République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **mathématique appliquée**

Par :

M^{eme} : Debbabi zohra

Intitulé

Le Problème centre- foyer

Dirigé par : Dr Sellami Nabil

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.	F.Lakhal	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.	N Sellami	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.	M.Aissaoui	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2015

Remerciement

Merci Dieu Tout-Puissant qui nous a inspiré la patience et la force pour réaliser cette étude.

En préambule à ce mémoire, nous souhaitions adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous a apporté leur aide et qui a contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de ces formidables années universitaires.

Nous tiens à remercier sincèrement à notre encadreur Monsieur ***Sellami Nabil*** *qui a dirigé notre travail par ces conseils bénéfiques, pour son soutien et sa patience.*

Nous tiens à exprimer notre reconnaissance envers le jury, qui a eu la gentillesse de lire et examiner ce travail.

Nous n'oublie pas nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Nos remerciements à tous ceux qui ont supervisé le cours de ce travail, directement et indirectement.

Dédicace

Je dédie ce travail à ma famille, ma mère, mon père Mohamed sans eux j'aurai jamais arrivé à terminer se travail, ainsi mes sœurs, mes frères et toute la famille Debbabi.

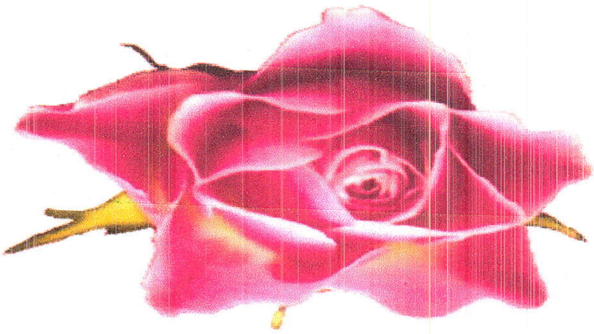
A tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation.

Un Merci particulier à Abd elfettah djebiha.

A tous mes amies, particulièrement: Dounia , Warda, Imene.

A la promotion 2014/2015.

A toutes les personnes qui ont contribué de prés ou de loin à réaliser ce travail



Zohra

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire nous traiterons deux mécanismes permettant de déterminer l'existence d'un centre dans le problème centre-foyer. Nous verrons d'abord la méthode de Darboux. Celle-ci demande l'existence de courbes algébriques invariantes avec lesquelles on peut construire un facteur intégrant ou une intégrale première ce qui implique l'existence d'un centre. Puis, la deuxième méthode étudiera la réversibilité analytique, elle affirme que tout système analytiquement reversible admet un centre .

0.1 Introduction

L'étude d'un système d'équations différentielles non-linéaires commence généralement par la recherche des points singuliers et au voisinage de chaque point singulier, nous étudions normalement le linéarisé du système d'équations différentielles. Ainsi, en regardant les valeurs propres de la matrice jacobienne du système

$$\dot{X} = (P(x, y), Q(x, y))$$

en un point singulier (x_0, y_0), où P et Q sont des fonctions polynomiales ou simplement analytiques sur $U \in \mathbb{R}^2$, nous pouvons conclure sur la nature d'un point singulier pour le système linéaire associé. Cette information nous donne généralement beaucoup d'indices sur la nature d'un point singulier. Cependant, la présence d'un centre pour le linéarisé d'un système à un point singulier n'implique pas nécessairement la présence d'un centre pour le système non-linéaire à ce même point.

Dans ce mémoire, nous traiterons le problème centre-foyer. En fait, ce problème étudie le type d'un point singulier monodromique non dégénéré dans un système d'équations différentielles non-linéaires

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$$

où P, Q sont des fonctions polynomiales (ou encore analytiques). Un point singulier est non-dégénéré et monodromique si le système linéaire associé a un centre à ce point singulier. La question principale du problème centre foyer est :

« **Sous quelles conditions pouvons-nous conclure qu'un point singulier monodromique non dégénéré est un centre ou un foyer pour ce système non-linéaire ?**»

