République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique 

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



# Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Master Académique en Mathématiques**

Option : **Mathématiques Appliquées**

Par :

**Mlle . Hemoumou Amira**

## Intitulé

**Méthode des caractéristiques dans l'équation de coagulation et de fragmentation des gouttelettes en déplacement**

**Dirigé par :** Pr.Hisao.Fujita Yashima

**Devant le jury**

| | | | |
|---|---|---|---|
| PRESIDENT | Pr. M. Z.Aissaoui | Prof | Univ-Guelma |
| RAPPORTEUR | Pr. H. Fujita Yashima | Prof | Univ-Guelma |
| EXAMINATEUR | Dr. A. Frioui | MCB | Univ-Guelma |

**Session Juin 2015**

# Méthode des caractéristiques dans l'équation de coagulation et fragmentation des gouttelettes en déplacement

**Amira Hemoumou**
Mémoire de master en mathématiques
**Université 08 mai 1945-Guelma**

19 juin 2015

# Table des matières

# *Résumé*

Dans ce travail, on considère l'équation de coagulation et de fragmentation des gouttelettes en chute. Du point de vue mathématique, il s'agit d'une équation intégro-différentielle pour une fonction inconnue représentant la densité, par rapport à l'unité de volume, de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes. On utilise les caractéristiques pour le déplacement des gouttelettes, ce qui sera crutial pour la construction de la solution de l'équation avec la condition d'entrée. A cet effet on introduit un changement de variables qui nous permet de démontrer directement la conservation de la masse. On établit des estimations fondamentales pour la solution, en utilisant le principe du maximum.

# Introduction

Suite à l'évaporation des eaux des océans et des eaux des mers et successivement à la condensation de la vapeur dans l'atmosphère, se forment des nuages ; quand les gouttelettes qui forment les nuages deviennent suffisamment denses (grandes), elles tombent avec différentes vitesses (essentiellement déterminées par la masse de chaque gouttelette) après avoir subis le processus de coagulation et de fragmentation.

Le processus de coagulation et de fragmentation se trouve dans la dynamique de croissance de la grappe et décrit les mécanismes par lesquels les gouttelettes s'unissent pour former de plus grandes ou se fragmentent en de plus petites . Ces processus sont assez fréquents dans une variété de contextes physiques.

L'étude de l'équation de coagulation et de fragmentation des gouttelettes en chute, est motivée, en particulier, par notre intérêt pour la modélisation d'une partie importante des phénomènes météorologiques, ou les gouttelettes d'eau jouent le rôle essentiel dans le processus des nuages et la chute de la pluie.

La description mathématique du processus de coagulation a été proposée par Smoluchowski [23] et Müller [20], tandis que l'équation du processus de coagulation et de fragmentation a été étudiée par Melzak [17]. Quant à l'équation des gouttelettes qui se déplacent et subissent le processus de coagulation, Galkin [13] a montré l'existence et l'unicité de sa solution (voir aussi [8], [14]). Or, en 2001 Dubovskii [7] a démontré l'existence et l'unicité de la solution globale de l'équation de déplacement, de coagulation et de fragmentation des gouttelettes. Pour construire la solution, Dubovskii (comme également Galkin dans ses travaux) a utilisé de manière essentielle le "principe du maximum" .

Plus récemment on a commencé à étudier, en particulier dans les travaux [1]-[18], l'équation du processus de coagulation des gouttelettes qui se déplacent par la force gravitationnelle. Or, ces travaux ont été conduits principalement dans l'espace fonctionnel $L^{\infty}$.

Dans le présent mémoire on va considérer des gouttelettes qui se coagulent ou fragmentent avec une certaine probabilité, tombent avec une vitesse qui sera déterminée par la force gravitationnelle, la friction entre ces gouttelettes et l'air ainsi que la vitesse de ce dernier. Plus généralement, en déplacement on remarque que l'équation peut être réécrite dans une forme basée sur les caractéristiques et cette version de l'équation jouit de bonnes propriétés, y comprise la conservation de la masse totale. Toutefois, contrairement au cas classique sans déplacement (Melzak en 1957, voir [17]), dans le cas où on considère le déplacement des gouttelettes, la description avec les caractéristiques n'est pas suffisante pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution globale. Donc on se propose d'étudier d'une manière approfondie les propriétés des caractéristiques et celles de la solution locale (voir [15],[18]).

Chapitre 1

# Position du problème et changement de variables

Dans ce chapitre on va considérer une équation intégro-différentielle décrivant le processus de coagulation et de fragmentation des gouttelettes qui se trouvent dans l'air et chutent par la force gravitationnelle. Il s'agit de l'équation pour la densité $\sigma(m, z, t)$ en une dimension spatiale (dimension correspondante à l'axe verticale de l'espace). Ici on entend par la densité $\sigma(m, z, t)$ la masse de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse $m$ se trouvant dans l'unité de volume, ayant le centre au point $z$ à l'instant $t$. Quant au processus de coagulation et à celui de fragmentation de gouttelettes dans l'air, nous considérons deux gouttelettes de masse $m_1$ , $m_2$ à cause de la tension superficielle de la surface des gouttelettes, au moment d'une éventuelle rencontre, elles s'unissent en formant une nouvelle gouttelette de masse $m_1 + m_2$ ; c'est le processus de coagulation. D'autre part, une gouttelette de taille plutôt grande, de masse $m$, peut se sceinder en deux parties formant deux gouttelettes de taille plus petites, de masse $m_1$ et $m_2$ de telle sorte que $m_1 + m_2 = m$ ; c'est le processus de fragmentation.

## 1.1 Position du problème

Considérons l'intervalle $-\infty < z \leq 0$, qui représente l'espace "vertical" dans lequel les gouttelettes se déplacent à cause de la force gravitationnelle. Désignons par $\sigma(m, z, t)$ la densité de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse $m$ au point $z \leq 0$ à l'instant $t \in \mathbb{R}$. On rappelle que dans la littérature, concernant l'équation de Smoluchowski, on utilise souvent le nombre (dans le sens statistique) $\tilde{n} = \tilde{n}(m, z, t) = \dfrac{\sigma(m, z, t)}{m}$ de gouttelettes de masse $m$ au lieu de la densité de l'eau liquide $\sigma(m, z, t)$. Mais nous préférons utiliser cette dernière pour décrire la modélisation générale des phénomènes météorologiques ([1], [12], [22]).

On suppose que les gouttelettes subissent le processus de coagulation et celui de fragmentation et en même temps se déplacent dans l'air par la force gravitationnelle en subissant également l'effet de frottement avec l'air environnant. Dans la présente étude nous ne prenons pas en considération l'éventuelle condensation de la vapeur d'eau sur les gouttelettes ni l'évaporation à partir de ces dernières ; l'absence de condensation et d'évaporation correspondrait à l'état d'équilibre entre la vapeur d'eau présente dans l'air et la densité de la vapeur saturée. On va considérer également la vitesse des gouttelettes qui se déplacent à cause de la force gravitationnelle et de la friction avec l'air dans lequel elles se trouvent. Comme l'effet de la friction entre les gouttelettes et l'air dépend sensiblement de la masse de chaque gouttelette, la vitesse des gouttelettes doit être en fonction de la masse $m$. Nous admettons que la vitesse $u = u(m)$ d'une gouttelette de masse $m$ est donnée par

$$u = u(m) = -\frac{g}{\alpha(m)}, \tag{1.1}$$

où $g$ et $\alpha(m)$ désignent respectivement l'accélération gravitationnelle et le coefficient de friction entre les gouttelettes et l'air. La relation (1.1) donne une bonne approximation de la vitesse réelle des gouttelettes dans l'atmosphère (voir[1]). Ces considérations nous amènent à l'équation (voir [1], [2], [18], [22])

$$\partial_t\sigma(m,z,t)+\partial_z(\sigma(m,z,t)u(m))= \tag{1.2}$$

$$=\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',z,t)\sigma(m-m',z,t)dm'$$

$$-m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,z,t)\sigma(m',z,t)dm'-\frac{m}{2}\sigma(m,z,t)\int_0^m \vartheta(m-m',m')dm'+$$

$$+m\int_0^\infty \vartheta(m,m')\sigma(m+m',z,t)dm'$$

où $\beta(m_1,m_2)$ est la probabilité de la rencontre entre une gouttelette de masse $m_1$ et une autre de masse $m_2$, et $\vartheta(m_1,m_2)$ est la probabilité de fragmentation d'une gouttelette de masse $m_1+m_2$ en une de masse $m_1$ et une de masse $m_2$. En ce qui concerne la fonction $\alpha(m)$, qui représenterait l'effet de la friction entre les gouttelettes et l'air, dans le présent travail nous supposons qu'elle est une fonction strictement positive et suffisamment régulière (par exemple $\alpha(m)\in C^1(\mathbb{R}_+)$). Il est utile de rappeler que dans l'état normal de l'atmosphère $\alpha(m)$ est une fonction décroissante et ses valeurs varient sensiblement selon les valeurs de $m$. Même si l'effet de la friction (par l'unité de masse) croît rapidement quand $m$ s'approche de 0, pour éviter le raisonnement inutilement compliqué, nous supposons que

$$\sup_{m\in\mathbb{R}_+}\alpha(m)<\infty.$$

L'absence des gouttelettes très petite observée par les physiciens est expliquée par la courbure très élevée de la surface des gouttelettes qui provoque l'évaporation presque immédiate.

