République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématiques Appliquées**

Par :

M[lle]. Bouchra Zouyed

Intitulé

Equations de la densité de la vapeur dans l'air

Dirigé par : Pr. M. Z. Aissaoui

Devant le jury

PRESIDENT	Pr. H. Fujita Yashima	Prof	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Pr. M. Z. Aissaoui	Prof	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. F. Aissaoui	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2015

Remerciements

En premier lieu et avant tout je tiens à exprimer mes remerciements au bon « **Dieu** » qui m'a entouré de sa bienveuillance et m'a renforcé avec le courage et la force pour avoir enfin mené à bien ce travail.

Ensuite, j'exprime mon profonde gratitude à mon encadreur « **Pr. M. Z. Aissaoui** » pour avoir accepté de me suivre, et mes plus vifs remerciements pour son soutien, sa patience, ses conseils judicieux, pertinents, et sa sympathie dont il m'a fait preuve tout au long de l'élaboration de ce travail.

J'adresse également mes remerciements, à tous mes enseignants, qui m'ont donnée les bases de la science, Je remercie très sincèrement, les membres de jury «**Pr. H. Fujita Yashima** » et « **Pr.F.Aissaoui**» pour m'avoir fait l'honneur d'évaluer mon travail

Et finalement à tous ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin à accomplir ce travail je dis Merci.

Bouchra

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi, et qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. A ceux qui n'ont jamais cessé de m'apporter l'affection, l'amour, le courage et le bon sens. J'espère qu'ils trouveront dans ce travail toute ma reconnaissance et tout mon amour.

A ma chère mère

En témoignage de ma profonde gratitude et de mon incontestable reconnaissance, pour tous les sacrifices qu'elle me contente, toute la confiance qu'elle m'accorde et tout l'amour dont elle m'entoure. La plus belle mère du monde.

A Mon Cher père

Qui est le meilleur père dans ce monde, grâce à son encouragement, sa confiance et son soutien moral et matériel et pour son amour infini en exprimant mes gratitudes, mon profond amour et ma passion

A mes chers frères et sœur mon bon petit frère **Yahia** *et mes meilleurs grands frères* **Ali et Abd errahmane** *et mes très belles sœurs* **Soumia et Zayneb** *, à ma nièce* **khadidja**
En leurs espérant le plein succès dans leur vie.

A toutes les membres de LMAM .

A toute ma famille et tous mes amis surtout la section math 2015 et tous ceux qui me sont chers .Que Dieu vous garde!

Bouchra

Equation de la densité de la vapeur dans l'air

Bouchra Zouyed
Mémoire de master en mathématiques
Université de Guelma

14 juin 2015

Table des matières

Introduction 3

1 Equation de transport 7

1.1 Généralités sur des équations de transport 7

1.2 Méthodes des caractéristiques 9

2 Equation de la densité de la vapeur dans l'air 15

2.1 Formulation de l'équation 15

2.2 Existence et unicité de la solution 17

3 Estimations dans la classe L^∞ 25

3.1 Résultat principal 25

4 Estimations de la solution avec la condition d'entrée 31

4.1 Position du problème 31

Résumé

*D*ans le présent travail, on propose l'étude des équations de transport (de type hyperbolique de premier ordre), et en particulier l'équation de la densité de la vapeur dans l'air. Plus précisément, on démontre l'existence et l'unicité de la solution de ces équations en utilisant la méthode des caractéristiques et aussi on cherche des estimations de ces solutions dans un espace de Sobolev et une classe de fonctions lipschitziennes. On étudiera surtout la généralisation de l'estimation de la solution de l'équation de la densité de la vapeur en présence d'une condition d'entrée.

Introduction

Les phénomènes météorologiques ont toujours au centre des préoccupations de l'humanité et depuis l'antiquité on a cherché à les comprendre et à les décrire d'une manière plus précise. Mais, comme on le sait, ces phénomènes sont assez complexes, de sorte qu'il est difficile de les décrire d'une manière complète et rigourouse.

Un des éléments essentiels de la complexité des phénomènes atmosphériques et météorologiques est la présence de la vapeur d'eau dans l'air. En effet, à la différence des autres molécules comme N_2, O_2..., qui restent toujours en état gazeux dans les conditions ordinaires de l'atmosphère, H_2O peut subir la transition de phase : dans l'atmosphère se trouve les trois états de H_2O -gazeux, liquide et solide- ainsi que les six types de ses transitions de phase, c'est-à-dire de l'état gazeux à l'état liquide (condensation), de l'état liquide à l'état gazeux (évaporation), de l'état liquide à l'état solide (solidification), de l'état solide à l'état liquide (fusion), de l'état gazeux à l'état solide (sublimation inverse) et de l'état solide à l'état gazeux (sublimation).

Il serait superflu de rappeler ici l'importance de la vapeur dans l'atmosphère pour notre vie : toutes les vies sur la terre dépendent étroitement du cycle hydrologique.

Comme l'atmosphère est essentiellement un gaz, son mouvement est régit par les équations de la mécanique des fluides. L'équation de continuité fait partie de ce système d'équations. Mais comme nous venons de remarquer, l'air contient également de la vapeur d'eau, donc la densité de cette dernière doit être régie par une équation qui exprime la loi de la conservation pour H_2O dans l'air, qui aura une particularité due à la transition de phase, comme nous l'avons signalé.

Dans le présent mémoire nous examinons l'équation de la densité de la vapeur. Or cette étude nous conduit à la recherche des propriétés de la solution des équations de transport dans la mécanique des fluides.

En effet, dans l'écoulement d'un fluide, on peut trouver d'éventuelles substances différentes des composantes principales du fluide. Un des exemples les plus communs serait la solution dans l'eau contenant du sel dissous. Généralement, les substances dissoutes dans le fluide peuvent subir des réactions chimiques, de sorte que nous devons envisager une équation du type

$$\partial_t \psi + \nabla \cdot (\psi v) = f(\psi, x, t)$$

où ψ est la densité de la substance en considération.

La vapeur d'eau dans l'air est un des exemples de matières "dissoutes" dans le fluide. En effet, les molécules de H_2O en état gazeux se mélangent parfaitement dans l'air (ensemble de molécules de N_2, O_2, etc...), mais elles peuvent se condenser ou se solidifier selon les conditions physiques (déterminées essentiellement par la temperature).

Si nous désignons par H_{gl} la quantité (par l'unité de volume et par l'unité de temps) de H_2O qui se transforme du gaz au liquide et par H_{gs} la quantité de H_2O qui se transforme du gaz au solide, on aura l'équation pour la densité de la vapeur d'eau π

$$\partial_t \pi + \nabla \cdot (\pi v) = -H_{gl} - H_{gs}. \tag{0.1}$$

Si la tempurature est supérieure à la tempurature de fusion (normalement $0°C$), on a $H_{gs} = 0$, de sorte que l'équation précédente (0.1) se réduit à

$$\partial_t \pi + \nabla \cdot (\pi v) = -H_{gl} \tag{0.2}$$

Dans les chapitre 2, 3 et 4 nous nous occuperons de l'équation (0.2). Dans ce mémoire nous supposons que la quantité H_{gl} dépend seulement de x et de t, et nous cherchons des estimations utiles. Il ne faut pas oublier que les estimations de la solution de l'équation (0.2) ne sont pas toujours faciles, si nous voulons des estimations raffinées. En effet un des objectifs-s'il n'est pas l'objectif pincipal- du présent mémoire est d'obtenir des estimations bien raffinnées de la solution de l'équation (0.2). Pour cela nous aurons besoin d'une élaboration considérable d'ensemble d'inégalités combinées.

Le présent mémoire est structuré de la manière suivante.

Dans le chapitre 1, nous présentons une idée générale sur les équations de transport et quelques propriétés fondamentales de ces équation ainsi que la méthode pricipale pour résoudre ce type d'équations.

Dans le chapitre 2, suivant les méthodes de [1], nous examinons l'équation de la densité de la vapeur d'eau (0.2), en établisant l'estimation de la solution dans l'espace W_p^1. Nous rappelons la notation d'espaces de Sobolev

$$W_p^k(\Omega; \mathbf{R}^n) = \{u \in L^p(\Omega; \mathbf{R}^n) | D^\alpha u \in L^p(\Omega; \mathbf{R}^n), |\alpha| \leq k\}$$

avec

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_3} \partial x_3^{\alpha_3}}, \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega;\mathbf{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega;\mathbf{R}^n)}.$$

Dans le chapitre 3, suivant le raisonnement du travail [6], nous étudions l'existence et l'unicité de la solution π de l'équation (0.2) dans la classe de fonctions lipschitziennes et on fait aussi l'estimation dans la classe $L^\infty(\Omega)$.