Notre mémoire comporte trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions générales. Nous commençons par définir le système différentiel linéaire, les points critiques et le système linéairisé d'un

système non linéaire au voisinage d'un point d'équilibre, En suite nous introduisons la classification des points d'équilibres, puis on fait une introduction au problème centre-foyer et le théorème de Hartman-Grobman qui comporte la structure qualitative des trajectoires entre les deux systèmes non linéaire et linéarisé.
Dans le deuxième chapitre, on étudie deux mécanismes de résolution du problème centre-foyer, on commence par la méthode de Darboux, en suite la réversibilité analytique.
Enfin, dans le dernier chapitre, on fait une application de la méthode de darboux sur le système de Lotka-Volterra et quelques exemples sur la réversibilité analytique.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Définition 1.1 (système différentiel linéaire) :

On appelle système différentiel linéaire un système de la forme :

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k ; i = 1 \cdots n \tag{1.1}$$

où les coefficients a_{ik} sont des fonctions données de t, réelles ou complexes

par extension, On appelle système différentiel linéaire non homogène ou avec second membre, un système de la forme :

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + b_i ; i = 1 \cdots n \tag{1.2}$$

où les b_i sont des fonctions données de t, on dit alors que (1.1) est un système différentiel linéaire homogène, ou sans second membre.

Si l'on considère les x_i comme des composantes d'un vecteur x.les systèmes (1.1) et (1.2) s'écrivent :

$$\dot{X} = AX \text{ et } \dot{X} = AX + B$$

où A est un opérateur linéaire, ayant pour matrice a_{ik} et B un vecteur, En général la matrice A dépend de t.

Définition 1.2(points critiques) :

Soit le système non linéaire :

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n, f(x) \in \mathbb{R}^n \tag{1.3}$$

On appelle point critique ou point d'équilibre du système (1.3), le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que : $f(x_0) = 0$.

Définition 1.3 : (point critique hyperbolique) :

Si la jacobienne $Df(x_0)$ n'a aucune valeur propre avec une partie réelle nulle, alore le point critique est dit hyperbolique.

Un point critique hyperbolique est soit asymptotiquement stable soit instable.

Définition 1.4 : (système linéarisé) :

On appelle système linéarisé de (1.3) au voisinage du point x_0, le système

$$\dot{x} = Df(x_0)\, x$$

ou $Df(x_0)$ est la jacobienne de f au point x_0 :

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{i,j=\overline{1,n}}$$

Définition 1.5 :

Soit le système non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.4}$$

où $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ et (α, β) l'intervale maximal d'existence de la solution. L'ensemble des applications :

$$\Phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

définies par :

$$\Phi_t(x_0) = \Phi(t, x_0)$$

où $\Phi(t, x_0)$ est la solution telle que $\Phi(0, x_0) = x_0$ est appelé le flot du système différentiel (1.4)

Définition 1.6 : Un système différentiel est dit autonome si f ne dépend pas de t ou sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Définition 1.7 :

Soit le système planaire autonome

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \tag{1.5}$$

où P, Q sont des polynômes en x et y. Les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.5) sont représentées dans le plan (x, y) par des courbes appelés orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentés dans le plan (x, y) s'appelle portrait de phase, et le plan (x, y) est appelé plan de phase.

1.1 Classification des points d'équilibre

Cas des systèmes linéaires

Soit donné le système différentiel linéaire à coéfficients constantes dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

qui s'écrit sous la forme

$$\dot{X} = AX,$$

avec

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

telle que :

$$\det A \neq 0.$$

Le point $(0,0)$ est le point critique.

Pour étudier le type du point critique $(0,0)$, il faut établir l'équation caractéristique :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

et chercher les racines :λ_1, λ_2. Les cas suivants peuvent se présenter :

1-Les valeurs propres de A sont reélles :

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dans ce cas la matrice A diagonalisable.

Nous distingnons deux sous cas :

a) λ_1, λ_2 de même signe :

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$: $(0,0)$ est un noeud impropre instable.