L'equation (1.2) sera envisagée pour $(m,z,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_-\times\mathbb{R}_+$ avec la condition initiale

$$\sigma(m,z,0)=\overline{\sigma}_0(m,z) \tag{1.3}$$

et la condition d'entrée

$$\sigma(m,0,t) = \overline{\sigma}_1(m,t). \tag{1.4}$$

Pour les fonctions $\beta(m_1,m_2)$ et $\vartheta(m_1,m_2)$, conformément à leur nature physique, nous supposons que

$$\beta(m_1,m_2) \geq 0 \quad \forall (m_1,m_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \qquad \beta(m_1,m_2) = \beta(m_2,m_1), \tag{1.5}$$

$$\vartheta(m_1,m_2) \geq 0 \quad \forall (m_1,m_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \qquad \vartheta(m_1,m_2) = \vartheta(m_2,m_1). \tag{1.6}$$

Nous supposons également que

$$u(m) < 0 \qquad \forall m > 0, \tag{1.7}$$

ce qui représente le fait que les gouttelettes chutent. En outre, on suppose que

$$\overline{\sigma}_0(\cdot,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-), \quad \overline{\sigma}_1(\cdot,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+), \quad \overline{\sigma}_0(m,z) \geq 0, \quad \overline{\sigma}_1(m,t) \geq 0. \tag{1.8}$$

Les conditions (1.5) et (1.6) sont des conditions naturelles de la fonction de probabilité de rencontre de gouttelettes.

## 1.2 Changement de variables

Dans le travail [15], les auteurs ont proposé le changement de variables $(m,t,z) \mapsto (m_0,\tau_0,q_0)$ défini par

$$q_0 = t - \frac{z}{u(m)}, \quad m_0 = m, \quad \tau_0 = t \tag{1.9}$$

dans le cadre de l'étude du problème (1.2).

Dans ce mémoire, au lieu de suivre ce changement (1.9), on introduit le changement de variables $(m,z,t) \mapsto (m,q,\tau)$ défini par

$$q = z - u(m)t, \quad m = m, \quad \tau = t. \tag{1.10}$$

Pour $m$, l'utilisation de la même lettre $m$ dans le premier et dans le second système de coordonnées ne cause pas l'équivoque, tandis que pour $t$, même si $\tau = t$, nous préférons utiliser deux lettres différentes.

L'objectif de notre travail est d'étudier les propriétés de ce changement de variables suite à son application au problème (1.2) et déterminer quelques estimations de la solution dans la norme $L^{\infty}$.

Le changement de variables introduit transforme le domaine $\{(m,z,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+\}$ en $\{(m,q,\tau) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ | q \leq \tau\}$. Mais il nous sera commode de prolonger le domaine en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, c'est-à-dire nous allons considérer aussi les points $(m,q,\tau)$ avec $q > \tau$.

Ce changement de variables jouit avant tout de la propriété suivante.

LEMME 1. *On a*

$$\partial_t + u(m)\partial_z = \partial_\tau.$$

DÉMONSTRATION.

Comme pour le changement de variables générale $(X_1, X_2, X_3) \to (Y_1, Y_2, Y_3)$, on a

$$\frac{\partial}{\partial X_i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial Y_i} \cdot \frac{\partial Y_i}{\partial X_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial X_1} = \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial X_2} = \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial m} + \frac{\partial}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial m} + \frac{\partial}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial m}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X_2} = \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t}.$$

Après les calcules on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial q},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q}(-u(m)) + \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Si on substitue ce résultat dans l'expression

$$\partial_t + u(m)\partial_z,$$

on aura

$$\partial_t + u(m)\partial_z = -u(m)\frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial \tau} + u(m)\frac{\partial}{\partial q} = \partial_\tau$$

Le lemme est démontré. □

D'après le lemme 1, l'équation (1.2) se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\sigma(m,q,\tau) = K_{\tau,\zeta}[\sigma(\cdot,\cdot,\tau),\sigma(\cdot,\cdot,\tau)](m,q) + L_{\tau,\zeta}[\sigma(\cdot,\cdot,\tau)](m,q), \qquad (1.11)$$

où

$$K_{\tau,\zeta}[\varphi,\psi](m,q) = \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\varphi(m-m',q_\zeta(m-m'),\tau)\psi(m',q_\zeta(m'),\tau)dm' + \qquad (1.12)$$
$$-\frac{m}{2}\varphi(m,q)\int_0^\infty \beta(m,m')\psi(m',q_\zeta(m'),\tau)dm' +$$
$$-\frac{m}{2}\psi(m,q)\int_0^\infty \beta(m,m')\varphi(m',q_\zeta(m'),\tau)dm',$$

et

$$L_{\tau,\zeta}[\varphi](m,q) = -\frac{m}{2}\varphi(m,q)\int_0^m \vartheta(m-m',m)dm' + \qquad (1.13)$$
$$+m\int_0^\infty \vartheta(m,m')\varphi(m+m',q_\zeta(m+m'),\tau)dm',$$

avec

$$q_\zeta(m') = \zeta - u(m')\tau, \qquad \zeta = q + u(m)\tau \qquad (1.14)$$

C'est-à-dire

$$q_\zeta(m') = q + (u(m) - u(m'))\tau,$$

$$\varphi(m-m', q_\zeta(m-m'),\tau) = \varphi(m-m', q+(u(m)-u(m-m'))\tau, \tau), \quad \text{etc....}$$

Or, en réalité nous devons tenir compte aussi de la condition initiale (1.3) et celle d'entrée (1.4).

La condition initiale se traduit directement comme donnée de la fonction $\sigma$ pour $\tau = 0$, c'est-à-dire, en posant

$$\overline{\sigma}_0^*(m,q)\Big|_{q=z} = \overline{\sigma}_0(m,z),$$

on considère la condition

$$\sigma(m,q,0) = \overline{\sigma}_0^*(m,q).$$

En ce qui concerne la donnée d'entrée, nous définissons

$$\overline{\sigma}_{1,\tau}^*(m) = \overline{\sigma}_1(m,\tau)$$

et nous formulons la condition d'entrée dans la forme suivante : on l'ajoute au second membre de (1.11)

$$\overline{\sigma}_{1,\tau}^*(m)\delta(q+u(m)\tau)$$

(ici $\delta$ est la distribution $\delta$ de Dirac), de sorte que nous allons considérer, au lieu de (1.11), l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\sigma(m,q,\tau) = K_{\tau,\zeta}[\sigma(\cdot,\cdot,\tau),\sigma(\cdot,\cdot,\tau)](m,q)+ \tag{1.15}$$

$$+L_{\tau,\zeta}[\sigma(\cdot,\cdot,\tau)](m,q) + \overline{\sigma}_{1,\tau}^*(m)\delta(q+u(m)\tau).$$

Si on pose

$$F_\tau(\sigma(\cdot,\cdot,\tau))(m,q) = K_{\tau,\zeta}[\sigma(\cdot,\cdot,\tau),\sigma(\cdot,\cdot,\tau)](m,q) + L_{\tau,\zeta}[\sigma(\cdot,\cdot,\tau)](m,q), \tag{1.16}$$

l'équation (1.15) se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\sigma(m,q,\tau) = F_\tau(\sigma(\cdot,\cdot,\tau))(m,q) + \overline{\sigma}_{1,\tau}^*(m)\delta(q+u(m)\tau). \tag{1.17}$$

On définit l'espace de Banach $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ par :

$$L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) = \{\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ mesurable} \mid \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} |\sigma(m,q)| dm dq < \infty\}. \tag{1.18}$$

$$\|\sigma\|_{L^1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} |\sigma(m,q)| dm dq.$$

Pour chaque $\tau \geq 0$ et pour chaque $\zeta \in \mathbb{R}$ nous définissons

$$q_\zeta(m) = \zeta - \tau u(m). \tag{1.19}$$

Donc on a le lemme suivant :

LEMME 2. *On a*

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \sigma(m,q) dm dq = \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} \sigma(m, q_\zeta(m)) dm.$$

DÉMONSTRATION : Comme

$$q_\zeta(m) = \zeta - \tau u(m),$$

on a

$$\frac{dq}{d\zeta} = 1$$

Par conséquent, par le changement de variables on a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \sigma(m,q) dm dq &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \sigma(m, q_\zeta(m)) \frac{dq}{d\zeta} dm d\zeta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{+\infty} \sigma(m, q_\zeta(m)) dm d\zeta.\end{aligned}$$

Le lemme est démontré □

Le lemme 2 servira pour formuler l'équation (1.17) comme une équation différentielle ordinaire à valeurs dans $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. En effet, les opérateurs intégraux $K_{\tau,\zeta}[\cdot,\cdot](q,m)$ et $L_{\tau,\zeta}[\cdot,\cdot](q,m)$ sont définis sur les courbes

$$\gamma_\zeta = \{(q,m') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mid q = q_\zeta(m')\}, \qquad q_\zeta(m') = \zeta - \tau u(m'),$$

avec $\zeta = (q + u(m)\tau)$.

