République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématiques Appliquées**

Par :

Mr.Islam Dahmoun

Intitulé

Estimateur d'erreur a posteriori du fonction de Laplace

Dirigé par : Dr. M. Tabouche

Devant le jury

PRESIDENT	Mr. R. Chaoui	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Mme. M . Tabouche	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Mr. K. Fernane	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2015

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à la lumière de ma vie : mes très chers parents :

A le plus merveilleux père dans le monde, mon père Mohamed, ma source de sécurité et de patience qui ma tous donnée sans rien recevoir en parallèle. A qui je dois mon devenir, mon savoir, mon éducation, et qui n'a cesse à une époque de m'inculquer les vrais valeurs de la vie, le sérieux et la rigueur. A cet homme que je respecte très énormément, je te remercie infiniment papa pour tes sacrifices et je te dis je t'aime beaucoup.

Que dieu te protège et te garde pour nous.

A la plus précieuse mère dans le monde, ma mère Mlika pour ses sacrifices, son soutient moral et matériel et sa tendresse, qui m'ont permet d'atteindre mon but, qui ma tous donnée depuis mon enfance pour que je puisse trouver mon chemin vers la réussite dans mes études et ma vie. Merci ma jolie mère je t'aime beaucoup maman.

Que dieu te protège et te garde pour nous.

A mes très chers sœurs et frères : mes deux jolie soeur ***Amira, Rahma***, *mes deux meilleurs frères* ***Walid, youcef***,

En leurs espérant le plein succès dans leur vie.

protège et vous garde pour nous.

A *tout mes amies sans exception.*

A tout mes collègues de promotion 2015 et surtout la section ***de Maths appliquées.***

Et tous ceux qui me sont ***chers*** *Que Dieu vous gardent!*

Islam 2015

Remerciements

En premier lieu et avant tout je tiens à exprimer mes remerciements au bon « **Dieu** » qui m' a entouré de sa bienveuillance et m'a renforcé avec le courage et la force pour avoir enfin mené à bien ce travail.

Ensuite, j'exprimemon profonde gratitude à mon encadreur« **Madame Tabouche Moufida »** pour avoir accepter de me suivre, et mes plus vifs remerciements pour son soutien, sa patience, ses conseils judicieux, pertinents, et sa sympathie dont elle m' a fait preuve tout au long de l'élaboration de ce travail.

J'adresse également mes remerciements, à tous mes enseignants, qui m' ont donnée les bases de la science,Je remercie très sincèrement, les membres de jury« **Dr. Fernane k.Eddine** » et «**Dr Chaoui A.Rezzak**» pour m'avoir fait l'honneur d'évaluer mon travail

Et finalement à tous ceux qui m'ont aidés de prés ou de loin à accomplir ce travail je dis Merci.

ISLAM

Table des matières

Résumé

Ce travail porte sur l'analyse a postériori de l'équation de Laplace . Nous considérons l'équation de Laplace avec conditions de Dirichelet, nous menons une analyse a postériori du problème discret par éléments finis qui conduit à la construction d'indicateurs d'érreur par résidu menant à un contrôle de l'erreur par une borne superieure et une brne inferieure.

Introduction

On trouve les premiers travaux sur l'analyse a posteriori, les travaux de Babuška et Rheinbolt [3]. Depuis, l'intéret pour les estimations d'erreur a posteriori s'est developpé, car ces techniques permettent l'estimation explicite de l'erreur d'approximation en plus ils sont à l'origine des algorithmes d'adaptation de maillage qui permettent de réduire le coûte des calculs.
Aussi, l'analyse a posteriori a d'autres applications telle que :
discritisation multi-étapes et couplage automatique de modèles.
Les type d'estimations d'erreur a posteriori sont :

-Les estimateurs par résidu, les estimateurs par dualité et les estimateurs hiérarchiques.

-Les estimateurs par résidu ont été introduits par Babuška et Rheinbolt[3] puis ont été dévloppé par Verfüth [12].

Les estimateurs a posteriori par dualité sont du à Johnson[9].

-Les estimateurs a posteriori hiérarchique ont été introduit par Bank et Weiser [4], Ainsworth et Oden[2]. Le travail présenté dans le cadre de ce mémoire concerne l'analyse a posteriori de l'équation de Laplace aux conditions de Dirichelet.
- Dans le premier chapitre, c'est un chapitre introductif dans lequel on rappelle les différents résultats d'analyse fonctionnelle necessaire pour les calculs ulterieurs.
- Dans le deuxième chapitre, on présente le problème, sa formulation variationnelle ainsi que la discrétisation du problème variationnelle par éléments finis conformes. qui est un problème bien posé.
- Dans le troisième chapitre :

On considère le problème discret introduit en chapitre II, nous menons une analyse a posteriori de ce problème.

on établit des estimations d'erreur parfaitement optimales en utilisant des indicateurs d'erreur par résidu. Nous terminons par une conclusion.

Chapitre 1

Existence et unicité du problème de l'équation de Laplace

1.1 Notions préliminaires

On rappelle quelques définitions d'espaces fonctionnels et de certains théorèmes importants ([1],[6]) qui seront utiles pour le développement ultrieur de notre travail.

Dans un espace vectoriel V, un produit scalaire $a(.,.)$ est une forme bilinéaire symétrique et définie positive, c'est-*à*-dire une application de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant :

- Symétrie : $a(x,y) = a(y,x)$,
- Bilinéairité : $a(.,.)$ est linéaire continue par rapport *à* la deuxième argument par symétrie,
- Définie positive : $a(x,x) > 0$ et $a(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Définition 1.1.0.1. *La forme bilinéaire $a(.,.)$ est dite V-elliptique s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$\forall x \in V, \quad a(x,x) \geq \alpha ||x||^2. \tag{1.1}$$

1.1.1 Définitions de quelques espaces fonctionnels

Définition 1.1.1.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit*

$$C(\Omega) := u : \Omega \to \mathbb{R} \,|\, u \text{ est continue}$$

$$C(\overline{\Omega}) := u : \Omega \to \mathbb{R} | \, u \text{ est continue et se prolonge continûment à } \overline{\Omega}$$

Proposition 1.1.1.1. *Sur $C(\Omega)$, l'application*

$$\begin{aligned} ||.||_C \quad : \quad & C(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R} \\ & u \mapsto \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \end{aligned}$$

est une norme

Définition 1.1.1.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite de classe C^k sur Ω si toute ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues*

Les espacesL^P

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de frontière $\theta\Omega$ régulière et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $l \leq p < \infty$

$$L^P(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; \quad f \text{ mesurable et telle que} \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\} \tag{1.2}$$

où dx est la mesure de Lebesgue.