Dans le chapitre 4, nous examinons un problème analogue à celui du chapitre précédent mais avec la condition d'entrée de la vapeur à travers la frontière du domaine Ω et nous établissons des estimations dans L^∞, qui sont une généralisation des inégalités obtenues dans le chapitre 3.

Chapitre 1

Equation de transport

Dans ce chapitre nous allons rappeler les aspects généraux des équations de transport.

1.1 Généralités sur des équations de transport

Nous appelons *equation de transport*, l'équation aux dérivées partielles ayant la forme

$$a(t,x)\partial_t f(t,x) + b(t,x)\cdot\nabla_x f(t,x) + c(t,x)f(t,x) = d(t,x), \tag{1.1}$$

où $f(t,x)$ est la fonction inconnue à valeurs réelles, $b(t,x)$ est une fonction à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ et $a(t,x)$, $c(t,x)$, $d(t,x)$ sont des fonctions à valeurs réelles. Ici x appartient à un domaine Ω de $\mathbf{R}^n$, tandis que nous considérons $t>0$.

Du point de vue formel, nous pouvons prendre quelconque $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$, mais dans les applications aux problèmes réels, considérons normalement le cas $1\leq n\leq 3$, (cas de l'équation de la densité de la vapeur que nous allons étudier). Notre etude comporte le cas où plusieurs des fonctions $a(t,x)$, $b(t,x)$, $c(t,x)$, $d(t,x)$ dépendent de $f(t,x)$; dans ce cas l'équation sera une équation non linéaire. Mais pour le moment nous allons nous limiter au cas d'une équation linéaire.

Dans le cas où $\Omega = \mathbf{R}$ (et donc $n = 1$) et $a(t, x)$ et $b(t, x)$ sont deux constantes différentes de 0, tandis que $c(t, x) = d(t, x) = 0$, l'équation (1.1) se réduit à

$$a\partial_t f(t,x) + b\partial_x f(t,x) = 0. \tag{1.2}$$

supposant maintenant que $a \neq 0$, on pose $c = \frac{b}{a}$ pour obtenir

$$\partial_t f(t,x) + c\partial_x f(t,x) = 0. \tag{1.3}$$

comme pour les equations différentielles ordinaires il faut ajouter une condition initiale, c'est-à-dire à l'instant $t = 0$ on a

$$f(0,x) = \Phi(x). \tag{1.4}$$

supposons que f est une solution régulière de notre problème, cela signifie que f admet des dérivées partielles selon x et selon t et que ses dérivées partielles continues. On va monter que f est constante le long de certaines droites, appelées caractéristique.

Pour tout x, on pose

$$\Phi(x) = x - ct. \tag{1.5}$$

Alors ϕ est la droite de pente c qui passe par x. Soit $z = x - ct$, les derivées de ϕ s'ecrivent

$$\partial_x \phi(t,x) = \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial(x-ct)}{\partial x} = \frac{d\phi}{dz}. \tag{1.6}$$

$$\partial_t \phi(t,x) = \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial(x-ct)}{\partial t} = -c\frac{d\phi}{dz}. \tag{1.7}$$

d'ou

$$\partial_t f + c\partial_x f = -c\frac{d\phi}{dz} + c\frac{d\phi}{dz} = 0. \tag{1.8}$$

On peut remarquer d'aprés cette illustration, que toute fonction arbitraire $\phi(x-ct)$ est solution de l'équation (1.1).

Considérons maintenant l'equasion de transport (1.1) pour $(t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^3$; nous supposons que la fonction $a(t,x)$ est non nulle. Par conséquant dans le cas homogène à coefficient variable on obtient

$$\partial_t f(t,x) + v(t,x)\nabla_x \cdot f(t,x) = 0. \tag{1.9}$$

la dérivée totale de f dans la direction $v(t,x)$ est égale à 0, et donc la solution est constante dans cette direction.

1.2 Méthodes des caractéristiques

Dans cette partie, on donne quelques résultats sur les solutions des équations de transport linéaires à coefficients constants, puis variables. Plus que les resultats d'existence et d'unicité nous accordons d'avantage d'importance à la construction et à la forme des solutions. Ces résultats concernent des problèmes posés pour $x \in \mathbf{R}^3$.

Pour résoudre les équation aux derivées partielles d'ordre un, il existe une méthode systématique, la méthode des caractéristique, que nous allons présenter d'abord dans le cas où $c = d = 0$.

Soit $v \in \mathbf{R}^3$, considérons le problème de Cauchy homogène d'inconnue $f \equiv f(t,x)$ pour l'équation de transport, sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^3$

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^3 \\ f(0,x) = f^0(x), & x \in \mathbf{R}^3 \end{cases} \tag{1.1}$$

où la fonction $f^0(x)$ est une donnée initiale du problème.

On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^3$. D'autre part, si on considère $y \in \mathbf{R}^3$ et si on pose $\gamma(t) = y + tv$ pour $t \in \mathbf{R}_+$, alors γ peut être considérée comme une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^3$ et vérifie la relation

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = v.$$

Définition 1.2.1. L'ensemble $(t, \gamma(t))|t \in \mathbf{R}$ est un ensemble de droites de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^3$, appelées courbes caractéristiques issues de y, pour l'opérateur de transport $\partial_t + v \cdot \nabla_x$.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^3)$ solution de l'équation de transport, l'application $t \mapsto f(t, \gamma(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ (comme composée des applications f et $t \mapsto (t, \gamma(t))$, toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$), et on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(t,\gamma(t)) &= \partial_t f(t,\gamma(t)) + \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} f(t,\gamma(t)) \frac{d\gamma_k}{dt}(t) = \\ &= \partial_t f(t,\gamma(t)) + \sum_{k=1}^{3} v_k \partial_{x_k} f(t,\gamma(t)) = \\ &= (\partial_t f + v \cdot \nabla_x f)(t,\gamma(t)) = 0\end{aligned}$$

Ainsi, toute solution de classe $\mathcal{C}^1$ de l'équation de transport reste constante le long de chaque courbe caractéristique.

Théorème 1.2.1. *Soit $f^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^3)$, le problème de Cauchy* (1.1) *admet une unique solution $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^3)$, donnée par la formule*

$$f(t,x) = f^0(x - tv) \qquad \textit{pour tout} \quad (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^3.$$

Démonstration. Si f est une solution de classe $\mathcal{C}^1$ de l'équation (1.1), elle est constante le long des courbes caractéristiques, donc

$$f(t, y + tv) = f(0, y) = f^0(y), \qquad \text{pour tout} \quad t > 0, \quad y \in \mathbf{R}^3$$

En posant $y + tv = x$, on a

$$f(t,x) = f^0(x - tv), \qquad \text{pour tout} \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^3$$

Réciproquement, donc pour $f^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^3)$, l'aplication $(t,x) \mapsto f^0(x-tv)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^3$(comme composé des applications f^0 et $(t,x) \mapsto x - tv$ qui sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$). D'autre part on a

$$\nabla_x(f^0(x - tv)) = (\nabla f^0)(x - tv).$$

tandis que

$$\partial_t(f^0(x-tv)) = -\sum_{k=1}^{3} v_k(\partial_{x_k} f^0)(x - tv) =$$
$$= -v \cdot (\nabla f^0)(x - tv) = -v \cdot \nabla_x(f^0(x - tv)).$$

ce qui montre que la fonction $f : (t,x) \mapsto f^0(x - tv)$ est bien une solution de l'équation (1.1). $\square$

On considère maintenant le cas de l'équation de transport homogène où la vitesse varie en temps et en espace, on a alors

$$\begin{cases} \partial_t f + v(t,x) \cdot \nabla_x f = 0 \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^3 \\ f(0,x) = f^0(x), x \in \mathbf{R}^3 \end{cases} \tag{1.2}$$

où la fonction $f^0(x)$ est une donnée initiale du problème, ainsi que la donnée du champ de vitesse $v(t,x) : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ est lui aussi donné.

La technique qu'on utilise pour montrer le théorème d'existence et d'unicité pour l'équation de transport à vitesse constante peut être généralisé au cas où la vitesse n'est pas constante. On va définir maintenant les courbes caractéristique qui sont les solutions d'une l'équation différentielle ordinaire.