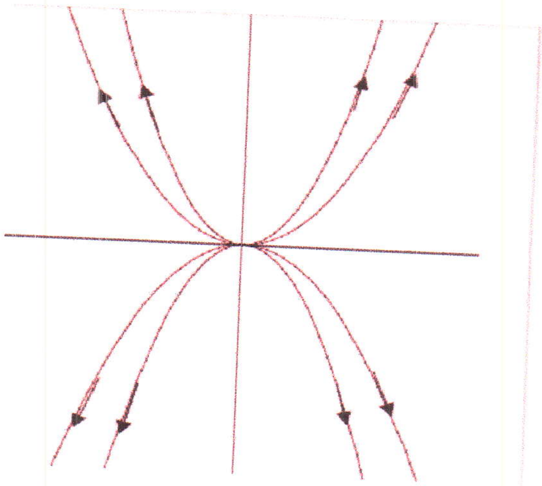


Figure.1.1 noeud propre instable.

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$: $(0,0)$ est un noeud impropre asymptotiquement stable.

b)λ_1, λ_2 de signe opposés : on dit que $(0,0)$ est un point selle (col) qui est toujours instable

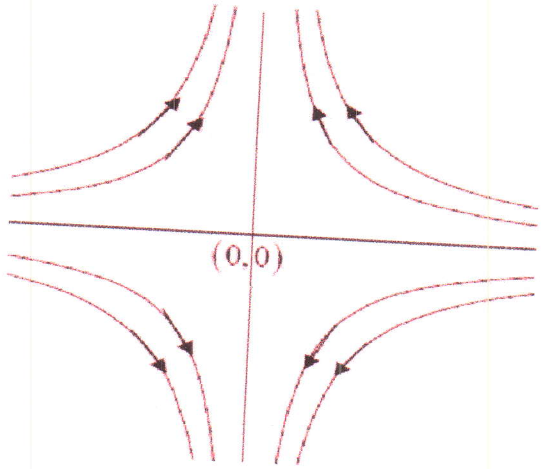


Figure.1.2 point selle (col)

Si $\lambda_1 = \lambda_2$: deux cas sont possibles :

a)A **est diagonalisable :**

alors A est en fait diagonale, on dit que $(0,0)$ est un noeud propre.

$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, $(0,0)$ est un noeud propre asymptotiquement stable.

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, $(0,0)$ est un noeud propre instable

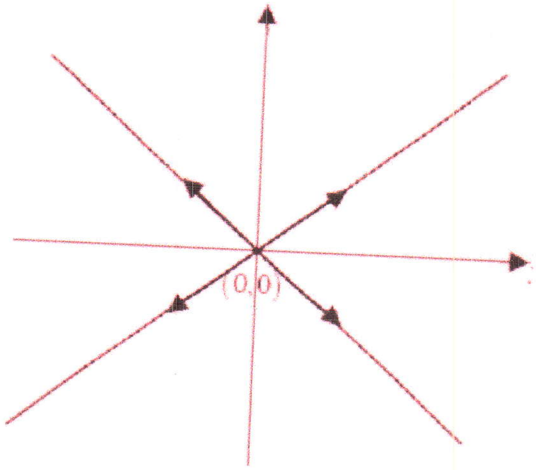


Figure.1.3 noeud propre instable

b) A **est non diagonalisable :**

$(0,0)$ est appelé noeud exceptionnel :

asymptotiquement stable si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

et instable si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$.

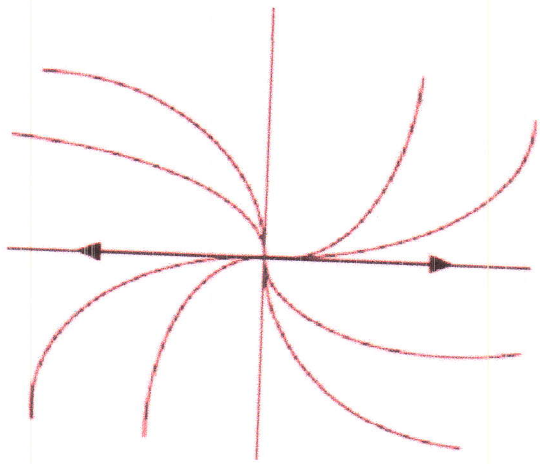


Figure.1.4 noeud exceptionnel instable

2- Les valeurs propres de A sont complexes :

$\lambda_1 = p + iq,\ \lambda_2 = p - iq$

1)Si $p > 0,\ q \neq 0 \Longrightarrow (0,0)$ est un foyer instable.

