

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
**Master Académique en Mathématiques**  
Option : **Analyse Mathématiques appliquées**

Par : **Bennacer Meryem**

## **Intitulé**

**Etude théorique et numérique de la méthode de  
régularisation de Tikhonov appliquée à une  
équation intégrale de première espèce**

Dirigé par: **Mr Benrabah.Abderafik**

Devant le jury

<b>PRESIDENT</b>	<b>Dr. BOUSSETILA Nadjib</b>	<b>PROF</b>	<b>Univ-Guelma</b>
<b>RAPPORTEUR</b>	<b>Dr. Benrabah Abderafik</b>	<b>MCB</b>	<b>Univ-Guelma</b>
<b>EXAMINATEUR</b>	<b>Dr. Sellami Nabil</b>	<b>MCB</b>	<b>Univ-Guelma</b>

**Session Juin 2016**



# Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon encadreur le docteur *BENRABAH ABDERAFIK*, qui grâce à sa disponibilité, son soutien, ses conseils et ses encouragements m'a permis de mener à bien ce travail.

Ainsi aux docteurs :  
*BOUSSETILA NADJIB*  
*SELLAMI NABIL*

Merci, à tous mes collègues de L'université 08 Mai 45-Guelma pour leur soutien moral.

Enfin, et ce seront mes derniers mots, un grand merci à ma famille, en particulier mon père, pour m'avoir toujours soutenue et conseillée.

# Table des matières

Table des matières	i
§ Introduction	2
0.1 Organisation du manuscrit	3
1 Rappels	4
1.1 Problèmes inverses	4
1.2 Problèmes mal posés	5
1.2.1 Exemples de problèmes inverses et mal-posés	5
1.3 Stratégie générale de régularisation	8
1.3.1 Méthode de Newton	11
2 Méthodes de régularisation	12
2.1 La régularisation de Tikhonov	12
2.2 Le principe de Morozov	14
2.3 La méthode de Landweber	15
2.4 Équation intégrale de 1ère et de 2ème espèce	17
2.4.1 Équation intégrale de Volterra de deuxième espèce	17
2.4.2 La régularisation de l'équation intégrale de première espèce de Volterra	20
2.5 Simulations numériques pour la méthode de Tikhonov	23
2.5.1 Position du problème	23
2.5.2 Sources de bruit	25
2.5.3 Simulation	26
2.5.4 Discussion	26
3 Régularisation à deux paramètres	28
3.1 Fonction modèle basée sur le principe de sélection à deux paramètres	31
3.1.1 Algorithme	33
3.2 Conclusion	34
3.2.1 Méthode de Tikhonov	34

## TABLE DES MATIÈRES

---

	1
3.2.2	Méthode de régularisation à deux paramètres . . . . . 34
3.3	Appendix A . . . . . 35
3.4	Appendix B . . . . . 39
3.4.1	Tableaux et figures . . . . . 39
<b>Bibliographie</b>	<b>45</b>



## § Introduction

---

D'après J.B. Keller [27], deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre si la formulation de l'un met l'autre en cause. Cette définition comporte une part d'arbitraire, et fait jouer un rôle symétrique aux deux problèmes considérés. Une définition plus opérationnelle est qu'un problème inverse consiste à déterminer des causes connaissant des effets. Ainsi, ce problème est l'inverse de celui appelé problème direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues.

Cette seconde définition montre que nous sommes plus habitués à étudier des problèmes directs. En effet, depuis Newton la notion de causalité est ancrée dans notre subconscient scientifique, et à un niveau plus prosaïque, nous avons appris à poser, puis résoudre des problèmes pour lesquels les causes sont données, et l'on cherche les effets. Cette définition montre aussi que les problèmes inverses risquent de poser des difficultés particulières. Il est possible de donner un contenu mathématique à la phrase (les mêmes causes produisent les mêmes effets), autrement dit, qu'il est raisonnable d'exiger que le problème direct soit (bien posé). Par contre, il est facile d'imaginer, et nous en verrons de nombreux exemples, que les mêmes effets puissent provenir de causes différentes. Cette idée contient en germe la principale difficulté de l'étude des problèmes inverses : ils peuvent avoir plusieurs solutions, et il est nécessaire de disposer d'informations supplémentaires pour discriminer entre elles.

La prédiction de l'état futur d'un système physique, connaissant son état actuel, est l'exemple type du problème direct. On peut envisager divers problèmes inverses : par exemple, reconstituer l'état passé du système connaissant son état actuel (si ce système est irréversible), ou la détermination de paramètres du système, connaissant (une partie de) son évolution. Ce dernier problème est celui de l'identification de paramètres.

Une difficulté pratique de l'étude des problèmes inverses est qu'elle demande souvent une bonne connaissance du problème direct, ce qui se traduit par le recours à une grande variété de notions tant physiques que mathématiques. Le succès dans la résolution d'un problème inverse repose en général sur des éléments spécifiques à ce problème. La théorie des problèmes inverses possède une grande variété d'applications, car tout modèle mathématique doit être étalonné avant qu'il puisse être utilisé et un tel étalonnage est un problème inverse typique. La théorie de la régularisation, à son tour, est la partie algorithmique de la



théorie des problèmes inverses. Elle fournit des analyses et des méthodes pour faire face à des problèmes mal-posés, qui est l'un des principaux problèmes pour les problèmes inverses. La nouveauté de cette mémoire est le chapitre 3, intitulé **régularisation à deux paramètres**. Il est intéressant d'observer que, dans les publications existantes de la performance des systèmes de régularisation à multiparamètres ont été diversement jugées par les auteurs. Certains d'entre eux ont constaté que la régularisation à multiparamètres est légèrement améliorée la version à un paramètre, tandis que d'autres ont déclaré sur les décisions les plus satisfaisantes données par des algorithmes à multiparamètres dans les cas où leurs homologues à un paramètre échoué.

## 0.1 Organisation du manuscrit

Le présent mémoire est composé de trois chapitres, dont le premier un rappel et les deux autres chapitres traitent le fond du thème.

 Le premier chapitre est une introduction qui présente un état d'art sur les problèmes inverses (les problèmes bien et mal posés) et la méthode de Newton.

 Le second chapitre est consacré à l'étude de la méthode de régularisation de Tikhonov, la régularisation des équations de première espèce par des équations de deuxième espèce et enfin la simulation numérique de la méthode de Tikhonov appliquée sur une équation intégrale de première espèce.

 La méthode de régularisation à deux paramètres est présentée dans le dernier chapitre. La mémoire se termine par une conclusion et deux appendix contenant les programmes Matlab, les tableaux et les figures.

## Rappels

---

### 1.1 Problèmes inverses

Il s'agit généralement de situations où on est dans l'ignorance au moins partielle du système (certaines informations concernant la géométrie, les matériaux, les conditions initiales...) ne sont pas connues. En compensation, il faut disposer (en plus des entrées) d'informations, éventuellement partielles, sur la sortie afin de reconstruire au mieux l'information manquante. Le terme inverse rappelle qu'on utilise l'information concernant le modèle physique (à l'envers) connaissant (partiellement) les sorties, on cherche à remonter à certaines caractéristiques, habituellement internes et échappant à la mesure directe.

Traditionnellement, les problèmes inverses sont classés en deux catégories : les problèmes qui visent à déterminer des conditions aux limites ou des sources inconnues et les problèmes liés à l'estimation de paramètres intrinsèques du système. Le premier type de problèmes apparaît dès que la mesure directe de la grandeur physique étudiée n'est pas possible en pratique. Par exemple les hautes températures et la difficulté d'accès dans la chambre de combustion d'un moteur automobile (B. Delattre et al. [5], 2001 ; A. Constantinescu et al. [4], 2004) ou sur les faces actives d'outils d'usinage (C.H. Huang et Y.L. Tsai, [6] 2005, C.H. Huang et H.C. Lo, [8] 2005) sont des cas où le recours à des méthodes inverses est nécessaire. Dans la deuxième catégorie de problèmes inverses, l'objectif fixé est de déterminer, à partir d'une connaissance partielle du champ de température, des paramètres de modèle inconnus. Il est possible par exemple de déterminer la conductivité d'un matériau à partir de mesures transitoires (P. Kügler, [9] 2003 ; V. Plana et al., [13] 2006, H.T.) ou d'utiliser cette méthode pour la détection non intrusive de défauts de géométrie internes (R. Chapko et al., [3] 1998, R. Chapko et P. Kugler, [9] 2004, N.S. Mera et al., [12] 2005). Les problèmes inverses d'identification de paramètres se rencontrent dans de nombreux autres domaines allant de la géomécanique (B. Lecampion et al., [11] 2002, B. Lecampion et A. Constantinescu, [10] 2005) aux mathématiques financières.

Les problèmes inverses mal posés constituent l'un des sujets où le lien entre la théorie mathématique et l'application est le plus fort. Dans la pratique, les méthodes de résolution des problèmes inverses se répartissent selon Z. Nashed en trois catégories principales :



1. Les méthodes relevant de l'analyse mathématique et la théorie des fonctions se proposent de transformer un problème mal posé en un problème bien posé en agissant sur le choix des espaces, qui servent à décrire les variables, et de leurs topologies, qui formalisent les notions d'écart ou d'erreur. Elles proposent également d'introduire des contraintes globales sur les classes de solutions. Les « bons » espaces ou les « bonnes » contraintes ne sont pas dictés par les mathématiques mais traduisent des considérations physiques.
2. La régularisation des problèmes mal posés, due initialement à A.N. Tikhonov [17], cherche à redéfinir les notions d'inversion et de solution (quasi-solution, solution approchée, ..), de façon que la (solution régularisée) obtenue par (inversion régularisée) dépende continûment des données et soit proche de la solution exacte (en supposant que celle-ci existe pour des données proches des valeurs effectivement obtenues par la mesure). En d'autres termes, on remplace le problème initial mal posé par un autre "problème approximant" bien posé.
3. L'inversion stochastique développée par A. Tarantola [15].

Ces trois approches ont comme préoccupation commune de fournir un cadre permettant de neutraliser le caractère mal posé.

## 1.2 Problèmes mal posés

**Définition 1.2.1.** [Hadamard 1923] Soient  $X, Y$  deux espaces de Banach et  $L : X \longrightarrow Y$  un opérateur. Le problème inverse  $Lx = y$  est *bien-posé* au sens de HADAMARD [1] si

**Existence :** Pour tout  $y \in Y$  il existe  $x \in X$  tel que  $Lx = y$ .

**Unicité :** Pour tout  $y \in Y$ , il y a au plus une solution  $x \in X$ .

**Stabilité :** La solution  $x$  dépend continûment de la donnée  $y$ .

Si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée, alors le problème est dit *mal-posé*.

### 1.2.1 Exemples de problèmes inverses et mal-posés

Nous présentons dans ce chapitre quelques exemples de problèmes inverses, tels qu'ils interviennent dans les sciences de l'ingénieur. Cette liste est loin d'être exhaustive. On commence par des exemples d'algèbre linéaires

**Exemple 1.2.1.** *Trouver un polynôme  $P$  de degré  $n$  avec des zéros  $x_1, \dots, x_n$  donnés. Ce problème est l'inverse du problème direct : trouver les zéros  $x_1, \dots, x_n$  d'un polynôme donné. Dans ce cas le problème inverse est plus facile à résoudre où la solution est :*

$$P(x_1, \dots, x_n) = c(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$



**Exemple 1.2.2.** (Le problème d'interpolation de Lagrange)

Trouver un polynôme  $P$  de degré  $n$  qui prend des valeurs  $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$  en des points donnés  $x_1, \dots, x_n$ . Ce problème est l'inverse du problème direct du calcul d'un polynôme  $P$  à  $n$  valeurs  $x_1, \dots, x_n$  données. Le problème inverse est le problème d'interpolation de Lagrange.

**Exemple 1.2.3.** Soit  $A$  une matrice carré de taille  $n \times n$  réelle et symétrique et soit  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ,  $n$  nombres réels : Trouver une matrice diagonale  $D$  sachant que  $A+D$  admet les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Ce problème est l'inverse du problème direct qui consiste à calculer les valeurs propres de la matrice donnée  $A+D$ .

Ces problèmes sont parmi les exemples les plus simples des problèmes inverses. Parmi les domaines dans lesquels les problèmes inverses jouent un rôle important nous pouvons citer :

- l'imagerie médicale (échographie, scanners, rayons X,...),
- l'ingénierie pétrolière (prospection par des méthodes sismiques, magnétiques, identification des perméabilités dans un réservoir...),
- l'hydrogéologie (identification des perméabilités hydrauliques),
- la chimie (détermination des constantes de réaction),
- le radar (détermination de la forme d'un obstacle),
- la mécanique quantique (détermination du potentiel),
- le traitement d'image (restauration d'images floues).

Pour illustrer bien cette notion de problèmes mal-posés on présente quelques exemples détaillés

**Exemple 1.2.4.** *La différentiation et l'intégration* La différentiation et l'intégration sont deux problèmes inverses l'un de l'autre, il est plus habituel de penser à la différentiation comme un problème direct et l'intégration comme problème inverse.

En fait, l'intégration possède de bonnes propriétés mathématiques qui nous permet de la considérer comme un problème direct par contre la différentiation est le prototype du problème mal posé comme nous allons le voir. Soit l'opérateur suivant :

$$Af(x) = \int_0^x f(t) dt. \quad (1.2.1)$$

il est facile de voir directement que  $A$  est un opérateur linéaire dans  $\mathcal{L}(L^2(0,1))$ , cet opérateur est injectif par contre son image est le sous espace vectoriel

$$Im(A) = \{f \in H^1(0,1), u(0) = 0\},$$

où  $H^1(0,1)$  est l'espace de Sobolev. En effet  $Af = g$  est équivalent à  $f(x) = g'(x)$  et  $g(0) = 0$ . L'image de  $A$  n'est pas fermé dans  $L^2(0,1)$  (bien entendu il est dans  $H^1(0,1)$ ). En conséquence l'inverse de  $A$  n'est pas continu sur  $L^2(0,1)$ , comme le montre l'exemple suivant : Considérons une fonction  $g \in C^1([0,1])$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Soit :

$$g_n(x) = g(x) + \frac{1}{n} \sin(n^2 x). \quad (1.2.2)$$

Alors :

$$f_n(x) = g'_n(x) = g'(x) + n \cos(n^2 \times x) = f'(x) + n \cos(n^2 \times x). \quad (1.2.3)$$

De simples calculs montrent que  $\|g - g_n\|_2 = O\left(\frac{1}{n}\right)$  alors que  $\|f - f_n\| = O(n)$ . Ainsi que la différence entre  $f$  et  $f_n$  peut être arbitrairement grande alors même que la différence entre  $g$  et  $g_n$  est arbitrairement petite. L'opérateur de la dérivée (l'inverse de  $A$ ) n'est pas continu au moins avec ce choix des normes.

L'instabilité de l'inverse est typique des problèmes mal-posés une perturbation sur les données (ici  $g$ ) peut avoir une influence arbitrairement grande sur les résultats (ici  $f$ ).