Définition 1.2.2. Les courbes caractéristiques de l'équation de transport (1.2) sont des solution X du système différentiel ordinaire (problème de Cauchy)

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = v(t, X(t)) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

En appliquant le théorème de dérivation des applications composées, pour x appartenant à une courbe caractéristique $X(t)$ on a

$$\frac{d}{dt}f(t, X(t)) = \partial_t f(t, X(t)) + \frac{dX}{dt} \cdot \nabla_x f(t, X(t)) = \tag{1.4}$$

$$= \partial_t f(t, X(t)) + v(t, x) \cdot \nabla_x f(t, X(t)) = 0$$

Ceci veut dire que les solutions sont constantes sur chaque caractéristiques. Pour l'étude des équations avec une vitesse variable, il suffit d'étudier l'équation différentielle ordinaire (1.3). Dans le théorème de Cauchy-Lipschitz on suppose les conditions pour l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle ordinaire, conditions qui sont considérées fondamentales et concernent, dans notre cas, en particulier $v(t, x)$. Dans la suite nous ferons l'hypothèse que ces conditions sont vérifiées, c'est-à-dire : v et $\nabla_x v$ sont continues sur $[0, T] \times \mathbf{R}^3$ et que v vérifie la condition de croissance

$$|v(t, x)| \leq c(|x| + 1), \quad c > 0, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}^3. \tag{1.5}$$

Si la solution du système (1.3) existe et unique, nous la noterons $X(t, t_0, x_0)$, on définit le flot caractéristique par l'application suivante :

$$X : [0, T] \times [0, T] \times \mathbf{R}^3 \longmapsto \mathbf{R}^3 \tag{1.6}$$

$$(s, t, x) \longmapsto X(s, t, x)$$

D'aprés le paragraphe précédent on a vu que le flot caractéristique respectait l'EDO (1.3) en variable s, i.e :

$$\frac{\partial X(s,t,x)}{\partial s} = v(s, X(s,t,x)) \tag{1.7}$$

On a le lemme technique suivant

Lemme 1.2.1. *Soient $T > 0$, v et $\nabla_x v$ sont continues sur $[0,T] \times \mathbf{R}^3$ et vérifiant la propriété de croissance* (1.5) *alors, $\forall t_1, t_2, t_3 \in [0,T]$, et $x \in \mathbf{R}^3$, on a*

$$X(t_3, t_1, x) = X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) \tag{1.8}$$

Le lemme suivant montre que le flot caractéristique est solution de l'équation de transport à vitesse variable

Lemme 1.2.2. *Le flot X vérifie l'équation de transport à vitesse variable*

$$\partial_t X(s,t,x) + v(t,x) \cdot \nabla_x X(s,t,x) = 0, \qquad 0 < s, \quad t < T, \quad x \in \mathbf{R}^3 \tag{1.9}$$

pour la solution générale de l'équation de transport, on a le théorème suivant

Théorème 1.2.2. *Pour toute fonction $f^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^3)$, le problème* (1.2) *admet une unique solution $f \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \mathbf{R}^3)$ sous la forme*

$$f(t,x) = f^0(X(0,0,x)), \quad \forall t \in [0,T], x \in \mathbf{R}^3 \tag{1.10}$$

où X est le flot caractéristique assoié à l'équation de transport.

Démonstration. Comme la fonction $t \longmapsto f(t, X(t,0,x))$ est constante d'aprés le lemme (1.2.2) on a

$$f(t, X(t,0,x)) = f(0, X(0,0,x)) = f^0(x), \ \forall t \in [0,T], x \in \mathbf{R}^3 \tag{1.11}$$

En posant $y = X(t,0,x)$ et d'aprés le lemme (1.2.1), on a $x = X(t,0,y)$ de sorte que (1.10) est équivalent à (1.11) la réciproque est verifié d'aprés le lemme (1.2.2).

Chapitre 2

Equation de la densité de la vapeur dans l'air

Dans ce chapitre nous allons rappeler la formulation de l'équation de la densité de la vapeur obtenue à partir d'un système d'équations modélisant le mouvement de l'atmosphère avec la transition de phase de l'eau ainsi que les propriétés fondamentales de cette équation ayant jamais de démontrer l'existenace d'une solution (voir [3][6]).

2.1 Formulation de l'équation

Pour établir l'équation de la densité $\pi = \pi(t, x)$ de vapeur (H_2O gazeux) dans l'air, on considère la variation par rapport au temps t de la masse totale de vapeur d'eau dans une région générique V_0, qui peut être exprimée par l'équation

$$\frac{d}{dt}\int_{V_0} \pi(t,x)dx = \int_{V_0} \partial_t \pi(t,x)dx. \tag{2.1}$$

Cette variation doit correspondre exactement à la différence de la masse qui entre dans V_0 et de celle qui sort de V_0 et à la différence de la quantité de

H_2O qui se transforme du liquide en gaz ou du gaz en liquide. Si on désigne par $H_{gl} = H_{gl}(t,x)$ la quantité totale de condensation ou d'évaporation dans l'unité de volume et de temps, on a

$$\frac{d}{dt}\int_{V_0} \pi(t,x)dx = -\int_{V_0} H_{gl}(t,x)dx - \int_{\partial V_0} v(t,x)\cdot n(x)\pi(t,x)dS, \tag{2.2}$$

où $n(x)$ désigne le vecteure unitaire de la normale extérieure à ∂V_0 et $v(t,x)$ est le vecteure vitesse de l'air, tandis que dS est l'élément de surface de ∂V_0. La quantité $v(t,x)\cdot n(x)\pi(t,x)dSdt$ sera donc la quantité de masse qui sort de V_0 passant par l'élément de surface dS et pendant le temps infinitésiimal dt. On en déduit que

$$\int_{V_0} \partial_t\pi(t,x)dx = -\int_{\partial V_0} v(t,x)\cdot n(x)\pi(t,x)dS - \int_{V_0} H_{gl}(t,x)dx. \tag{2.3}$$

D'autre part, grace à la formule de Stokes, on a

$$\int_{\partial V_0} v(t,x)\cdot n(x)\pi(t,x)dS = \int_{V_0} \nabla\cdot(\pi(t,x)v(t,x))dx. \tag{2.4}$$

Il s'ensuit que

$$\int_{V_0} \partial_t\pi(t,x)dx = -\int_{V_0} \nabla\cdot(\pi(t,x))v(t,x))dx - \int_{V_0} H_{gl}(t,x)dx \tag{2.5}$$

Et comme V_0 est arbitraire, donc on déduit que

$$\frac{\partial\pi}{\partial t} + \nabla\cdot(\pi v) = -H_{gl}(t,x) \tag{2.6}$$

pour comprendre la nature du terme $-H_{gl}$, nous rappelons sa forme proposée dans le modèle developpé dans [6](voir aussi[3]). Dans ce modèle on propose de déterminer la quantité totale (dans l'unité de volume et de temps) de H_2O qui se transforme du gaz au liquide.

2.2 Existence et unicité de la solution

Maintenant on va examiner l'equation de continuité de la vapeur d'eau (2.6), plus précisement celle de la solution π sous l'hypothèse que v soit donnée. L'équation (2.6) peut être résolue, en utilisant la méthode donnée dans le lemme suivant

Lemme 2.2.1. *Soit $p \geq 4$. Soit v une fonction satisfaisant à la condition*

$$v \in W_p^{2,1}(Q_{\bar{t}}), \qquad v = 0 \quad sur \quad \partial\Omega, \qquad Q_{\bar{t}} = \Omega \times [0, \bar{t}] \tag{2.1}$$

Soit la donnée $H_{gl} \in W_p^1(\Omega)$, alors l'équation (2.6)

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\pi v) = -H_{gl}(t, x), \tag{2.2}$$

avec la condition initiale

$$\pi(.,0) = \pi_0(.) \in W_p^1(\Omega), \quad \inf_{x \in \Omega} \pi_0(x) > 0, \tag{2.3}$$

admet une solution et une seule dans la classe

$$\pi \in \mathcal{C}^0([0, \bar{t}]; W_p^1(\Omega)). \tag{2.4}$$

En outre on a

$$\|\pi(t,.)\|^p_{W_p^1(\Omega)} \leq \tag{2.5}$$

$$\|\pi_0\|^p_{W_p^1(\Omega)} \exp(C \int_0^t (\|v\|_{W_p^2(\Omega)} + \|H_{gl}\|_{W_p^1(\Omega)} dt'))+$$

$$\int_0^t \|H_{gl}\|_{W_p^1(\Omega)} \exp(\int_{t'}^t C(\|v\|_{W_p^2(\Omega)} + \|H_{gl}\|_{W_p^1(\Omega)} dt'')dt')$$

rappelons la définition des espaces de sobolev $\|.\|_{W_p^{2,1}(Q_t)} = \|.\|_{L^p(0,t;W_p^2(\Omega))} + \|\partial_t.\|_{L^p(\Omega)}$. Le lemme (2.2.1) correspond au lemme (5.2) de [6], qui était un des lemmes pour un théorème concernant un système comprenant d'autres équations. Ici nous utilisons les conditions analogues sur p, q et sur H_{gl}