# Chapitre 2

# Conservation de la masse

Avant de nous occuper de la solution de notre problème, rappelons une propriétée importante de l'opérateur intégral figurant au second membre de l'équation (1.17)

LEMME 3. *Soit* $\sigma(\cdot,\cdot,\tau) \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$, $\sigma(\cdot,\cdot,\tau) \geq 0$, *on a alors*

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} F_\tau(\sigma(\cdot,\cdot,\tau))(m,q)\,dm\,dq = 0. \tag{2.1}$$

DÉMONSTRATION : D'après (1.16) on pose

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty} K_{\tau,\zeta}[\sigma(\cdot,\cdot,\tau),\sigma(\cdot,\cdot,\tau)](m,q)\,dm\,dq,$$

et

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty} L_{\tau,\zeta}[\sigma(\cdot,\cdot,\tau)](m,q)\,dm\,dq,$$

En écrivant l'expression explicite de $K_{\tau,\zeta}[\sigma(\cdot,\cdot,\tau),\sigma(\cdot,\cdot,\tau)]$ (voir (1.12)), on a

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}(\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m-m',q_\zeta(m-m'),\tau)\sigma(m',q_\zeta(m'),\tau)dm')dm\,dq,$$

avec $q_\zeta(m') = q + (u(m) - u(m')\tau$. Or, en vertu du théorème de Fibini, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}(\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m-m',q_\zeta(m-m'),\tau)\sigma(m',q_\zeta(m'),\tau)dm')dm\,dq =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}(\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m-m',q_\zeta(m-m'),\tau)\sigma(m',q_\zeta(m'),\tau)dqdm')dm.$$

Comme

$q_\zeta(m') = q+(u(m)-u(m')\tau$, $q_\zeta(m-m') = q+(u(m)-u(m-m')\tau$. on a $dq_\zeta = dq$, nous pouvoir remplacer $q_\zeta(m')$ et $q_\zeta(m-m')$ par $q$, de sorte que l' on a

$$\int_0^{+\infty}\frac{m}{2}\int_0^m\int_{-\infty}^{+\infty}\beta(m-m',m')\sigma(m-m',q_\zeta(m-m'),\tau)\sigma(m',q_\zeta(m'),\tau)dqdm'dm =$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{m}{2}\int_0^m\int_{-\infty}^{+\infty}\beta(m-m',m')\sigma(m-m',q_\zeta(m-m'),\tau)\sigma(m',q_\zeta(m'),\tau)dq_\zeta dm')dm =$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{m}{2}\int_0^m\int_{-\infty}^{+\infty}\beta(m-m',m')\sigma(m-m',q,\tau)\sigma(m',q,\tau)dqdm')dm.$$

(dans la dernière égalité nous avons remplacé les symboles $q_\zeta$ et $dq_\zeta$ par les symboles $q$ et $dq$ ce qui ne cause aucun problème).

En appliquant de nouveau le théorème de Fibini on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}(\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(q_\zeta(m-m'),m-m',\tau)\sigma(q_\zeta(m'),m',\tau)dm'dmdq =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}(\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m-m',q,\tau)\sigma(m',q,\tau)dm')dmdq.$$

Comme ces raisonnements sont évidemment valables pour toutes les intégrales qui interviennent dans $I_1$et$I_2$, on a alors

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}\left(\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',q,\tau)\sigma(m-m',q,\tau)dm'\right)dmdq+$$
$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}\left(m\int_0^{+\infty}\beta(m,m')\sigma(m,q,\tau)\sigma(m',q,\tau)dm'\right)dmdq.$$

et

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}-\frac{m}{2}\left(\int_0^m \vartheta(m-m',m')\sigma(m,q,\tau)dm'\right)dmdq+$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}m\left(\int_0^m \vartheta(m,m')\sigma(m+m',q,\tau)dm'\right)dmdq.$$

On calcule $I_1$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}\left(\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',q,\tau)\sigma(m-m',q,\tau)dm'\right)dmdq+$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}\left(m\int_0^{+\infty}\beta(m,m')\sigma(m,q,\tau)\sigma(m',q,\tau)dm'\right)dmdq.$$

En faisant le changement de variables $k = m-m'$ et $r = m'$ dans la première intégrale de $I_1$,

avec le jacobien $\begin{vmatrix} \frac{\partial k}{\partial m} & \frac{\partial r}{\partial m} \\ \frac{\partial k}{\partial m'} & \frac{\partial r}{\partial m'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

On voit que

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{\infty}\frac{k+r}{2}\int_0^{\infty}\beta(k,r)\sigma(r,q,\tau)\sigma(k,q,\tau)drdk\right)dq+$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}\left(m\int_0^{\infty}\beta(m,m')\sigma(m,q,\tau)\sigma(m',q,\tau)dm'\right)dmdq.$$

Il est clair que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{\infty}\frac{k+r}{2}\int_0^{\infty}\beta(k,r)\sigma(k,q,\tau)\sigma(r,q,\tau)drdk\right)dq = \tag{2.2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{\infty}\frac{k}{2}\int_0^{\infty}\beta(k,r)\sigma(k,q,\tau)\sigma(r,q,\tau)drdk\right)dq+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{\infty}\frac{r}{2}\int_0^{\infty}\beta(k,r)\sigma(k,q,\tau)\sigma(r,q,\tau)drdk\right)dq.$$

Alors en substituant $k = m$ et $r = m'$ dans la première intégrale du second membre de (2.2), on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{\infty}\frac{k}{2}\int_0^{\infty}\beta(k,r)\sigma(k,q,\tau)\sigma(r,q,\tau)drdk\right)dq =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{\infty}\frac{m}{2}\int_0^{\infty}\beta(m,m')\sigma(m,q,\tau)\sigma(m',q,\tau)dm'dm\right)dq.$$

Puis en substituant $k = m'$ et $r = m$ dans la deuxième intégrale du second membre de (2.2), on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{\infty}\frac{r}{2}\int_0^{\infty}\beta(k,r)\sigma(r,q,\tau)\sigma(k,q,\tau)drdk\right)dq =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{\infty}\frac{m}{2}\int_0^{\infty}\beta(m',m)\sigma(m',q,\tau)\sigma(m,q,\tau)dmdm'\right)dq.$$

D'après la symétrie de la fonction $\beta$ et le théorème de Fubini on a

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{\infty}\frac{m}{2}\int_0^{\infty}\beta(m,m')\sigma(m,q,\tau)\sigma(m',q,\tau)dm'dm\right)dq.$$

Ce qui implique que

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{\infty}\frac{m}{2}\int_0^{\infty}\beta(m,m')\sigma(m',q,\tau)\sigma(m,q,\tau)dm'dm\right)dq+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{\infty}\frac{m}{2}\int_0^{\infty}\beta(m,m')\sigma(m',q,\tau)\sigma(m,q,\tau)dmdm'\right)dq+$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{\infty}m\int_0^{\infty}\beta(m,m')\sigma(m',q,\tau)\sigma(m,q,\tau)dmdm'\right)dq$$

et par conséquent $I_1 = 0$.

Maintenent on calcule $I_2$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}-\frac{m}{2}\left(\int_0^{m}\vartheta(m-m',m')\sigma(m,q,\tau)dm'\right)dmdq+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}m\left(\int_0^{m}\vartheta(m,m')\sigma(m+m',q,\tau)dm'\right)dmdq.$$

En faisant le changement de variables $k = m-m'$ et $r = m'$ dans la première intégrale de $I_2$, on voit que

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{\infty}-\frac{k+r}{2}\sigma(k+r,q,\tau)\int_0^{\infty}\vartheta(m-m',m')dm'dm\right)dq+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty} m\left(\int_0^{m}\vartheta(m,m')\sigma(m+m',q,\tau)dm'\right)dmdq.$$

Il est clair que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{\infty}-\frac{k+r}{2}\sigma(k+r,q,\tau)\int_0^{\infty}\vartheta(m-m',m')dm'dm\right)dq= \tag{2.3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{\infty}-\frac{k}{2}\int_0^{\infty}\vartheta(k,r)\sigma(k+r,q,\tau)drdk\right)dq+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{\infty}-\frac{r}{2}\sigma(k+r,q,\tau)\int_0^{\infty}\vartheta(k,r)drdk\right)dq.$$