La norme associée à $L^p(\Omega)$ est :

$$||f||_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx \right]^{1/p} \tag{1.3}$$

- *Si $p = 1$, l'espace $L^1(\Omega)$ s'écrit :*

$$L^1(\Omega) = \left\{ f \, : \, \Omega \to \mathbb{R}; \, f \text{ mesurable et telle que} \int_\Omega |f(x)| dx < \infty \right\} \tag{1.4}$$

- *Si $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ s'écrit :*

$$L^2(\Omega) = \left\{ f \, : \, \Omega \to \mathbb{R}; \, f \text{ mesurable et telle que} \int_\Omega |f(x)|^2 dx < \infty \right\} \tag{1.5}$$

est muni d'un produit scalaire

$$(f, g)_{L^2} = \int_\Omega f.g dx, \tag{1.6}$$

La norme associée est :

$$||f||_{L^2} = \left[\int_\Omega |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} \tag{1.7}$$

- *Si $p = \infty$, on définit l'espace $L^\infty(\Omega)$ par*

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ mesurable et telle que} \sup_{x\in\Omega} \text{ess} |f(x)| < \infty \right\} \tag{1.8}$$

où

$$\sup_{x\in\Omega} ess |f(x)| = \inf \{c; |f(x)| \leq c \quad p.p \; sur \, \Omega\} \tag{1.9}$$

La norme associée à $L^\infty(\Omega)$ est :

$$||f||_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega} ess |f(x)| \tag{1.10}$$

Théorème 1.1.1.1. ***(Fubini)*** *Soit f une fonction intégrale sur un rectangle $R = [a,b]\text{x}[c,d]$ et à valeurs réelles, on a :*

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Ce théorème permet de calculer l'intégrale double par deux intégrales simples successives.

Espace des fonctions tests $D(\Omega)$

$$D(\Omega) = \{v \ : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ v \in \ C^\infty \text{et } \sup p v \subset \ \Omega\} \tag{1.11}$$

$\sup p(v)$ *étant le plus petit ensemble fermé qui contient l'ensemble des points où v non nulle.*

Proposition 1.1.1.2. *L'espace $D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.*

Les espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ v \in L^p, \forall i = 1,2,..,n avec \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \right\} \tag{1.12}$$

On pose

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega) \tag{1.13}$$

où

$$H^1(\Omega) = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R}, v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), (i = \overline{1n}) \right\} \tag{1.14}$$

et

$$W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) tel\ que v = 0 sur \partial\Omega\} \tag{1.15}$$

Soit $v \in W^{1,p}(\Omega)$, cet espace est muni de la norme

$$||v||_{W^{1,p}(\Omega)} = ||v||_{L^2} + \sum_{i=1}^n \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|\right|_{1,p}. \tag{1.16}$$

ou bien la norme équivalente

$$\left(||v||_{L^p}^p + \sum_{i=1}^n \left|\left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|\right|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.17}$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L^2} \tag{1.18}$$

la norme associée à $H^1(\Omega)$ est

$$||v||_{H^1(\Omega)} = \left(||v||^2_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2_{L^2} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.19}$$

$\forall m \in \mathbb{N}$, on a :

$$H^m(\Omega) = \left\{ v : \Omega \subset \mathbb{R} \to, \frac{\partial^k v}{\partial x_{i,1} \cdots \partial x_{i,k}} \in L^2(\Omega), \forall k = \overline{0,m} \right\} \tag{1.20}$$

$$H^2(\Omega) = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R}, v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\}$$

$$H^2_0(\Omega) = H^2(\Omega) \cap \left\{ v / v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad sur \quad \partial\Omega \right\} \tag{1.21}$$

$$H^4(\Omega) = \left\{ v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^k v}{\partial x_{i,1} \ldots \partial x_{i,k}} \subset L^2(\Omega), \quad \forall k = 0,1,2,3,4 \right\} \tag{1.22}$$

1.1.2 Formule de Green

Théorème 1.1.2.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ dont le bord $\partial\Omega = \Gamma$ est continu, admettant tout au plus des discontinuités de première espèce pour le vecteur tangent (i,e typiquement des points anguleux). Si u et v sont deux fonctions des variables $(x_1 \ldots, x_n)$, définies de Ω à valeurs réelles, appartenant à $C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, on a :*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}.v d\Omega = -\int_\Omega u.\frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\partial\Omega} uv\gamma_i d\Gamma. \tag{1.23}$$

Où γ_i désigne la composante selon la i-ième coordonnée x_i du vecteur normal $\overrightarrow{v}$, exterieur à l'ouvert Ω.

Remarque 1.1.2.1. *On remarque que la formule de Green (1.23) n'est rien d'autre que la généralisation de la formule d'intégration par partie en dimension un.*

1.1.3 Variante de la formule de Green

Il est possible d'appliquer la formule de Green pour des fonctions u possédant une régularité plus faible que celle que nous avons mentionnée ci-dessus. Si u et $v \in H^1(\Omega)$, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 1.1.3.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ dont le bord $\partial\Omega = \Gamma$ est continu, admettant tout au plus des discontinuités de première esèces pour le vecteur tangent (i,e ;*

typiquement des point anguleux). Si u et v sont deux fonctions des variables $(x_1, \ldots, x_n)$, *définies de* Ω *à valeurs réelles, tels que*

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) et v \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$$

On a alors

$$\int_\Omega \Delta u.v d\Omega = \int_\Omega \nabla u.\nabla v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\Gamma, (2) \tag{1.24}$$

Où n désigne le vecteur normal extérieur à l'ouvert Ω *et* $\frac{\partial u}{\partial n}$ *la projection du vecteur gradient dans la direction de la normale n.*

1.1.4 Inégalité de Cauchy Schwarz

Théorème 1.1.4.1. *[?] Soient u et v deux fonctions appartenant à* $L^2(\Omega)$, *on a :*

$$\left| \int_\Omega u.v.d\Omega \right| \leq \left[\int_\Omega u^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} . \left[\int_\Omega v^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} . \tag{1.25}$$

1.1.5 Inégalité de Poincaré

Théorème 1.1.5.1. *Soit* Ω *un ouvert borné de* $mathbbR^N$. *Alors il existe une constante* $C(\Omega) > 0$ *ne dépendant que du demaine* Ω *et telle que*

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad ||u||_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration 1. *Comme le domaine est borné, on peut supposer qu'il est compris entre deux hyerplans. Quitte à effectuer un changement de coordonnées on va supposer que ces hyperplans sont* $x_N = \alpha$ *et* $x_N = \beta$. *On note* $x \in \mathbb{R}^N$ *sous la forme* $x = (x', x_N)$, *et on considère une fonction* $u \in D(\Omega)$. *Enfin on note* $\widetilde{u}$ *le prolongement de u à* $\mathbb{R}^N$ *par 0. Alors* $||u||^2_{L^2(\Omega)} = ||\widetilde{u}||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int_\alpha^\beta \int_{x' \in \omega} \widetilde{u}(x', x_N) dx' dx_N$. *Comme* $\widetilde{u}$ *est une fonction régulière de* x_N *on a* $\widetilde{u}(u', x_N) = \widetilde{u}(x', \alpha) + \int_\alpha^{x_N} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_N}(x', s) ds$ *avec* $\widetilde{u}(x', \alpha) = 0$. *D'autre part,* $| \int_\alpha^{x_N} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_N}(x', s) ds| \leq (\int_\alpha^{x_N} 1^2 ds)^{\frac{1}{2}} (\int_\alpha^{x_N} (\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_N})^2 (x', s) ds)^{\frac{1}{2}}$, *d'où* $\widetilde{u}(x', x_N)^2 \leq (x_N - \alpha) \int_\alpha^{x_N} (\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_N})^2 (x', s) ds$ *et donc* $\int_\omega \widetilde{u}^2(x', x_N) dx' \leq (x_N - \alpha) \int_{\mathbb{R}^N} (\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_N})^2 (x) dx$. *Enfin par intégration de* α *à* β *on a* $||\widetilde{u}||^2_{L^2} \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} || \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_N} ||^2_{L^2}$, *d'où le résultat pour les fonctions de* $D(\Omega)$ *puis par densité pour les fonctions de* $H_0^1(\Omega)$.