**Exemple 1.2.5. (Problème rétrograde pour l'équation de la chaleur)** Ce problème consiste à déterminer  $u(x, 0) = u_0(x)$  (condition initiale inconnue) sachant que le champ de température vérifie

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 & \text{si } x \in (0, \pi), t \in (0, T), \\ u(x, t) = \psi(x) & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

où  $\psi \in L_2(0, \pi)$  est une fonction donnée. Par la méthode de Fourier on peut expliciter la solution de ce problème sous la forme

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{(T-t)n^2\} \psi_n \exp(nx),$$

où  $\psi_n$  est le coefficient de Fourier d'ordre  $n$  de  $\psi$  :

$$\psi_n = \langle \psi, e_n \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx, \quad e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx).$$

Soit  $\varphi(x) = u_0(x, 0)$  la température initiale alors d'après l'égalité de Parseval on a :

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(n^2 T) |\psi(n)|^2$$

on considère maintenant le problème avec des données bruitées :

$$\psi_k = \psi + \frac{1}{k} \exp(kx),$$

on remarque que  $\|\psi_k - \psi\| = \frac{1}{k} \rightarrow 0, k \rightarrow +\infty$  mais  $\|u(\psi_k, 0) - u(\psi, 0)\| = \frac{1}{k} \exp(k^2 t) \rightarrow +\infty, k \rightarrow +\infty$ . On voit très clairement que ce problème est mal posé. C'est pour cela qu'on dit que les phénomènes de la chaleur sont irréversibles.

**Exemple 1.2.6. Problème de Cauchy pour l'équation de Laplace**



Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_y u(x, 0) = \varphi_\varepsilon(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où  $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ ,  $\varepsilon > 0$ . On vérifie aisément que

$$u_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^2 \sinh\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

est une solution du problème. On remarque que  $(\varphi_\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0)$  mais  $(u_\varepsilon(x, y) \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0)$  pour tout  $x > 0$  fixé. Ce qui prouve que les solutions de problème ne dépendent pas continument des données initiales, d'où le problème est mal posé.

#### Exemple 1.2.7. Problème de minimisation

On considère le problème de minimisation :

$$\phi(u) = \inf \|Au - f\|$$

on suppose que  $u_i$  est l'infimum de  $\phi(u)$  :  $\phi(u_i) \leq \phi(u)$  si  $f$  est perturbée donc :

$$\phi_\delta(u) = \inf \|Au - f_\delta\|, \|f_\delta - f\| \leq \delta,$$

l'infimum de  $\phi_\delta(u)$  peut ne pas être atteint à un élément  $u_\delta$  qui est loin de  $u_i$ , d'où le graphe  $f \rightarrow u_i$  peut être non continu. Dans ce cas le problème est mal posé.

### 1.3 Stratégie générale de régularisation

Pour simplifier on suppose dans cette section que l'opérateur  $K$  est bijectif. Ce n'est pas une restriction puisque nous pouvons toujours remplacer le domaine  $X$  par le complémentaire orthogonal du noyau de  $K$ . on suppose qu'il existe une solution  $x \in X$  de l'équation imperturbée  $Kx = y$ . En d'autres termes on suppose que  $y \in K(X)$ , l'injectivité du noyau  $K$  implique que cette solution est unique.

En pratique le membre droit  $y \in Y$  n'est jamais connue exactement, mais seulement à partir d'un niveau de bruit noté  $\delta > 0$ . Donc on suppose qu'on connaît  $\delta > 0$  et  $y^\delta$  avec

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta. \quad (1.3.1)$$

C'est notre but de résoudre l'équation perturbée

$$Kx^\delta = y^\delta \quad (1.3.2)$$

En général 1.3.2 n'est pas résoluble puisque on ne peut pas supposer que les données mesurées  $y^\delta$  sont dans l'image de  $K$ . Par conséquent, le mieux qu'on peut espérer est la détermination d'une approximation  $x^\delta \in X$  de la solution exacte  $x$  qui n'est pas plus pire que la solution dans  $F(\delta, E, \|\cdot\|_1)$  de la définition 1.3.1 ci-dessous

**Définition 1.3.1.** Soit  $K : X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire borné entre les deux espaces de Banach  $X$  et  $Y$  et soit  $X_1$  un sous-espace de  $X$  où  $\|\cdot\|_1$  est la norme de  $X_1$  tel qu'il existe une constante  $c > 0$  vérifiant la condition  $\|x\| \leq c\|x\|_1$  pour tout  $x \in X_1$ . Alors on définit

$$F(\delta, E, \|\cdot\|_1) := \sup \{ \|x\| : x \in X_1, \|Kx\| \leq \delta, \|x\|_1 \leq E \} \quad (1.3.3)$$

**Définition 1.3.2.** On appelle  $F(\delta, E, \|\cdot\|_1)$  **Module de continuité de l'opérateur  $K^{-1}$**  pour l'erreur  $\delta$  dans les données et l'information a priori  $\|x\| \leq E$ .  $F(\delta, E, \|\cdot\|_1)$  dépend de l'opérateur  $K$  et les normes sur  $X, Y$  et  $X_1$

Il est désirable que cette module de continuité ne converge pas seulement vers zéro lorsque  $\delta$  tend vers zéro mais qu'elle est d'ordre  $\delta$ . C'est certainement vrai pour les opérateurs bornés inversibles comme il est vu d'après l'inégalité  $\|x\| \leq \|K^{-1}\| \|Kx\|$ . Cependant pour les opérateurs compacts  $K$  la norme  $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|$  et dans ce cas la module de continuité ne converge pas et on est obligé de prendre une norme plus forte que  $\|\cdot\|_1$ .

Une condition supplémentaire est que la solution approchée  $x^\delta$  doit dépendre continûment de la donnée  $y^\delta$ . En d'autre terme notre but est de construire une approximation bornée convenable  $R : Y \rightarrow X$  de l'opérateur inverse(non-borné)  $K^{-1} : K(x) \rightarrow X$ .

**Définition 1.3.3.** Une stratégie de régularisation est une famille d'opérateurs linéaires bornés

$$R_\alpha : Y \rightarrow X, \alpha > 0,$$

tel que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha Kx = x, \quad \text{pour tout } x \in X,$$

c-à-d les opérateurs  $R_\alpha K$  convergent ponctuellement vers l'identité.

Par cette définition et la compacité de  $K$  on conclut ce qui suit

**Théorème 1.3.1.** Soit  $R_\alpha$  une stratégie de régularisation pour un opérateur compact  $K : X \rightarrow Y$  où  $\dim(X) = \infty$ . Alors on a

1. Les opérateurs  $R_\alpha$  ne sont pas uniformément bornés c-à-d : il existe une suite  $(\alpha_j)$  avec  $\|R_{\alpha_j}\| \rightarrow \infty$  quand  $j \rightarrow \infty$ .



2. La suite  $(R_\alpha Kx)$  ne converge pas uniformément sur les sous-ensembles bornés de  $X$  c-à-d : il n'y'a pas une convergence de  $R_\alpha K$  vers l'identité  $I$  par rapport à la norme d'opérateur.

*Démonstration.* 1. Supposons le contraire, alors il existe une certaine constante  $c > 0$  tel que  $\|R_\alpha\| \leq c$  pour tout  $\alpha > 0$ . Puisque  $R_\alpha y \rightarrow K^{-1}y$  ( $\alpha \rightarrow 0$ ) pour tout  $y \in K(X)$  et  $\|R_\alpha y\| \leq c\|y\|$  pour  $\alpha > 0$  on conclut que  $\|K^{-1}y\| \leq c\|y\|$  pour tout  $y \in K(X)$ , c-à-d :  $K^{-1}$  est borné. Ça implique que  $I = K^{-1}K : X \rightarrow X$  est compact d'où la contradiction avec  $\dim X = \infty$ . On conclut que  $I$  est aussi compact ce qui implique que  $\dim X < \infty$ . □

La notion de stratégie de régularisation est basée sur des données exactes, c-à-d le régularisateur  $R_\alpha y$  converge vers  $x$  pour le second membre exacte  $y = Kx$ .

$$x^{\alpha, \delta} := R_\alpha y^\delta, \quad (1.3.4)$$

comme une approximation de la solution  $x$  de  $Kx = y$ . Alors l'erreur est divisée en deux parties par l'application simple de l'inégalité triangulaire suivante

$$\begin{aligned} \|x^{\alpha, \delta} - x\| &\leq \|R_\alpha y^\delta - R_\alpha y\| + \|R_\alpha y - x\| \\ &\leq \|R_\alpha\| \|y^\delta - y\| + \|R_\alpha Kx - x\| \end{aligned}$$

Et par conséquent :

$$\|x^{\alpha, \delta} - x\| \leq \delta \|R_\alpha\| + \|R_\alpha Kx - x\| \quad (1.3.5)$$

Ceci est notre estimation fondamentale qu'on va utiliser dans ce qui suit.

On observe que l'erreur entre la solution exacte et la solution calculée se compose de deux parties : Le premier terme dans le côté droit décrit l'erreur dans la donnée multiplié par "le conditionnement"  $\|R_\alpha\|$  du problème régularisé. Par le théorème 1.3.1 ce terme tend vers l'infini quand  $\alpha$  tend vers zéro. Le deuxième terme désigne l'erreur d'approximation  $\|(R_\alpha - K^{-1})y\|$  en  $y = Kx$ . D'après la définition de la stratégie de régularisation ce terme tend vers zéro par rapport à  $\alpha$

On est besoin d'une stratégie pour choisir  $\alpha = \alpha(\delta)$  en fonction de  $\delta$  afin de maintenir l'erreur totale la plus petite possible. Ça signifie qu'on doit minimiser

$$\delta \|R_\alpha\| + \|R_\alpha Kx - x\|.$$

La procédure est la même dans toute situation concrète : On doit estimer les quantités  $\|R_\alpha\|$  et  $\|R_\alpha Kx - x\|$  en termes de  $\alpha$  puis on minimise cette borne supérieure par rapport à  $\alpha$ . On dit qu'une stratégie de régularisation  $\alpha = \alpha(\delta)$  est admissible si

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0 \text{ et } \sup \{ \|R_{\alpha(\delta)} y^\delta - x\| : \|Kx - y^\delta\| \leq \delta \} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0,$$



pour tout  $x \in X$ .

### 1.3.1 Méthode de Newton

Le principe de la méthode de Newton pour la résolution approchée d'une équation de la forme  $f(x) = 0$  est une application de la dérivée, son principe peut être résumé ainsi.

Après avoir déterminé un intervalle où il n'y a qu'une seule racine  $r$ , on choisit une valeur  $u_0$  assez proche de  $r$  et on construit, par récurrence, une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $u_{n+1}$  est obtenu, à partir de  $u_n$ , comme l'abscisse du point d'intersection de l'axe horizontal et de la tangente en  $(u_n, f(u_n))$  à la courbe représentative  $f$ . L'équation de la tangente en  $(u_n, f(u_n))$  à la courbe représentative de  $f$  est donnée par

$$y = f'(u_n)(x - u_n) + f(u_n).$$

On détermine  $u_{n+1}$  comme solution de l'équation

$$f'(u_n)(x - u_n) + f(u_n) = 0,$$

puis en utilisant la formule de récurrence pour la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)},$$

avec  $u_0$  donné.

Si la fonction  $f$  est définie sur un intervalle  $I$ , en posant  $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ , la validité de la méthode est assurée si la dérivée  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$  et si  $\Phi(I) \subset I$ .



### Méthodes de régularisation

---

On aborde dans cette partie de ce chapitre le principe de quelques méthodes de régularisation. En fait, cette partie est une introduction aux méthodes de régularisation les plus courantes : la méthode de **Tikhonov**, la méthode de **Morozov** et on termine par une méthode itérative c'est la méthode de **Landweber**. Pour une lecture plus approfondie on propose de voir le livre de **Kirsch** [23].

Régulariser un problème mal-posé, c'est le remplacer par un autre, bien-posé de sorte que l'erreur commise soit compensée par le gain de stabilité. La difficulté principale dans l'application d'une méthode de régularisation à un problème particulier est la détermination du paramètre de régularisation lui-même.

Dans cette partie  $K : X \rightarrow Y$ , désigne un opérateur linéaire borné défini entre deux espaces de Hilbert  $X$  et  $Y$ .

#### 2.1 La régularisation de Tikhonov

Cette méthode de régularisation consiste à résoudre le système linéaire

$$Kx = y \tag{2.1.1}$$

qui revient à minimiser  $\|Kx - y\|_Y$  tel que  $x \in X$  et  $y \in Y$ . Si  $X$  est de dimension infinie et l'opérateur  $K$  est compact, ce problème de minimisation est aussi mal-posé, voir le lemme suivant :

**Lemme 2.1.1.** *Soient  $K : X \rightarrow Y$  ; un opérateur linéaire borné et  $y \in Y$  : Il existe  $\hat{x} \in X$  tel que  $\|K\hat{x} - y\|_Y \leq \|Kx - y\|_Y$ , pour tout  $x \in X$  si et seulement si  $\hat{x} \in X$  est une solution de l'équation*

$$K^*K\hat{x} = K^*y. \tag{2.1.2}$$

On se donne  $K : X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire borné et  $y \in Y$ , et on veut déterminer  $x \in X$  qui minimise la fonctionnelle de Tikhonov suivante :

$$J_\alpha(x) = \|Kx - y\|^2 + \alpha\|x\|^2. \tag{2.1.3}$$



On a le théorème suivant :

**Théorème 2.1.1.** Soient  $K : X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire et borné et  $\alpha > 0$ . La fonctionnelle de Tikhonov  $J_\alpha$  admet un seul minimum  $x \in X$ . Ce minimum est la solution unique de l'équation

$$\alpha x^\alpha + K^* K x^\alpha. \quad (2.1.4)$$

*Démonstration.* Pour la démonstration de ce théorème voir [23] p.37.  $\square$

La solution de l'équation 2.1.4 peut être écrite sous la forme  $x^\alpha = R_\alpha y$  tel que

$$R_\alpha := (\alpha I + k^* k)^{-1} K^* : Y \rightarrow X. \quad (2.1.5)$$

En choisissant un système singulier  $(\mu_j, x_j, y_j)$  pour l'opérateur compact  $K$  on voit que  $R_\alpha y$  admet la représentation suivante :

$$\begin{aligned} R_\alpha y &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_j}{\alpha + \mu_j^2} (y, y_j) x_j \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q(\alpha, \mu_j)}{\mu_j} (y, y_j) x_j, \quad y \in Y. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

avec  $q(\alpha, \mu) = \frac{\mu^2}{\alpha + \mu^2}$ . Cette fonction  $q$  est appelée **la fonction filtre**.

