |v'(\zeta)| \leq C|\zeta - \eta_i|^{\alpha-1}\, pour\, \zeta \in I.$$

De plus, on a

$$\int_{\partial\Omega} |\xi_n(\zeta) - 1|^2 |v'(\zeta)||d\zeta| = \int_{\partial\Omega} (|\xi_n(\zeta)|^2 - 2Re\xi_n(\zeta) + 1)|v'(\zeta)||d\zeta|.$$

Nous commençons avec le second terme sur le côté droit

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} 2Re\xi_n(\zeta)|v'(\zeta)||d\zeta| &= 2Re\int_{\mathbb{T}} \xi_n(z)|dz| \\ &= 4\pi Re\xi_n(u(0)) = 4\pi Re\xi_n(\zeta_0)\end{aligned}$$

ou $\xi_n(z) = \xi_n(u(z))$ et $|dz| = 2\pi dm(z) = d\theta$, $z = e^{i\theta}$. L'expression $4\pi Re\xi_n(\zeta_0)$ tend vers 4π . Aussi,

$$\int_{\partial\Omega} |v'||d\zeta| = \int_{\mathbb{T}} |dz| = 2\pi$$

il reste à montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} |\xi_n|^2 |v'||d\zeta| \leq 2\pi. \tag{4.12}$$

On divise l'integral dans 4.12 on deux integral sur $IetI_1 \cup I_2$

$$\int_I |\xi_n|^2 |v'||d\zeta| = \int_I |\varphi_n^*|^2 \sigma_{ac}' |v'||d\zeta| \leq 2\pi \int_I |\varphi_n^*|^2 |v'| d\sigma$$

et la dernière quantité tend vers $\int_I |v'||d\zeta|$.

Maintenant, on tourne vers l'intégrale sur $\int_{I_1\cup I_2}$ pour tout $\delta > 0$

$$\int_{I_1\cup I_2} |\xi_n|^2 |v'||d\zeta| = \int_{I_1\cup I_2, |\zeta|\geq 1-\delta} \cdots + \int_{I_1\cup I_2, |\zeta|<1-\delta} \cdots$$

on trouve pour $\alpha > 1$

$$\begin{aligned}\int_{I_1\cup I_2, |\zeta|\geq 1-\delta} |\xi_n(\zeta)|^2 |v'(\zeta)||d\zeta| &\leq C\int_0^\delta \frac{1}{s} s^{\alpha-1} ds = C\int_0^\delta s^{\alpha-2} ds \\ &= C\delta^{\alpha-1}\end{aligned}$$

on prend $\delta > 0$ petit pour satisfaire $C\delta^{\alpha-1} < \epsilon$, nous pouvons garantir que

$$\left| \int_{I_1\cup I_2, |\zeta|\geq 1-\delta} |v'(\zeta)||d\zeta| \right| < \epsilon.$$

Alors quand ξ_n tend vers 1 uniformemenet pour $|\zeta| < 1-\delta$, nous prenons n assez grand pour avoir :

$$\left| \int_{I_1\cup I_2, |\zeta|<1-\delta} |\xi_n|^2 |v'||d\zeta| - \int_{I_1\cup I_2, |\zeta|<1-\delta} |v'||d\zeta| \right| < \epsilon$$

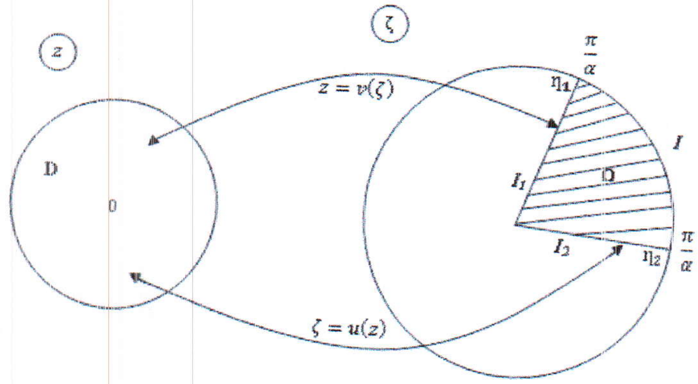

FIGURE 4.1 –

on fait la somme des inégalités ci-dessus pour n grand

$$\left| \int_{I_1 \cup I_2,} |\xi_n|^2 |v'||d\zeta| - \int_{I_1 \cup I_2} |v'||d\zeta| \right| < C\epsilon$$

ce qui montre ;

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I_1 \cup I_2,} |\xi_n|^2 |v'||d\zeta| = \int_{I_1 \cup I_2} |v'||d\zeta|.$$

Alors la relation 4.12 est prouver. Donc :

$$\lim_{n\to\infty} \int_I |\xi_n(\zeta) - 1|^2 |v'(\zeta)||d\zeta| \leq \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} |\xi_n(\zeta) - 1|^2 |v'(\zeta)||d\zeta|$$

$$\leq 2\pi \lim_{n\to\infty} 2Re(1 - \xi_n(\zeta_0)) = 0$$

et le lemme est prouvé pour n'importe quelle arc fermée $I' \subset I$. □

Remarque 4.1. **(i)** *Le lemme marche aussi pour une union finie $A = \cup I_k$ ou I_k est un arc finie qui ne contient pas $\{\zeta_k\}$*