En substituant $k=m$ et $r=m'$ dans la première intégrale du second membre de (2.3), on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{\infty}-\frac{k}{2}\int_0^{\infty}\vartheta(k,r)\sigma(k+r,q,\tau)drdk\right)dq=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{\infty}-\frac{m}{2}\int_0^{\infty}\vartheta(m,m')\sigma(m+m',q,\tau)dm'dm\right)dq.$$

et puis en substitue $k=m'$ et $r=m$ dans la deuxième intégrale du second membre de (2.3) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{\infty}-\frac{r}{2}\int_0^{\infty}\vartheta(k,r)\sigma(k+r,q,\tau)drdk\right)dq=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{\infty}-\frac{m}{2}\sigma(m'+m,q,\tau)\int_0^{\infty}\vartheta(m',m)dmdm'\right)dq.$$

D'après la symètrie de la fonction $\vartheta$ et la théorème e Fubini on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}-\frac{m}{2}\int_0^{\infty}\vartheta(m,m')\sigma(m+m',q,\tau)dm'dmdq=$$

Ce qui implique que.

$$I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}-\frac{m}{2}\int_0^{\infty}\vartheta(m,m')\sigma(m+m',q,\tau)dm'dmdq+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}-\frac{m}{2}\int_0^{\infty}\vartheta(m,m')\sigma(m+m',q,\tau)dm'dmdq+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty} m\int_0^{\infty} \vartheta(m,m')\sigma(m+m',q,\tau)dm'dmdq=0$$

Donc $I_2=0$.

d'après les résultats précédents on obtient que $I_1+I_2=0$, c'est-à-dire que la masse est conservée donc le lemme est démontré□

COROLLAIRE : *Si $\sigma$ est la solution de l'équation* (1.17) *avec la condition*

$\sigma(m,q,0)=0 \quad si \quad q>0$ *alors on a :*

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}\sigma(m,q,\tau)dmdq=\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}\sigma(m,q,0)dmdq+\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}\overline{\sigma}^*_{1,\tau'}(m)\chi_{\{0<q<-u(m)\tau\}}dmdq.$$

DÉMONSTRATION : On a

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\sigma(m,q,\tau)=F_\tau(\sigma(\cdot,\cdot,\tau))(m,q)+\overline{\sigma}^*_{1,\tau'}(m)|u(m)|\delta(q+u(m)\tau)$$

en intérgrant par rapport à $\tau$ on obtient

$$\int_0^\tau\frac{\partial}{\partial\tau'}\sigma(m,q,\tau')d\tau'=\int_0^\tau F_{\tau'}(\sigma(\cdot,\cdot,\tau'))(m,q)d\tau'+\int_0^\tau|u(m)|\overline{\sigma}^*_{1,\tau'}(m)\delta(q+u(m)\tau')d\tau'$$

alors

$$\sigma(m,q,\tau)-\sigma(m,q,0)=\int_0^\tau F_{\tau'}(\sigma(\cdot,\cdot,\tau'))(m,q)d\tau'+\int_0^\tau|u(m)|\overline{\sigma}^*_{1,\tau'}(m)\delta(q+u(m)\tau')d\tau'$$

soit $\psi(\tau')=q+u(m)\tau'$ on a alors

$$\int_0^\tau\delta(q+u(m)\tau')d\tau'=\int_0^\tau\delta(\psi(\tau'))\frac{1}{\left|\frac{d\psi}{d\tau'}\right|}d\tau'=\int_0^\tau\delta(\psi(\tau'))\frac{1}{|u(m)|}d\psi$$

si nous approchons $\int_0^\tau\delta(q+u(m)\tau')d\tau'$ par $\frac{1}{|u(m)|}\chi_{\{0<q<-u(m)\tau\}}$, avec

$$\chi_{\{0<q<-u(m)\tau\}}=\begin{cases}1 & , \text{ si } 0<q<-u(m)\tau;\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

On aura

$$\int_0^\tau |u(m)|\overline{\sigma}^*_{1,\tau'}(m)\delta(q+u(m)\tau')d\tau' = |u(m)|\overline{\sigma}^*_{1,\tau'}(m)\frac{1}{|u(m)|}\chi_{\{0<q<-u(m)\tau\}},$$

ainsi

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\sigma(m,q,\tau) = F_\tau(\sigma(\cdot,\cdot,\tau))(m,q) + \overline{\sigma}^*_{1,\tau'}(m)\chi_{\{0<q<-u(m)\tau\}},$$

et

$$\sigma(m,q,\tau) - \sigma(m,q,0) = \int_0^\tau F_{\tau'}(\sigma(\cdot,\cdot,\tau'))(m,q)d\tau' + \int_0^\tau \overline{\sigma}*_{1,\tau'}(m)\chi_{\{0<q<-u(m)\tau\}}.$$

En intégrant par rapport à $m$ et $q$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} \sigma(m,q,\tau) - \sigma(m,q,0)dmdq = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}\int_0^\tau F_{\tau'}(\sigma(\cdot,\cdot,\tau'))(m,q)d\tau' dmdq +$$

$$+\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}\int_0^\tau \overline{\sigma}^*_{1,\tau'}(m)\chi_{\{0<q<-u(m)\tau\}}dmdq.$$

D'après lemme 3 (conservation de la masse) on a

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} F_{\tau'}(\sigma(\cdot,\cdot,\tau'))(m,q)d\tau' dmdq = 0,$$

par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} \sigma(m,q,\tau)dmdq = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} \sigma(m,q,0)dmdq + \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} \overline{\sigma}^*_{1,\tau'}(m)\chi_{\{0<q<-u(m)\tau\}}dmdq.$$

Le corollaire est démontré □

# Chapitre 3

# Estimations de la solution

Ce chapitre est consacré à l'étude de quelques estimations de la solution, estimations utiles pour la recherche de la solution globale. En adoptant les techniques des travaux des mathématiens Russes, en particulier Galkin et Dubovskii, qui ont utilisé dans leurs travaux [13], [7] le principe du maximum pour construire la solution.

## 3.1 Principe du maximum

On va d'abord légèrement généraliser le principe du maximum utilisé par Galkin et Dubovskii. On a la version suivante du principe du maximum.

LEMME (PRINCIPE DU MAXIMUM) : *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $u(x,t)$ une fonction non négative, continue dans $\Omega \times [0,t_1]$ et admettant la dérivée partielle $\partial_t u(x,t)$ pour tout $(x,t) \in \Omega\times]0,t_1[$. On suppose que pour tout $t \in [0,t_1]$ il existe au moins un point $\overline{x} \in \Omega$ tel que*

$$u(\overline{x},t) \geq u(x,t) \qquad \forall x \in \Omega, \tag{3.1}$$

*et que, pour tout $t \in [0,t_1]$, au point $\overline{x}$ on a*

$$\partial_t u(\overline{x},t) \leq b(t) + ku(\overline{x},t) \qquad (b(t) \geq 0). \tag{3.2}$$

*Alors on a*

$$u(x,t) \leq a\exp(kt) + \int_0^t b(s)\exp k(t-s)ds \equiv A(t) \qquad \forall (x,t) \in \Omega \times ]0, t_1[, \tag{3.3}$$

*où*

$$a = \max_{x\in\Omega} u(x,0).$$

DÉMONSTRATION. On rappelle que dans les travaux de Galkin on trouve la démonstration d'une affirmation analogue pour le cas où $b(t) = 0$ et $k = 0$. Nous allons démontrer le lemme pour le cas général (cas où $b(t)$ et $k$ ne s'annulent généralement pas), utilisant un raisonnement qui généralise celui de Galkin.

On va le démontrer par absurde. Pour cela, en posant pour chaque $\varepsilon > 0$

$$a_\varepsilon = \max_{x\in\Omega} u(x,0) + \varepsilon = a + \varepsilon,$$

$$A_\varepsilon(t) = a_\varepsilon \exp((k+\varepsilon)t) + \int_0^t b(s)\exp((k+\varepsilon)(t-s))ds,$$

$$U_\varepsilon(x,t) = \frac{u(x,t)}{A_\varepsilon(t)},$$

on suppose qu'il existe un $(x,t) \in \Omega \times [0,t_1]$ tel que $u(x,t) > A_\varepsilon(t)$. Cette hypothèse impliqu'il existe le premier temps $\tilde{t}$ par lequel $u(x,\tilde{t})$ peut être supérieur ou égal à $A_\varepsilon(\tilde{t})$ ; plus précisément, en posant

$$\tilde{t} = \min\{t > 0 \mid \max_{x\in\Omega} U_\varepsilon(x,t) \geq 1\}, \tag{3.4}$$

on suppose qu'il existe un tel $\tilde{t}$ et est fini. Pour $\tilde{t}$, on définit un point $\overline{x} \in \Omega$ vérifiant la relation

$$u(\overline{x},\tilde{t}) \geq u(x,\tilde{t}), \qquad \forall x \in \Omega$$

(ce qui est possible en vertu de l'hypothèse (3.1)). On a évidemment

$$U_\varepsilon(\overline{x},\widetilde{t}) \geq U_\varepsilon(x,\widetilde{t}) \qquad \forall x \in \Omega.$$