**Théorème 2.1.2.** Soit  $K : X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire compact et  $\alpha > 0$ . Alors on a

1. L'opérateur  $\alpha I + K^* K$  admet un inverse borné, l'opérateur  $R_\alpha : Y \rightarrow X$  défini par 2.1.5 forme une stratégie de régularisation avec  $\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$  On l'appelle la méthode de régularisation de Tikhonov.  $R_\alpha y^\delta$  est déterminée comme la solution unique  $x^{(\alpha, \delta)}$  de l'équation de second espèce

$$\alpha x^{(\alpha, \delta)} + K^* K x^{(\alpha, \delta)} = K^* y^\delta \quad (2.1.7)$$

chaque choix de  $\alpha(\delta) \rightarrow 0 (\delta \rightarrow 0)$  avec  $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0 (\delta \rightarrow 0)$  est admissible.

$$\|x^{(\alpha(\delta), \delta)} - x\| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{c}} + \sqrt{c} \right) \sqrt{(\delta E)} \quad (2.1.8)$$

2. Soit  $x = K^* K z \in \text{Im}(K^* K)$  avec  $\|z\| \leq E$ , le choix  $\alpha(\delta) = c \left( \frac{\delta}{E} \right)^{\frac{2}{3}}$  pour  $c > 0$ , donne l'estimation de l'erreur :

$$\|x^{(\alpha(\delta), \delta)} - x\| \leq \left( \frac{1}{2\sqrt{c}} + \sqrt{c} \right) E^{\frac{1}{3}} \delta^{\frac{2}{3}} \quad (2.1.9)$$



Pour cela, la méthode de régularisation de Tikhonov est optimale pour  $\|(K^*)^{-1}x\| \leq E$  où  $\|(K^*K)^{-1}x\| \leq E$ . Les valeurs propres de  $K$  tendent vers zéro et les valeurs propres de  $\alpha I + K^*K$  sont bornées loines de zéro pour  $\alpha > 0$ .

**Remarque 2.1.1.** D'après le théorème précédent, on observe que  $\alpha$  a été choisit d'une façon à dépendre de  $\delta$  et qu'il converge vers zéro quand  $\delta$  tend vers zéro mais pas plus vite que  $\delta^2$ .

**Théorème 2.1.3.** Soit  $K : X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire et compact tel que l'image  $Im(K)$  est de dimension infinie. De plus, soit  $x \in X$  et on suppose qu'il existe une fonction continue  $\alpha : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  avec  $\alpha(0) = 0$ , telle que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|x^{(\alpha(\delta), \delta)} - x\| \delta^{-\frac{2}{3}} = 0$

**Remarque 2.1.2.** - Ce résultat montre que la méthode de régularisation de Tikhonov n'est pas optimale pour des hypothèses plus fortes sur la solution  $x$ .

- La démonstration détaillée de ce théorème se trouve dans le livre de Kirch [23] p.39. Le choix de  $\alpha$  dans le théorème 2.1.2 est mis à priori, c'est-à-dire avant de commencer le calcul de  $x$  en résolvant le problème des moindres carrés.

## 2.2 Le principe de Morozov

On donne ici un exemple de méthode de choix à **posteriori** du paramètre de régularisation. On expose la plus classique de celles-ci, (**the discrepancy principle**) de Morozov [28], ou (**le principe de sélection de Morozov**). D'après Kirsch [23], on présente un principe basé sur la méthode de régularisation de Tikhonov.

On suppose que  $K : X \rightarrow Y$  est un opérateur compact et injectif défini entre les deux espaces de Hilbert  $X$  et  $Y$  à image dense  $Im(K) \subset Y$  :

En étudie encore l'équation  $Kx = y$ ,  $y \in Y$ . On calcule maintenant le paramètre de régularisation  $\alpha = \alpha(\delta) > 0$  tel que la solution de Tikhonov correspondante est la solution de l'équation 2.1.7 et elle est le minimum de 2.1.3 qui satisfait à l'équation

$$\|Kx^{\alpha, \delta} - y^\delta\| = \delta.$$

On note que le choix de  $\alpha$  par le principe de Morozov guarentie d'une part que l'erreur égale à  $\delta$ , d'autre part,  $\alpha$  est très petit.

**Théorème 2.2.1.** Soit  $K : X \rightarrow Y$  est un opérateur linéaire et compact à image dense dans  $Y$ . Soit  $Kx = y$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ ,  $y^\delta \in Y$  tels que

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta \leq \|y^\delta\|.$$

Soit  $x^{\alpha(\delta)}$  la solution de Tikhonov satisfaisant



1.  $x^{\alpha(\delta), \delta} \rightarrow x$  pour  $\delta \rightarrow 0$ . Donc le principe de sélection de Morozov est admissible.
2. Soit  $x = K^*z \in K^*(Y)$  avec  $\|z\| \leq E$  alors

$$\|x^{\alpha(\delta), \delta} - x\| \leq 2\sqrt{(\delta E)}.$$

Pour cela le principe de sélection de Morozov est une stratégie de régularisation optimale sous la condition  $\|(K^*)^{-1}x\| \leq E$ .

*Démonstration.* La preuve de ce théorème est dans le livre de Kirch (voir [23]). □

**Remarque 2.2.1.** La détermination de  $\alpha(\delta)$  est équivalente au problème de trouver la racine de la fonction monotone

$$\Phi(x) = \|Kx^{\alpha(\delta), \delta} - y^\delta\|^2 - \delta^2$$

pour  $\delta$  fixé.

Ce n'est pas nécessaire de satisfaire l'équation  $\|Kx^{\alpha(\delta), \delta} - y^\delta\| = \delta$  exactement juste une inclusion de la forme  $c_1\delta \leq \|Kx^{\alpha(\delta), \delta} - y^\delta\| \leq c_2\delta$  est suffisante pour prouver les assertions du théorème précédent.

Dans le théorème suivant, on démontre que l'ordre de convergence ( $O(\sqrt{\delta})$ ) est meilleur pour le principe de Morozov.

**Théorème 2.2.2.** Soit  $K$  un opérateur compact et soit  $\alpha(\delta)$  choisit par le principe de Morozov. On suppose que pour tout  $x \in \text{Im}(K^*K)$ ,  $y = Kx \neq 0$  et pour toute suite  $\delta_n \rightarrow 0$  et  $y^{\delta_n} \in Y$  tel que  $\|y - y^{\delta_n}\| \leq \delta_n$  et  $\|y^{\delta_n}\| > \delta_n$  pour tout  $n$ . La solution de Tikhonov correspondante  $x^n = x^{\alpha(\delta_n), \delta_n}$  converge vers  $x$  plus vite que  $\sqrt{(\delta_n)}$  vers zéro. Donc :

$$\frac{1}{\sqrt{(\delta_n)}} \|x^n - x\| \rightarrow 0,$$

alors l'image  $\text{Im}(K)$  est de dimension fini.

## 2.3 La méthode de Landweber

Les méthodes itératives sont des méthodes basées sur la construction d'une suite de solutions approchées (dans le cas non bruité) qui convergent vers la solution désirée. Dans le contexte des problèmes inverses la situation est plus compliquée : en présence de bruit, la suite construite par la méthode itérative ne converge pas, en général, vers une solution du problème de départ. Il est, encore une fois, nécessaire de régulariser le processus itératif, et c'est l'indice d'itération lui-même qui joue le rôle de paramètre de régularisation. En d'autres termes, il convient d'arrêter les itérations plus tôt qu'on ne le ferait dans un cas non bruité.

On examine dans ce paragraphe que la plus simple des méthodes itératives : la **méthode de Landweber** [24], qui a pour avantage principal de se prêter à une analyse simple. Malheureusement, elle converge trop



lentement pour être utilisable en pratique, d'autant plus que des méthodes beaucoup plus performantes existent. Les deux plus importantes sont la méthode de H. Engl voir [21], et surtout la méthode du gradient conjugué et ses variantes. Cette dernière méthode est la plus employée. Dans le contexte des problèmes mal-posés, un exposé accessible se trouve dans le livre de Kirsch [23], Landweber [24] et Fridman [22] ont proposé de réécrire l'équation  $Kx = y$  sous la forme suivante

$$x = (I - aK^*K)x + aK^*y,$$

pour  $a > 0$  le schéma itérative de cette équation est le suivant :

$$x^0 = 0 \quad \text{et} \quad x^m = (I - aK^*K)x^{(m-1)} + aK^*y, \quad (2.3.1)$$

pour  $m = 1, 2, \dots$

**Lemme 2.3.1.** Soit la suite  $x^m$  définie par 2.3.1 et on définit la fonctionnelle  $\Psi(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} \|Kx - y\|^2, \quad x \in X.$$

Alors  $\Psi$  est différentiable au sens de Fréchet pour tout  $z \in X$  et

$$\Psi'(z)x = \text{Re}(Kz - y, Kx) = \text{Re}(K^*(Kz - y), x), \quad x \in X \quad (2.3.2)$$

La fonctionnelle linéaire  $\Psi'(z)$  peut être identifiée avec  $K^*(Kz - y)$  sur l'espace de Hilbert  $X$ . C'est facile de voir la forme explicite  $x^m = (R_m)y$  où l'opérateur  $R_m : Y \rightarrow X$  est défini par :

$$R_m = a \sum_{k=0}^{m-1} ((I - aK^*K)^k)K^*, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.3.3)$$

**Théorème 2.3.1.** 1. Soit  $K : X \rightarrow Y$  ; un opérateur compact et soit  $0 < a < \frac{1}{\|K^2\|}$ . On définit les opérateurs linéaires et bornés  $R_m : Y \rightarrow X$  par 2.3.3. Ces opérateurs définissent une stratégie de régularisation de paramètre  $\alpha = \frac{1}{m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  et  $\|R_m\| \leq \sqrt{\alpha m}$ . La suite  $x(m, \delta) = R_m(y^\delta)$  est calculée par les itérations suivantes : pour  $m = 1, 2, \dots$ . Toute stratégie  $m(\delta) \rightarrow \infty$  ( $\delta \rightarrow 0$ ) avec  $(\delta^2)m(\delta) \rightarrow 0$  ( $\delta \rightarrow 0$ ) est admissible. avec  $c_1 \frac{E}{\delta} \leq m(\delta) \leq c_2 \frac{E}{\delta}$ , l'estimation suivante est vérifiée :

$$\|x^m, \delta - x\| \leq c_3 \sqrt{(\delta E)},$$

où  $c_3$  dépend de  $c_1, c_2$  et  $a$ . Alors l'itération de Landweber est optimale pour  $\|(K^*)^{(-1)}x\| \leq E$

2. Maintenant, soit  $x = K^*Kz \in \text{Im}(K^*K), \|z\| \leq E$  et  $0 < c_1 < c_2$ , pour chaque choix  $m(\delta)$  avec

$$c_1 \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}} \leq m(\delta) \leq c_2 \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{on a}$$

$$\|x^m, \delta - x\| \leq c_3 E^{\frac{1}{3}} \delta^{\frac{2}{3}},$$

où  $c_3$  dépend de  $c_1, c_2$  et  $a$ . Pour cela, l'itération de Landweber est aussi optimale pour  $\|(K^*K)^{-1}x\| \leq E$ .



*Remarque 2.3.1.* Pour cette méthode on observe qu'une haute précision demande un nombre large  $m$  d'itérations mais la stabilité nous force à garder  $m$  le plus petit possible.

## 2.4 Équation intégrale de 1ère et de 2ème espèce

L'équation intégrale de première espèce de Volterra

$$\int_a^x K(x,t)q(t)dt = f(x), \quad x \in [0, T], \quad (2.4.1)$$

elle peut être considéré comme un cas particulier de l'équation de Fredholm

$$\int_0^1 \bar{K}(x,t)q(t)dt = f(x), \quad x \in [0, T],$$

Son noyau prend la forme

$$\bar{K} = \begin{cases} K(x,t) & t \in [0, x] \\ 0 & t \in [x, T]. \end{cases}$$

Supposons que l'équation 2.4.1 a une solution  $q_e \in C[0, T]$  et les fonctions  $K(x, t)$  et  $f(x)$  ont des dérivées continues par rapport à  $x$  ensuite en dérivant l'équation 2.4.1 par rapport à  $x$  on obtient

$$q(x)K(x, x) + \int_0^x \frac{\partial K}{\partial x}(x, t)q(t)dt = f'(x) \quad (2.4.2)$$

Si  $K(x, x) \neq 0$  pour tout  $x \in [0, T]$  alors l'équation devient un cas particulier de l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce.

Dans ce qui suit nous allons envisager la régularisation de Volterra.

### 2.4.1 Équation intégrale de Volterra de deuxième espèce

Considérons l'équation de Volterra du deuxième espèce dans  $C[0, T]$  et  $L^2[0, T]$

$$q(x) = g(x) + \int_0^x P(x,t)q(t)dt, \quad x \in [0, T], \quad (2.4.3)$$

On va montrer que le problème 2.4.3 est bien-posé.

*Théorème 2.4.1.* Soit  $g \in C[0, T]$  et  $P(x, t) \in C(0 \leq t \leq x \leq T)$ , alors le problème 2.4.3 est bien-posé dans  $C[0, T]$ .

*Démonstration.* On définit l'opérateur  $V$  comme suit :

$$(Vq)(x) = g(x) + \int_0^x P(x,t)q(t)dt, \quad x \in [0, T].$$



On introduit une norme dépend du paramètre  $\beta \geq 0$ ,

$$\|q\|_{\beta} = \sup_{x \in [0, T]} \{|q(x)| \exp((-\beta)x)\},$$

d'après la définition d'une norme alors

$$\|q\|_0 = \|q\|_{C[0, T]}, \quad \|q\|_{\beta} = \|q\|_{C[0, T]} \leq \exp((\beta)x) \|q\|_{\beta}. \quad (2.4.4)$$

On note

$$G_0 = \|g\|_{C[0, T]}, \quad P_0 = \sup_{x \in [0, T], t \in [0, x]} |P(x, t)|.$$

On va prouver que pour tout  $T > 0, \gamma > 0$  et tout  $\beta$  satisfait la condition suivante :

$$\max \left\{ P_0, P_0 \frac{G_0 + \gamma}{\gamma} \right\} < \beta, \quad (2.4.5)$$

l'opérateur  $V$  transforme la boule

$$B(g, \gamma, \beta) = \{p(x) \in C[0, T] : \|p - g\|_{\beta} \leq \gamma\}$$

vers la même boule et l'opérateur est une contraction.

Soit  $r \in B(g, \gamma, \beta)$  c.à.d  $\|g - r\|_{\beta} \leq \gamma$  donc  $\|r\|_{\beta} \leq \|g\|_{\beta} + \gamma \leq G_0 + \gamma$ .

On a

$$\begin{aligned} |(Vr)(x) - g(x)| &\leq \int_0^x |p(x, t)r(t)| dt \\ &\leq P_0 \int_0^x |r(t)| \exp(-\beta t) \exp(\beta t) dt \\ &\leq P_0 \|r\|_{\beta} \int_0^x \exp(\beta t) dt \\ &= P_0 \|r\|_{\beta} \frac{1}{\beta} (\exp(\beta t) - 1), \quad x \in [0, T]. \end{aligned}$$

Par conséquent pour tout  $x \in [0, T]$ ,

$$|(Vr)(x) - g(x)| e^{-\beta x} \leq P_0 \|r\|_{\beta} \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta x}) \leq \frac{P_0}{\beta} \|r\|_{\beta},$$

et d'après 2.4.5

$$|(Vr)(x) - g(x)| \leq \frac{P_0}{\beta} \|r\|_{\beta} \leq \frac{P_0(G_0 + \gamma)}{\beta} < \gamma,$$

ce qui signifie que  $Vr \in B(g, \gamma, \beta)$ .