2)Si $p < 0, q \neq 0 \Longrightarrow (0,0)$ est un foyer asymptotiquement stable.

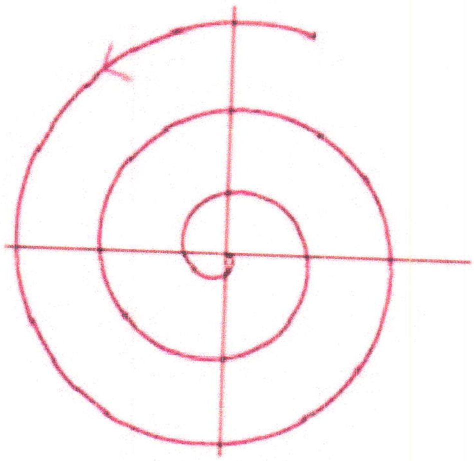


Figure. 1.5. Foyer Stable

3)Si $p = 0, q \neq 0 \Longrightarrow (0,0)$ est un centre qui est toujours stable.

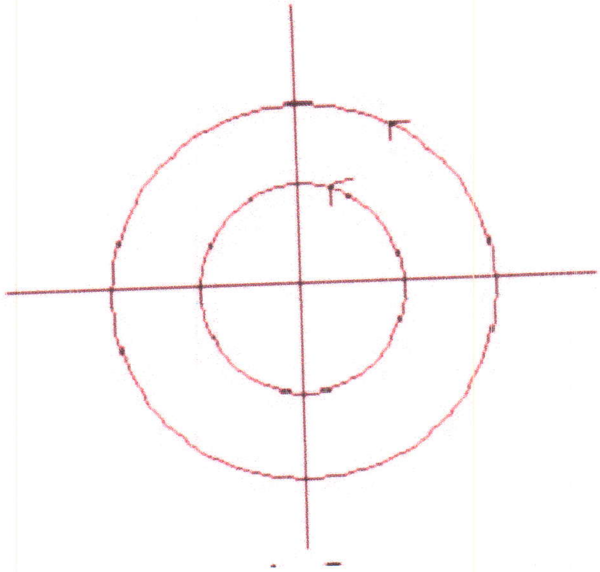


Figure. 1.6. Centre

Cas des systèmes non linéaires

Considérons maintenant le système non-linéaire :

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.6}$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$

Définition 1.8 :

Un point critique x_0 de (1.6) est appelé puits si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles négatives; Il est appelé source si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles positives; Il est appelé selle s'il est hyperbolique et si $A = Df(x_0)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive et au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.

Exemple 1.1 : Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases}$$

Les points critiques sont $(1,0), (-1,0)$.

$$Df(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Le système linéarisé en $(1,0)$ est :

$$Df(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice $Df(1,0)$ sont : $\lambda_{1,2} = 2 > 0$, alors $(1,0)$ est une source.

$$Df(-1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice $Df(-1,0)$ sont : $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_1 = -2 < 0$, alors $(-1,0)$ est un point selle.

1.2 Introduction au problème centre-foyer

Dans cette section, nous introduisons le problème centre-foyer. Nous discutons également le théorème de Hartman-Grobman.

Soit l'équation différentielle non-linéaire définie sur un ouvert U du plan tel que $U \subset R^2$:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y), \\ \dot{y} = Q(x,y), \end{cases} \tag{1.7}$$

où P, Q sont des fonctions polynomiales. Soit x_0 un point critique monodromique non dégénéré ; c'est-à-dire que le système linéaire associé a soit un centre ou un foyer faible à ce point singulier dans le cas non-dégénéré (les valeurs propres sont différentes de 0). Le problème centre-foyer pose la question suivante : **Sous quelles conditions pouvons-nous conclure que ce point singulier monodromique est un centre pour ce système non-linéaire ?**

Tout d'abord, choisissons le point singulier, sans perte de généralité, à l'origine. Soit $f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$. Le système linéarisé associé à l'origine a pour matrice la matrice A, donnée par $Df(0)$, où

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Le théorème de Hartman-Grobman nous dira que, dans un voisinage assez petit de l'origine, le système aura la même structure qualitative des trajectoires que le système linéarisé tant que les valeurs propres de A ne seront pas imaginaires pures.