Maintenant en calculant $\partial_t U_\varepsilon(\overline{x},\widetilde{t})$ on a

$$\partial_t U_\varepsilon(\overline{x},\widetilde{t}) = \frac{1}{(A_\varepsilon(\widetilde{t}))^2}\left[\partial_{\widetilde{t}} u(\overline{x},\widetilde{t})A_\varepsilon(\widetilde{t}) - u(\overline{x},\widetilde{t})\partial_{\widetilde{t}} A_\varepsilon(\widetilde{t})\right].$$

D'après l'hypothèse (3.2) et la définition de $A_\varepsilon$ on a

$$\partial_t U_\varepsilon(\overline{x},\widetilde{t}) \leq \frac{1}{(A_\varepsilon(\widetilde{t}))^2}[(b(\widetilde{t}) + ku(\overline{x},\widetilde{t}))A_\varepsilon(\widetilde{t}) - u(\overline{x},\widetilde{t})((k+\varepsilon)A_\varepsilon(\widetilde{t}) + b(\widetilde{t}))].$$

Comme $U_\varepsilon(\overline{x},\widetilde{t}) = \dfrac{u(\overline{x},\widetilde{t})}{A_\varepsilon(\widetilde{t})} = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\partial_t U_\varepsilon(\overline{x},\widetilde{t}) &\leq \frac{1}{(A_\varepsilon(\widetilde{t}))^2}[b(\widetilde{t})A_\varepsilon(\widetilde{t}) + ku(\overline{x},\widetilde{t})A_\varepsilon(\widetilde{t}) - ku(\overline{x},\widetilde{t})A_\varepsilon(\widetilde{t}) - \varepsilon u(\overline{x},\widetilde{t})A_\varepsilon(\widetilde{t}) - b(\widetilde{t})u(\overline{x},\widetilde{t})\\
&= \frac{1}{(A_\varepsilon(\widetilde{t}))^2}[b(\widetilde{t})A_\varepsilon(\widetilde{t}) + kA_\varepsilon(\widetilde{t})^2 - kA_\varepsilon(\widetilde{t})^2 - \varepsilon A_\varepsilon(\widetilde{t})^2 - b(\widetilde{t})A_\varepsilon(\widetilde{t})\\
&= \frac{1}{(A_\varepsilon(\widetilde{t}))^2}(-\varepsilon A_\varepsilon(\widetilde{t})^2) = -\varepsilon < 0.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire, on a

$$\partial_t U_\varepsilon(\overline{x},\widetilde{t}) < 0,$$

ce qui impliqu'il existe un point $(\overline{x},\widetilde{t}') \in \Omega \times ]0,\widetilde{t}[$ (c'est-à-dire $\widetilde{t}' < \widetilde{t}$) tel que

$$U_\varepsilon(\overline{x},\widetilde{t}') > 1,$$

ce qui contredit la définition (3.4) de $\widetilde{t}$, c'est-à-dire $\widetilde{t}$ n'existe pas. Par conséquent on a

$$U_\varepsilon(x,t) \leq 1 \qquad \forall (x,t) \in \Omega \times [0,t_1].$$

C'est-à-dire, on a

$$u(x,t) \leq A_\varepsilon(t),$$

qui est valable pour tout $\varepsilon > 0$. Par conséquent, par passage à la limite pour $\varepsilon \to 0$, on obtient l'inégalité

$$u(x,t) \leq A(t) \qquad \forall (x,t) \in \Omega \times ]0, t_1[.$$

Le lemme est démontré. □

## 3.2 Estimations de $\sup\limits_{m,q}(1+m^\alpha)\sigma(m,q,\tau)$

Maintenant on va montrer que, sous des hypothèses convenables, pour un certain $\alpha > 0$ la fonction $(1+m^\alpha)\sigma(m,q,\tau)$ est bornée.

LEMME 4. *On suppose que les fonctions $\vartheta(m_1,m_2)$ et $\beta(m_1,m_2)$ vérifient les conditions*

$$C_1(m_1+m_2)^{\alpha_0} \leq \vartheta(m_1,m_2) \leq C_2(1+(m_1+m_2)^{\alpha_0}) \quad \forall m_1,m_2 \geq 0, \tag{3.5}$$

$$\frac{\beta(m_1,m_2)}{(1+m_1^\alpha)(1+m_2^\alpha)} \leq \frac{\beta(m_1+\mu,m_2)}{(1+(m_1+\mu)^\alpha)(1+m_2^\alpha)} \quad \textit{pour } m_1-m_2 \leq m_2, \tag{3.6}$$

*où $\alpha_0$, $\alpha$, $C_1$, $C_2$ sont des constantes positives telles que*

$$\alpha > \frac{2C_2}{C_1} + \alpha_0 + 1. \tag{3.7}$$

*Alors il existe une fonction continue $C(\tau)$ telle que*

$$\sup_{m,q}(1+m^\alpha)\sigma(m,q,\tau) \leq C(\tau). \tag{3.8}$$

DÉMONSTRATION :

Pour démontrer (3.8) nous allons utiliser le principe du maximum. Soit $\tau \geq 0$ et soit $(\overline{m},\overline{q})$ le point de maximum pour $\tau$, c'est-à-dire

$$(1+\overline{m}^\alpha)\sigma(\overline{m},\overline{q},\tau) = \max_{0\leq m<\infty, q\in\mathbb{R}}(1+m^\alpha)\sigma(m,q,\tau). \tag{3.9}$$

Définissons $\overline{\zeta}$ par la relation

$$\overline{q} = q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}). \tag{3.10}$$

On rappelle que, d'après (1.15) (voir aussi (1.12) et (1.12)), on a

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(1+\overline{m}^{\alpha})\sigma(\overline{m},\overline{q},\tau) = (1+\overline{m}^{\alpha})\frac{\partial}{\partial \tau}\sigma(\overline{m},\overline{q},\tau) =$$

$$= (1+\overline{m}^{\alpha})\frac{\overline{m}}{2}\int_0^{\overline{m}} \beta(\overline{m}-m',m')\sigma(\overline{m}-m',q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}-m'),\tau)\sigma(m',q_{\overline{\zeta}}(m'),\tau)dm' +$$

$$-(1+\overline{m}^{\alpha})\frac{\overline{m}}{2}\int_0^{\infty} \beta(\overline{m},m')\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)\sigma(m',q_{\overline{\zeta}}(m'),\tau)dm' +$$

$$-(1+\overline{m}^{\alpha})\frac{\overline{m}}{2}\int_0^{\infty} \beta(\overline{m},m')\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)\sigma(m',q_{\overline{\zeta}}(m'),\tau)dm' +$$

$$-(1+\overline{m}^{\alpha})\frac{\overline{m}}{2}\int_0^{\overline{m}} \vartheta(\overline{m}-m',m')\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)dm' +$$

$$+(1+\overline{m}^{\alpha})\overline{m}\int_0^{\infty} \vartheta(\overline{m},m')\sigma(\overline{m}+m',q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}+m'),\tau)dm' +$$

$$+(1+\overline{m}^{\alpha})\overline{\sigma}^{*}_{1,\tau}(\overline{m})\delta(\overline{q}+u(m)\tau),$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(1+\overline{m}^{\alpha})\sigma(\overline{m},\overline{q},\tau) = (1+\overline{m}^{\alpha})\frac{\overline{m}}{2}\times \tag{3.11}$$

$$\times\int_0^{\overline{m}} \Big[\beta(\overline{m}-m',m')\sigma(\overline{m}-m',q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}-m'),\tau) - \beta(\overline{m},m')\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)\Big]\times$$

$$\times\sigma(m',q_{\overline{\zeta}}(m'),\tau)dm' +$$

$$-(1+\overline{m}^{\alpha})\frac{\overline{m}}{2}\int_{\overline{m}}^{\infty} \beta(\overline{m},m')\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)\sigma(m',q_{\overline{\zeta}}(m'),\tau)dm' +$$

$$-(1+\overline{m}^{\alpha})\frac{\overline{m}}{2}\int_0^{\infty} \beta(\overline{m},m')\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)\sigma(m',q_{\overline{\zeta}}(m'),\tau)dm' +$$

$$-(1+\overline{m}^{\alpha})\frac{\overline{m}}{2}\int_0^{\overline{m}} \vartheta(\overline{m}-m',m')\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)dm' +$$

$$+(1+\overline{m}^{\alpha})\overline{m}\int_0^{\infty}\vartheta(\overline{m},m')\sigma(\overline{m}+m',q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}+m'),\tau)dm'+$$
$$+(1+\overline{m}^{\alpha})\overline{\sigma}^{*}_{1,\tau}(\overline{m})\delta(\overline{q}+u(m)\tau).$$

Maintenant, on va examiner le signe (la négativité) du terme

$$D=\beta(\overline{m}-m',m')\sigma(\overline{m}-m',q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}-m'),\tau)-\beta(\overline{m},m')\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau).$$