1.1.6 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 1.1.6.1. *Soient V un espace de Hilbert,* $a(.,.)$ *une forme bilinéaire sur* $V \times V$ *et L une forme linéaire définie sur v vérifiant les propriétés suivantes :*

- $a(.,.)$ *est continue :* $\exists C_1 > 0$ *telle que*

$$|a(.,.)| \leq C_1 ||u||.||v||, \quad \forall (u, v) \in V \times V$$

- *$a(.,.)$ est continue :* $\exists C_2 > 0$

$$a(u,v) \geq C_2.||v||^2, \forall v \in V,$$

- *$L(.)$ est continue :* $\exists C_3 > 0$ *telle que*

$$|L(v)| \leq C_3||v||, \forall v \in V.$$

Alors, il existe une seule solution u appartenant à V solution du problème variationnel

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V \tag{1.26}$$

Démonstration 2. *Soit $A : V \to V$ l'opérateur linéaire défini par $\langle Au, v\rangle = a(u,v)$ pour tout v dans V. L'existence de Au résulte du théorème de Riesz (1.1.6.2) car $v \to a(u,v)$ est linéaire continue sur V. L'opérateur A est linéaire continu car $||Au|| = \sup_{v\in V\setminus 0} \frac{|\langle Au,v\rangle|}{||v||} \leq \frac{M||u||||v||}{||v||} = M||u||$. D'autre part toujours d'aprés le théorème de Riesz (1.1.6.2), il existe $b \in V$ tel que $l(v) = \langle b, v\rangle$, $\forall v \in V$. Le problème revient donc à montrer qu'il existe $u \in V$ tel que $Au = b$. On va procéder de manière itérative en partant d'un $u_0 \in V$ quelconque et en définissant, pour $\rho > 0$, la suite récurrente $u_{k+1} = u_k - \rho(Au_k - b) = F(u_k)$. Montrons que pour $\rho > 0$ suffisamment petit, F est contractante. On a $F(u) - F(v) = u - v - \rho(A(u-v))$, donc $||F(u)-F(v)||^2 = ||u-v||^2 + \rho^2||A(u-v)||^2 - 2\rho\langle A(u-v), u-v\rangle = ||u-v||^2 + \rho^2||A(u-v)||^2 - 2\rho a(u-v,u-v) \leq ||u-v||^2 + M^2\rho^2||(u-v)||^2 - 2\rho\alpha||u-v||^2 \leq (1-2\rho\alpha+\rho^2M^2)||u-v||^2$. Choisissons donc ρ tel que $\rho < 2\frac{\alpha}{M^2}$. Alors F est contractante et le schéma itératif est convergent, ce qui prouve le théorème.*

Théorème 1.1.6.2. *(Représentation de Riesz) Soit H un espace de Hilbert, alors pour toute forme linéaire continue x^* sur H, il existe $x \in H$ tel que*

$$x^*(y) = \langle y, x\rangle, \forall y \in H$$

L'application $x \to x^*$ de H dans $H\prime$ est alors une isoétrie surjective de H dans $H\prime$.

1.1.7 Base orthonormée d'un espace de Hilbert

Définition 1.1.7.1. *[10] Soit $\{e_j\}_{j\in I}$ une famille de vecteurs d'un espace de Hilbert H*

1. *On dit que cette famille est orthonormée si*

$$\forall i,j \in I, \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$$

2. *On dit que cette famille est totale si*

$$\overline{\left[\{e_j\}_{j\in I}\right]} = H$$

3. *Une famille $(e_j)_{j\in I}$ de vecteurs de H totale et ortonormée s'appelle une base hilbertienne de H.*

Proposition 1.1.7.1. *Soit $(e_j)_{j\in I}$ une famille orthonormée d'un espace de Hilbert H. Alors*

$$\forall x \in H, \sum_{j\in I} |\langle x, e_j\rangle|^2 \leq ||x||^2$$

Proposition 1.1.7.2. *Soit $(e_j)_{j\in I}$ une base orthonormée d'un espace de Hilbert H. Alors on a :*

Théorème 1.1.7.1. *Soit $(e_j)_{j\in I}$ une famille orthonormée de H. Les propriètés suivantes sont équivalentes :*

1. *$(e_j)_{j\in I}$ est une base orthonormée de H.*
2. *$\forall x \in H : ||x||^2 = \sum_{j\in I} |\langle x, e_j\rangle|^2$ (égalité de Bessel).*

Théorème 1.1.7.2. *Tout espace de Hilbert H, possède une base orthonormée, de plus si H est séparable alors admet une base hilbertienne dénombrable.*

Chapitre 2

Discrétisation par éléments finis de l'équation de Laplace

2.1 Psition du problème

2.1.1 Problème de Dirichlet pour le Laplacien

soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $N = 2\, ou\, 3$. et $f \in L^2(\Omega)$. On cherche à résoudre le problème
Trouver u tel que

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & dans\ \Omega; \\ u = 0, & dans\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

2.1.2 Formulation variationnelle

Supposons qu'il existe une solution $u \in H^2(\Omega)$ à (2.1).
Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, on a en multipliant la première équation de (2.1) par v et en intégrant sur Ω : $\int_\Omega -(\Delta u) v dx = \int_\Omega f v dx$ d'où par la formule de Green, $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \partial_n u v d\sigma = \int_\Omega f v dx$. Comme $v = 0$ sur le bord on obtient ce que l'on appelle la formulation variationnelle de (2.1) :

$$\textbf{(FVP)} \qquad Trouver\, u \in H_0^1(\Omega), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx. \tag{2.2}$$

*Réciproquement, si $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ est solution de **FVP** alors le raisonnement inverse montre que u est solution de (P). La formulation variationnelle est donc équivalente pour les solutions regulières à la formulation classique du problème de Dirichet. Cependant, on voit qu'elle ne fait intervenir que des dérivées premières de l'inconnue. Elle permet donc potentiellement de trouver des solutions généralisées à (P) lorsque les solutions classiques n'existent pas.*

2.1.3 Existence et L'unicité

Le problème (2.2) s'écrit sous la forme générale :

$$\begin{cases} \text{Trouver} \quad u \in V \quad \text{tell que :} \\ a(u,v) = l(v), \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{2.3}$$

avec $V = H_0^1(\Omega)$ *: espace de Hilbert*
$a : u, v \to a(u,v) = \int_\Omega \mathbf{grad}u\, \mathbf{grad}v\, dxdy$ *forme bilinéaire symétrique sur* V
$l : v \to l(v) = \int_\Omega f\, v\, dxdy$ *forme linéaire sur* V.

Résultat

Ce problème admet une unique solution dans V.

En effet, rappellons qu'il s'agit de trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ *tel que :*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx.$$

On applique donc le théorème de Lax-Milgram (1.1.6.1), avec :

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla dx$$

et

$$l(v) = \int_\Omega f v dx,$$

sur l'espace $V = H_0^1(\Omega)$ *muni de la norme de* $\|u\|_V = \|\nabla u\|_{L^2}$.
Alors a est continue car par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$|a(u,v)| =\leq \|\nabla u\| \|\nabla v\| = \|u\|_V \|v\|_V.$$

a est coercive car $a(u,u) = \|u\|_V^2$.
Et enfin l *est continue car on a :*

$$|l(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_V$$

d'aprés l'inégalité de l'inégalité de Poincaré. Le théorème de Lax-Milgram (1.1.6.1) nous assure donc l'existence et l'unicité de la solution du problème.