1.2.1 Le théorème de Hartman-Grobman

Ce théorème permet de comprendre l'organisation des trajectoires au voisinage d'un point singulier. En fait, nous regarderons la partie linéaire du système. De façon intuitive, ce théorème montre, qu'au voisinage d'un point singulier hyperbolique x_0, le système non-linéaire

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.9}$$

a la même structure qualitative des trajectoires que le système linéaire

$$\dot{X} = AX \tag{1.10}$$

avec $A = Df(X_0)$. En termes mathématiques, cela signifie que le système non linéaire (1.9) est topologiquement équivalent au système linéaire(1.10) au voisinage de l'origine.

La notion d'équivalence topologique est donné dans les définitions suivantes :

Définition 1.9 :

deux systèmes non linéaires :

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.11}$$

et

$$\dot{x} = g(x) \tag{1.12}$$

définis sur deux ouverts u et v respectivement, sont dits topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme $h : u \to v$ tel que h transforme les orbites (les trajectoires) de (1.11) en celles de (1.12) et préserve leurs orientation c'est à dire si une trajectoire de (1.11) et orienté de x_1 vers x_2 dans u alors $H(x_1)$ est orienté vers $H(x_1)$.

Théorème 1.1 :(Hartman-Grobman) :

Soit E un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x_0, $f \in \mathbb{C}^1(E)$, Φ_t le flot assosié à $\dot{x} = f(x)$ si x_0 est un point critique hyperbolique de (1), alors il existe un voisinage de ce point x_0 dans lequel le système

$$\dot{x} = f(x)$$

est topologiquement équivalant à son linéarisé

$$\dot{x} = Ax, \; tq \; A = Df(x_0)$$

d'une autre explication, cela signifie que :

Un point selle, foyer et noeud pour le linéarisé resteront un selle, foyer et noeud pour le non linéaire.

Pour le centre on ne peut rien dire, il peut être centre pour le non linéaire comme il peut devenir foyer et c'est le problème de centre-foyer !

Exemple 1.2 :

Soit le système non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = -x - 3y^3 \end{cases} \tag{1.13}$$

on a $(0,0)$ est un point critique.

$$\begin{aligned} Df(x,y) &= \begin{bmatrix} -3x^2 & 1 \\ -1 & -9y^2 \end{bmatrix} \\ Df(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

le système linéarisé s'écrit

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \tag{1.14}$$

Les valeurs propres de $Df(0,0)$ sont $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ alors $(0,0)$ est un point non hyperbolique, il est centre stable pour le système (1.14) pour le système (1.13) on ne peut rien dire.

Chapitre 2

Mécanismes de résolution du problème centre foyer

2.1 La méthode de darboux

Un système polynômial est un système diffirentiel de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = P(x,y) \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases} \tag{2.1}$$

où P, Q sont des polynômes en x, y.

Définition 2.1 :

Une courbe algébrique est l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{C}^2$,tels que $F(x,y) = 0$, où F est un polynôme de $C[x,y]$.

En travaillant avec le système (2.1), nous donnons la définition d'une courbe algébrique invariante sous le flot d'un champ de vecteurs.

Remarquons que (2.1) est aussi défini pour $x, y \in \mathbb{C}$.

2.1.1 Les courbes algébriques invariantes

Définition 2.2 :

Soit $F \in C[x, y]$ une fonction non identiquement nulle. La courbe algébrique $F(x, y) = 0$ est une courbe algébrique invariante du système (2.1) si pour un polynôme $K \in C[x, y]$ on a :

$$\dot{F} = XF = P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y} = K(x, y)F(x, y).$$

Le polynôme k est appelé le cofacteur de la courbe algébrique invariante $F(x, y) = 0$. On note que si le système polynômial a un degré m le cofacteur k a un degré $m - 1$ au plus.

Proposition 2.1 :

Pour le système réel (2.1), $F(x, y) = 0$ est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur K si et seulement si $\overline{F}$ est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur $\overline{K}$.