On remarque d'abord que $D$ peut être écrit dans la forme

$$D=(1+(\overline{m}-m')^{\alpha})(1+m'^{\alpha})\frac{\beta(\overline{m}-m',m')}{(1+(\overline{m}-m')^{\alpha})(1+m'^{\alpha})}\sigma(\overline{m}-m',q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}-m'),\tau)+$$
$$-(1+\overline{m}^{\alpha})(1+m'^{\alpha})\frac{\beta(\overline{m},m')}{(1+(\overline{m})^{\alpha})(1+m'^{\alpha})}\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)=$$
$$=(1+m'^{\alpha})\Big[(1+(\overline{m}-m')^{\alpha})\frac{\beta(\overline{m}-m',m')}{(1+(\overline{m}-m')^{\alpha})(1+m'^{\alpha})}\sigma(\overline{m}-m',q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}-m'),\tau)+$$
$$-(1+\overline{m}^{\alpha})\frac{\beta(\overline{m},m')}{(1+(\overline{m})^{\alpha})(1+m'^{\alpha})}\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)\Big].$$

Or, comme la relation (3.9) et la définition (3.10) impliquent que

$$(1+(\overline{m}-m')^{\alpha})\sigma(\overline{m}-m',q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}-m'),\tau)\leq(1+\overline{m}^{\alpha})\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)$$

pour $0\leq m'\leq\overline{m}$, on a

$$D\leq(1+m'^{\alpha})\Big[(1+\overline{m}^{\alpha})\frac{\beta(\overline{m}-m',m')}{(1+(\overline{m}-m')^{\alpha})(1+m'^{\alpha})}\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)+$$
$$-(1+\overline{m}^{\alpha})\frac{\beta(\overline{m},m')}{(1+\overline{m}^{\alpha})(1+m'^{\alpha})}\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)\Big]=$$
$$=(1+m'^{\alpha})(1+\overline{m}^{\alpha})\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)\times$$
$$\times\Big[\frac{\beta(\overline{m}-m',m')}{(1+(\overline{m}-m')^{\alpha})(1+m'^{\alpha})}-\frac{\beta(\overline{m},m')}{(1+\overline{m}^{\alpha})(1+m'^{\alpha})}\Big].$$

Comme d'après (3.6) on a

$$\frac{\beta(\overline{m}-m',m')}{(1+(\overline{m}-m')^{\alpha})(1+m'^{\alpha})} \leq \frac{\beta(\overline{m},m')}{(1+\overline{m}^{\alpha})(1+m'^{\alpha})},$$

on obtient

$$D=\beta(\overline{m}-m',m')\sigma(\overline{m}-m',q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}-m'),\tau)-\beta(\overline{m},m')\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)\leq 0.$$

Cette dernière relation nous permet de déduire de (3.11), en négligeant certains termes négatifs, l'inégalité

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(1+\overline{m}^{\alpha})\sigma(\overline{m},\overline{q},\tau)\leq \tag{3.12}$$

$$\leq -(1+\overline{m}^{\alpha})\frac{\overline{m}}{2}\int_0^{\overline{m}}\vartheta(\overline{m}-m',m')\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)dm'+$$

$$+(1+\overline{m}^{\alpha})\overline{m}\int_0^{\infty}\vartheta(\overline{m},m')\sigma(\overline{m}+m',q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}+m'),\tau)dm',$$

$$+(1+\overline{m}^{\alpha})\overline{\sigma}^*_{1,\tau}(\overline{m})\delta(\overline{q}+u(m)\tau).$$

Pour estimer le deuxième membre de (3.12), on remarque d'abord que, en vertu de (3.5), on a

$$\int_0^{\overline{m}}\vartheta(\overline{m}-m',m')dm'\geq C_1\overline{m}^{\alpha_0+1};$$

en outre, comme $(\overline{m},\overline{q})=(\overline{m},q_{\overline{\zeta}})$ est un point maximal de la fonction $(1+m^{\alpha})\sigma(m,q,\tau)$, compte tenu également de (3.5), on a

$$\int_0^{\infty}\vartheta(\overline{m},m')\sigma(\overline{m}+m',q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}+m'),\tau)dm'=$$

$$=\int_0^{\infty}\vartheta(\overline{m},m')\frac{1}{1+(\overline{m}+m')^{\alpha}}(1+(\overline{m}+m')^{\alpha})\sigma(\overline{m}+m',q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}+m'),\tau)dm'\leq$$

$$\leq(1+\overline{m}^{\alpha})\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)\int_0^{\infty}\vartheta(\overline{m},m')\frac{1}{(1+(\overline{m}+m')^{\alpha})}dm'\leq$$

$$\leq (1+\overline{m}^{\alpha})\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)\int_0^{\infty} C_2(1+(\overline{m}+m')^{\alpha_0})\frac{1}{1+(\overline{m}+m')^{\alpha}}dm' =$$

$$= (1+\overline{m}^{\alpha})\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)C_2\int_0^{\infty}(\frac{1}{1+(\overline{m}+m')^{\alpha}}+\frac{(\overline{m}+m')^{\alpha_0}}{1+(\overline{m}+m')^{\alpha}})dm'.$$

On remarque que, si $\overline{m}<1$, on a

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{1+(\overline{m}+m')^{\alpha}}dm' \leq \int_{\overline{m}}^1 1dx+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx = 1-\overline{m}+\frac{1}{\alpha-1},$$

$$\int_0^{\infty}\frac{(\overline{m}+m')^{\alpha_0}}{1+(\overline{m}+m')^{\alpha}}dm' \leq \int_{\overline{m}}^1 1dx+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha-\alpha_0}}dx = 1-\overline{m}+\frac{1}{\alpha-\alpha_0-1}.$$

D'autre part, si $\overline{m}\geq 1$, on a

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{1+(\overline{m}+m')^{\alpha}}dm' \leq \int_{\overline{m}}^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx = \frac{1}{\alpha-1}(\overline{m})^{-\alpha+1}.$$

$$\int_0^{\infty}\frac{(\overline{m}+m')^{\alpha_0}}{1+(\overline{m}+m')^{\alpha}}dm' \leq \int_{\overline{m}}^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha-\alpha_0}}dx = \frac{1}{\alpha-\alpha_0-1}(\overline{m})^{-(\alpha-\alpha_0)+1}.$$

Donc, en introduisant la fonction caractéristique $\chi_A$ de l'ensemble $A$, c'est-à-dire

$$\chi_A(x)=1 \quad \text{si } x\in A, \qquad \chi_A(x)=0 \quad \text{si } x\notin A,$$

on a

$$\int_0^{\infty}(\frac{1}{1+(\overline{m}+m')^{\alpha}}+\frac{(\overline{m}+m')^{\alpha_0}}{1+(\overline{m}+m')^{\alpha}})dm' \leq$$

$$\leq \left(2-2\overline{m}+\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\alpha-\alpha_0-1}\right)\chi_{\{\overline{m}<1\}}+\left(\frac{(\overline{m})^{-(\alpha-\alpha_0)+1}}{\alpha-\alpha_0-1}+\frac{(\overline{m})^{-\alpha+1}}{\alpha-1}\right)\chi_{\{\overline{m}\geq 1\}}.$$

En utilisant ces inégalités, de (3.12) on déduit que

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(1+\overline{m}^{\alpha})\sigma(\overline{m},\overline{q},\tau) \leq -\frac{C_1}{2}(1+\overline{m}^{\alpha})\overline{m}^{\alpha_0+2}\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)+$$

$$+C_2(1+\overline{m}^{\alpha})^2\overline{m}\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)\times$$

$$\times\left[\left(2-2\overline{m}+\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\alpha-\alpha_0-1}\right)\chi_{\{\overline{m}<1\}}+\left(\frac{(\overline{m})^{-(\alpha-\alpha_0)+1}}{\alpha-\alpha_0-1}+\frac{(\overline{m})^{-\alpha+1}}{\alpha-1}\right)\chi_{\{\overline{m}\geq 1\}}\right]+$$

$$+(1+\overline{m}^{\alpha})\overline{\sigma}^{*}_{1,\tau}(\overline{m})\delta(\overline{q}+u(m)\tau).$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(1+\overline{m}^{\alpha})\sigma(\overline{m},\overline{q},\tau)\leq(1+\overline{m}^{\alpha})\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)\big[A(\overline{m})+B(\overline{m})\big]+$$
$$+(1+\overline{m}^{\alpha})\overline{\sigma}^{*}_{1,\tau}(\overline{m})\delta(\overline{q}+u(m)\tau),$$

avec

$$A(\overline{m})=C_2(1+\overline{m}^{\alpha})\overline{m}\Big(\frac{(\overline{m})^{-(\alpha-\alpha_0)+1}}{\alpha-\alpha_0-1}+\frac{(\overline{m})^{-\alpha+1}}{\alpha-1}\Big)\chi_{\{\overline{m}\geq1\}}-\frac{C_1}{2}\overline{m}^{\alpha_0+2},$$
$$B(\overline{m})=C_2(1+\overline{m}^{\alpha})\overline{m}\Big(2-2\overline{m}+\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\alpha-\alpha_0-1}\Big)\chi_{\{\overline{m}<1\}}.$$