2.2 Discrétisation par éléments finis du problème

On aborde la discrétisatin par éléments finis du problème variationnelle (2.3). On commence d'abord par écrire le problème discret et on prouve qu'il admet une solution unique. Puis on établit des estimations a priori de l'erreur entre la solution du problème exact et discret.
Avant de se faire, on introduit la définition suivante :

Définition 2.2.0.1. $(\tau_h)_h$ *:famille régulière de tiangulations de Ω par des triangles on des tétaèdres, au sens usuel que :*

- *Pour tout $h, \bar{\Omega}$ est l'union des éléments de τ_h.*
- *Pour tout h l'intersiction de deux éléments distincts de τ_h est soit vide, soit un sommet, soit un côté entier soit une face entière de ces deux éléments*
- *Le quotient $h_{K_{|\rho_k}}$ du diamètre h_K d'un élément de K de τ_h par le diametre ρ_K de son cercle inscret ou de sa sa sphère inscrite et inferieur ou égale à une canstante σ qui ne dépend ni de K ni h*

h :plus grand diamètre des éléments K de τ_h
le paramètre de discrétisation est ici le maximum h des diamètres des éléments de τ_h.

2.2.1 Problème discret

Soit k un entier > 0 fixé. À chaque élément K de τ_h, on associe l'élément fini $(K,_{P_k}(K), \Sigma_K)$ d-simplical d'ordre k de Lagrange introduit dans [5, chap VII .Définition 3.6.] L'éspace X_h corréspondant à ces éléments, voir [5, chap VIII. Définition 4.2.] est

$$X_h = \{v_h \in H^1(\Omega); \forall K \in \tau, v_{h|k} \in p_k(k)\}.$$

Pour travailler avec une discrétisation conforme, on considère l'éspace

$$X_h^0 = X_h \cap H_0^1(\Omega) \tag{2.4}$$

Des fonctions de X_h à trace nulle sur $\partial\Omega$. Le problème discret suivant est simplememt construit par la méthode de Galerkin qui consiste à remplacer H_0^1 par X_h^0 :

Trouver u_h dans X_h^0 tel que

$$\forall v_h \in X_h^0, \quad a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle. \tag{2.5}$$

On dit pour simplifier qu'une propriété est vérifiée uniformémemt si la contante qui y apparaît est bornée indépendamment de h. Avec cette convention et comme l'éspace X_h^0 est inclus dans $H_0^1(\Omega)$, l'uniforme continuité de la forme $X_h^0 \times X_h^0$ et son uniforme ellipticité sur X_h^0 se déduisent des propriètés analogues sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$, respectivement. Le fait que le problème (2.5)est bien posé est alors une conséquence immédiate du théorème de Lax-Miligram (1.1.6.1).

2.2.2 Existance et unicité du problème discret

Théorème 2.2.2.1. *Pour toute ditribution f dans $H^{-1}(\Omega)$, le problème (2.5) admet une solution unique. De plus, cette solution vérifie*

$$||u_h||_{H^1(\Omega)} \leq c||f||_{H^{-1}(\Omega)}. \tag{2.6}$$

Démonstration 3. *Voir[5].*

2.2.3 Estimation a priori

Pour estimer l'erreur entre les solutions des problèmes (2.3) *et* (2.5), *on utilise la majoration étabie dans [5, chap I.4.7] qui s'ecrit ici*

$$||u-u_h||_{H^1(\Omega)} \leq c \inf_{v_h \in X_h^0} ||u-v_h||_{H^1(\Omega)} \tag{2.7}$$

En effet, comme la discrétisation repose sur une méthode de Galerkin, l'erreur entre solution exacte et discrète est simplement majorée par l'erreur d'approximation. en choisissant v_h égal à l'image de u par presque n'importe lequel des opérateurs introduits dans [5, chap IX], plus précisément par l'opérateur d'interpolation lorsque la solution u est suffisamment régulière, de projection sur X_h^0 ou de régularisation locale préservant les conditions aux limites, on obtient la majoration suivante.

Théorème 2.2.3.1. *On suppose la solution u du problème* (2.3) *dans $H^m(\Omega)$ pour un entier m, $1 \leq m \leq k+1$. Alors, pour le problème discret* (2.5), *on a la majoration d'erreur*

$$||u-u_h||_{H^1(\Omega)} \leq ch^{m-1}||u||_{H^m(\Omega)}. \tag{2.8}$$

Démonstration 4. *Voir [5].*

Théorème 2.2.3.2. *Sous les hépothèses du théorème*(2.2.3.1) *et si l'ouvert Ω est convexe, pour le problème discret* (2.5), *on a la majoration d'erreur*

$$||u-u_h||_{L^2(\Omega)} \leq ch^{m}||u||_{H^m(\Omega)}. \tag{2.9}$$

Démonstration 5. *On a*

$$||u-u_h||_{L^2(\Omega)} = \sup_{t \in L^2(\Omega)} \frac{\int_\Omega (u-u_h)(x)t(x)dx}{||t||_{L^2(\Omega)}} \tag{2.10}$$

Pour toute fonction t dans $L^2(\Omega)$, on récut le même probleme qu'en dans [5, chap V, equ.1.9.] :

Trouver w dans $H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(v,w) = \int_\Omega t(x)v(x)dx. \tag{2.11}$$

D'aprés la [5, chap I, Remarque .3.4.] l'ouvert Ω étant convexe, la solution w appartient à $H^2(\Omega)$ et vérifie

$$||w||_{H^2(\Omega)} \leq c||t||_{L^2(\Omega)}. \tag{2.12}$$

On a tout de suite

$$\int_\Omega (u-u_h)(x)t(x)dx = a(u-u_h, w).$$

En utilisant les problème (??) *et* (2.5), *on obtient pour tout w_h dans $X_h^0(\Omega)$,*

$$\int_\Omega (u-u_h)(x)t(x)dx = a(u-u_h, w-w_h) \leq c|u-u_h|_{H^1(\Omega)}|w-w_h|_{H^1(\Omega)}.$$

On choisit alors w_h égal à l'interpolé $\tau_h u$ de w et on obtient

$$\int_{\Omega}(u-u_h)(x)t(x)dx \leq ch|u-u_h|_{H^1(\Omega)}||w||_{H^2(\Omega)}.$$

En combinant ceci avec (2.10) *et* (2.12) *et en utilisant le théorème* (2.2.3.1), *on obtient le résultat cherché.*

Chapitre 3

Analyse a postériori de la discrétisation

3.1 A propos de l'analyse a posteriori

Supposons que l'on ait à résoudre numériquement le problème suivant : trouver u dans un espace de Banach X telque $f(u) = 0$ dans un sous-espace de dimension finie X_δ de X. ou f_δ est une approximation correcte de f.