(ii) *Pour ces arcs I, on a aussi*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I |\widetilde{D}\widetilde{\varphi}_n^*|^2 dm = m(I).$$

(iii) *Pour $A \subset \mathbb{T}$ definie dans (i),*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}\setminus A} |\xi_n|^2 dm \leq m(\mathbb{T}\setminus A)$$

ici $\{\zeta_k\}$ nécessairement se situe sur $(\mathbb{T}\backslash A)$.

pour prouvé (ii) on a $|\|\xi_n\|_{L^2(I)} - \|1\|_{L^2(I)}| \leq \|\xi_n - 1\|_{L^2(I)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$/ *pour (iii) on a :*

$$\lim_{n\to\infty}\int_A |\xi_n|^2 dm = \lim_{n\to\infty}\int_A |\varphi_n|^2 \sigma'_{ac} dm = m(A)$$

donc

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{T}\backslash A} |\varphi_n|^2\sigma'_{ac}dm &\leq 1 - \liminf_{n\to\infty}\int_A |\varphi_n|^2\sigma'_{ac}dm \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty}\int_A |\varphi_n|^2\sigma'_{ac}dm = 1 - m(A) = m(\mathbb{T}\backslash A).\end{aligned}$$

Théorème 4.5. *[5] Soit $\sigma \in (pS)$. Alors :*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{T}} |\widetilde{D}\widetilde{\varphi}_n^* - 1|^2 dm = 0.$$

Preuve theoreme 4.5 [5]

Pour la preuve on utilise le Lemme 4.6 et la Remarque 4.1 , on prend $\epsilon > 0$ fixé. Après on choisit $A = \cup I_n$, $m(\mathbb{T}\backslash A)$ pour n grand

$$\int_{\mathbb{T}\backslash A} |\xi_n - 1|^2 dm < C\epsilon.$$

D'autre part par le Lemme 4.6 on a :

$$\lim_{n\to\infty}\int_A |\xi_n - 1|^2 dm = 0.$$

Exemple 4.1. *[5] , [24]*

On achève avec un exemple illustratif, nous avons $\sigma \in (p_1 S)$ avec

$$p_1 = \frac{1}{2}|1-t|^2 = 1 - \cos\theta$$

si et seulement si $\{\alpha_k\} \in l^4(\mathbb{Z}_+)$ et $\{\alpha_{k+1} - \alpha_k\} \in l^2(\mathbb{Z}_+)$, c-à-d on a

$$\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)\log\sigma'_{ac}\frac{d\theta}{2\pi} > -\infty$$

si et seulement si

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{k+1} - \alpha_k|^2 + |\alpha_k|^4 < \infty$$

Denisov et Kupin ont montré dans [5] que le Théorème 4.4. est applicable avec ce cas là .

En particulier, nous avons :

$$K_1(t, z) = \frac{t+z}{t-z}\frac{(t-1)^2}{t}\frac{z}{(1-z)^2},$$

$$\widetilde{D}_1(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} K_1(t, z)\log\sigma'_{ac}(t)dm(t).\right)$$

et

$$\psi_n(z) = \exp\left(A_n\frac{1+z}{1-z} + B_n\left\{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right\}\right),$$

où

$$A_n = \sum_{k=0}^{n}\log(1-|\alpha_k|^2)^{1/2}, \quad B_n = \frac{i}{4}\mathrm{Im}\left(\alpha_0 - \sum_{k=1}^{n}\overline{\alpha}_{k-1}\alpha_k\right).$$

Bibliographie

[1] M. Bello Hernandez, J. Minguez Ceniceros, *Asymptotics for extremal polynomials with varying measures.* Electronic Transactions on Numerical Analysis. 19 (2005). 29-36.

[2] M. Cantero , L.Moral and L.Velázquez , *Five-diagonal matrices and zeros of orthogonal polynomials on the unit circle.* Linear Algebra Appl. 362 (2003) 29-56.

[3] I. Chalendar , *Analyse fonctionnelle :Fonctions Harmoniques, Classe de Nevanlinna,Espaces de Hardy, et une introduction aux opterateurs de Toeplitz et de Hankel.* Springer-Verlag. New York (2008).

[4] J. B. Conway , *Functions of one complex variable.* Springer-Verlag. New York (1973).

[5] S. Denisov , S.Kupin, *Asymptotics of the orthogonal polynomials for the Szegö class with a polynomial weight.* J. Approx. Theory (2006).

[6] Ya.L. Geronimus, *Some extremal problems in $L_p(\sigma)$ spaces.* Math. Sbornik. 31 (1952) 3-26 [In Russian].