Démonstration. On a

$$\partial_t \pi + \nabla(\pi v) = -H_{gl}$$

donc

$$\partial_t \pi + v \cdot \nabla \pi = -\pi \nabla \cdot v - H_{gl} \tag{2.6}$$

Ce qui implique que

$$\frac{d\pi}{dt} = -\pi \nabla \cdot v - H_{gl}$$

alors sur chaque trajectoire $x(t)$, on va démontrer l'existence et l'unicité de la solution π, on obtient

$$\pi(t, x(t)) = \pi_0(x_0) e^{-\int_0^t \nabla \cdot v(t', x(t'))dt'} - \int_0^t H_{gl} e^{-\int_0^t \nabla \cdot v(t'', x(t''))dt''} dt'$$

on multiplie l'équation (2.6) par π^{p-1} et on integre sur Ω on a

$$\int_\Omega \pi^{p-1} \partial_t \pi dx + \int_\Omega \pi^{p-1}(v \cdot \nabla \pi) dx = -\int_\Omega \pi^p (\nabla \cdot v) dx - \int_\Omega \pi^{p-1} H_{gl} dx$$

d'autre part on a

$$\pi^{p-1} \partial_t \pi = \frac{1}{p} \partial_t \pi^p$$

donc

$$\int_\Omega \pi^{p-1} \partial_t \pi dx = \frac{1}{p} \int_\Omega \partial_t \pi^p dx = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_\Omega \pi^p dx =$$
$$= \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|\pi\|^p_{L^p(\Omega)}$$

$$\int_\Omega \pi^{p-1}(v \cdot \nabla \pi) dx = \int_\Omega \pi^{p-1} (\sum_{i=1}^{3} v_i \partial_i \pi) dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \pi^{p-1} v_i \partial_i \pi dx = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \pi^{p-1} \partial_i \pi v_i dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\left(\int_{\partial\Omega}\frac{\pi^p}{p}v_i n_i ds - \frac{1}{p}\int_{\Omega}\pi^p \partial_i v_i dx\right)$$

comme $v = 0$ sur $\partial\Omega$ donc $\sum_{i=1}^{3}(\int_{\partial\Omega}\frac{\pi^p}{p}v_i n_i ds) = 0$, alors

$$\int_{\Omega}\pi^{p-1}(v\cdot\nabla\pi)dx = -\frac{1}{p}\int_{\Omega}\pi^p(\nabla\cdot v)dx$$

on a

$$-\int_{\Omega}\pi^p(\nabla\cdot v)dx + \frac{1}{p}\int_{\Omega}\pi^p(\nabla\cdot v) - \int_{\Omega}\pi^{p-1}H_{gl}dx =$$

$$= \frac{1-p}{p}\int_{\Omega}\pi^p(\nabla\cdot v)dx - \int_{\Omega}\pi^{p-1}H_{gl}dx$$

alors on a

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\pi^p dx = \frac{1-p}{p}\int_{\Omega}\pi^p(\nabla\cdot v)dx - \int_{\Omega}\pi^{p-1}H_{gl}dx$$

Ce qui implique que

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\pi^p dx = (1-p)\int_{\Omega}\pi^p(\nabla\cdot v)dx - p\int_{\Omega}\pi^{p-1}H_{gl}dx$$

maintenant on applique l'inégalité de Hölder, ce qui donne

$$\frac{d}{dt}\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)} \leq |1-p|\int_{\Omega}|\pi^p(\nabla\cdot v)|dx +$$

$$+p(\int_{\Omega}(\pi^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}dx)^{\frac{p-1}{p}}(\int_{\Omega}(H_{gl})^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

$$\frac{d}{dt}\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)} \leq |1-p|\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)}\|\nabla\cdot v\|_{L^\infty(\Omega)} +$$

$$+p\|H_{gl}\|_{L^p(\Omega)}\|\pi\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}$$

alors

$$\frac{d}{dt}\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)} \leq |1-p|\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)}\|\nabla\cdot v\|_{L^\infty(\Omega)} +$$

$$+p\|H_{gl}\|_{L^\infty(\Omega)}(1+\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)})$$

car

$$\|\pi\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} \leq 1+\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)}$$

donc

$$\frac{d}{dt}\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)} \leq C\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)}\|\nabla\cdot v\|_{L^\infty(\Omega)}+$$

$$+C\|H_{gl}\|_{L^p(\Omega)}(1+\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)})$$

$$\leq C\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)}(\|\nabla\cdot v\|_{L^\infty(\Omega)}+\|H_{gl}\|_{L^p(\Omega)})+C\|H_{gl}\|_{L^p(\Omega)}$$

d'aprés l'inégalité de Sobolev, on aurra

$$\|\nabla\cdot v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\|\nabla\cdot v\|_{W^1_p(\Omega)} \leq c\|v\|_{W^2_p(\Omega)}$$

et comme $\|.\|_{L^p(\Omega)} \leq \|.\|_{W^1_p(\Omega)}$ on obtient

$$\frac{d}{dt}\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)} \leq c\|\pi\|_{W^1_p(\Omega)}[\|v\|_{W^2_p(\Omega)}+\|H_{gl}\|_{W^1_p(\Omega)}]+c\|H_{gl}\|_{W^1_p(\Omega)} \tag{2.7}$$

maintenant on applique ∇ à l'équation

$$\partial_t\pi+\nabla\cdot(\pi v) = -H_{gl}$$

on a

$$\nabla\partial t\pi+\nabla(\nabla\pi\cdot v)+\nabla(\pi\nabla\cdot v) = -\nabla(H_{gl}) \tag{2.8}$$

on multiplie l'équation (2.8) par $|\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi$, et en faisant l'integrale sur Ω on obtient

$$\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\cdot\nabla(\partial_t\pi)dx = -\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\cdot\nabla(\nabla\pi\cdot v)dx+$$

$$-\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\cdot\nabla(\pi\nabla\cdot v)dx - \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\cdot\nabla(H_{gl})dx$$

d'autre part

$$\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\cdot\nabla(\partial_t\pi)dx = \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-1}\frac{\nabla\pi\cdot\nabla(\partial_t\pi)}{|\nabla\pi|}dx =$$
$$= \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-1}\frac{\nabla\pi\cdot\partial_t(\nabla\pi)}{|\nabla\pi|}dx =$$
$$= \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-1}\partial_t(|\nabla\pi|)$$

et comme

$$|\nabla\pi|^{p-1}\partial_t(|\nabla\pi|) = \frac{1}{p}\partial_t|\nabla\pi|^p$$

donc

$$\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\cdot\nabla(\partial_t\pi)dx = \frac{1}{p}\int_\Omega \partial_t(|\nabla\pi|^p)dx =$$
$$= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\pi|^p dx = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\nabla\pi\|^p_{L^p(\Omega)},$$

on a aussi

$$\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\cdot[\nabla(\nabla\pi\cdot v)+\nabla(\pi\nabla\cdot v)]\,dx+$$
$$+\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\cdot\nabla(H_{gl})dx = \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{j,k=1}^{3}(\partial x_k)\times$$
$$\times[\partial_{x_k}(\partial_{x_j}\pi\cdot v_j)+\partial_{x_k}(\pi\partial_{x_j}v_j)]dx+$$
$$+\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{k=1}^{3}(\partial_{x_k}\pi)\partial_{x_k}H_{gl}dx =$$
$$= \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{j,k=1}^{3}(\partial_{x_k}\pi)(\partial_{x_k}\partial_{x_j}\pi)v_j dx+$$
$$+\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{j,k=1}^{3}(\partial_{x_k}\pi)(\partial_{x_j}\pi)\partial_{x_k}v_j dx+$$
$$+\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{k=1}^{3}(\partial_{x_k}\pi)(\partial_{x_k}\pi)(\nabla\cdot v)dx+$$

$$+\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{k=1}^{3}\pi(\partial_{x_k}\pi)(\partial_{x_k}\nabla\cdot v)dx+$$

$$+\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{k=1}^{3}(\partial_{x_k}\pi)(\partial_{x_k}H_{gl})dx$$

d'autre part

$$\sum_{k=1}^{3}\partial_{x_k}\pi(\partial_{x_k}) = |\nabla\pi|^2$$

donc

$\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\cdot[\nabla(\nabla\pi\cdot v)+\nabla(\pi\nabla\cdot v)]dx+\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\cdot\nabla H_{gl}dx =$

$$= \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{j,k=1}^{3}(\partial_{x_k})(\partial_{x_k}\partial_{x_j}\pi)v_j dx+$$

$$+\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{j,k=1}^{3}(\partial_{x_k}\pi)(\partial_{x_j}\pi)\partial_{x_k}v_j dx+$$