Une estimation de l'erreur a periori s'écrit

$$||u - u_\delta||_X \leq F(\delta, u, g), \tag{3.1}$$

La quantité $F(\delta, u, g)$ dépendant de paramètres de discrétisaion δ, de la solution exacte u qui l'on cherche a approcher et des données, et ici réprésentée par la solution g. Une majortion de ce genre s'obtient en général en évaluant soit $f_\delta(u)$, ce qui fait apparaître une erreur de consistance, soit $f_\delta(v_\delta)$ pour une approximation v_δ de u dans X_δ : l'estimation dans ce cas se traduit par une erreur d'approximtion lorsque f_δ coïnside avec f, une erreur d'approximation plus une erreur de consistance sinon.dans les deux cas, la majoration a periori fait intervenir une certaine proprieté de regularité de la solution qui n'est pas connue explicitement en géniral, et son intéret principal est d'établir la convergence de la méthode lorsque l'on utilise une suite de paramètre $(\delta_n)_n$ tendant par exemple vers 0.

Une estimation de l' érreur a posteriori s'écrit

$$||u - u_\delta||X \leq G(\delta, u_\delta, g), \tag{3.2}$$

la quantité $G(\delta, u_\delta, g)$ dépendant du paramètre de discrétisation δ, de la solution discrète u_δ et des données g. On remarque que le remplacement de u par u_δ par rapport à l'équation (3.1) permet de calculer explicitement le membre de droite de (3.2), en général à une constante multiplicative prés . Une technique pour majorer l'érreur consiste à évaluer la quantité $f(u_\delta)$ qui est le résidu de l'équation $f(u) = 0$, meme si des techniques différentes existent pour un certain nombre de problèmes.

Définition 3.1.0.1. *Une estimation de l'erreur a posteriori pr une quantité $\widetilde{G}(\delta, u_\delta, g)$ d'épendant du paramètre de discrétisation δ, de la solution discrète u_δ et des données g* *est dite optimale s'il existe deux constante c_1 et c_2 indépendantes de δ telles que*

$$\begin{aligned} \|u-u_\delta\|_X &\le c_1\widetilde{G}(\delta,u_\delta,g)+H_1(\delta,g) \qquad et \\ c_2\widetilde{G}(\delta,u_\delta,g) &\le \|u-u_\delta\|_X+H_2(\delta,g), \end{aligned} \tag{3.3}$$

où les quantités $H_1(\delta,g)$ et $H_2(\delta,g)$ ne dépendant que du paramètre de discrétisation δ et des données g.

L'analyse a postériori est tout spécialement utilisée en élément finis pour l'adaptation automatique de maillages. Le paramètre de discétisation h désignant le maximum des diamètre des éléments d'une triangulation τ_h;l'application des estimation a postériori à l'adaptation de maillages repose sur la notion suivante : Supposons que la quantité $\widetilde{G}(h,u_h,g)$ de (3.3) s'écrive

$$\widetilde{G}(h,u_h,g)=\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\eta_K^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.4}$$

où les η_K ne dépendent que de h_K et des restrictions de u_h et g à l'élément K de $\mathcal{T}_h$ et que l'éstimation (3.3) soit remplacée par

$$\|u-u_h\|_X \le c_1\widetilde{G}(h,u_h,g)+H_1(h,g) \qquad et \quad \forall k\in\tau_h, \eta_K \le C_2'\|u-uh\|_{X(K)}+H2,K(h,g), \tag{3.5}$$

où $X(K)$ désigne l'éspace des réstrictions des fonctions de X à un voisinage fixé de K et $H_{2,K}(h,g)$ ne fait intervenir que les valeurs de g sur ce même voisinage . Les η_K sont alors appelés indicateurs d'érreur, et on peut penser que la famille $(\eta_K)_{K\in\mathcal{T}_h}$ fournit une bonne représentation locale de l'erreur

Remarque 3.1.0.1. *Ces indicateurs d'erreur peuvent êtres utilisées pour un raffinement local de malliage.*

Il existe de nombreux type d'indicateurs d'érreur, Dans notre travail on s'intérèsse aux indicateurs d'erreur dits "par résidu".

3.2 Analyse a posteriori du problème

3.2.1 Equation du Résidu

On considère tout d'abord le problème (2.1), on rappelle qu'il admet la formulation variationnelle (2.3) et on veut construire des indicateurs d'érreur pour le problème discret (2.5) correspendant.

pour simplifier .on supose la donnée f dans $L^2(\Omega)$.on déduit tout d'abord du problème (2.3) que pour n'importe quelle fonction v de $H_1^0(\Omega)$ et v^h de X_H^0

$$a(u - u_h, v) = a(u - u_h, v - v_h) = \int_\Omega f(x)(v - v_h)(x)dx - a(u_h, v - v_h). \quad (3.6)$$

En remplaçant l'intégrale sur Ω par la somme d'intégrales sur les K .on observe que

$$\begin{aligned} a(u_h, v - v_h) &= \sum_{K\in\tau_h} \int_K (\mathbf{grad} u_h)(x).(\mathbf{grad}(v - v_h))(x)dx \\ &= \sum_{K\in\tau_h} \left(\int_{\partial K} \nabla u_h \overrightarrow{n}(\tau).(v - v_h)(\tau) \quad d\tau - \int_K \Delta u_h(x)(v - v_h)(x)\,dx \right) \\ &= \sum_{K\in\tau_h} \left(\int_{\partial K} \frac{\partial u_h}{\partial \overrightarrow{n}_K}(\tau)(v - v_h)(\tau) \quad d\tau - \int_K \Delta u_h(x)(v - v_h)(x)\,dx \right) \end{aligned}$$

d'ou, par intégration par partie sur chaque K

$$a(u_h, v - v_h) = \sum_{K\in\tau_h} \left(-\int_K (\Delta u_h)(x)(v - v_h)(x)dx + \int_{\partial k} (\partial_{nK})(\tau)(v - v_h)(\tau)d\tau \right) \quad (3.7)$$

où n_K désigne le vecteur normal unitaire extérieur à K .On alors amené à introduire quelques notations supplémentaires

Notation 2.1 *À une triangulation τ_h.On désigne l'ensemble des éléments de ϵ_h des côtés $(d = 2)$ ou face $(d = 3)$ des éléments de τ_h . On désigne par ϵ_h^0 l'ensemble des éléments de ϵ_h qui ne sont pas contenus dans $\partial\Omega$.dans ce qui suit ,h_e désigne le diamètre de n'importe quel élément e de ϵ_h*

Notation 2.2 *pour une triangulation τ_h et tout élément K de τ_h ,on note ϵ_K l'ensemble des côtés $(d = 2)$ ou face $(d = 3)$ de K et ϵ_h^0 l'ensemble des éléments de ϵ_K qui ne sont pas contenus dans $\partial\Omega$.*

Dans (3.7) l'intégrale sur ∂k peut s'écrire comme une somme d'intégrale sur les éléments e de ϵ_K .On que ces éléments se répartissent en deux parties :

- *ou bien e est contenu dans $\partial\Omega$ et l'intégrale sur e est nulle car v et vh s'annulent sur $\partial\Omega$,*
- *ou bien e est contenu dans la frontière de deux éléments K et K' et, au total.la quantité à intégrer sur e dans le second membre de (3.7) s'écrit*

$$(\partial_{nK} u_h)(\tau)(v - v_h)(\tau) + (\partial_{nK'} u_h)(\tau)(v - v_h)(\tau) = [\partial_{nK} u_h](\tau)(v - v_h)(\tau), \quad (3.8)$$

où $[\partial_{nK} u_h]$ désigne le saut $\partial_{nK} u_h + \partial_{nK'} u_h$ (on rappelle que nK' est égal à $-n_K$).