Maintenant, soient  $r_1, r_2 \in B(g, \gamma, \beta)$ . Par les mêmes arguments on obtient l'estimation

$$\begin{aligned} |(Vr_1)(x) - (Vr_2)(x)| &\leq \int_0^x |P(x, t)| |r_1(t) - r_2(t)| dt \\ &\leq P_0 \|r_1 - r_2\|_\beta \frac{1}{\beta} (\exp(\beta x) - 1), \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|Vr_1 - Vr_2\| \leq \frac{P_0}{\beta} \|r_1 - r_2\|_\beta.$$

Suite à 2.4.5,  $\frac{P_0}{\beta} < 1$ . Cela signifie que l'opérateur  $V$  est une contraction dans la boule  $B(g, \gamma, \beta)$ . Par conséquent, par le théorème des points fixes de **Banach** l'opérateur a un point fixe unique dans cette boule. ce qui est évidemment une solution de l'équation 2.4.3. Nous passons maintenant à la preuve de l'unicité et de la stabilité de la solution du problème 2.4.3 par rapport aux petites perturbations de  $g(x)$ .

Nous commençons par prouver la stabilité. Supposons que  $q_j(x)$ ,  $j = 1, 2$  sont des solutions continues aux équations

$$q_j(x) = g_j(x) + \int_0^x P(x, t) q_j(t) dt, \quad j = 1, 2, \quad (2.4.6)$$

respectivement comme avant les fonctions  $g_1, g_2$  et  $P$  sont supposés continues alors  $\tilde{q} = q_1 - q_2$  et  $\tilde{g} = g_1 - g_2$  satisfait l'équation

$$\tilde{q}(x) = \tilde{g}(x) + \int_0^x P(x, t) \tilde{q}(t) dt,$$

qui implique

$$|\tilde{q}| \leq |\tilde{g}| + \left| \int_0^x P(x, t) \tilde{q}_j(t) dt \right| \left| \int_0^x P(x, t) \tilde{q} dt \right|$$

alors

$$|\tilde{q}| \leq |\tilde{g}| + P_0 \|\tilde{q}\|_\beta \frac{1}{\beta} (\exp(\beta x) - 1).$$

Multiplions l'inégalité obtenue par  $\exp(-\beta x)$  et prenons le sup par rapport à  $x \in [0, T]$ , on a

$$\|\tilde{q}\|_\beta \leq \|\tilde{g}\|_\beta + \frac{P_0}{\beta} \|\tilde{q}\|_\beta.$$

Alors

$$\left(1 - \frac{P_0}{\beta}\right) \|\tilde{q}\|_\beta \leq \|\tilde{g}\|_\beta.$$

Comme  $\beta > P_0$  et d'après 2.4.5 on a

$$\|\tilde{q}\|_\beta \leq \frac{\beta}{\beta - P_0} \|\tilde{g}\|_\beta.$$



Finalement en utilisant 2.4.4 on obtient

$$\|q_1 - q_2\|_{C[0,T]} \leq \frac{\beta}{\beta - P_0} \exp(\beta T) \|g_1 - g_2\|_{C[0,T]} \quad (2.4.7)$$

L'estimation de stabilité 2.4.7 implique également l'unicité de la solution.  $\square$

**Remarque 2.4.1.** 1. L'estimation 2.4.7 peut être améliorée par l'application du lemme de Gronwall à l'inégalité :

$$|\tilde{q}(x)| \leq |\tilde{g}(x)| + \left| \int_0^x P(x,t) \tilde{q}(t) dt \right|,$$

obtenue dans la preuve du théorème précédent.

2. On peut prouver que si  $g \in L_2(0, T)$  et  $P(x, t) \in L_2(0 \leq t \leq x \leq T)$ , alors le problème 2.4.3 est bien-posé dans  $L_2(0, T)$ .

#### 2.4.2 La régularisation de l'équation intégrale de première espèce de Volterra

L'exemple ci-dessus de réduire le problème mal posé 2.4.1 à un problème bien posé 2.4.2 est rarement applicable dans la pratique pour deux raisons principales. Au lieu de  $f(x)$  nous avons habituellement seulement son approximation  $f_\delta$  et même si la dérivée  $f'_\delta(x)$  est connue des petites erreurs en  $f(x)$  peuvent conduire à de très grandes erreurs à la solution.

D'autre part, l'application de l'approximation générale décrite dans la section précédente c.à.d réduire le problème 2.4.1 à une équation de **Fredholm** de deuxième espèce de la forme

$$\alpha q(x) + A^* A q = A^* f_\delta(x) g,$$

nous donne une équation qui n'est pas de Volterra, car  $(A^* A)$  n'est pas un opérateur de Volterra, ce qui complique considérablement l'analyse et la solution de l'équation régularisée.

Comme précédemment, nous supposons que l'équation 2.4.1 c.à.d

$$\int_0^x K(x,t) q(t) dt = f(x), \quad x \in [0, T],$$

a une solution mais au lieu de la fonction  $f$  on sait seulement son approximation  $f_\delta$  qui satisfait la condition

$$\|f - f_\delta\|_{C[0,T]} \leq \delta.$$

On va approximer l'équation 2.4.1 par l'équation de Volterra de deuxième espèce avec un paramètre positive  $\alpha$

$$\alpha q(x) + \int_0^x K(x,t) q(t) dt = f_\delta(x), \quad x \in [0, T]. \quad (2.4.8)$$



**Théorème 2.4.2.** On suppose que pour  $f, f_\delta \in C[0, T]$  il existe une solution  $q_e \in C^1[0, T]$  de l'équation 2.4.1 sachant que  $q_e(+0) = 0$ .

Soient  $K, \frac{\partial K}{\partial x}$  et  $\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}$  sont continus et  $K(x, x) \equiv 1$ . Alors il existe des nombres positives  $\alpha^*, \delta^*$  et  $K^*$  tel que pour  $\alpha \in (0, \alpha^*), \delta \in (0, \delta^*)$  l'équation 2.4.8 a une solution unique  $q_{\alpha, \delta} \in C[0, T]$  qui satisfait l'estimation

$$\|q_{\alpha, \delta} - q_e\|_{C[0, T]} \leq K^* \left( \alpha + \frac{\delta}{\alpha} \right) \quad (2.4.9)$$

**Démonstration.** L'existence et l'unicité de la solution  $q_{\alpha, \delta}$  suit du théorème 2.4.1

Soit  $\tilde{f}(x) = f(x) - f_\delta(x)$ ,  $\tilde{q} = q(x) - q_{\alpha, \delta}(x)$ , puis en soustrayant 2.4.8 de 2.4.1, on obtient

$$\alpha q(x) + \int_0^x K(x, t) \tilde{q}(t) dt = \alpha q_e(x) + \tilde{f}(x). \quad (2.4.10)$$

Les arguments utilisés dans la preuve du théorème 2.4.1 ne peuvent pas être utilisés pour estimer  $\tilde{q}$  car l'équation 2.4.10 comprend un petit paramètre  $\alpha$ . Pour cette raison, nous allons introduire une fonction de poids plus compliquée  $\exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right)$  au lieu de  $\exp(\beta t)$  et utiliser d'autre intégration par rapport à  $x$ . En changeant la variable  $x$  à  $\xi$  dans 2.4.10 et multiplions l'équation résultante par la fonction  $\alpha^{-2} \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right)$  et intégrant par rapport à  $\xi$  de 0 à  $x$  :

$$\int_0^x \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) \left[ \frac{1}{\alpha} \tilde{q}(\xi) + \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\xi K(\xi, t) \tilde{q}(t) dt \right] d\xi = \frac{1}{\alpha} \int_0^x \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) q_e(\xi) d\xi + \frac{1}{\alpha^2} \int_0^x \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) \tilde{f}(\xi) d\xi \quad (2.4.11)$$

On divise 2.4.10 par  $\alpha$  et soustrayant inégalité 2.4.11 de l'égalité résultante. En réarrangeant nous obtenons

$$\begin{aligned} \tilde{q}(x) + \frac{1}{\alpha} \int_0^x K(x, t) \tilde{q}(t) dt &- \frac{1}{\alpha} \int_0^x \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) \tilde{q}(\xi) d\xi \\ &- \frac{1}{\alpha^2} \int_0^x \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) \left[ \int_0^\xi K(x, \xi) \tilde{q}(t) dt \right] d\xi \\ &= q_e(x) + \frac{1}{\alpha} \tilde{f}(x) + \frac{1}{\alpha} \int_0^x \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) q_e(\xi) d\xi \\ &- \frac{1}{\alpha^2} \int_0^x \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) \tilde{f}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

On intégrant deux fois par partie le quatrième terme sur le côté gauche de la dernière inégalité et en utilisant

la condition  $K(x, x) \equiv 1$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\alpha^2} \int_0^x \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) \left[ \int_0^\xi K(\xi, t) \tilde{q}(t) dt \right] d\xi &= \frac{1}{\alpha} \int_0^x K(x, t) \tilde{q}(t) dt \\
 &= \frac{1}{\alpha} \int_0^x K(x, t) \tilde{q}(t) dt - \frac{1}{\alpha} \int_0^x \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) \tilde{q}(\xi) d\xi \\
 &\quad - \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) \left[ \int_0^x D^{(0,1)} K(\xi, t) \tilde{q}(t) dt \right] d\xi \\
 &= \frac{1}{\alpha} \int_0^x K(x, t) \tilde{q}(t) dt - \frac{1}{\alpha} \int_0^x \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) \tilde{q}(\xi) d\xi \\
 &\quad - \int_0^x D^{(0,1)} K(\xi, t) \tilde{q}(t) dt d\xi \\
 &\quad + \int_0^x \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) D^{(1,0)} K(\xi, \xi) \tilde{q}(\xi) d\xi \\
 &\quad + \int_0^x \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) \left[ \int_0^\xi D^{(2,0)} K(\xi, t) \tilde{q}(t) dt \right] d\xi.
 \end{aligned}$$

$$\text{Ici } D^{(n_1, n_2)} K(x_1, x_2) = \frac{\partial^{n_1}}{\partial x_1^{n_1}} \frac{\partial^{n_2}}{\partial x_2^{n_2}} K(x_1, x_2).$$

On change l'ordre de l'intégration du dernier terme et on le substitue par l'expression résultante dans 2.4.12 on arrive à :

$$\begin{aligned}
 \tilde{q} + \int_0^x D^{(1,0)} K(\xi, t) \tilde{q}(t) dt &- \int_0^x \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) K(\xi, \xi) \tilde{q}(\xi) d\xi \\
 &- \int_0^x \left[ \int_t^x \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) D^{(2,0)} K(\xi, t) d\xi \right] \tilde{q}(t) dt \\
 &= q_e(x) + \frac{1}{\alpha} \tilde{f}(x) - \frac{1}{\alpha} \int_0^x \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) q_e(\xi) d\xi \\
 &- \frac{1}{\alpha^2} \int_0^x \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) \tilde{f}(\xi) d\xi.
 \end{aligned}$$

De toute évidence l'égalité dérivée est représentée sous la forme :

$$\tilde{q} + \int_0^x B_\alpha(x, t) \tilde{q}(t) dt = \psi_{\alpha, \delta}(x), \quad (2.4.13)$$

où

$$\begin{aligned}
 B_\alpha(x, t) &= \frac{1}{\alpha} K(x, t) - \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{x-t}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha^2} \int_t^x K(\xi, t) \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) d\xi \\
 &- \int_t^x D^{(2,0)} K(\xi, t) \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) d\xi
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\psi_{\alpha,\delta}(x) &= q_\varepsilon(x) - \frac{1}{\alpha} \int_0^x \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) q_\varepsilon(\xi) d\xi + \frac{\tilde{f}(x)}{\alpha} \\
&\quad - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^x \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) \tilde{f}(\xi) d\xi \\
&= \int_0^x \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) q'_\varepsilon(\xi) d\xi + \frac{\tilde{f}(x)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^x \exp\left(-\frac{x-\xi}{\alpha}\right) \tilde{f}(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

De l'inégalité 2.4.13 il suit que

$$|\tilde{q}(x)| \leq \|\psi_{\alpha,\delta}\|_{C[0,T]} + \left| \int_0^x \max_{t \in [0,T]} |B_{\alpha}(x,t)| |\tilde{q}(t)| dt \right|, \quad x \in [0, T]$$

En utilisant le lemme de **Granwell** on obtient

$$\|\tilde{q}(x)\|_{C[0,T]} = \max_{x \in [0,T]} |\tilde{q}(x)| \leq \|\psi_{\alpha,\delta}\|_{C[0,T]} \exp \left\{ \int_0^x \max_{t \in [0,T]} |B_{\alpha}(x,t)| dt \right\}.$$

Pour compléter la preuve il suffit de vérifier que pour  $\alpha^* > 0$ ,  $\delta^* > 0$ ,  $K_1 > 0$ ,  $K_2 > 0$  les inégalités suivantes sont satisfaites

$$\int_0^x \max_{t \in [0,T]} |B_{\alpha}(x,t)| dt \leq K_1, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha^* \quad (2.4.14)$$

$$\max_{x \in [0,T]} \|\psi_{\alpha,\delta}(x)\|_{C[0,T]} \leq K_2 \left( \alpha + \frac{\delta}{\alpha} \right), \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha^*, \quad 0 \leq \delta \leq \delta^* \quad (2.4.15)$$

## 2.5 Simulations numériques pour la méthode de Tikhonov

### 2.5.1 Position du problème

Dans cette section on va montrer que la régularisation de Tikhonov combinée avec le principe de sélection de Morozov aboutit à une solution numérique stable de l'équation intégrale mal-posé. Pour illustrer l'efficacité de l'algorithme de Tikhonov-Morozov nous considérons l'équation :

$$Kx := \int_a^b k(t,s)x(s)ds = f(t), \quad [a,b] = [c,d] = [0,1],$$

avec

$$k(t,s) = \exp(ts), \quad K : L^2[a,b] \rightarrow L^2[c,d] \quad \text{et} \quad f_\varepsilon(t) = \frac{\exp(t+1) - 1}{t+1}.$$

Notons que dans  $L^2[a,b]$  la norme est générée par le produit scalaire suivant :

$$\langle [f], [g] \rangle_{L^2} = \int_a^b f(t)\bar{g}(t), \quad f \in [f], \quad g \in [g],$$



où  $[f], [g]$  sont les classes d'équivalence de  $f$  et  $g$ . En outre, le nombre des partitions que nous allons utiliser sont  $n = 4, 8, 16$  et  $32$  tout en faisant varier  $t \in [0, 1]$  pour nos tables.

Noter que  $K$  est auto-adjoint c-à-d  $K = K^*$ . En effet, étant donné que  $k(t, s) = \exp(st)$ ,  $k^*$  peut être exprimé comme suit :

$$K^*x := \int_c^d \overline{k(s, t)x(t)} dt \quad \text{où } [c, d] = [a, b] = [0, 1].$$

Alors  $\overline{k(s, t)} = \overline{\exp(st)}$  et comme  $s$  et  $t$  sont des valeurs réelles alors  $\overline{\exp(st)} = \exp(st)$ . Donc  $K^* = K$ . On discrétise l'opérateur  $K$  en utilisant la règle des trapèzes pour approcher l'intégrale

$$(K_n x)_i := b \left[ \frac{1}{2} x_0 + \frac{1}{2} \exp(ih)x_n + \sum_{j=1}^{n-1} \exp(ijb^2)x_j \right] = (f_\delta)_i$$

où  $x_j$  est une valeur approchée de  $x(jb)$ ,  $j = 0, \dots, n$  et  $(f_\delta)_i = f(ih)$ ,  $i = 0, \dots, n$  est le second membre bruité.