$+\int_\Omega |\nabla\pi|^{p}(\nabla\cdot v)dx+\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{k=1}^{3}\pi(\partial_{x_k}\pi)(\partial_{x_k}\nabla\cdot v)dx+$

$$+\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{k=1}^{3}(\partial_{x_k}\pi)(\partial_{x_k}H_{gl})dx$$

et comme

$$\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{j,k=1}^{3}(\partial_{x_k}\pi)(\partial_{x_k}\partial_{x_j}\pi)v_j dx =$$

$$= \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-1}\sum_{j,k=1}^{3}\frac{(\partial_{x_k}\pi)(\partial_{x_k}\partial_{x_j}\pi)v_j}{|\nabla\pi|}dx$$

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \nabla(|\nabla\pi|^p)\cdot v dx = -\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla\pi|^p\nabla\cdot v dx$$

donc on aurra

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\pi|^p dx = -\frac{p-1}{p}\int_\Omega |\nabla\pi|^p\nabla\cdot v dx+$$

$$-\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{j,k=1}^{3}(\partial_{x_k}\pi)(\partial_{x_j}\pi)(\partial_{x_k}v_j)dx+$$

$$-\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{k=1}^{3}\pi(\partial_{x_k}\pi)(\partial_{x_k}\nabla\cdot v)dx+$$

$$-\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\cdot\nabla H_{gl}dx$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\nabla\pi\|^p_{L^p(\Omega)} \le \frac{|p-1|}{p}\|\nabla\pi\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\|\nabla\cdot v\|_{L^\infty(\Omega)}+$$

$$+\|\nabla(\nabla\cdot v)\|_{L^p(\Omega)}\|\nabla\pi\|^{p-2}_{L^p(\Omega)}\|\nabla\pi\|_{L^p(\Omega)}\|\pi\|_{L^\infty(\Omega)}+$$

$$+\|\nabla\pi\|^{p-2}_{L^p(\Omega)}\|\nabla\pi\|_{L^p(\Omega)}\|\nabla\pi\|_{L^p(\Omega)}\sum_{j,k=1}^{3}\|\partial_{x_k}v_j\|_{L^\infty(\Omega)}+$$

$$+\|\nabla\pi\|^{p-2}_{L^p(\Omega)}\|\nabla\pi\|_{L^p(\Omega)}\|\nabla H_{gl}\|_{L^p(\Omega)}$$

si on applique l'inégalité de sobolev

$$\|\nabla\cdot v\|_{L^\infty(\Omega)} \le c\|v\|_{W^2_p(\Omega)}$$

on obtient

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\pi\|^p_{L^p(\Omega)} \le$$

$$c[3\|v\|_{W^2_p(\Omega)}\|\pi\|^p_{W^1_p(\Omega)} + \|H_{gl}\|_{W^1_p(\Omega)}\|\pi\|^{p-1}_{W^1_p(\Omega)}]$$

d'aprés l'inégalité

$$\|\pi\|^{p-1}_{W^1_p(\Omega)} \le (1+\|\pi\|^p_{W^1_p(\Omega)})$$

on aura

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\pi\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \tag{2.9}$$

$$\leq C\|\pi\|^p_{W^2_p(\Omega)}[\|v\|_{W^2_p(\Omega)} + \|H_{gl}\|_{W^1_p(\Omega)}] + C\|H_{gl}\|_{W^1_p(\Omega)}$$

En adjoignant les inégalité (2.7)et(2.9), on a

$$\frac{d}{dt}\|\pi\|^p_{W^1_p(\Omega)} \leq$$

$$\leq C\|\pi\|^p_{W^1_p(\Omega)}[\|v\|_{W^2_p(\Omega)} + \|H_{gl}\|_{W^1_p(\Omega)}] + C\|H_{gl}\|_{W^1_p(\Omega)}$$

et par hypothèse que $\pi_0 \in W^1_p(\Omega)$, on déduit que

$$\|\pi(t,.)\|^p_{W^1_p(\Omega)} \leq \tag{2.10}$$

$$\|\pi_0\|^p_{W^1_p(\Omega)} \exp(C\int_0^t (\|v\|_{W^2_p(\Omega)} + \|H_{gl}\|_{W^1_p(\Omega)}dt'))+$$

$$\int_0^t \|H_{gl}\|_{W^1_p(\Omega)} \exp(\int_{t'}^t C(\|v\|_{W^2_p(\Omega)} + \|H_{gl}\|_{W^1_p(\Omega)}dt'')dt')$$

$\square$.

Chapitre 3

Estimations dans la classe L^∞

Dans ce chapitre on va étudier l'équation (2.6) dans une topologie plus forte(classe des fonctions lipschitziennes). Ce résultat est essentiellement dû à Ascoli et Selvaduray [6]. Toutefois dans [6] les arguments sont présentés avec une équation d'une forme plus générale et beaucoup de remarques qui ne concernent pas notre équation. Pour cette raison dans notre travail nous présentons directement les résultats qui concernent notre équation.

3.1 Résultat principal

Nous considérons l'equation (2.6)

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\pi v) = -H_{gl}$$

dans un domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ avec la condition initiale

$$\pi(0,.) = \pi_0 \qquad dans \qquad \Omega \tag{3.1}$$

nous supposons que Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^3$ muni d'une frontière régulière et que

$$n \cdot v = 0 \qquad \text{sur} \qquad \partial\Omega \tag{3.2}$$

où n est la vecteur normal extérieur unitaire.

Lemme 3.1.1. *Soit π la solution du problème* (2.6)-(3.1). *Alors l'inégalité*

$$\|\pi(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq e^{\int_0^t \|\nabla\cdot v(t')\|_{L^\infty(\Omega)}dt'}(\|\pi_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t \|H_{gl}(t')\|_{L^\infty(\Omega)}dt') \qquad (3.3)$$

est vérifiée pour presque tout $t \in [0, \bar{t}]$.

Démonstration. Avant de démontrer le lemme (3.1.1), nous présentons le lemme de caractère général.

On considère le problème de Cauchy pour l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}z(t,x) + b(t,x)\cdot\nabla z(t,x) + c(t,x)z(t,x) = f(t,x) \qquad (3.4)$$

dans $Q_{\bar{t}} = [0, \bar{t}] \times \Omega$ avec la condition initiale

$$z(.,0) = z_0 \qquad sur \quad \Omega \qquad (3.5)$$

Lemme 3.1.2. *On suppose que $b \in L^1(Q_{\bar{t}}; \mathbf{R}^3)$, $\nabla\cdot b \in L^1(Q_{\bar{t}})$, c, $f \in L^1(0,\bar{t}; L^\infty(\Omega))$, $z_0 \in L^\infty(\Omega)$ et que $n\cdot b = 0$ presque partout sur $\partial\Omega$ pour presque tout $t \in]0,\bar{t}[$. Alors il existe une solution faible z du proplème de Cauchy* (3.4)-(3.5) *telle que l'inégalité*

$$\|z(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq e^{\int_0^t \|c(t')\|_{L^\infty(\Omega)}dt'}(\|z_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t \|f(t')\|_{L^\infty(\Omega)}dt') \qquad (3.6)$$

soit vérifiée pour presque tout $t \in [0,\bar{t}]$. En outre, si f et z_0 sont non-négatives alors z l'est aussi.

Démonstration. Il est clair qu'on peut étendre b, c, f sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ de telle sorte que ces fonctions restent à support compact dans $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ et que $b \in L^1(\mathbf{R}; L^1(\mathbf{R}^3;\mathbf{R}^3))$, $\nabla\cdot b \in L^1(\mathbf{R}; L^1(\mathbf{R}^3))$, c, $f \in L^1(\mathbf{R}; L^\infty(\mathbf{R}^3))$; il est également facile d'étendre z_0 de telle sorte qu'elle reste à support compact dans $\mathbf{R^3}$ et que $z_0 \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$. Cette extention ne rencontre aucune diffuculté tant que les espaces fonctionnels auxquels elles doivent appartenir n'exigent pas de régularité particulière et donc en dehors de Ω nous pouvons choisir $b = 0$, $c = f = 0$ et $z_0 = 0$.