et on a $[\partial n_{n_K} u_h]$ est calculer sur chaque côté (frontière) d'un élément K, puisque chaque deux éléments adjacents K, K' ont un côté commun, La dérivée $[\partial n_{n_K} u_h]$ est calculés deux foix sur chaque côté commun c'est-à-dire sur la frontière de tout élément K de *la triangulation sauf les côté qui se trouvent sur la frontière globale.*

Equation du résidu

En combinant les équations précédentes ,on obtient

$$a(u-u_h,v)=\sum_{K\in\tau_h}\left(\int_K(f+\Delta u_h)(x)(v-v_h)(x)dx-\frac{1}{2}\sum_{e\in\epsilon_K^0}\int_e[\partial_{nK}u_h](\tau)(v-v_h)d\tau\right) \tag{3.9}$$

À partir de cette équation .on peut majorer l'érreur en fonction de normes appropriées de $f+\Delta u_h$ et de $[\partial n_{nK}u_h]$. Une difficulté est que, la fonction f pouvant être compliquée, la norme de $f+\Delta u_h$ n'est pas forcément simple à calculer.

Pour remédier à cet inconvenient ,on fixe un entier $l\geq 0$, on introduit l'éspace

$$Z_h=\left\{t_h\in L^2(\Omega);\forall K\in\tau_h,\, t_{h|K}\in P_l(K)\right\} \tag{3.10}$$

et on introduit une approximation f_h de la donnée f dans Z_h.

Définition d'indicateurs d'erreur

On définit alors la famille d'indicateurs d'érreur de la façon suivantes :pour tout K dans τ_h,

$$\eta_K=h_K||f_h+\Delta u_h||_{L^2(K)}+\frac{1}{2}\sum_{e\in\epsilon_K^0}h_e^{\frac{1}{2}}||[\partial_{nK}u_h]||_{L^2(e)}. \tag{3.11}$$

On note que chaque indicateur η_K ne dépend que du résidu de l'équation, au sens suivant :

si l'on supprime les trois indices h dans le second membres de (3.11). alors ce second membres est nul.

Résultat 1

Théorème 3.2.1.1. *On suppose la donnée f du problème (2.3) dans $L^2(\Omega)$. Alors, pour le problème discret (2.5), on a la majoration d'erreur*

$$||u-u_h||_{H^1(\Omega)}\leq c\left(\sum_{K\in\tau_h}(\eta_K^2+h_K^2||f-f_h||^2_{L^2(K)})\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.12}$$

Démonstration 6. *De la propriété d'ellipticité de la forme a(.,.), on déduit*

$$||u-u_h||^{H^1(\Omega)}\leq c\sup_{v\in H_0^1(\Omega)}\frac{a(u-u_h,v)}{||v||_{H^1(\Omega)}}. \tag{3.13}$$

Puis, pour tout v dans $H_0^1(\Omega)$ et tout v_h dans X_h^0, on utilise l'équation (3.9), combinée avec une inégalité triangulaire et une inégalité de Cauchy-Schwarz. ce qui donne

$$a(u-u_h,v)\leq\sum_{K\in\tau_h}((||f-f_h||_{L^2(K)}+||f_h+\Delta u_h||_{L^2(K)})||v-v_h|||_{L^2(K)}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{e\in\epsilon_K^0}||[\partial_{nK}u_h]||_{L^2(e)}||v-v_h||_{L^2(e)})$$

Puis on choisis v_h égal à l'image de v par l'opérateur $\tilde{\prod}_h^0$ introduit en [5, chap IX,equa 3.24] et on déduit du [5, chap IX Théorème 3.11] et du [5, chap IX corollaire 3.12] que

$$a(u-u_h,v)\in c\sum_{K\in\tau_h}h_K(||f-f_h||_{L^2(K)}+||f_h+\Delta u_h||_{L^2(K)})||v||_{H^1(\Delta_k)}+$$
$$\frac{1}{2}\sum_{e\in\epsilon_K^0}h_e^{\frac{1}{2}}||[\partial_{nK}u_h]||_{L^2(e)}||v||_{H^1(\Delta_k)}$$

où les Δ_k sont introduits dans [5, chap IX Notation .3.5 3.11], par une inégalité de Cauchy-Schartz et en rappellant qu'un même élément de τ_h n'est contenu que dans un nombre fini (borné indépandamment de h) de Δ_k, on obtient alors

$$a(u-u_h,v)\leq c\left(\sum_{K\in\tau_h}(\eta_K^2+h_K^2||f-f_h||^2_{L^2(K)})\right)^{\frac{1}{2}}||v||_{H^1(\Omega)}$$

En combinant cette estimation avec (3.13), on obtient la majoration cherchée

La majoration (3.12) est exactement du type de la première ligne de (3.6).pour prouver la scond inégalité dans (3.6), on s'appuie sur l'équation, dite du "résidu", qui s'obtient en prenant v_h égal à 0 dans (3.9) :

$$\forall v\in H_0^1(\Omega), a(u-u_h,v)=\sum_{K\in\tau_h}(\int_K(f-f_h)(x)v(x)dx+\int_K(f_h+\Delta u_h)(x)v(x)dx \quad (3.14)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{e\in\epsilon_K^0}\int_e[\partial_{nK}u_h](\tau)v(\tau)d\tau)$$

lemme 3.2.1.1. *Pour tout élément K de τ_h, et pour tout élément e de ϵ_K, il existe un opérateur $R_{K,e}$ de l'espace $P^0_{k+d-1}(e)$ des polynômes de $P_{k+d-1}(e)$ s'annulant sur ∂e dans $P_{k+d-1}(K)$ tel que, pour tout élément φ de $P^0_{k+d-1}(e)$,*

$$|R_{K,e}\varphi|_{H^1(K)}+h_K^{-1}||R_{K,e}\varphi||_{L^2(K)}\leq ch_e^{-\frac{1}{2}}||\varphi||_{L^2(e)}. \quad (3.15)$$

Démonstration 7. *En dimension $d=2$, soit $\hat{K}$ l'élément de référence, de sommets (0.0), (1.0) et (0.1). sans restriction, on suppose que $\hat{e}$ est le côté d'éxtrémités (0.0) et (1.0)et on peut construire un opérateur $R_{K,e}$ par exemple par la formule*

$$(R_{\hat{K},\hat{e}}\hat{\varphi})(\hat{x},\hat{y})=\hat{\varphi}(\hat{x})\frac{1-\hat{x}-\hat{y}}{1-\hat{x}}$$

En dimension $d=3$, la définition est exactement similaire.
Cet opérateur vérifie les points (i) et (ii) du lemme et, en outre, d'aprés l'équivalence des normes sur un espace de démension finie,

$$|R_{\hat{K},\hat{e}}\hat{\varphi}|_{H^1(\hat{K})}+||R_{\hat{K},\hat{e}}\hat{\varphi}||_{L^2(\hat{K})}\leq c||\hat{\varphi}||_{L^2(\hat{e})}. \quad (3.16)$$

Si F_K désigne l'application affine de jacobien positif qui envois $\hat{K}$ sur K et e sur e l'opérateur $R_{K,e}$ défini par

$$R_{K,e}\varphi = (R_{\hat{K},\hat{e}}\varphi) \circ F_K^{-1}; \quad avec \quad \hat{\varphi} = \varphi \circ F_K,$$

vérifie également les points (i)et (ii) du lemme. En outre.on déduit l'estimation (3.15) de (3.16) et des inégalités [5, chap VII,lemme 2.10]

$$|R_{K,e}\varphi|_{H^1(K)} \leq ch_K^{\frac{d}{2}-1}|R_{K,e}\varphi \circ F_K|_{H^1(\hat{K})}, \quad ||R_{K,e}\varphi||_{L^2(K)} \leq ch_K^{\frac{d}{2}}||R_{K,e}\varphi \circ F_K||_{L^2(\hat{K})},$$

et

$$||\hat{\varphi}||_{L^2(\hat{e})} \leq h_e^{-\frac{d-1}{2}}||\varphi||_{L^2(e)},$$

en notant que h_e est $\leq h_K$ et que le rapport h_{K/h_e} est majoré par une constante indépendante de h.