Ensuite, la solution de Tikhonov discrétisée est donnée par

$$x_{\alpha, \delta} = (\alpha I_n + K_n^* K_n)^{-1} K_n^* f_\delta \quad K_n^* = K_n.$$

Dans le but de mettre en œuvre le principe de Morozov on doit résoudre l'équation non-linéaire suivante :

$$\varphi(\alpha) := \|K_n x_{\alpha, \delta} - f_\delta\|^2 - \delta^2 = 0$$

On introduit la notation suivante

$$G_n := (\alpha I_n + K_n^* K_n)^{-1}$$

Substituant  $x_{\alpha, \delta} = G_n K_n^* f_\delta$  dans l'expression  $\varphi(\alpha)$ , on conclut :

$$\varphi(\alpha) := \|K_n G_n K_n^* f_\delta - f_\delta\|^2 - \delta^2 := \|(K_n G_n K_n^* - I_n) f_\delta\|^2 - \delta^2$$

On résout  $\varphi(\alpha) = 0$  par la méthode de Newton :

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{\varphi(\alpha_j)}{\varphi'(\alpha_j)}, \quad j = 0, 1, \dots.$$

on a :  $\varphi'(\alpha) = 2 \left\langle K_n \frac{dx_{\alpha, \delta}}{d\alpha}, K_n x_{\alpha, \delta} - f_\delta \right\rangle$  Rappelons, que l'opérateur dans notre exemple est de valeur réelle. En outre,

$$\frac{dx_{\alpha, \delta}}{d\alpha} = -G_n x_{\alpha, \delta} = G_n^2 K_n^* f_\delta.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\varphi'(\alpha) &= -2 \langle K_n G_n^2 K_n^* f_\delta, K_n G_n K_n^* f_\delta - f_\delta \rangle \\ &= -2 \langle K_n G_n^2 K_n^* f_\delta, (K_n G_n K_n^* - I_n) f_\delta \rangle\end{aligned}$$

et comme  $K_n^* = K_n$  on termine la méthode de Newton quand

$$|\alpha_{j+1} - \alpha_j| < 10^{-6} \quad \text{et} \quad |\varphi(\alpha_j)| < 10^{-6},$$

ce qui est comparable au solveur Matlab 'de fsolve'.

### 2.5.2 Sources de bruit

Pour générer  $f_\delta$  on ajoute un terme bruit à la fonction exacte  $f_e$ . Ce terme bruit comprend une valeur d'entrée de  $\sigma$  qui est égale à  $\sigma \sqrt{2} \sin(10\pi t)$ . Par conséquent  $f_\delta$  est :

$$f_\delta = f_e + \sigma \sqrt{2} \sin(10\pi t),$$

où  $f_e = \frac{\exp(t+1) - 1}{t+1}$ , voir la figure (3.5) dans la simulation numérique l'erreur résulte de deux sources.

Tout d'abord l'erreur est due à des mesures inexactes que nous supposons égales à  $\sigma \sqrt{2} \sin(10\pi t)$ . En second lieu l'erreur de discrétisation qui est générée lorsque l'intégrale est remplacée par une formule des trapèzes.

Pour les grandes valeurs de  $n$  l'erreur de discrétisation peut être ignorée. Cependant, nous voulons comparer nos résultats à ceux obtenus par la méthode numérique utilisée précédemment. Nous avons utilisé  $n = 4, 8, 16$  et  $32$ , étant donné que pour des valeurs plus élevées de  $n$  la matrice  $K_n$  devient singulière. Par conséquent, dans cette expérience on prend les mêmes valeurs de  $n$  (4, 8, 16 et 32) et donc l'erreur de discrétisation doit être soigneusement étudiée.

Désignons le second membre pour chaque  $n$  par  $f_{e_n}$ . On a :

$$\|f_{e_n} - f_\delta\| \leq \|f_{e_n} - f_e\| + \|f_e - f_\delta\|.$$

L'erreur de la règle trapézoïdale composée

$$f_{e_n} - f_e = \frac{g''(\xi)(b-a)}{12} b^2,$$

où  $\xi \in [a, b]$ . Dans notre cas

$$g(s) \approx \exp(ts) \exp(s) = \exp(s(t+1)) \quad \text{et} \quad [a, b] = [0, 1].$$



Ainsi que

$$\begin{aligned} \|f_{e_n} - f_e\| \left( \int_0^1 \frac{(t+1)^4 \exp(2(t+1)h^4)}{12^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{h^2}{12} \left( \left( \int_0^1 2^4 \exp(4) dt \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{\exp(2)h^2}{3}, \text{ puisque } t \in [0, 1] \end{aligned}$$

On voit aussi que

$$\|f_{e_n} - f_e\| = 2 \int_0^1 \sigma^2 \sin^2(10\pi t) dt = 2\sigma^2 \int_0^1 \frac{1 - \cos(20\pi t)}{2} dt = 2\sigma^2 \frac{1}{2} = \sigma^2.$$

$$\text{Donc } \|f_{e_n} - f_{\delta}\| \leq \frac{e^2 h^2}{3} + \sigma := \delta_n.$$

Noter que  $\delta_n$  change lorsque  $n$  change selon  $h$ . Nous utilisons la norme dans  $L^2$  au lieu de la norme infinie puisque le principe de Morozov est justifié pour les espaces de Hilbert.

Pour les mêmes raisons on utilise la norme discrète pour calculer  $\varphi(\alpha)$  par méthode de Newton.

### 2.5.3 Simulation

Nous appliquons le principe de Morozov avec  $\delta = 0.1$   $\delta = 0.05$   $\delta = 0.0001$ . Comme  $\alpha_0$  nous prenons  $\frac{1}{4}$  car  $\varphi(0) < 0$  et  $\varphi(\frac{1}{2}) > 0$ . Le premier tableau (B.1) présente une comparaison des normes et confirme que la solution approchée converge vers la solution exacte  $x_e$ , si  $n$  est assez grand.

Le deuxième tableau B.2 donne des valeurs de  $\alpha$  contre  $\sigma$  pour des différentes valeurs de  $n$ . On peut voir dans le tableau B.2 que lorsque le bruit est petit  $\alpha$  l'est aussi. Après l'évaluation de  $\alpha$  par le principe de Morozov on peut maintenant trouver  $x_{\alpha, \delta}$  et la comparer avec la valeur exacte  $x_e = \exp t$  pour  $\sigma = 0.1, 0.05, 0.001$  et  $n = 4, 8, 16, 32$ . Le tableau B.3 montre comment  $x$  diffère de  $x_e$  pour  $\sigma = 0.0001$  qui est la plus petite valeur (voir la figure (3.1)). Comme vous pouvez voir si  $n$  devient plus grand la solution approchée converge vers la solution exacte comme le montre le théorème de convergence.

Tableau B.4 et Figure (3.2) montrent un résultat similaire pour  $\sigma = 0.05$  tout comme le tableau (B.5) et la figure (3.3) pour  $\sigma = 0.1$ . On peut voir que quand  $\sigma$  est petite nous obtenons une approximation optimale pour notre solution exacte. La Figure (3.4) compare les solutions exactes et approchées pour différentes valeurs de  $\sigma$  et  $n = 32$ . Encore une fois, lorsque  $n = 32$  et  $\sigma = 0.0001$  l'approximation est optimale.

### 2.5.4 Discussion

On a utilisé  $\sigma = 0.05$  comme bruit dans la régularisation de Tikhonov avec le principe de Morozov, puisque il est au milieu des trois valeurs de  $\sigma$  que nous avons choisi pour travailler avec. Nous commençons par comparer les deux tableaux le tableau (B.4) pour notre discrétisation et le tableau (B.5) pour l'algorithme Tikhonov-Morozov. Notez que pour la discrétisation  $\sigma = 0$  le seul bruit est dû à une approximation de



l'intégral. Comme on peut le voir, les solutions numériques obtenues par l'algorithme Tikhonov-Morozov sont beaucoup mieux que ceux effectués par la discrétisation (naïve). Les erreurs de chaque  $n$  montrent que bien que la discrétisation oscille sauvagement et devient pire lorsque  $n$  croît, l'algorithme Tikhonov-Morozov donne des résultats effectivement mieux lorsque  $n$  devient plus grand ce qui est confirmé par la théorie.

Nous passons maintenant aux figures. Encore une fois Figure (3.6) fait référence à la discrétisation tandis que la figure (3.7) se réfère à l'algorithme Tikhonov-Morozov. Comme annoncé dans les tableaux, la discrétisation varie énormément tandis que l'algorithme Tikhonov-Morozov génère une ligne lisse qui converge vers la valeur exacte lorsque  $n$  devient plus grand. Toutes les valeurs de  $n$  ne pouvait même pas être représentées sur la discrétisation en raison du fait que pour  $n = 16$  et  $n = 32$  la matrice est presque singulière et ne donne pas un meilleur résultat, mais beaucoup pire. Notez que même pensé que nous montrons  $\sigma = 0.05$  comme notre représentant pour Tikhonov-Morozov algorithme, l'un avec  $\sigma = 0.1$  notre plus grande valeur est encore beaucoup meilleure approximation que la discrétisation, qui utilise  $\sigma = 0$ .



## Régularisation à deux paramètres

---

Soit  $A : X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire non borné défini d'un espace de Hilbert  $X$  et à valeurs dans un Hilbert  $Y$  où la norme est notée par  $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ . On suppose que l'image de  $A$  n'est pas fermée, alors l'équation

$$AX = y, \quad (3.0.1)$$

est mal-posée. Cependant, pour une raison de simplicité, on suppose que l'opérateur  $A$  est injectif et  $y \in R(A)$ , telle que l'unique solution de norme minimale  $x^+ \in X$  de l'équation 3.0.1 existe. Soit maintenant  $y_\delta \in Y$  une donnée bruitée vérifiant

$$\|y - y_\delta\| \leq \delta \quad (3.0.2)$$

Soit  $B$  un opérateur non-borné strictement positif auto-adjoint à domaine dense défini sur un espace de Hilbert  $X$ , vérifiant les conditions :

- i  $Dom(B) = Dom(B^*)$  est un sous-espace dense de  $X$
- ii  $\langle Bx, y \rangle = \langle x, By \rangle$  pour tout  $x, y \in Dom(B)$
- iii Il existe  $\gamma > 0$ , tq  $\|Bx\| \geq \gamma\|x\|$ , pour tout  $x \in Dom(B)$ .

Dans la méthode de régularisation de Tikhonov à deux paramètres la solution régularisée  $x^\delta(\alpha, \beta)$  est définie comme le minimum de la fonctionnelle

$$\Phi(\alpha, \beta, x) = \|Ax - y_\delta\|^2 + \alpha\|Bx\|^2 + \beta\|x\|^2, \quad (3.0.3)$$

où  $\alpha, \beta > 0$  jouent le rôle des paramètres de régularisation.

Dans cette section, pour des raisons de simplicité on considère une méthode de régularisation à deux paramètres. Les résultats concernant la méthode de régularisation à multi-paramètres qui consiste à minimiser la fonctionnelle :

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l, B, x) = \|Ax - y_\delta\|^2 + \sum_{i=1}^l \alpha_i \|B_i x\|^2 + B\|x\|^2, \quad (3.0.4)$$



Le but essentiel dans cette section est de trouver une stratégie à postérieure du choix des paramètres  $(\alpha, \beta)$ . Donc on considère une extension du principe de selection classique et on cherche l'ensemble des  $(\alpha, \beta)$  vérifiant se qu'on appelle principe de selection à multi-paramètres, c-à-d :

$$\|Ax^\delta(\alpha, \beta) - \gamma_\delta\| = c\delta, \quad c \geq 1. \quad (3.0.5)$$

**Définition 3.0.1. (Hilbert scale)**  $X_r, r \in \mathbb{R}$   $X_r$  est la complétion de  $Dom(B^r)$  par rapport à la norme  $\|x\|_r = \|B^r x\|$ ,  $r \in \mathbb{R}$ . On suppose de plus la condition suivante :

Il existe deux constantes positives  $E$  et  $P$  telle que :

$$x^* \in M_{p,E} = \{x \in X \mid \|x\|_p \leq E\} \subset X, \quad (3.0.6)$$

ce qui signifie que  $x^*$  admet la représentation  $x^* = B^{-p}v$  avec  $v \in X$  et  $\|v\| \leq E$ .

**Proposition 3.0.1.** Soit  $x^\delta := x^\delta(\alpha, \beta)$  la solution régularisée selon la méthode de Tikhonov à deux paramètres. Alors sous les conditions

i

$$d\|B^{-a}x\| \leq \|Ax\| \leq D\|B^{-a}x\| \quad (3.0.7)$$

ii  $x^* \in M_{p,E}$

On a l'estimation optimale suivante :

$$\|x^\delta - x^*\| \leq (2E)^{\frac{a}{a+p}} \left( \frac{(c+1)\delta}{d} \right)^{\frac{p}{a+p}} = O\left(\delta^{\frac{p}{a+p}}\right), \quad a \in (0, 2), \quad (3.0.8)$$

pour tout  $p \in ]0, a+2[$  et tout  $(\alpha > 0$  et  $\beta > 0)$  vérifiant le principe de sélection 3.0.5

**Démonstration.** Noter que l'inclusion  $B^p x^* \in X$  est équivalente à la représentation  $B^{p-1}x^* = B^{-1}B^p x^* = B^{-1}v$  où  $\|v\| \leq E$ , et sous les conditions de la proposition 2.13(voir[7], p 101) on peut écrire  $B^{-1}v = \varphi(L^{-s}A^*AL^{-s})\tilde{v}$  où  $L = B$ ,  $s = p - 1$ ,  $\varphi(\lambda) = \lambda^{\frac{1}{2(p+a-1)}}$ . Alors il suit immédiatement que l'implification de l'erreur est d'ordre  $O(\delta^{\frac{p}{p+a}})$  ne peut pas être amélioré ce qui montre que cet ordre est optimal. On montre l'estimation 3.0.8 pour  $p \in [1, a]$ . Pour  $p \in ]0, 1[ \cup ]a, a+2[$  la démonstration est plus technique(voir [18]). Puisque  $x^\delta$  minimise la fonctionnelle définie dans 3.0.4. On a :

$$\begin{aligned} \|Ax^\delta - \gamma_\delta\|^2 + \alpha\|Bx^\delta\|^2 + \beta\|x^\delta\|^2 &\leq \|Ax^* - \gamma_\delta\|^2 + \alpha\|Bx^*\|^2 + \beta\|x^*\|^2 \\ &\leq \delta^2 + \alpha\|Bx^*\|^2 + \beta\|x^*\|^2 \end{aligned}$$

En utilisant 3.0.5 on obtient

$$c^2\delta^2 + \alpha\|Bx^\delta\|^2 + \beta\|x^\delta\|^2 \leq \delta^2 + \alpha\|Bx^*\|^2 + \beta\|x^*\|^2$$

Puisque  $\alpha, \beta$  sont positifs et  $c \geq 1$  alors on a deux possibilités :



i  $\|Bx^\delta\| \leq \|Bx^*\|$  ou

ii  $\|x^\delta\| \leq \|x^*\|$

On va analyser les deux cas :

i En utilisant l'inégalité  $\|Bx^\delta\| \leq \|Bx^*\|$ , on conclut que :

$$\begin{aligned} \|Bx^\delta - x^*\|^2 &= \langle Bx^\delta - Bx^*, Bx^\delta - Bx^* \rangle \\ &= \langle Bx^\delta, Bx^\delta \rangle - 2\langle Bx^*, Bx^\delta \rangle + \langle Bx^*, Bx^* \rangle \\ &\leq 2\langle Bx^*, Bx^* \rangle - 2\langle Bx^*, Bx^\delta \rangle \\ &= 2\langle B^{2-p}x^*, B^p x^* \rangle - 2\langle B^{2-p}x^\delta, B^p x^* \rangle \\ &= 2\langle B^{2-p}(x^* - x^\delta), B^p x^* \rangle, \end{aligned}$$

d'après Cauchy Shwartz

$$\|Bx^\delta - x^*\|^2 \leq 2\|B^{2-p}(x^* - x^\delta)\| \|B^p x^*\| \leq 2E\|B^{2-p}(x^* - x^\delta)\| \quad (x^* \in M_{p,E}).$$

Le reste de la démonstration de (i) est basée sur l'inégalité d'interpolation suivante

$$\|x\|_r \leq \|x\|_{-a}^{\frac{s-r}{s+a}} \|x\|_s^{\frac{a+r}{s+a}}, \quad (3.0.9)$$

pour tout  $r \in [-a, s]$ ,  $a + s \neq 0$ .