Soit $\vartheta_1(t)$ une fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ telle que $\vartheta_1(t) = 0$ pour $|t| \geq 1$, $\vartheta_1(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ et $\int_{\mathbf{R}} \vartheta_1(t)dt = 1$. On pose

$$\vartheta_k(t) = k\vartheta_1(kt) \qquad (k \geq 1).$$

De maniére analyse on considère une fonction $\xi_1(x)$ de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^3)$ telle que $\xi(x) = 0$ pour $|x| \geq 1$, $\xi_1(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R^3}$ et $\int_{\mathbf{R}} \xi_1(x)dx = 1$. On pose

$$\xi_k(x) = k^3\xi_1(kx) \qquad (k \geq 1).$$

nous rappelons maintenant que les suites $\{\vartheta_k(t)\}_{k=1}^\infty$ et $\{\xi_k(t)\}_{k=1}^\infty$ constituent des suites régularisantes utilisées habituellement. On pose que $\eta_k(t,x) = \vartheta_k(t)\xi_k(x)$. Nous allons utiliser les fonctions régularisées

$$b_k = b * \eta_k; \quad c_k = c * \eta_k, f_k = f * \eta_k; z_0^k = z_0 * \xi_K$$

il est clair que ces fonctions sont à support compact, et $*$ désigne la convolution.

Soit z^k la solution du problème de Cauchy dans $\mathrm{R} \times \mathrm{R}^3$ pour l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} z^k(t,x) + b_k(t,x) \cdot \nabla z^k(t,x) + c_k(t,x)z^k(t,x) = f_k(t,x) \tag{3.7}$$

avec la condition initiale sur $\mathbf{R}^3$

$$z^k(.,0) = z_0^k \tag{3.8}$$

z^k on peut être obtenue en intégrant le long des caractéristiques de sorte si z_0, f sont non-négatif, alors z^k l'est aussi. On va démontrer maintenat l'inégalité

$$\|z^k(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \leq$$

$$e^{\int_0^t \|c(t')\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)}dt'}(\|z_0^k\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} + \int_0^t \|f_k(t')\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)}dt')$$

la méthode fondamental pour résoudre ce type d'équation est celle des caractéristiques pour tout $x \in \mathbf{R}^3$, la courbe caractéristique pour l'opérateur de transport $\partial_t + b_k\nabla_x$ est

$$\{(t, (\gamma(t)))|t \geq 0\} \qquad \text{où} \qquad \frac{d}{dt}\gamma(t) = b_k(t, \gamma(t))$$

et avec la condition initial$\gamma(0) = x_0$, on a

$$\gamma(t) = x_0 + \int_0^t b_k(s, \gamma(s))ds$$

si $z^k \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^3)$ est solution de l'équation de transport la fonction $t \longmapsto z^k(t, \gamma(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ et vérifie

$$\frac{d}{dt}z^k(t, \gamma(t)) = (\partial_t + b_k \cdot \nabla)z^k(t, \gamma(t))$$

$$= f_k(t, \gamma(t)) - c_k(t, \gamma(t))z^k(t, \gamma(t)) \qquad t > 0$$

on obtient l'équation différentielle ordinaire suivant

$$\frac{d}{dt}z^k(t) + c_k(t)z^k(t) = f_k(t)$$

$$z^k(0) = z_0^k$$

on sait que la solution de cette equation est

$$z^k(t) = z_0^k e^{-\int_0^t c_k(t')dt'} + \int_0^t e^{-\int_0^t c_k(t')dt'} f_k(t'')dt''$$

maintenat on appliquons cela à la solution z^k de l'équation de transport le long de la courbe caractéristique, on trouve que

$$z^k(t,\gamma(t)) = z_0^k(\gamma(t))e^{-\int_0^t c_k(t',\gamma(t))dt'} + \int_0^t e^{-\int_0^t c_k(t,\gamma(t))dt'} f_k(t',\gamma(t))dt''$$

donc on a

$$|z^k(t,x)| \leq |z_0^k(\gamma(t))|e^{\int_0^t |c_k(t',\gamma(t'))|dt'} + \int_0^t e^{\int_0^t |c_k(t',\gamma(t'))|dt'}|f_k(t',\gamma(t'))|dt''$$

$$\leq \|z_0^k\|_{L^\infty(\Omega)} e^{\int_0^t \|c_k\|_{\infty(\Omega)}dt'} + + \int_0^t e^{\int_0^t \|c_k\|_{\infty(\Omega)}dt'} \|f_k\|_{\infty(\Omega)}$$

$$\int_0^t \|c_k(t')\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)}dt' \leq \int_0^t \| \int_{\mathbf{R}} \vartheta_k(t')c(t'-t'')dt''\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)}dt'$$

$$\int_0^t \int_{\frac{-1}{k}}^{\frac{1}{k}} \vartheta_k(t'')\|c(t'-t'')\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)}dt''dt'$$

$$\leq \int_{\frac{-1}{k}}^{\frac{1}{k}} \vartheta_k(t'') \int_{\frac{-1}{k}}^{\frac{1}{k}} \vartheta_k(t'') \int_{\frac{-1}{k}}^{t+\frac{1}{k}} \|c(t')\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)}dt'dt''$$

et que

$$\|z_0^k\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \leq \|z_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)}$$

donc on déduit que

$$\|z^k(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \leq e^{\int_{\frac{-1}{k}}^{t+\frac{1}{k}} \|c(t')\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)}dt'} (\|z_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} + \int_{\frac{-1}{k}}^{t+\frac{1}{k}} \|f(t')\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)}dt')$$

où

$$\|z^k(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} \leq C_1$$

$$C_1 = e^{\int_{-1}^{t+1} \|c(t')\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)}dt'} (\|z_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)} + \int_{-1}^{t+1} \|f(t')\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)}dt')$$

cette relation implique qu'il existe une sous-suite z^{k_i} de z^k, qui converge faiblement vers une fonction z dans la topologie de $L^\infty(]0,\bar{t}[;L^\infty(\mathbf{R}^3))$ quand

$k_i \to \infty$, d'aprés les inégalités utilisées ci-dessus en faisant tendre k vers ∞. Puisque z^k est une solution faible du problème de Cauchy donc pour tout $\varphi \in L^\infty(]0,\bar{t}[; W^1_\infty(\Omega)) \cap W^1_1(]0,\bar{t}[; L^\infty(\Omega))$ et à support compact, on a

$$\int_0^{\bar{t}} dt \int_{\mathbf{R}^3} [z^k(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + b_k \cdot \nabla\varphi + (\nabla \cdot b_k)\varphi - c_k\varphi) + f_k\varphi]dx = \tag{3.9}$$

$$= - \int_{\mathbf{R}^3} z_0^k \varphi(0,.)dx$$

et comme, pour $k \longmapsto \infty$, les fonctions b_k, $\nabla \cdot b_k$, c_k, f_k et z_0^k tendent fortement dans la norme de L^1 vers b et $\nabla \cdot b$, c, f et z_0 respectivement, il résulte que z satisfait à

$$\int_0^{\bar{t}} dt \int_\Omega [z(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + b \cdot \nabla\varphi + (\nabla \cdot b)\varphi - c\varphi) + f\varphi]dx = \tag{3.10}$$

$$= - \int_\Omega z_0 \varphi(0,.)dx$$

donc z est une solution faible du problème de Cauchy (3.4)-(3.5). Nous entendons par solution faible une fonction $z \in L^\infty(Q_{\bar{t}})$ telle que (3.10) est vérifiée pour toute fonction $\varphi \in C_c^{0,1}(Q_{\bar{t}})$.

□

Démonstration de Lemme. En substituant $b = v$, $c = \nabla_x \cdot v$, $f = -H_{gl}$ et $z_0 = \pi_0$, $z = \pi$ dans l'inégalité (3.6), on obtient (3.3).

Le lemme est démontre. □

Chapitre 4

Estimations de la solution avec la condition d'entrée

Dans ce chapitre nous allons établir une estimation de la solution de l'équation de la densité de la vapeur avec la condition d'entrée. Nous allons suivre le même schéma de raissonnement du chapitre précédent, mais la condition d'entrée exige une élaboration bien raffinée du traitement des données de l'entrée de la vapeur.