Si on rappelle la condition (3.7), c'est-à-dire $\alpha>\frac{2C_2}{C_1}+\alpha_0+1$, il n'est pas difficile de constater que

$$\sup_{\overline{m}\in\mathbb{R}_+}A(\overline{m})<\infty,\qquad \sup_{\overline{m}\in\mathbb{R}_+}B(\overline{m})<\infty.$$

On en déduit qu'il existe une costante $C_{(\alpha,\alpha_0,C_1,C_2)}$ telle qu'on ait

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(1+\overline{m}^{\alpha})\sigma(\overline{m},\overline{q},\tau)\leq$$
$$\leq(1+\overline{m}^{\alpha})\overline{\sigma}^{*}_{1,\tau}(\overline{m})\delta(\overline{q}+u(m)\tau)+C_{(\alpha,\alpha_0,C_1,C_2)}(1+\overline{m}^{\alpha})\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau).$$

D'après le lemme (principe du maximum), on obtient formellement

$$\sup_{m,q}(1+m^{\alpha})\sigma(m,q,\tau)\leq$$
$$\leq\sup_{m,q}(1+m^{\alpha})\overline{\sigma}_0(m,q)\exp(C_{(\alpha,\alpha_0,C_1,C_2)}\tau)+$$
$$+\sup_{m,q}\int_0^{\tau}(1+m^{\alpha})\overline{\sigma}^{*}_{1,\tau'}(m)\delta(q+u(m)\tau')\exp(C_{(\alpha,\alpha_0,C_1,C_2)}(\tau-\tau'))d\tau'.$$

Donc, pour chaque $\tau$ fixé, on a

$$\sup_{q,m}(1+m^{\alpha})\sigma(m,q,\tau)\leq C(\tau)<\infty.$$

où $C(\tau)$ est une constante positive qui dépend de $\tau$.

Chapitre 4

# Estimations de la solution dans $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$

## 4.1 Lemmes

Pour obtenir une estimation de $\sigma$ dans la norme $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, nous avons besoin d'un lemme, qui est une des conséquences du résultat obtenu dans le chapitre précédent.

On a le lemme suivant.

LEMME 5. *On suppose les mêmes conditions du lemme 4. Soit*

$$\alpha' < \alpha - 1.$$

*Alors il existe une fonction continue $\widetilde{C}_1(\tau)$ telle que*

$$\int_0^\infty (1 + m^{\alpha'})\sigma(m, q_\zeta(m), \tau)\, dm \leq \widetilde{C}_1(\tau) < \infty \quad \forall \zeta \leq 0 \tag{4.1}$$

*pour $\tau \geq 0$.*

DÉMONSTRATION. On considère l'intégrale

$$\int_0^\infty (1 + m^{\alpha'})\sigma(m, q_\zeta(m), \tau)\, dm = \int_0^\infty \frac{1 + m^{\alpha'}}{1 + m^\alpha}(1 + m^\alpha)\sigma(m, q_\zeta(m), \tau)\, dm.$$

Donc, en vertu du lemme 4, on a

$$\int_0^{\infty}(1+m^{\alpha'})\sigma(m,q_\zeta(m),\tau)dm \leq C(\tau)\int_0^{\infty}\frac{1+m^{\alpha'}}{1+m^{\alpha}}dm.$$

Comme $\alpha-\alpha'>1$, on a

$$\int_0^{\infty}\frac{1+m^{\alpha'}}{1+m^{\alpha}}dm<\infty.$$

Par conséquent, en posant

$$\widetilde{C}_1(\tau)=C(\tau)\int_0^{\infty}\frac{1+m^{\alpha'}}{1+m^{\alpha}}dm,$$

on obtient (4.1), qui est évidemment valable pour tout $\zeta$. □

De ce lemme on peut déduire la conséquence suivante.

LEMME 6. *Sous les mêmes conditions que dans le lemme 4, il existe une fonction continue $\widetilde{C}_2(\tau)$ telle que*

$$m\int_0^{\infty}\vartheta(m,m')\sigma(m+m',q_\zeta(m+m'),\tau)dm' \leq \widetilde{C}_2(\tau)<\infty.$$

DÉMONSTRATION. En vertu de (3.5) on a

$$m\int_0^{\infty}\vartheta(m,m')\sigma(m+m',q_\zeta(m+m'),\tau)dm' \leq$$

$$\leq m\int_0^{\infty}C_2(1+(m+m')^{\alpha_0})\sigma(m+m',q_\zeta(m+m'),\tau)dm' \leq$$

$$\leq 2\int_0^{\infty}C_2(1+(m+m')^{\alpha_0+1})\sigma(m+m',q_\zeta(m+m'),\tau)dm'.$$

On rappelle que la condition (3.5) implique que $C_1 \leq C_2$, de sorte que

$$\alpha>\alpha_0+2.$$

Donc, en posant $\alpha' = \alpha_0 + 1$, on a $\alpha > \alpha' + 1$, ce qui nous permet d'appliquer le lemme 5. Ainsi on a

$$2\int_0^{\infty} C_2(1+(m+m')^{\alpha_0+1})\sigma(m+m', q_\zeta(m+m'),\tau)dm' \leq 2C_2\widetilde{C}_1(\tau) \equiv \widetilde{C}_2(\tau).$$

Le lemme est démontré. □

## 4.2 Estimations de $\|\sigma(.,.,\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}$

PROPOSITION. *Sous les hypothèses du lemme 4 il existe une fonction continue $M(\tau)$ telle que*

$$\|\sigma(\cdot,\cdot,\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})} \leq M(\tau) < \infty. \tag{4.2}$$

DÉMONSTRATION. On va appliquer le principe du maximum à notre équation

$$\sigma(m,q,\tau) = \overline{\sigma}_0(m,q) + \int_0^\tau F_{\tau'}(\sigma(\cdot,\cdot,\tau'))(m,q) + \overline{\sigma}_{1,\tau}(m)\chi_{\{0<q<-u(m)\tau\}}. \tag{4.3}$$

Soit $\tau \geq 0$ et soit $(\overline{m},\overline{q})$ le point de maximum dans $[0,\infty[\times\mathbb{R}\times\{\tau\}$ pour la fonction $\sigma(m,q,\tau)$, c'est-à-dire

$$\sigma(\overline{m},\overline{q},\tau) = \max_{0\leq m<\infty, q\in\mathbb{R}} \sigma(m,q,\tau).$$

Rappelons que, d'après (1.17), on a

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\sigma(\overline{m},\overline{q},\tau) = F_\tau(\sigma(\cdot,\cdot,\tau))(\overline{m},\overline{q}) + \overline{\sigma}^*_{1,\tau}(\overline{m})\delta(\overline{q}+u(\overline{m})\tau). \tag{4.4}$$

Or, d'après (1.16), (1.12), (1.13), on a

$$F_\tau(\sigma(\cdot))(\overline{m},\overline{q}) =$$

$$= \frac{\overline{m}}{2}\int_0^{\overline{m}} \beta(\overline{m}-m',m')\sigma(\overline{m}-m', q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}-m'),\tau)\sigma(m', q_{\overline{\zeta}}(m'),\tau)dm' +$$

$$-\frac{\overline{m}}{2}\int_0^{\infty}\beta(\overline{m},m')\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)\sigma(m',q_{\overline{\zeta}}(m'),\tau)dm'+$$
$$-\frac{\overline{m}}{2}\int_0^{\infty}\beta(\overline{m},m')\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)\sigma(m',q_{\overline{\zeta}}(m'),\tau)dm'+$$
$$-\frac{\overline{m}}{2}\int_0^{\overline{m}}\vartheta(\overline{m}-m',m')\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)dm'+$$
$$+\overline{m}\int_0^{\infty}\vartheta(\overline{m},m')\sigma(\overline{m}+m',q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}+m'),\tau)dm'=$$
$$=\frac{\overline{m}}{2}\int_0^{\overline{m}}\left[\beta(\overline{m}-m',m')\sigma(\overline{m}-m',q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}-m'),\tau)-\beta(\overline{m},m')\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)\right]\times$$
$$\times\sigma(m',q_{\overline{\zeta}}(m'),\tau)dm'+$$
$$-\frac{\overline{m}}{2}\int_{\overline{m}}^{\infty}\beta(\overline{m},m')\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)\sigma(m',q_{\overline{\zeta}}(m'),\tau)dm'+$$
$$-\frac{\overline{m}}{2}\int_0^{\infty}\widetilde{\beta}(\overline{m},m')\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)\sigma(m',q_{\overline{\zeta}}(m'),\tau)dm'+$$
$$-\frac{\overline{m}}{2}\int_0^{\overline{m}}\vartheta(\overline{m}-m',m')\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)dm'+$$
$$+\overline{m}\int_0^{\infty}\vartheta(\overline{m},m')\sigma(\overline{m}+m',q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}+m'),\tau)dm'.$$