On pose dans notre cas  $r = 2 - p$  et  $s = 1$  on obtient :

$$\|x^\delta - x^*\|_1^2 \leq 2E \|x^\delta - x^*\|_{-a}^{\frac{p-1}{a+1}} \|x^\delta - x^*\|_1^{\frac{a+2-p}{a+1}}$$

Sous les conditions 3.0.7, 3.0.2 et 3.0.5 on obtient :

$$\begin{aligned} \|x^\delta - x^*\|_{-a}^{\frac{p-1}{a+1}} &= \|B^{-a}(x^\delta - x^*)\|_{-a}^{\frac{p-1}{a+1}} \|x^\delta - x^*\|_1^{\frac{a+2-p}{a+1}} \\ &= \|B(x^\delta - x^*)\|_{-a}^{\frac{a+2-p}{a+1}} \\ &= \|BB^{-p}B^p(x^\delta - x^*)\|_{-a}^{\frac{a+2-p}{a+1}} \quad \text{et } v = B^p(x^\delta - x^*) \\ &\leq \|B^{1-p}v\|_{-a}^{\frac{p-1}{a+1}} \\ &\leq (E)^{\frac{a+2-p}{a+1}} \|B^{1-p}(x^\delta - x^*)\| \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\|B(x^\delta - x^*)\|_{-a}^{\frac{2(a+1)}{a+p}} \|B(x^\delta - x^*)\|_{-a}^{\frac{(p-a-2)}{a+p}} \leq (2E)^{\frac{a+1}{a+p}} \left( \frac{(1+c)\delta}{d} \right)^{\frac{a-1}{a+p}} \|B(x^\delta - x^*)\|$$

Soit maintenant  $\|x^\delta\| \leq \|x^*\|$ .

En utilisant l'équation 3.0.5 avec  $r = -p$ ,  $s = 0$  on obtient

$$\begin{aligned} \|x^\delta - x^*\|^2 &= \langle x^\delta - x^*, x^\delta - x^* \rangle \\ &= \langle x^\delta, x^\delta \rangle - 2\langle x^\delta, x^* \rangle + \langle x^*, x^* \rangle \\ &\leq 2\langle x^*, x^* \rangle - 2\langle x^\delta, x^* \rangle \\ &\leq 2E\|x^\delta - x^*\|_p \|x^\delta - x^*\|^2 \\ &\leq 2E\|x^\delta - x^*\|_a^{\frac{p}{a}} \|x^\delta - x^*\|_{s=0}^{\frac{a-p}{a}} \end{aligned}$$

En élevant au puissance  $\frac{a}{a+p}$  on obtient :

$$\begin{aligned} \|x^\delta - x^*\|_{2^{\frac{a}{a+p}}} &\leq (2E)^{\frac{a}{a+p}} \|B^{-a}(x^\delta - x^*)\|_{a+p}^{(p)} \|x^\delta - x^*\|_{a+p}^{\frac{a-p}{a}} \|x^\delta - x^*\| \\ &\leq (2E)^{\frac{a}{a+p}} \|B(x^\delta - x^*)\|_a^{(p)}. \end{aligned}$$

□

### 3.1 Fonction modèle basée sur le principe de sélection à deux paramètres

Cette sous-section est consacrée à l'étude du choix des paramètres de régularisation en se basant sur une technique d'approximation appelée **fonction modèle** (voir [7], [18]).

$$(A^*A + \alpha B^2 + \beta I)x^\delta = A^*y_\delta. \quad (3.1.1)$$

Cette équation peut être réécrite sous la forme variationnelle comme suit :

$$\langle Ax^\delta, Ag \rangle + \alpha \langle Bx^\delta, Bg \rangle + \beta \langle x^\delta, g \rangle = \langle y_\delta, Ag \rangle, \text{ pour tout } g \in \text{Dom}(B) \quad (3.1.2)$$

Pour notre analyse on va utiliser le lemme suivant où la démonstration est similaire à celle utilisée dans [96].

*Lemme 3.1.1. la fonction  $x^\delta = x^\delta(\alpha, \beta)$  est indéfiniment différentiable pour tout  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ . Les dérivées partielles sont obtenues d'une manière récursive.*

$$\langle Ax, Ag \rangle + \alpha \langle Bx, Bg \rangle + \beta \langle x, g \rangle = -n \langle B \frac{\partial^{n-1} x^\delta}{\partial \alpha^{n-1}}, Bg \rangle, \text{ pour tout } g \in \text{Dom}(B). \quad (3.1.3)$$

Alors que  $z = \frac{\partial^n x^\delta}{\partial \beta^n}$  résoud l'équation

$$\langle Az, Ag \rangle + \alpha \langle Bz, Bg \rangle + \beta \langle z, g \rangle = -n \langle B \frac{\partial^{n-1} x^\delta}{\partial \alpha^{n-1}}, Bg \rangle, \text{ pour tout } g \in \text{Dom}(B). \quad (3.1.4)$$



*Démonstration.* voir [26] □

*Lemme 3.1.2.* Soit  $F(\alpha, \beta) = \Phi(\alpha, \beta, x^\delta(\alpha, \beta))$ . Alors

$$\partial_\alpha F(\alpha, \beta) := \frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \|Bx^\delta(\alpha, \beta)\|^2,$$

$$\partial_\beta F(\alpha, \beta) := \frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \|x^\delta(\alpha, \beta)\|^2.$$

Maintenant d'après 3.0.4 et le lemme 3.1.2 le principe de sélection à multiparamètres 3.0.5 peut être écrit sous la forme

$$F(\alpha, \beta) - \alpha \partial_\alpha F(\alpha, \beta) - \beta \partial_\beta F(\alpha, \beta) = c^2 \delta^2.$$

L'idée consiste à approximer la fonction  $F(\alpha, \beta)$  en utilisant une fonction appelée : fonction modèle  $m(\alpha, \beta)$  telle que l'équation

$$m(\alpha, \beta) - \alpha \partial_\alpha m(\alpha, \beta) - \beta \partial_\beta m(\alpha, \beta) = c^2 \delta^2. \quad (3.1.5)$$

soit simple à résoudre.

Pour obtenir une équation pour une telle fonction modèle, on note que si  $g = x^\delta$  l'équation 3.1.2 nous donne

$$\|Ax^\delta\|^2 + \alpha \|Bx^\delta\|^2 + \beta \|x^\delta\|^2 = \langle y_\delta, Ax^\delta \rangle.$$

$$\|y_\delta\|^2 - \|Ax^\delta\|^2 - \alpha \|Bx^\delta\|^2 - \beta \|x^\delta\|^2 \quad (3.1.6)$$

Maintenant comme dans [26] on va approximer le terme  $\|Ax^\delta\|^2$  par  $T\|x^\delta\|^2$  où  $T$  est une constante positive qui sera déterminée ultérieurement. Cette approximation et le lemme 3.1.2 nous donne la formule d'approximation suivante

$$F(\alpha, \beta) \approx \|y_\delta\|^2 - \alpha \partial_\alpha F(\alpha, \beta) - (\beta + T) \partial_\beta F(\alpha, \beta)$$

la fonction modèle signifie une fonction paramétrique  $m(\alpha, \beta)$  pour laquelle la formule précédente est soit une fonction exacte c-à-d  $m(\alpha, \beta)$  doit résoudre l'équation différentielle suivante

$$m(\alpha, \beta) + \alpha \partial_\alpha m(\alpha, \beta) - (\beta + T) \partial_\beta m(\alpha, \beta) = \|y_\delta\|^2.$$

Il est facile de voir que

$$m(\alpha, \beta) = \|y_\delta\|^2 + \frac{C}{\alpha} + \frac{D}{T + \beta}, \quad (3.1.7)$$

car

$$\partial_\alpha m(\alpha, \beta) = -\frac{C}{\alpha^2} \Rightarrow \alpha \partial_\alpha m(\alpha, \beta) = -\frac{C}{\alpha},$$

$$\partial_\beta m(\alpha, \beta) = -\frac{D}{(T + \beta)^2} \Rightarrow (\beta + T) \partial_\beta m(\alpha, \beta) = -\frac{D}{T + \beta},$$

où  $C, D, T$  sont des constantes à déterminer



### 3.1.1 Algorithme

On utilise la fonction modèle de la forme 3.1.7 pour construire une procédure itérative qui nous donne une suite  $\{(\alpha_k, \beta_k)\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  qui est une approximation du couple  $(\alpha^*, \beta^*)$  vérifiant le principe de sélection à multiparamètres. Supposons qu'on a trouvé le couple  $(\alpha_k, \beta_k)$  et  $x = x^\delta(\alpha, \beta)$  est la solution de l'équation 3.1.1 où  $(\alpha = \alpha_k, \beta = \beta_k)$ . En suite on détermine les coefficients  $C, D, T$  de la manière suivante

$$\begin{aligned} m(\alpha_k, \beta_k) &= \|\gamma_\delta\|^2 + \frac{C}{\alpha_k} + \frac{D}{T + \beta_k} = F(\alpha_k, \beta_k), \\ \partial_\alpha m(\alpha_k, \beta_k) &= -\frac{C}{\alpha_k^2} = \partial_\alpha F(\alpha_k, \beta_k) = \|Bx^\delta(\alpha_k, \beta_k)\|^2, \\ \partial_\beta m(\alpha_k, \beta_k) &= -\frac{D}{(T + \beta_k)^2} = \partial_\beta F(\alpha_k, \beta_k) = \|x^\delta(\alpha_k, \beta_k)\|^2. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que ces conditions d'interpolation déterminent d'une manière unique les valeurs des coefficients  $C = C(\alpha_k, \beta_k)$ ,  $D = D(\alpha_k, \beta_k)$  et  $T = T(\alpha_k, \beta_k)$  comme suit :

$$\begin{aligned} C = C(\alpha_k, \beta_k) &= -\alpha_k^2 \|Bx^\delta(\alpha_k, \beta_k)\|^2, \\ D = D(\alpha_k, \beta_k) &= \frac{\|Ax^\delta(\alpha_k, \beta_k)\|^2 + \beta_k \|x^\delta(\alpha_k, \beta_k)\|^2}{\|x^\delta(\alpha_k, \beta_k)\|^2}, \\ T = T(\alpha_k, \beta_k) &= \frac{\|Ax^\delta(\alpha_k, \beta_k)\|^2}{\|x^\delta(\alpha_k, \beta_k)\|^2}. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

En utilisant la fonction modèle 3.1.7 avec ces coefficients on peut trouver une valeur convenable pour le paramètre de régularisation  $\alpha = \alpha_{k+1}$  en résolvant l'équation

$$m(\alpha, \beta_k) - \alpha \partial_\alpha m(\alpha, \beta_k) - \beta \partial_\beta m(\alpha, \beta_k) = C^2 \delta^2.$$

Il est facile de voir que cette équation est équivalente à une équation linéaire et sa solution  $\alpha = \alpha_{k+1}$  peut être trouvée d'une manière explicite comme suit :

$$\alpha_{k+1} = \frac{2C(\alpha_k, \beta_k)}{C^2 \delta^2 - \|\gamma_\delta\|^2 - \frac{D(\alpha_k, \beta_k)}{\beta_k + T(\alpha_k, \beta_k)} - \frac{\beta_k D(\alpha_k, \beta_k)}{\beta_k + T(\alpha_k, \beta_k)^2}}. \quad (3.1.9)$$

Effectuant une étape d'itération intermédiaire en utilisant le paramètre partiel convenable pour trouver la solution  $x = x^\delta(\alpha_{k+1}, \beta_k)$  de l'équation 3.1.1 où  $\alpha = \alpha_{k+1}, \beta = \beta_k$  pour calculer les coefficients  $C = C(\alpha_k, \beta_k)$ ,  $D = D(\alpha_k, \beta_k)$  et  $T = T(\alpha_k, \beta_k)$  donnés par la formule 3.1.8 où  $\alpha_k$  est remplacée par  $\alpha_{k+1}$ . Ces coefficients déterminent une autre fonction modèle 3.1.7 qui interpole la fonction  $F(\alpha, \beta)$  et ses dérivés au point  $(\alpha_{k+1}, \beta_k)$  cette nouvelle fonction modèle  $m(\alpha, \beta)$  est utilisée pour trouver une valeur convenable du paramètre  $\beta = \beta_{k+1}$  par la résolution de l'équation suivante

$$m(\alpha_{k+1}, \beta) - \alpha_{k+1} \partial_\alpha m(\alpha_{k+1}, \beta) - \beta \partial_\beta m(\alpha_{k+1}, \beta) = C^2 \delta^2$$

qui est équivalente à l'équation quadratique

$$\left( c^2 \delta^2 - \|y_\delta\|^2 - \frac{2C(\alpha_{k+1}, \beta_k)}{\alpha_{k+1}} \right) (\beta + T(\alpha_{k+1}, \beta_k))^2 - 2D(\alpha_{k+1}, \beta_k)(\beta + T(\alpha_{k+1}, \beta_k)) + T(\alpha_{k+1}, \beta_k)D(\alpha_{k+1}, \beta_k) = 0 \quad (3.1.10)$$

Ainsi, un algorithme itératif basé sur la fonction d'approximation modèle peut être formulée sous la forme d'une procédure alternative de la manière suivante :

1. Donnant  $\delta, C, y_\delta, A, \alpha_0 > \alpha_*, \beta_0 > \beta_*$ . On pose  $K = 0$ .
2. Résoudre l'équation 3.1.1 où  $\alpha = \alpha_k, \beta = \beta_k$  pour obtenir  $x^\delta(\alpha_k, \beta_k)$ . Calculer les coefficients  $C = C(\alpha_k, \beta_k), D = D(\alpha_k, \beta_k)$  et  $T = T(\alpha_k, \beta_k)$  via l'équation 3.1.8 et remplacer  $\alpha = \alpha_{k+1}$  dans l'équation 3.1.9.
3. Résoudre l'équation 3.1.1 où  $\alpha = \alpha_{k+1}, \beta = \beta_k$  pour obtenir  $x^\delta(\alpha_{k+1}, \beta_k)$ . Calculer les coefficients  $C = C(\alpha_{k+1}, \beta_k), D = D(\alpha_{k+1}, \beta_k)$  et  $T = T(\alpha_{k+1}, \beta_k)$  et trouver  $\beta = \beta_{k+1}$  comme la solution minimale positive de l'équation 3.1.10.