Lemme 2.1 :

Soient $F, G \in C[x, y]$, on suppose que F et G sont premiers dans l'anneaux $C[x, y]$, alors pour un système polynômial (2.1) $F \cdot G = 0$ est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur K_{FG} si et seulement si $F = 0$ et $G = 0$ sont des courbes algébriques invariantes avec le cofacteur $K_F = 0$ et $K_G = 0$ respectivement et $K_{FG} = K_F + K_G$.

Nous introduisons la méthode de Darboux. Nous nous intéressons au rôle des courbes algébriques invariantes dans la construction d'intégrales premières et de facteurs intégrants de type de Darboux, qui sont, par définition, des fonctions qui s'expriment comme un produit de puissances de polynômes F_i tel que $F_i(x, y) = 0$ est une courbe algébrique invariante.

2.1.2 Intégrale première

Définition 2.3 :

Une intégrale première d'un système est une fonction non constante qui est constante sur toutes les trajectoires de ce système.

rence pour la nourriture (terme $-cy$).

3.1.1 Application au système de Lotka-Volterra

Soit le système de Lotka-volterra (3.1), il s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(by - a) \\ \dot{y} = y(-c + dx) \end{cases} \tag{3.2}$$

Il est possiple de trouver des droites invariantes pour le système. On devine que les droites $x = 0$, $y = 0$ sont des droites invariantes de ce système. Nous pouvons écrire

$$F_1(x, y) = y$$

$$F_2(x, y) = -x$$

Nous pouvons vérifier que ces droites sont effectivement invariante, en écrivant

$$\dot{F_1} = \dot{y} = y(-c + dx) = F_1 K_1$$

$$\dot{F_2} = -\dot{x} = -x(a - by) = F_2 K_2$$

Nous obtenons les cofacteurs

$$K_1 = (-c + dx)$$

$$K_2 = (a - by).$$

Nous sommes maintenant rendus à l'étape de trouver un facteur intégrant car dans cet exemple il n'est pas facile de trouver une intégrale première. Pour trouver un facteur intégrant on applique la proposition (2.4).
On a

$$M = \prod_{i=1}^{m} F_i^{\alpha_i}$$

et

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i k_i + div(P,Q) = 0$$

Alors

$$\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + div(P,Q) = 0$$

$$\alpha_1(-c+dx) + \alpha_2(a-by) + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

$$\alpha_1(-c+dx) + \alpha_2(a-by) + (-c+dx) + (a-by) = 0$$

$$(\alpha_1+1)(-c+dx) + (\alpha_2+1)(a-by) = 0$$

Comme $(-c+dx) \neq 0$ et $(a-by) \neq 0$, alors

$$\begin{cases} \alpha_1 + 1 = 0 \\ \alpha_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -1.$$

Donc, le facteur intégrant est donnée par

$$M = \prod_{i=1}^{m} F_i^{\alpha_i} = F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2} = (-x)^{-1} y^{-1} = -\frac{1}{xy}.$$

On peut alors calculer l'intégrale première H telle que

$$\begin{aligned} H(x,y) &= \int M(x,y)P(x,y)dy + h(x) \\ &= -\int \frac{x}{xy}(a-by)dy + h(x) \\ &= -\int \frac{a-by}{y}dy + h(x) \\ &= \int -\frac{a}{y} + bdy + h(x) \\ &= by - a\ln y + h(x). \end{aligned}$$

On cherche la fonction $h(x)$ par la relation

$$\frac{\partial H}{\partial X} = -MQ$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial X} &= \acute{h}(x) = -MQ \\ &= \frac{1}{xy} y(-c + dx) \\ &= \frac{-c}{x} + d \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad h(x) = dx - c \ln x$$

$$\Rightarrow \quad H(x, y) = dx - c \ln x + by - a \ln y.$$

D'après la méthode de Darbaux H est une intégrale première du système (3.1). Nous pouvons conclure que l'origine est un centre.