[7] Ya.L. Geronimus, *Polynomials orthogonal on a circle and interval.* Pergamon Press New York (1960).

[8] A. A.Gontchar, *On convergence of Pade approximants for certain class of meo- morphic functions.* Mat. Sb. 97 (1975), 4

[9] G.H. Hardy, *On the mean modulus of an analytic function.* Proc. London Mat. Soc. 14 (1915) 269-277.

[10] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions.* Englewood Cliffs. N.J- Prentice-Hall.Inc. (1962).

[11] V.A. Kaliaguine, R.Benzine , *Sur la formule asymptotique des polynômes orthogonaux associés à une mesure concentrée sur un contour plus une partie discrète finie.* Bull. Soc. Math. Belg. Ser. 41 (1989) 29-46.

[12] V.A. Kaliaguine, *On asymptotics of L_p extremal polynomials on a complex curve* ($0 < p < \infty$) . Journal of Approximation Theory. 74 (1993) 226-236.

[13] V.A. Kaliaguine, *A note on the asymptotics of orthogonal polynomials on a complex arc : the case of a mesure with a discrete part* . J. Approx. Theory, 80, 138-145 (1995).

[14] V. A. Kaliaguine and A. A. Kononova, *Strong asymptotics for polynomials orthogonal on a system of complex arcs and curves : Szeg ?o condition on and a mass points off the system* . Pub. Lab. ANO. Lille 1. 410 (2000), 1-17.

[15] A. Kolmogorov, S. Fomine, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle* . Editions Mir. Moscou (1977).

[16] P. Koossis, *Introduction to H^p Spaces* . London Math. Soc. Lecture Notes Series. Vol 40. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1980).

[17] P.P. Korovkin, *On polynomials orthogonal on a rectifiable curve with respect to a weight function* . Math. Sbornik. 9 (1941) 469-484 [In Russian].

[18] G.M. Krein, *On generalisation of some investigations of G. Szegö. V. Smirnoff and A. Kolmogorov* . C. R. (Doklad) Acad. Sci. URSS. 46 (1945) 91-94.

[19] X.Li,K. Pan, *Asymptotics for Lp extremal polynomials on the unit circle.* . Journal of Approximation Theory. 67(1991), No. 3, 270.283.

[20] X.Li,K. Pan, *Asymptotic behavior of orthogonal polynomials corresponding to measure with discrete part off the unit circle* . Journal of Approximation Theory. 79 (1994) 54-71.

[21] F.Nazarov, F.Peherstorfer,A. Volberg and P. Yuditskii, *On generalized sum rules for Jacobi matrices.* Int. Math. Res. Not. 3 (2005) 155Ű186.

[22] F. Peherstorfer and P. Yuditskii, *symptotics of orthogonal polynomials in the presence of a denumerable set of mass points.* Pro. Amer. Math. Soc. 11 (2001), 3213-3220.

[23] W.Rudin, *Real and complex Analysis.* McGraw-Hill. New York (1968).

[24] B.Simon, *Orthogonal polynomials on the unit circle.* AMS . Providence (2005).

[25] B.Simon, *Szegö Theorem and Its Descendants : Spectral Theory for L2 Perturbations of Orthogonal Polynomials.* Princeton University Press (2011).

[26] V. J.Smirnov, *Sur la théorie des polynômes orthogonaux à une variable complexe.* Journal de la Société Physico-Mathématique de Leningrad. 2 (1928) 155-179.

[27] V. J.Smirnov, *Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problèmes qui s'y rattachent.* Bulletin de l'Académie des Sciences de L' U.R.S.S. (1932) 337-372.

[28] V. J.Smirnov,N. A Lebedev, *The Constructive Theory of Functions of a complex Variable.* Nauka. Moscow. (1964) [in Russian] ; M.I.T. Press. Cambridge. MA (1968) [Engl. transl].

[29] P.Souetine, *Polynômes orthogonaux sur un contour.* Russian Math. Surveys. T. 21 (1966) [En Russe].

[30] H. Stahl and V. Totik, *General Orthogonal Polynomials.* Encyclopedia of Mathematics Vol. 43 (Cambridge UniversityPress, New York, 1992)

[31] G.Szegö, *Uber die Enttwickelung einer analytischen Funktion nach den polynomen einers orthogonal systems.* Mathematische Annalen. 82 (1921) 18-212.

[32] G.Szegö, *Uber Orthogonale Polynome die zu einer gegebenen Kurve der Komplexen Ebene gehoren.* Mathematische zeitchrift. 9 (1921) 218-270.

[33] G.Szegö,H.Grenander, *Toeplitz forms and their applications.* Berkley Los Angeles (1958).

[34] G.Szegö, *Orthogonal Polynomials.* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. ed. American Math. Society, Providence, RI. 23 (1975).

[35] H.Widom, *Extremal polynomials associated with a system of curves and arcs in the complex plane.* Adv. Math. 3 (1969) 127-232.

[36] A.Zygmund, *Trigonometric series.* 2nd ed. New york. Cambridge University Press (1959).