4.1 Position du problème

Soit Ω un sous ensemble ouvert borné de $\mathbf{R}^3$ muni d'une frontière $\partial\Omega$ de classe C^2. On considère un champ de vitesse $v = v(t,x)$ défini pour $t \geq 0$, $x \in \Omega$. Ici nous ne supposons pas que la composante normale de v sur la frontière de Ω s'annule. En effet nous définissons la partie entrante

$$\Gamma_-(t) = \{x \in \partial\Omega | n(x) \cdot v(t,x) < 0\}, \tag{4.1}$$

où $n(x)$ désigne le vecteur normal orienté vers l'extérieur à la frontière $\partial\Omega$ au point $x \in \partial\Omega$; la partie entrante $\Gamma_-(t)$ de la frontière Γ généralement dépend de t. D'autre part pour la partie sortante, on pose

$$\Gamma_+ = \partial\Omega \backslash \Gamma_- = \{x \in \partial\Omega | n(x) \cdot v(t,x) \geq 0\} \tag{4.2}$$

Nous considérons l'équation

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\pi v) = -H_{gl} \tag{4.3}$$

dans le domaine $\mathbf{R}_+ \times \Omega$ avec la condition initiale

$$\pi(0,\cdot) = \pi_0 \qquad \text{sur} \qquad \Omega \tag{4.4}$$

et la condition aux limites (c'est-à-dire condition d'entrée),

$$\pi(t,x) = \pi_1 \qquad \text{sur} \qquad \mathbf{R}_+ \times \Gamma_-. \tag{4.5}$$

On suppose que dans l'équation (4.3) v, H_{gl} sont données et que

$$v \in L^q(0,\bar{t}; W^1_\infty(\Omega, \mathbf{R}^3)), \quad \nabla \cdot v \in L^q(0,\bar{t}; W^1_\infty(\Omega)), \quad H_{gl} \in L^q(0,\bar{t}; W^1_\infty(\Omega)), \tag{4.6}$$

où $1 \leq q \leq \infty$.

On suppose en outre que

$$\sup_{x\in\Omega} |\partial_{x_i} v_j(t,x)| = \|\partial_{x_i} v_j(t,.)\|_{L^\infty} \qquad i,j = 1,2,3, \tag{4.7}$$

$$\sup_{x\in\Omega} |\partial_{x_i} (\nabla \cdot v)(t,x)| = \|\partial_{x_i} (\nabla \cdot v)\|_{L^\infty} \qquad i = 1,2,3, \tag{4.8}$$

$$\sup_{x\in\Omega} |\partial_{x_i} H_{gl}(t,x)| = \|\partial_{x_i} H_{gl}\|_{L^\infty} \qquad i = 1,2,3, \tag{4.9}$$

pour presque tout t.

Le résultat principal de notre étude est la proposition suivante

Proposition 4.1.1. *Soit π la solution de l'équation (4.3) avec les conditions (4.4),(4.5). Si v et H_{gl} vérifant les conditions (4.6)-(4.9), alors on a*

$$\|\nabla\pi\|^2_{L^\infty(Q_{\bar{t}})} \leq \max(A, \sup_{0\leq t\leq \bar{t}} B(t)), \tag{4.10}$$

où

$$A = \|\nabla\pi_0\|^2_{L^\infty} e^{\int_0^{\bar{t}}(2\omega(t')+1)dt'} +$$
$$+ \int_0^{\bar{t}} \sum_{i=1}^{3} (\partial_{x_i} H_{gl} + \pi\partial_{x_i}(\nabla\cdot v))^2 e^{\int_{t'}^{\bar{t}}(2\omega(t'')+1)dt''} dt',$$
$$B(t) = \|\nabla\pi(t,.)\|^2_{L^\infty(\Gamma_-(t))} e^{\int_t^{\bar{t}}(2\omega(t')+1)dt'} +$$
$$+ \int_t^{\bar{t}} \sum_{i=1}^{3} (\partial_{x_i} H_{gl} + \pi\partial_{x_i}(\nabla\cdot v))^2 e^{\int_{t'}^{\bar{t}}(2\omega(t'')+1)dt''} dt',$$
$$\omega(t) = \sup_{x\in\Omega} \sup_{\xi\in\mathbf{R}^3,|\xi|=1} \sum_{i,j=1}^{3} (-\delta_{ij}(\nabla\cdot v(t,x)) - \partial_{x_i} v_j(t,x))\xi_i\xi j.$$

Démonstration. Réécrivons l'équation (4.3) dans la forme

$$\partial_t\pi + \pi\nabla\cdot v + v\cdot\nabla\pi = -H_{gl}.$$

Si on dérive par rapport à x les deux parties de cette équation, on a

$$\partial_t\partial_{x_i}\pi + \partial_{x_i}(\pi\nabla\cdot v) + \partial_{x_i}(v\cdot\nabla\pi) = -\partial_{x_i}(H_{gl}),$$

ou

$$\partial_t\partial_{x_i}\pi + v\cdot\nabla\partial_{x_i}\pi + (\nabla\cdot v)\partial_{x_i}\pi = -\partial_{x_i}H_{gl} - \sum_{j=1}^{3}(\partial_{x_i}v_j)\cdot\partial_{x_j}\pi - \pi\partial_{x_i}(\nabla\cdot v). \tag{4.11}$$

Si on pose $w_i = \partial_{x_i}\pi = \frac{\partial\pi}{\partial x_i}$, l'équation (4.11) se transforme en

$$\partial_t w_i + v\cdot\nabla w_i + (\nabla\cdot v)w_i = -\partial_{x_i}H_{gl} - \sum_{j=1}^{3}(\partial_{x_i}v_j\cdot w_j) - \pi\partial_{x_i}(\nabla\cdot v). \tag{4.12}$$

Supposons que w_i est une solution faible de cette equation (4.12) avec la condition initiale

$$w_i|_{t=0} = \partial_{x_i}\pi_0. \tag{4.13}$$

Nous réécrivons l'équation (4.12) sur les caractéristiques γ. En dénotant toujours par t le temps, on a

$$\frac{d}{dt}w_i + \sum_{j=1}^{3}(\delta_{ij}(\nabla\cdot v) + \partial_{x_i}v_j)w_j = -\partial_{x_i}H_{gl} - \pi\partial_{x_i}(\nabla\cdot v) \tag{4.14}$$

sur chaque caractéristique γ.
Ici les termes $\delta_{ij}\nabla\cdot v + \partial_{x_i}v_j$, $-\partial_{x_i}H_{gl}$, $-\pi\partial_{x_i}(\nabla\cdot v)$ sont à considérer comme fonctions données et les dérivées partielles dans ces termes sont relatives aux coordonnées (x_1, x_2, x_3) de l'espace original (c'est-à-dire, la considération de l'équation sur les caractéristiques γ ne modifie pas les dérivées par rapport aux x_1, x_2, x_3).

On pose

$$W(t) = \sum_{i=1}^{3} w_i(t)^2$$

En multipliant les deux membres de (4.14) par w_i et en faisant la somme de ces équations, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}W(t) = -\sum_{i,j=1}^{3}(\delta_{ij}(\nabla\cdot v) + \partial_{x_i}v_j)w_iw_j - \sum_{i=1}^{3}w_i\partial_{x_i}H_{gl} + \tag{4.15}$$

$$-\sum_{i=1}^{3}\pi w_i\partial_{x_i}(\nabla\cdot v)$$

Si on pose

$$\omega_\gamma(t) = \sup_{\xi\in\mathbf{R}^3, |\xi|=1}\sum_{i,j=1}^{3}(-\delta_{ij}(\nabla\cdot v) - \partial_{x_i}v_j)\xi_i\xi j,$$

on déduit de (4.15) que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}W(t) \leq \omega_\gamma(t)W(t) - \sum_{i=1}^{3} w_i(\partial_{x_i} H_{gl} + \pi\partial_{x_i}(\nabla \cdot v)) \tag{4.16}$$

$$\leq (\omega_\gamma(t) + \frac{1}{2})W(t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(\partial_{x_i} H_{gl} + \pi\partial_{x_i}(\nabla \cdot v))^2$$

De (4.16) on déduit que, sur chaque caractéristique γ qui part de l'intérieure de Ω à l'instant $t = 0$ (c'est-à-dire $\gamma(0) \in \Omega$) on a

$$W(t) \leq W(0)e^{\int_0^{\bar{t}}(2\omega_\gamma(t')+1)dt'} + \int_0^{\bar{t}}\sum_{i=1}^{3}(\partial_{x_i} H_{gl} + \pi\partial_{x_i}(\nabla \cdot v))^2 e^{\int_{t'}^{\bar{t}}(2\omega(t'')+1)dt''}dt'.$$