Résultat 2

Théorème 3.2.1.2. *On suppose la donnée f du problème (2.3) dans $L^2(\Omega)$. Pour tout élément K de τ_h, l'indicateur d'erreur η_K défini en (3.11) vérifie la majoration suivante*

$$\eta_K \leq c(|u-u_h|_{H^1(w_K)} + h_K||f-f_h||_{L^2(w_K)}) \tag{3.17}$$

Démonstration 8. *On prouve la majoration en deux étapes*

1. *On choisit tout d'abord la fonction v dans (3.14) égale à*

$$v_K = \begin{cases} (f_h + \Delta u_h)\psi_K, & dans\ K; \\ 0, & dans\ \Omega \backslash k. \end{cases} \tag{3.18}$$

On note que la fonction v_K est support contenu dans K et s'annule sur ∂K (de sorte que le dernier terme de (3.14) s'annule). Il découle alors de (3.14) que

$$\begin{aligned} ||(f_h + \Delta u_h)\psi_K^{\frac{1}{2}}||^2_{L^2(K)} &= \int_K (\mathbf{grad}\ (u-u_h))(x).(\mathbf{grad} v_K)(x)dx \\ &- \int_K (f-f_h)(x)v_K(x)dx \\ &\leq |u-u_h|_{H^1(K)}|v_K|_{H^1(K)} + ||f-f_h||_{L^2(K)}||v_K||_{L^2(K)}. \end{aligned}$$

On observe que, sur K, la fonction v_K est un polynôme de degré $\leq m$, avec m égal â max $k-2, l$ *+d+1, de sorte qu'on a l'inégalité inverse [5, chap VII, proposition.4.1]*

$$|v_K|_{H^1(K)} \leq ch_K^{-1}||v_K||_{L^2(K)}.$$

En notant que la fontion ψ_K prend ses valeurs entre 0et 1 sur K, on en déduit

$$|v_K|_{H^1(K)} \leq ch_K^{-1}||F_h + \Delta u_h||_{L^2(K)}, \quad ||v_k||_{L^2(K)} \leq c||(f_h + \Delta u_h)||_{L^2(K)} \tag{3.19}$$

Finalement, par passage au triangle de référance, on démontre également l'inégalité suivante (où la constante $\hat{c}$ ne dépend que de $\max k-2, l$*)*

$$||f_h+\Delta u_h||_{L^2(K)} \leq \hat{c}||(f_h+\Delta u_h)\psi_K^{\frac{1}{2}}||_{L^2(K)} \tag{3.20}$$

En combinant tout ceci, on obtient

$$||f_h+\Delta u_h||_{L^2(K)} \leq c(h_K^{-1}|u-u_h|_{H^1(K)}+||f-f_h||_{L^2(K)}). \tag{3.21}$$

Multipliée par h_K, cette inégalité donne la majoration du premier terme de η_K.

2. *Pour tout élément e de ϵ_K^0, soit $K\prime$ l'autre élément de τ_h contenant e. On choisit ici la fonction v dans (3.14) égale à*

$$v_e=\begin{cases} R_{K,e}([\partial_{nK}]\psi_e), & \text{dans } K\,; \\ R_{K',e([\partial_{nK}u_h]\psi_e)}, & \text{dans } K'\,; \\ 0, & \text{dans } \Omega\backslash(K\cup K'). \end{cases} \tag{3.22}$$

où les opérateur $R_{K,e}$ et $R_{K',e}$ sont introduits dans le lemme (2.7). par définition de ψ_e, la fonction $[\partial_{nK}u_h]\psi_e$ s'annule sur ∂e, de sorte que la fonction v_e s'annule sur $\partial(K\cup K')$. En utilisant cette fonction dans (3.14), on voit que

$$\begin{aligned}||[\partial_{nK}u_h]\psi_e^{\frac{1}{2}}||^2_{L^2(e)} = \sum_{k\in K,K'}(-\int_K \mathbf{grad}(u-u_h).\mathbf{grad}v_e dx \\ +\int_K (f-f_h)(x)v_e(x)dx \\ +\int_K (f_h+\Delta u_h)(x)v_e(x)dx).\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Canchy-Schwarz, ceci implique

$$\begin{aligned}||[\partial_{nK}u_h]\psi_e^{\frac{1}{2}}||^2_{L^2(e)} \leq \sum_{k\in K,k\prime}(|u-u_h|_{H^1}(K)|v_e|_{H^1(k)} \\ +||f-f_h||_{L^2(k)}||v_e||_{L^2(k)} \\ +||f_h+\Delta u_h||_{L^2(k)}||v_e||_{L^2(k)}).\end{aligned}$$

On utilise alors (3.15) ainsi que l'inégalité inverse suivante, analogue à (3.20),

$$||[\partial_{nK}u_h]||_{L^2(e)} \leq c||[\partial_{nK}u_h]\psi_e^{\frac{1}{2}}||_{L^2(e)},$$

ce qui entraine

$$||[\partial_{nk}u_h]||_{L^2(e)} \leq c\sum_{k\in K,k\prime} h_e^{-\frac{1}{2}}(|u-u_h|_{H^1(k)}+h_K||f-f_h||_{L^2(K)}+h_k||f_h+\Delta u_h||_{L^2(k)}).$$

On conclut en multipliant par $h_e^{\frac{1}{2}}$, en utilisant (3.21). Finalement, on peut noter que, lorsque e parcourt ϵ_K^0, les éléments k précédents sont soit égaux à K soit égaux à l'élément K' qui partage e avec K, d'où le résultat d'aprés la définition de w_K.

Si l'on somme sur K le carré de l'intégrale (3.17), on vérifie que la quantité

$$(\sum_{K\in\tau_h}\eta_K^2)^{\frac{1}{2}}$$

fournit une estimation a posteriori optimale au sens de la Définition (3.1.0.1). En outre les η_K satisfont l'estimation (3.6)

On considère maintenant le problème (2.1) pour des données f dans $L^2(\Omega)$ et g dans $H^{\frac{1}{2}(\partial\Omega)}$ continue sur $\partial\Omega$, et le problème discret (2.5) associé. Les démonstrations dans ce cas différent trés peu de celles dans le cas de condition aux limites homogènes, On peut en effet vérifier que les équations (3.9) et (3.14) sont encore valables dans ce cas .Par suite, on travaille encore avec la famille d'indicateurs $\eta_K, K\in\tau_h$, définis en (3.11). Dans l'énoncé qui suit, on utilise l'opérateur $i_h^{\partial\Omega}$ introduit [5, chap X, Section 1 et Corillaire 1.5].