## 3.2 Conclusion

### 3.2.1 Méthode de Tikhonov

1. Les avantages : Il y a des avantages définies à l'aide de la régularisation de Tikhonov avec le "Principe de Morozov". Le premier et le plus évident est qu'il renvoi une meilleure solution approchée par rapport à la discrétisation simplifier. Tout en utilisant la même règle des trapèzes pour l'approximation de l'intégrale la régularisation de Tikhonov avec le principe de Morozov est relativement et elle produit peu d'erreur dès que les partitions deviennent suffisamment grandes ce qui signifie que vous obtenez une très bonne approximation dès que le nombre des partitions devient plus grand pour toute quantité de bruit. En d'autres termes, la précision des solutions régularisées sont mieux lorsque  $n$  tend vers l'infini, ce qui n'est pas le cas pour la discrétisation simplifier.
2. Les inconvénients : Le plus grand inconvénient de la régularisation de Tikhonov avec le principe de Morozov est la manipulation de la matrice répétée pour calculer la solution approchée. Étant donné que la solution approchée utilise l'inverse de  $(\alpha_j I + K^* K)$  on doit confirmer l'existence de l'inverse de cet opérateur pour chaque  $j$  et de commencer les itérations de Newton avec un choix idéal de  $\alpha$ . Un autre inconvénient de la régularisation de Tikhonov est l'effet de sur-lissage. Afin de reconstruire des solutions non-lisses ou discontinues, on doit utiliser différents termes de pénalisation.

### 3.2.2 Méthode de régularisation à deux paramètres

1. La méthode Tikhonov-Phillips est l'une des techniques de régularisation les plus populaires en raison de sa simplicité de la mise en œuvre. Dans la version proposée par Phillips en 1962 la meilleure



précision qui peut potentiellement être atteinte par cette régularisation est d'ordre  $O\left(\delta^{\frac{2}{3}}\right)$ . Dans le même temps, cet ordre peut être amélioré d'après l'idée de Tikhonov (1963), qui consiste à changer l'opérateur identité  $I$  par un certain opérateur auto-adjoint non-borné à domaine dense et défini  $B^2$  qui définit une solution régularisée comme suit

$$x_{\delta}^B = (\alpha B^2 + A^*A)^{-1}A^*y_{\delta} = \operatorname{argmin} \{ \|Ax - y_{\delta}\|^2 + \alpha \|Bx\|^2, \quad x \in \operatorname{Dom}(B) \}. \quad (3.2.1)$$

2. Il résulte que la meilleure précision potentiellement atteinte par 3.2.1 est d'ordre  $O\left(\delta^{\frac{a+2}{2(a+1)}}\right)$ , à condition que les opérateurs  $B$  et  $A$  sont liés par la condition 3.0.7. Donc, si la condition de liaison 3.0.7 est satisfaite avec  $a \in (0, 2)$  alors la solution régularisée de Tikhonov selon 3.2.1 est meilleurs par rapport à la solution de Tikhonov-Phillips.
3. Donc, ce qu'il faut faire dans la situation où on ne sait pas quelle régularisation est plus utile pour le problème à étudier? Une réponse évidente est d'étudier une méthode de régularisation à multiparamètres, de sorte que les deux approches peuvent être combinées pour équilibrer les bonnes données  $\|Ax - y_{\delta}\|^2$  contre plusieurs pénalités  $\|x\|^2$ ,  $\|Bx\|^2$ .

### 3.3 Appendix A

Programme de résolution d'un système linéaire pour un problème inverse en utilisant la règle de l' trapèze pour approximer une intégral

L'intégrale est :  $\int e^{ts} x(s) ds = f(t) = (e^{(t+1)} - 1)/(t + 1)$

La solution exacte est :  $x(t) = \exp(t)$

```

Programme1 clc;check = 0;while check == 0;
cek = 0;while cek == 0;
sigma = input(' ');sigma=.05
if (sigma < 0)|(sigma > 1);
fprintf('Please try again. Sigma is out of range.\n');
else
cek = 1;
end
end
fprintf('Please enter the number of partitions.\n');
n = input(' ');
fprintf('\n \n \n');
n=4,8,16,32;N = n+1;h = 1/n;I = eye(N);t = 0;fe = zeros(N,1);fdelta = zeros(N,1);xexact = ze-
ros(N,1);

```



```

s = 0;K = zeros(N,N);Kstar = zeros(N,N);
alpha0 = .25;alphaTol = 1;phiTol = 1;tol = 10(-6);
G = zeros(N,N);phi = 0;phiprime = 0;alpha1 = 0;xalphadelta = zeros(N,1);R = zeros(N,1);q = 0;
m = inline('exp(t+1)-1)/(t+1)');
g = inline('exp(t)');
w = inline('(exp(t+1)-1)/(t+1) + sigma *sqrt(2)* sin(10*pi*t)', 'sigma', 't');
for i = 1 :N;t = (i-1)*h;
fe(i) = m(t);fdelta(i) = w(sigma,t);xexact(i) = g(t);
for j = 1 :N
s = (j-1)*h;K(i,j) = exp(t*s);
end
end
K(:,1) = K(:,1)/2;K(:,N) = K(:,N)/2;K = h*K; Kstar = K
count = 0;
G = inv(alpha0*I + Kstar*K);
[phi, phiprime] = gnew(K,G,Kstar,fdelta,sigma,h);
alpha1 = alpha0 - phi/phiprime;alphaTol = abs(alpha1 - alpha0);
phiTol = abs(phi);alpha0 = alpha1;
count = count + 1;
end
xalphadelta = G*Kstar*fdelta;
for i=1 :N;t = (i-1)*h;switch t;case 0
R(i) = xexact(i) - xalphadelta(i);case .25;R(i) = xexact(i) - xalphadelta(i);
case .5;R(i) = xexact(i) - xalphadelta(i);case .75;R(i) = xexact(i) - xalphadelta(i);
case 1
R(i) = xexact(i) - xalphadelta(i);otherwise;R(i) = 0;
end
end
fprintf('Our sigma is : 5.4f \n', sigma);
fprintf('The number of partitions is : 3.0f \n', n);
for i=1 :N;if R(i) == 0;t = (i-1)*h;
end
end
i=1 :N;q=(i-1)*h; plot(q,xexact(i),'ro-',q,xalphadelta(i),'bd :')
axis auto;

```



```

title('Exact and approximate functions');xlabel('step size');
legend('Exact solution xexact(i)','Approximate solution xalphadelta(i)','Location')
while ck == 0
fprintf('Would you like to run again?\n');
fprintf('Please type "y" or "n".\n');
choice = input(' ');
fprintf('\n\n');
switch lower(choice)
case 'y';check = 0;ck = 1;case 'n';check = 1;ck = 1;
otherwise;fprintf('Please try again');
check = 0;ck = 0;
end
end
end

```

**Programme 2**

```

n=8;
ck = 0;h = 1/n;N = n + 1;K = zeros(N,N);f = zeros(N,1);
E = zeros(N,1);x = zeros(N,1);B = zeros(N,1);R = zeros(N,1);
m = inline('(exp(t+1) - 1)/(t+1)');g = inline('exp(t)');
for i=1:N
t = (i-1)*h;f(i) = m(t);E(i) = g(t);
for j=1:N;s = (j-1)*h;
K(i,j) = exp(t*s);
end
end
K(:,1) = K(:,1)/2;
K(:,N) = K(:,N)/2;K = h*K;
x = K\f;
for i=1:N;t = (i-1)*h;switch t;case 0;
B(i) = x(i);R(i) = E(i) - x(i);
case .25
B(i) = x(i);R(i) = E(i) - x(i);
case .5
B(i) = x(i);R(i) = E(i) - x(i);

```



```

case .75
B(i) = x(i);R(i) = E(i) - x(i);
case 1
B(i) = x(i);R(i) = E(i) - x(i);
otherwise
B(i) = 0;R(i) = 0;
end
end
fprintf('Remember that the number of partitions is : 3.0f \n', n); for i=1 :N
if B(i) = 0;t = (i-1)*h;
fprintf('t = 3.2f\n', t);
fprintf('Our approximation is 5.2f\n', B(i));
fprintf('Our exact value is 5.2f\n', E(i))
fprintf('With an error of 5.2f.\n\n',R(i));
end
end
i=1 :N;q=(i-1)/n;
plot(q,g(q),'ro-',q,x(i),'bd :')
axis auto;
title('Exact and approximate functions')
xlabel('step size')
legend('Exact','Approximation','Location','NorthWest')
while ck == 0
fprintf('Would you like to run again ?\n');
fprintf('Please type "y" or "n".\n');
w = input(' ','s');
fprintf('\n\n');
switch lower(w);case 'y';check = 0;
ck = 1;case 'n';check = 1;ck = 1;otherwise
fprintf('Please try again');
check = 0;ck = 0;
end
end
end

```



**Programme 3**

```
function [y1, y2] = gnew(K, G, Kstar, fdelta, sigma, h);
```

Programme : la méthode de Newton pour Phi et Phiprime

**Entrées :**

K; matrice Kstar; matrice

G; matrice inverse de  $(\alpha * I + Kstar * K)$

fdelta; second membre bruitée

sigma; bruit

h; la pas

**Sorties :**

Phi; en alpha

Phiprime; en alpha

**Calcul de y1 comme phi**

```
z = K * G * Kstar * fdelta - fdelta;
```

```
y1 = (z' * z) * h - (sigma + exp(2) * (h^2) / 3)^2;
```

**Calcul de y2 comme phiprime**

```
a = -K * G * G * Kstar * fdelta;
```

```
b = K * G * Kstar * fdelta - fdelta;
```

```
y2 = 2 * a' * b;
```

**3.4 Appendix B****3.4.1 Tableaux et figures**

Table B.1.

$\ x_e - x_{\alpha, \delta}\ $	....	....	....
$n \setminus \sigma$	0.0001	0.05	0.1
4	0.0876	0.1177	0.1436
8	0.0298	0.0376	0.0406
16	0.0052	0.0273	0.0373
32	0.0005	0.0196	0.0338

Table B.2. Valeurs de  $\alpha$  par le principe de sélection

$\sigma$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$
0.1	0.173360	0.06803	0.032997	0.018896
0.05	0.144455	0.050745	0.022335	0.011284
0.0001	0.109950	0.025159	0.005009	0.001159



Table B.3. Résultats comparative de  $x_e - x_{\alpha,\delta}$  pour  $\sigma = 0.0001$ 

$t$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$	$x_e = \exp(t)$
0	-0.1852	-0.1845	-0.0803	-0.0134	1.00
0.25	-0.0912	-0.1220	-0.0616	-0.0193	1.28
0.5	0.0444	-0.0262	-0.0235	-0.0138	1.65
0.75	0.2355	0.1148	0.0424	0.0094	2.12
1.00	0.5003	0.3169	0.1476	0.0589	2.72

Table B.4. Résultats comparative de  $x_e - x_{\alpha,\delta}$  pour  $\sigma = 0.05$ 

$t$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$	$x_e = \exp(t)$
0	-0.1980	-0.1868	-0.2004	-0.1838	1.00
0.25	-0.0880	-0.1153	-0.1344	-0.1274	1.28
0.5	0.0678	-0.0080	-0.0338	-0.0396	1.65
0.75	0.2845	0.1479	0.1139	0.0917	2.12
1.00	0.5816	0.3691	0.3254	0.2826	2.72

Table B.5. Résultats comparative de  $x_e - x_{\alpha,\delta}$  pour  $\sigma = 0.1$ 

$t$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$	$x_e = \exp(t)$
0	-0.2027	-0.1776	-0.2302	-0.2429	1.00
0.25	-0.0815	-0.1040	-0.1502	-0.1634	1.28
0.5	0.0888	0.0061	-0.0312	-0.0449	1.65
0.75	0.3236	0.1653	0.1407	0.1266	2.12
1.00	0.6435	0.3906	0.3835	0.3698	2.72