On remarque que la condition (3.6) implique que

$$\beta(\overline{m}-m',m')\leq\beta(\overline{m},m').$$

En effet, on a

$$\beta(\overline{m}-m',m')=(1+(\overline{m})^{\alpha})\frac{\beta(\overline{m}-m',m')}{1+(\overline{m})^{\alpha}}\leq(1+(\overline{m})^{\alpha})\frac{\beta(\overline{m},m')}{1+(\overline{m}+m')^{\alpha}}=$$
$$=\frac{1+(\overline{m})^{\alpha}}{1+(\overline{m}+m')^{\alpha}}\beta(\overline{m},m')\leq\beta(\overline{m},m').$$

D'autre part, comme $(\overline{m},\overline{q})=(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}))$ est un point maximal, on a

$$\sigma(\overline{m}-m',q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}-m'),\tau)\leq\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau).$$

De ces inégalités on déduit que

$$\beta(\overline{m}-m',m')\sigma(\overline{m}-m',q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}-m'),\tau)-\beta(\overline{m},m')\sigma(\overline{m},q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}),\tau)\leq 0.$$

Cette dernière inégalité nous permet d'obtenir, en négligeant tous les termes négatives dans le second membre de l'égalité citée ci-dessus pour $F_\tau(\sigma(\cdot))(\overline{m},\overline{q})$, l'inégalité

$$F_\tau(\sigma)(\overline{m},\overline{q})\leq \overline{m}\int_0^\infty \vartheta(\overline{m},m')\sigma(\overline{m}+m',q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}+m'),\tau)dm'. \tag{4.5}$$

Or, d'aprés le lemme 6 on a

$$\overline{m}\int_0^\infty \vartheta(\overline{m},m')\sigma(\overline{m}+m',q_{\overline{\zeta}}(\overline{m}+m'),\tau)dm'\leq \widetilde{C}_2(\tau).$$

Donc, de (4.5) on déduit que

$$F_\tau(\sigma)(\overline{m},\overline{q})\leq \widetilde{C}_2(\tau). \tag{4.6}$$

A ce point, on peut appliquer le principe du maximum à la fonction $\sigma(m,q,\tau)$ avec les (4.4) et (4.6). De la sorte, d'après le lemme du principe du maximum, on obtient (4.2), ce qui achève la démonstration de la proposition. □

REMARQUE : La proposition nous donne, formellement, une bonne estimation de $\sigma$, qui nous ouvrirait une voie pour construire la solution globale $\sigma$. Mais en réalité nous nous trouverons dans une situation peu claire. En effet, la condition (3.5) signifierait que la coagulation est trop rapide de telle sorte que les gouttelettes deviennet grandes trop rapidement et dans un temps fini la masse pourrait devenir "infinie". En effet dans les travaux [9], [10], [6] les auteurs font voir qu'il y a des phénomènes de ce type ; ils appelent ces phénomènes *gélification* (en anglais *gelation*). Il nous n'est pas clair ce que ce phénomènes mathématiques signifient dans la description des processus de coagulation-fragmentation des gouttelettes d'eau dans l'atmosphère.

# Perspectives

La perspective principale de notre étude est sans doute celle d'arriver à la démonstration de l'existence et l'unicité de la solution de cette équation sous des conditions naturelles. Or, les analyses faites dans le présent mémoire nous donnent des propriétés bien précises des l'équation de coagulation-fragmentation des gouttelettes en chute. Nous pouvons bien espérer d'utiliser ces propriétés et, en particulier, les techniques développées dans cette étude, pour l'étude de l'existence et l'unicité de la solution de l'équation. Il est bon d'insister sur la nécessité de les démontrer sous des conditions naturelles du point de vue physique, ce qui signifiera que le résultat que nous voulons obtenir devra améliorer le résultat connu [7], qui utilise des conditions qui ne sont pas nécessairement naturelles. Surmonter cette difficulté exige sans doute nos grands efforts ; dans ce sens nous espérons que l'étude réalisée dans ce mémoire contribuira à l'étude plus complète de l'équation.

# Bibliographie


[1] Belhireche, H., Aissaoui, M. Z., Fujita Yashima, H. : Equations monodimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau. *Sci. Techn. Univ. Constantine* - A, vol. **31** (2011), pp. 9–17.

[2] Belhireche, H., Aissaoui, M.Z., Fujita Yashima, H. : Solution globale de l'équation de coagulation des gouttelettes en chute. *Ren. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino,* vol. **70**, 3 (2012), pp. 261–278.

[3] Belhireche, H., Aissaoui, M.Z., Ellaggoune, F. : Global solution for the coagulation equation in fall with horizontal wind. *Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl.,* vol. **6**, 2 (2014), pp. 150–172.

[4] Belhireche, H., Selvaduray, S. : Global solution for the coagulation equation of water droplets in atmosphere between two horizontal planes. In preparation.

[5] Belhireche, H.,Aissaoui, M.Z., Fujita Yashima, H. : Comportement asymtotique de l'équation de la coagulation des gouttelettes en chute.thèse de doctorat 3$^{ème}$ cycle en Mathématiques université 8 Mai 1945 Guelma.2014.

[6] Costa, F.P. da. : Existence and uniqueness of density conserving solutions to the coagulation-fragmentation equations with strong fragmentation, J. Math. Anal. Appl. 192 (1995), 892–914.

[7] Dubovskii, P. B. : Solubility of the transport equation in the kinetics of coagulation and fragmentation. *Izv. Math*, vol. **65** (2001), pp. 1–22.

[8] Dubovskii, P. B. : *Mathematical theory of coagulation.* Seoul National Univ., Research Inst. Math., 1994.

[9] Escobedo, M., Mischler, S., Perthame, B. : Gelation in coagulation and fragmentation models, *Comm. Math. Phys. 231* (2002) 157–188.

[10] Escobedo, M., Laurençot, Ph., Mischler, S. and Perthame, B. : Gelation and mass conservation in coagulation-fragmentation models, *Journal of Differential Equation* 195 (2003) 143–174 .

[11] Fujita Yashima, H. : Modelación matemática del movimiento de la atmósfera con la transición de fase del agua. *Rev. Invest. Operac.*, vol. **34** (2013), pp. 93–104.

[12] Fujita Yashima, H., Campana, V., Aissaoui, M. Z. : Système d'équations d'un modèle du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère. *Ann. Math. Afr.*, vol. **2** (2011), pp. 66–92.

[13] Galkin, V. A. : The Smoluchowski equation of the kinetic theory of coagulation for spatially non-uniform systems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. **285** (1985), 1087–1091 ; English transl., Soviet Phys. Dokl., vol. **30** (1985), 1012–1014.

[14] Galkin, V. A. : Generalized solutions of the Smoluchowski kinetic equation for spatially inhomogeneous systems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. **293** (1987), 74–77 ; English transl., Soviet Phys. Dokl., vol. **32** (1987), pp. 200–202.

[15] Kaidouchi, W., Kamouche, N., Aissaoui, M.Z. : Existence et unicité de la solution de l'équation de coagulation-fragmentation des gouttelettes en chute. A paraître dans *Annales Mathématiques Africaines* (2015)

[16] Kaidouchi, W., Aissaoui, M.Z., Fujita Yashima, H. : Equation de gouttelettes avec le mouvement de l'air.thèse de doctorat $3^{ème}$ cycle en Mathématiques université 8 Mai 1945 Guelma.2014. En préparation.

[17] Melzak, A. Z. : A scalar transport equation. *Transactions AMS*, vol. **85** (1957), pp. 547–560.

[18] Merad, M., Belhireche, H., Fujita Yashima, H. : Solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelettes en chute avec le vent horizontal. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, vol. **129** (2013), pp. 225–244.

[19] Merad, M.,Aissaoui, M., Fujita Yashima, H. : Etude de l'équation de gogulation des gouttlettes en mouvement avec le vent. thèse de doctorat $3^{ème}$ cycle en Mathématiques université 8 Mai 1945 Guelma.2014

[20] Müller, H. : Zur allgemeinen Theorie der raschen Koagulation. *Kolloidchem. Beib.*, vol. **27** (1928), pp. 223–250.

[21] Prodi, F., Battaglia, A. : *Meteorologia - Parte II, Microfisica.* Grafica Pucci, Roma, 2004. (voir aussi le site :
http ://www.meteo.uni-bonn.de/mitarbeiter/battaglia/teaching.html).

[22] Selvaduray, S., Fujita Yashima, H. : Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati : gassoso, liquido e solido. *Acc. Sci. Torino, Memorie Cl. Sc. FMN.* Serie V, vol. **35** (2011), pp. 37–69.

[23] Smoluchowski, M. : Drei Vorträge über Diffusion, Brownische Bewegung und Koagulation von Kolloidteilchen. *Phys. Zeits.*, vol. **17** (1916), pp. 557–585.