On substitue maintenant W par sa valeur $\sum_{i=1}^{3} w_i$, on aura

$$\sum_{i=1}^{3}(w_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{3}(w_i(0))^2 e^{\int_0^{t}(2\omega_\gamma(t')+1)dt'} + \int_0^{\bar{t}}\sum_{0}^{\bar{t}}(\partial_{x_i} H_{gl}+\pi\partial_{x_i}(\nabla\cdot v))^2 e^{\int_{t'}^{\bar{t}}(2\omega_\gamma(t'')+1)dt''}dt'$$

donc on a

$$\sum_{i=1}^{3}(\partial_{x_i}\pi)^2 \leq \sum_{i=1}^{3}(\partial_{x_i}\pi(0))^2 e^{\int_0^{t}(2\omega_\gamma(t')+1)dt'} + \int_0^{\bar{t}}\sum_{i=1}^{3}(\partial_{x_i} H_{gl}+\pi\partial_{x_i}(\nabla\cdot v))^2 e^{\int_{t'}^{\bar{t}}(2\omega_\gamma(t'')+1)dt''}dt'$$

alors

$$\sum_{i=1}^{3}|\partial_{x_i}\pi|^2 \leq \sum_{i=1}^{3}|\partial_{x_i}\pi(0)|^2 e^{\int_0^{t}(2\omega_\gamma(t')+1)dt'} + \int_0^{\bar{t}}\sum_{i=1}^{3}(\partial_{x_i} H_{gl}+\pi\partial_{x_i}(\nabla\cdot v))^2 e^{\int_{t'}^{\bar{t}}(2\omega_\gamma(t'')+1)dt''}dt'$$

$$|\nabla\pi|^2 \leq |\nabla\pi(0)|^2 e^{\int_0^{t}(2\omega_\gamma(t')+1)dt'} + \int_0^{\bar{t}}\sum_{i=1}^{3}(\partial_{x_i} H_{gl}+\pi\partial_{x_i}(\nabla\cdot v))^2 e^{\int_{t'}^{\bar{t}}(2\omega_\gamma(t'')+1)dt''}dt' \tag{4.17}$$

d'autre part sur chaque carctéristique γ qui part de Γ_- à un instant $s \geq 0$ (c'ext-à-dire $\gamma(s) \in \Gamma_-$, $0 \leq s \leq \bar{t}$), on a

$$W(t) \leq W(s)e^{\int_s^{\bar{t}}(2\omega_\gamma(t')+1)dt'} + \int_s^{\bar{t}}\sum_{i=1}^{3}(\partial_{x_i} H_{gl} + \pi\partial_{x_i}(\nabla \cdot v))^2 e^{\int_{t'}^{\bar{t}}(2\omega_\gamma(t'')+1)dt''}dt'$$

on aurra donc

$$\sum_{i=1}^{3}(w_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{3}(w_i(s))^2 e^{\int_s^{\bar{t}}(2\omega_\gamma(t')+1)dt'} + \int_s^{\bar{t}} \sum_{i=1}^{3}(\partial_{x_i}H_{gl}+\pi\partial_{x_i}(\nabla\cdot v))^2 e^{\int_{t'}^{\bar{t}}(2\omega_\gamma(t'')+1)dt''}dt'$$

$$\sum_{i=1}^{3}(\partial_{x_i}\pi)^2 \leq \sum_{i=1}^{3}(\partial_{x_i}\pi(s,x))^2 e^{\int_s^{\bar{t}}(2\omega_\gamma(t')+1)dt'} + \int_s^{\bar{t}} \sum_{i=1}^{3}(\partial_{x_i}H_{gl}+\pi\partial_{x_i}(\nabla\cdot v))^2 e^{\int_{t'}^{\bar{t}}(2\omega_\gamma(t'')+1)dt''}dt'$$

ainsi

$$\sum_{i=1}^{3}|\partial_{x_i}\pi|^2 \leq \sum_{i=1}^{3}|\partial_{x_i}\pi(s,x)|^2 e^{\int_s^{\bar{t}}(2\omega_\gamma(t')+1)dt'} + \int_s^{\bar{t}} \sum_{i=1}^{3}(\partial_{x_i}H_{gl}+\pi\partial_{x_i}(\nabla\cdot v))^2 e^{\int_{t'}^{\bar{t}}(2\omega_\gamma(t'')+1)dt''}dt'$$

$$|\nabla\pi|^2 \leq |\nabla\pi(s,x)|^2 e^{\int_s^{\bar{t}}(2\omega_\gamma(t')+1)dt'} + \int_s^{\bar{t}} \sum_{i=1}^{3}(\partial_{x_i}H_{gl}+\pi\partial_{x_i}(\nabla\cdot v))^2 e^{\int_{t'}^{\bar{t}}(2\omega_\gamma(t'')+1)dt''}dt'$$

$$\leq \sup_{0\leq s\leq\bar{t}} \|\nabla\pi(s,x)\|^2 e^{\int_s^{\bar{t}}(2\omega_\gamma(t')+1)dt'} + \int_s^{\bar{t}} \sum_{i=1}^{3}(\partial_{x_i}H_{gl}+\pi\partial_{x_i}(\nabla\cdot v))^2 e^{\int_{t'}^{\bar{t}}(2\omega_\gamma(t'')+1)dt''}dt'$$

on déduit donc que

$$\|\nabla\pi\|^2_{L^\infty(Q_{\bar{t}})} \leq \max\left\{ \|\nabla\pi(0)\|^2_{L^\infty(\Omega)} e^{\int_0^t(2\omega_\gamma(t')+1)dt'} + \int_0^{\bar{t}} \sum_{i=1}^{3}(\partial_{x_i}H_{gl}+\pi\partial_{x_i}(\nabla\cdot v))^2 \right.$$

$$e^{\int_{t'}^{\bar{t}}(2\omega_\gamma(t'')+1)dt''}dt',\ \sup_{0\leq s\leq\bar{t}} \|\nabla\pi(s,x)\|^2_{L^\infty(\Gamma_-(t))} e^{\int_s^{\bar{t}}(2\omega_\gamma(t')+1)dt'} +$$

$$\left. \int_s^{\bar{t}} \sum_{i=1}^{3}(\partial_{x_i}H_{gl}+\pi\partial_{x_i}(\nabla\cdot v))^2 e^{\int_{t'}^{\bar{t}}(2\omega_\gamma(t'')+1)dt''}dt' \right\}$$

Perspectives

Une perspective particulièrement intéressante sera celle de résoudre le système d'équations non-linéaires des densités de la vapeur, de l'air sec, de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes et de l'eau solidifiée contenue dans les morceaux de glace suspendus dans l'air, sytème d'équations avec la condition d'entrée, ce qui consistuerait la généralisation du résultat du travail d'Ascoli et Selvaduray [1]. Si on réussit à résoudre ce problème, ça ouvre une voie vers la résolution du système d'équations d'un modèle général du mouvement de l'atmosphère avec la transition de phase de l'eau proposé dans [6]. Dans [6] les auteurs ont suposé l'entrée nulle pour les ensités et modifié le système d'équations par la substitution de π par sa moyenne locale pour éviter les difficultés. Notre tâche sera donc d'éliminer cette approximation par la moyenne locale et de retourner aux équations exactes et de poser le problème même avec la condition d'entrée.

Naturellement cette étude exigera beaucoup de nouvelles techniques et de nouvelles argumentations. Toutefois pour ce problème l'estimation dans L^∞ du gradien de π devra être cruciale. Pour cela on peut espérer que les résultats obtenus et les techniques développées dans le présent travail pourront contribuer d'une manière non indifférente à la recherche sur le système d'équations des densités de la vapeur, de l'air sec, de l'eau liquide et de l'eau solidifiée dans l'air même avec la condition d'entrée et sur le système d'équations d'un modèle général du mouvement de l'atmosphère avec la transition de phase de l'eau.

Bibliographie

[1] D.Ascoli, S.C.Selvaduray : *Wellposedness in the lipschitz class for a quasi-lineair hyperbolic system arising from a model of the atmosphere including water phase transitions.* Nonlinear Differ. equ. Appl. 21 (2014), pp 263-287.

[2] G.Allaire, F.Golse : *Transport et diffusion (MAT/MAP 567).* Ecole polytechnique (cinquième édition).03 décembre 2013.

[3] H.Fujita Yashima : *Modilisation de la physique des fluides.* Cours de l'université de Guelma 2009-2010.

[4] H.Fujita Yashima : *Fluides Newtonies*, Cours de l'université de Guelma, 2009-2010.

[5] Smironov, *V.Cours de mathématiques supérieures(tome 5,dexième partie).*(traduit du Russe).Editions Mir.Moscou,1984.

[6] Selvaduray.S.C,H.Fujita Yashima : *Equazioni del moto dell'aria con la transitione di fase dell'acqua nei tre stati :gassoso, liquido,solido.* Acc.Sc. Torino. Memorie Sc.Fis. 35 (2011).

[7] S.Barkache : *Equations de transport dans la mécanique des fluides*, Mémoire de master, Université de Guelma.18 juin 2014.