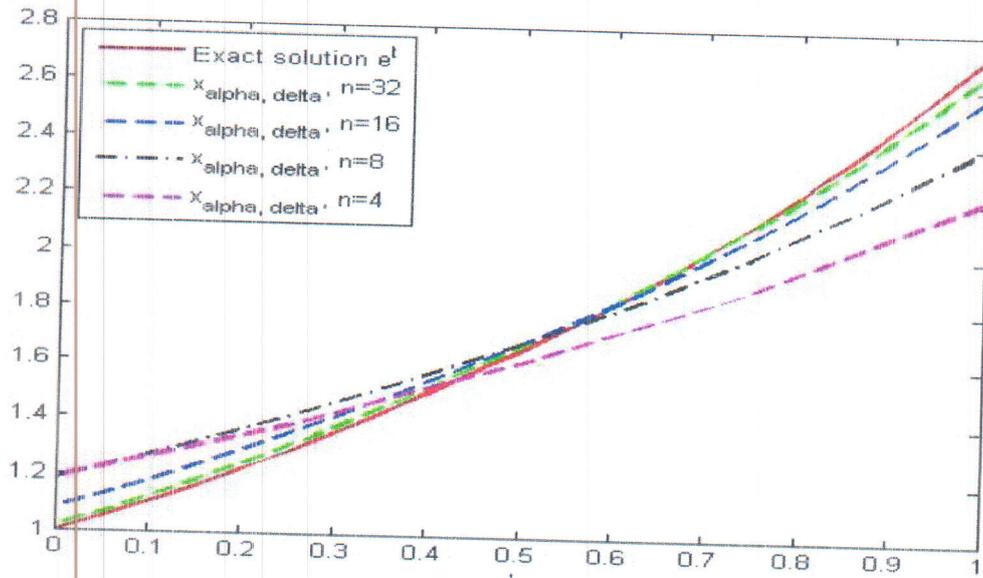


FIGURE 3.1 – Solutions exactes et approchées pour  $\sigma = 0.0001$

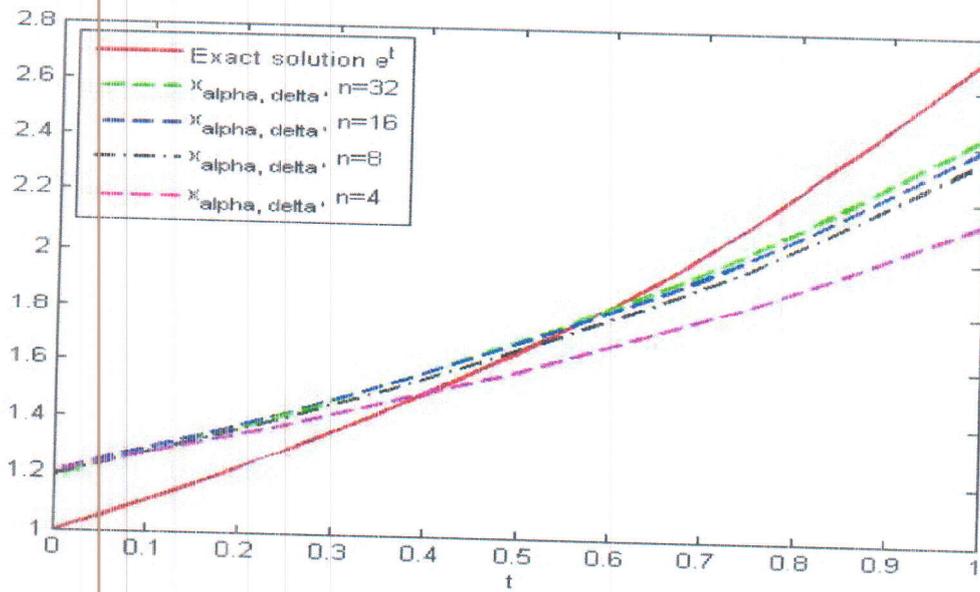


FIGURE 3.2 – Solutions exactes et approchées pour  $\sigma = 0.05$

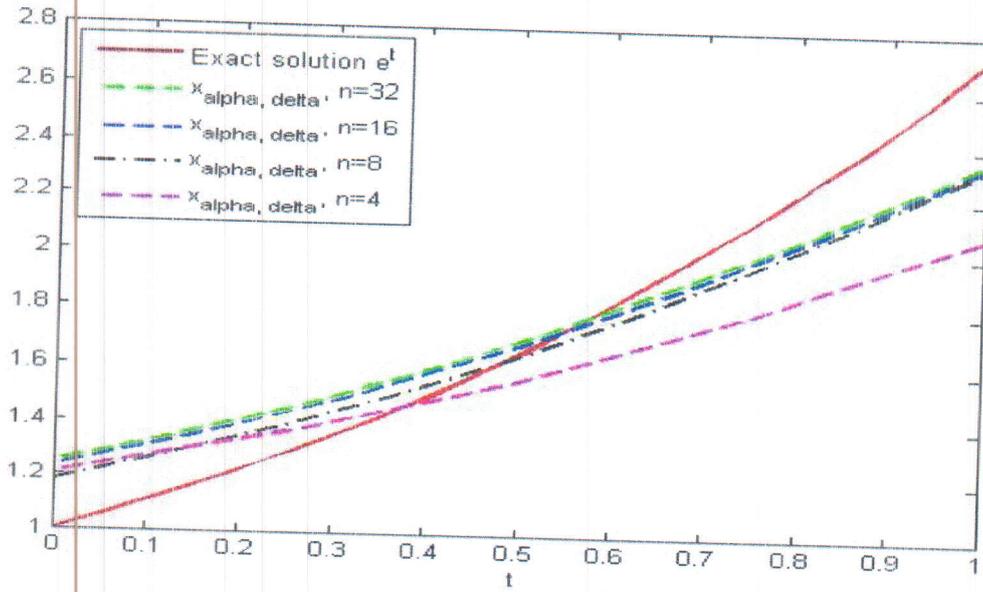


FIGURE 3.3 – Solutions exactes et approchées pour  $\sigma = 0.1$

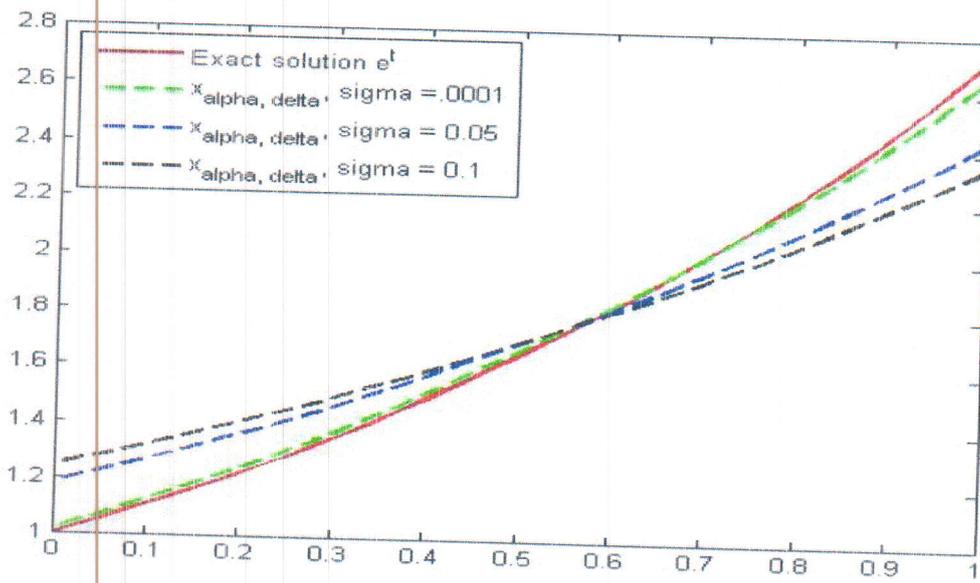


FIGURE 3.4 – Solutions exactes et approchées pour  $n = 32$

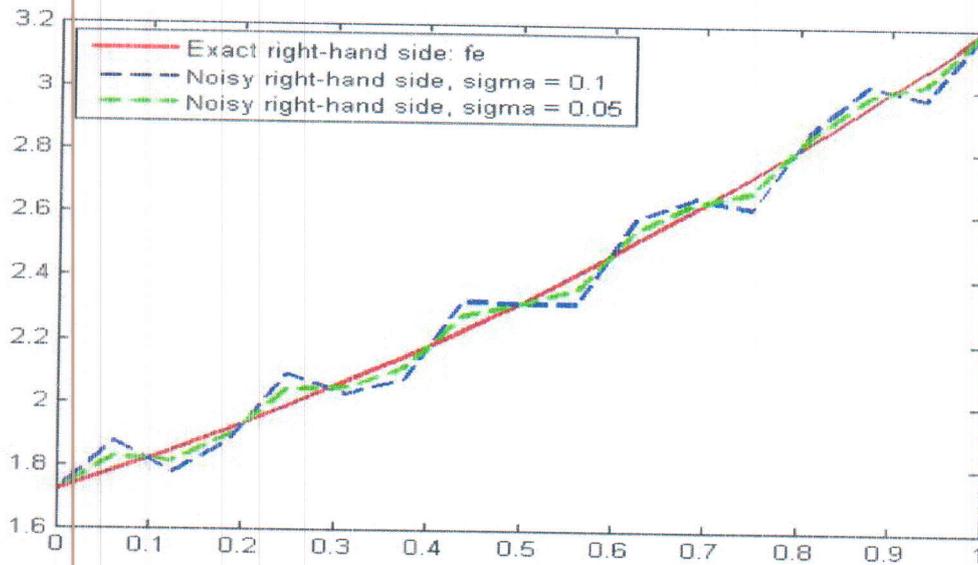


FIGURE 3.5 - Valeurs exactes et approchées du second membre

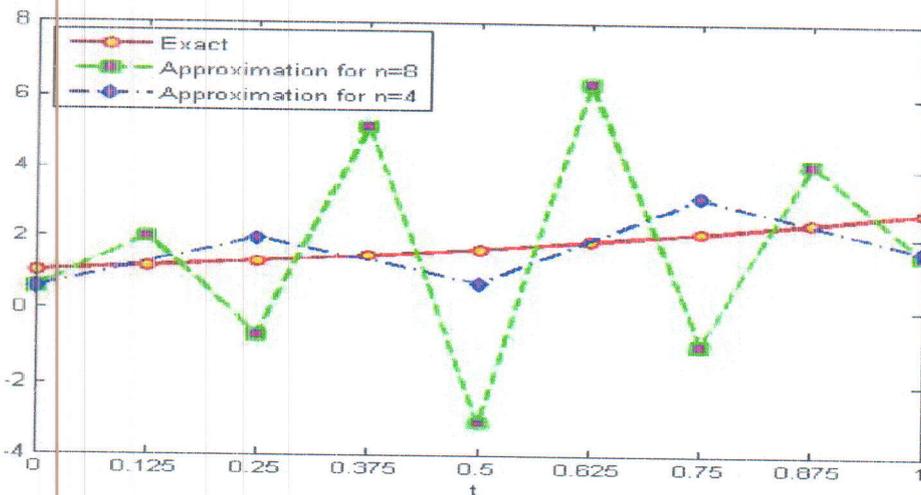
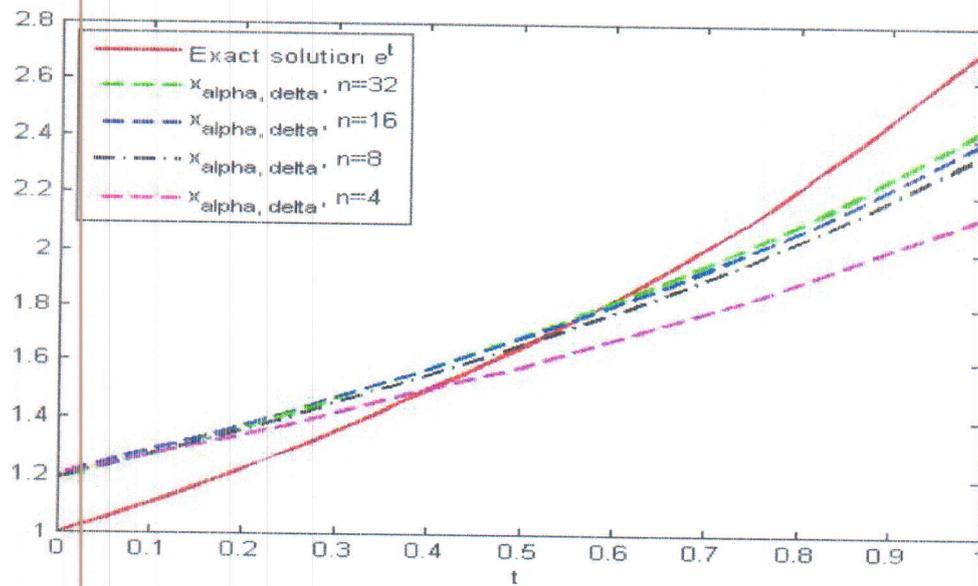


FIGURE 3.6 - Solutions exactes et approchées

FIGURE 3.7 – Solutions exactes et approchées pour  $\sigma = 0.05$

## Bibliographie

- [1] J. Hadamard. Lecture note on Cauchy's problem in linear partial differential equations, Yale Uni Press, New Haven, 1923.
- [2] R. Chapko and P. Kùgler, *A comparison of the Landweber method and Gauss-Newton method for an inverse parabolic boundary value problem*, J. Comp. Appl. Math., **169**, 183-196, 2004.
- [3] R. Chapko, R. Kress and J.R. Yoon, *On the numerical solution of an inverse boundary value problem for the heat equation*, Inverse Problems, **14**, 853-867, 1998.
- [4] A. Constantinescu, D. Ivaldi, and C. Stolz, *Identification du chargement thermique transitoire par contrôle optimal*, 2004.
- [5] B. Delattre, D. Ivaldi, and C. Stolz, *Application du contrôle optimal à l'identification d'un chargement thermique*, Pages 393-404 of : REEF, Giens '01, 2001.
- [6] C.H. Huang and Y.L. Tsai, *A transient 3-D inverse problem in imaging the time-dependent local heat transfer coefficients for plate fin*, Applied Thermal Engineering, **25**, 2478-2495, 2005.
- [7] S. Lu and S.V. Pereverzev, *Regularization Theory for Ill-posed Problems. Selected Topics*, 2013 Walter de Gruyter GmbH, Berlin, Boston.
- [8] C.H. Huang and H.C. Lo, *A three-dimensional inverse problem in predicting the heat fluxes distribution in the cutting tools*, Numerical Heat Transfer, part A, **48**, 1009-1034, 2005.
- [9] P. Kùgler, *Identification of a temperature dependent heat conductivity from single boundary measurements*, SIAM J. Numer. Anal., **41**(4), 1543-1563, 2003.
- [10] B. Lecampion and A. Constantinescu, *Sensitivity analysis for parameter identification in quasistatic poroelasticity*, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **29**, 163-185, 2005.
- [11] B. Lecampion, A. Constantinescu and D. Nguyen Minh, *Parameter identification for lined tunnels in a viscoplastic medium*, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., **26**, 1191-1211, 2002.
- [12] N.S. Mera, L. Elliot, D.B. Ingham and D. Lesnic, *Comparison of a genetic algorithm and a gradient based optimisation technique for a three-dimensional boundary detection problem*, In : Proceedings of the 5th International Conference on Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice, 2005.
- [13] V. Plana, P. Reulet and P. Millan, *Experimental characterization of the thermophysical properties of composite materials by an inverse heat conduction method*, J. of Composite Materials, **40**(14), 1247-1258, 2006.



- [14] M. Raynaud and J. Bransier, *A new finite-difference method for the nonlinear heat conduction problem*, Numerical Heat Transfer, 9(1), 27-42, 1986.
- [15] Tarantola, A. *Inverse problem theory*. Elsevier (1987).
- [16] N.N Tarkhanov, *The analysis of solutions of elliptic equations*, Springer-Verlag, Gmbh,2007.
- [17] Tikhonov, A. N., Arsenin, V. Y. *Solutions to ill-posed problems*. Winston-Wiley, New York (1977).
- [18] S. Lu, S.V. Pereverzev, Y. Shao and U. Tautenhahn, *Discrepancy curves for multiparameter regularization*, J. Inv. Ill-Posed Problems 18 (2010), 655-676.
- [19] K.A.Ames, L.E.Payne and P.W Schaefer, *Energy and pointwise bounds in some non- standard parabolic problems*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A. Mathematics 134 (2004), no. 1,1-9
- [20] H. Bialy, *Iterative behandlung linearer funktionalg leichungen*, Arch. Rat. Mech. Anal., 4 : 166, 1959.
- [21] H. W. Engl, M. I Ianke, and A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*.Kluwer, Dordrecht, 1996.
- [22] V. Fridman, *A method of successive approximations for Fredholm integral equations of the Örst kind*. *Uspeki Mat. Nauk.*, 11 : 233-234, 1956. In Russian. of Pitman Research Notes in Mathematics. Longman, Harlow, 1995.
- [23] A. Kirsch, *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. (Applied mathematical sciences; V.120). Springer, New-York. 1996.
- [24] L.Landweber, *An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind*. Amer. J. Math., 73 :615-624, 1951.
- [25] S. Lu S. V. Pereverzev, Y. Shao and U. Tautenhahn, *Discrepancy curves for multiparameter regularization*, J. Inv. Ill-Posed Problems 18(2010), 655-676. multi-parameter regularization, Comput. Methods Appl. Math. 8(2008), 253-262.
- [26] K. Kunisch and J. Zou, *Iterative choices of regularization parameters in linear inverse problems*, Inverse Problems 14(1998), 1247-1264
- [27] J. B. Keller, *Inverse problems*, Amer. Math. Monthly, 83 :107-118, 1976.
- [28] V. A. Morozov. *Methods for Solving Incorrectly Posed problems*, Springer-Verlag New-York, 1984.