Théorème 3.2.1.3. *On suppose la donnée f du problème [5, chap X, equa 1.12] dans $L^2(\Omega)$ et la donnée g dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ continue sur $\partial\Omega$. Alors, pour le problème discret [5, chap X, equa 1.13], on a la majoration d'erreur*

$$||u-u_h||_{H^1(\Omega)}\leq c(\sum_{K\in\tau_h}(\eta_K^2+h_K^2||f-f_h||^2_{L^2(K)}))^{\frac{1}{2}}+c'||g-i_h^{\partial\Omega}g||H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega). \qquad (3.23)$$

Démonstration 9. *D'aprés [5, chap I, Théorème .2.19] . il existe une fonction w de $H^1(\Omega)$ égal à $g-i_h^{\partial\Omega}$ sur $\partial\Omega$ et vérufiant*

$$||w||_{H^1(\Omega)}\leq c||g-i_h^{\partial\Omega}g||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}. \qquad (3.24)$$

Par conséquent, la fonction $u-u_h-w$ appartient à $H_0^1(\Omega)$ et on déduit de la propriété d'ellipticité de la forme $a(.,.)$ que

$$||u-u_h-w||_{H^1(\Omega)}\leq c\sup_{v\in H_0^1(\Omega)}\frac{a(u-u_h-w,v)}{||v||_{H^1(\Omega)}}. \qquad (3.25)$$

on utilise l'équation (3.9) et les mêmes arguments que dans la démonstration du Théorème (3.2.1.1) pour majorer $a(u-u_h,v)$. On a également

$$|a(w,v)|\leq|w|_{H^1(\Omega)}|v|_{H^1(\Omega)}.$$

ce qui combiné avec (3.23) mène à l'estimation

$$||u-u_h-w||_{H^1(\Omega)}\leq c(\sum_{K\in\tau_h}(\eta_K^2+h_K^2||f-f_h||^2_{L^2(K)}))^{\frac{1}{2}}+||g-i_h^{\partial\Omega}g||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

On en déduit le résultat cherché grâce à l'inégalité triangulaire

$$||u-u_h||_{H^1(\Omega)}\leq||u-u_h-w||_{H^1(\Omega)}+||w||_{H^1(\Omega)},$$

combinée une encore avec (3.23).

La majoration de chaque indicateur η_K s'effectue exactement comme dans la démonstration du Théorème (3.2.1.2), on obtient donc la même estimation (3.17).En comparant (3.17) et (3.23), on voit que l'on a prouvé là aussi une estimation a posteriori optimale au sens de la Définition (3.1.0.1)

Remarque 3.2.1.1. *On veut bien sûr que, dans les deux estimation (3.17) et (3.24), les quantités $h_K||f - f_h||_{L^2(K)}$ soient négligeables par rapport aux indicateurs η_K. tout en restant faciles à calculer, Pour cela, on fait habituellement l'un des choix suivants pour le degré l de l'approximation f_h :*

$$l = k - 1oul = \max k - 2, 0. \tag{3.26}$$

On peut pour évaluer les quantités $f_h + \Delta u_h$ et $[\partial_{nK}]$ intervenant dans chaque η_K résoudre un problème local, par exemple de type Neumann. Pour tout K dans τ_h; on introduit un espace de dimension finie $X(K)$ de polynômes sur K s'annulant aux sommets de K et on résout le problème

Trouver u_K dans $X(K)$ tel que

$$\forall v \in X(K) \int_K \mathbf{grad} u_K . \mathbf{grad} v dx = \int_K (f_h + \Delta u_h)(x) v(x) dx - \frac{1}{2} \sum_{e \in \epsilon_K^0} \int_{\partial\Omega} [\partial_{nK} u_h](\tau) v(\tau) d\tau. \tag{3.27}$$

Ce problème admet une solution unique u_K et, si l'on suppose que l'espace $X(K)$ contient les polynômes du type

$$\psi_K p, p \in P_{\max k-2,l} \quad et \quad R_{K,e}(\psi_e q), \quad q \in P_{k-1}(e), e \in \epsilon_K^0;$$

on peut prouver l'estimation

$$c\eta_K \le |u_K|_{H^1(K)} \le c'\eta_K \tag{3.28}$$

(l'estimation $|u_K|_{H^1(K)} \le c'\eta_K$ se démontre en prenant v dans (3.27) égal à u_K, tandis que l'estimation $c\eta_K \le |u_K|_{H^1(K)}$ s'obtient en prenant v dans (3.27) successivement égal aux fonctions v_K et v_e introduites en (3.18) et (3.22), respectivement). On déduit alors de (3.28) que les estimations (3.17), et (3.24) restent vraies si l'on remplace η_K par $|u_K|_{H^1(K)}$. Les quantités $|u_K|_{H^1(K)}$, $K \in \tau_h$, forment donc une famille d'indicateurs d'erreur tout aussi optimale que les η_K. On obtient un résultat similaire en résolvant des problèmes de Dirichlet locaux, associés à tous les éléments K de τ_h. toutefois le support de chaque problème est w_K.

Conclusion

Il s'ensuit des résultat 1 et résultat 2 que l'erreur est equivalente à la quantité $\left(\sum_{K\in\tau_h}\eta_K^2\right)^{\frac{1}{2}}$. *Alors les estimations que nous avons établit sont parfaitement optimales.*

La dernière estimation est locale. Alors on peut penser que η_K *fournit une bonne réprésentation de l'erreur locale, ainsi un outil efficace pour adaptation de maillage.*

Bibliographie

[1] R.A. Adams : Sobolev Spaces, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65., Academic Press, New York-London, 1975.

[2] M. Ainsworth, J.T. Oden, Lee a posteriori error estimators for variational inequalities, Numer. M ethods for Partial Differential Equations 9, 23-33, 1993

[3] I. Babuska et W. Rheinbolt, Error estimates for adaptive finite element method computations, SIAM J.Numer. Anal., vol. 15, p.736-754, 1978.

[4] R. Bank et A. weiser, Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equation, Math. Comp, vol. 44, p. 283-301, 1985.

[5] C. Bernardi, Y. Maday, F. Rapetti Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques, Collection "Mathématiques & Applications" 45, Springer-Verlag (2004).

[6] H.Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications, Masson, Paris, 1983

[7] P.G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam, New-York, Oxford, 1978.

[8] P.G. Ciarlet, Basic Error Estimates for Elliptic Problems, in Handbook of Numerical Analysis, Vol. II, P.G. Ciarlet & J.-L. Lions eds., North-Holland, Amsterdam, 17–351, 1991.

[9] C. Jhonson, Numercal solution of partial differential equations by the finite element method. cambridge University press, cambridge, Royaume-Uni, 1987.

[10] A. Tikonov, A. Vasil'eva et A. Sveshnikov, Differential equations, Springer-Verlag, 1985.

[11] R. Verfürth, Error estimates for a mixed finite element approximation of the stokes equation, RAIRO, Anal. Num., vol. 18, p. 175-182, 1984.

[12] R. Verfürth, A review of a posteriori Error Estimates and adaptive Mesh-Refinement Techniques, Teubner Verlag and J. Wiley, Stuttgart, 1996.