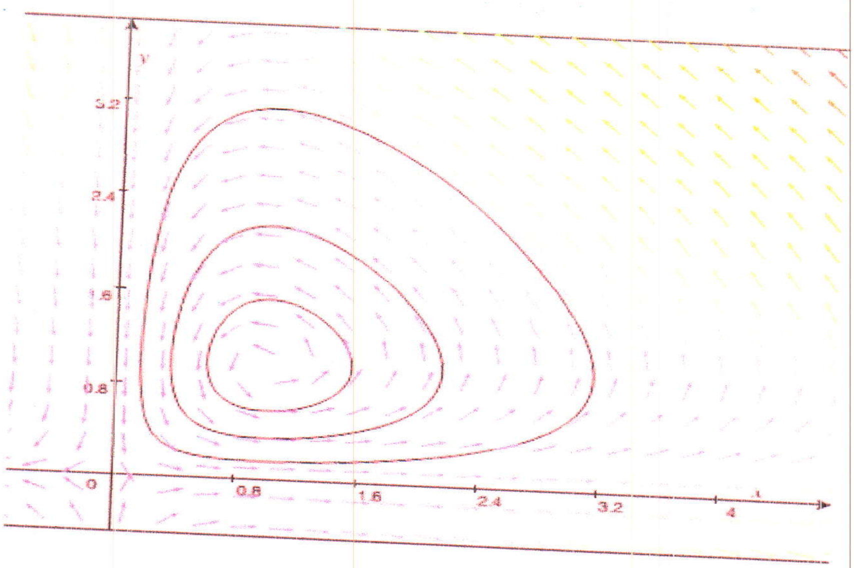


Figure 3.1 : Trajectoires de lotka-volterra avec a = b = c = d = 1

3.2 Exemples sur la réversibilité

Exemple 3.1 :

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x^2 - y^2 \\ \dot{y} = -x - 2xy \end{cases} \tag{3.3}$$

Le linéarisé du système (3.3) à l'origine est

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

Nous avons deux valeurs propres imaginaires pures, i et $-i$. Nous sommes en présence d'un centre à l'origine pour le système (3.3). Alors nous posons la question fondamentale du problème centre-foyer : sommes-nous en présence d'un centre ou d'un foyer faible à l'origine pour ce système non-linéaire ?

On vérifie la possibilité d'avoir une réversibilité analytique. Si nous arrivons à montrer que le système (3.3) est temporellement réversible par rapport à un des axes, alors nous aurons un centre à l'origine.

Montrons que (3.3) est temporellement réversible par rapport à l'axe des y.

Pour ce faire, nous n'avons qu'à remplacer x par $-x$ dans $\dot{x}$ et $\dot{y}$ en (2.6).

$$\begin{cases} P(-x,y) = \dot{x}\mid_{x=-x} = y + x^2 - y^2 = P(x,y) \\ Q(-x,y) = \dot{y}\mid_{x=-x} = -(-x-2xy) = -Q(x,y) \end{cases}$$

Nous voyons alors que le système est temporellement réversible par rapport à l'axe y et donc que l'origine est un centre.

Exemple 3.2 :

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = xy + y^3 + y \\ \dot{y} = x^3y^2 - x \end{cases} \tag{3.4}$$

Nous avons deux valeurs propres imaginaires pures, i et $-i$. Nous sommes alors en présence d'un centre à l'origine pour le système (3.4). Alors si nous montrons que le système (3.4) est temporellement réversible par rapport à un des axes, nous aurons un centre à l'origine.

Pour ce faire, nous n'avons qu'à remplacer y par $-y$ dans $\dot{x}$ et $\dot{y}$ en (2.7).

$$\begin{cases} P(x,-y) = \dot{x}\mid_{y=-y} = -xy - y^3 - y = -P(x,y) \\ Q(x,-y) = \dot{y}\mid_{y=-y} = x^3y^2 - x = Q(x,y) \end{cases}$$

Nous voyons que le système est temporellement réversible par rapport à l'axe x et donc que l'origine est un centre.

Conclution

Dans ce mémoire, nous avons étudié le problème centre-foyer qui étudie le type d'un point singulier monodromique dans un système d'équations différentielles non-linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases}$$

où P, Q sont des fonctions polynomiales.

Nous avons traité deux méthodes, la méthode de Darboux qui nous donne un moyen de trouver une intégrale première d'un champ de vecteurs polynomial en utilisant les courbes algébriques invariantes et leurs cofacteurs respectifs ce qui implique l'existence d'un centre. En suite, la méthode de réversibilité analytique qui permet de conclure sur la présence d'un centre au point singulier monodromique dans un système admettant une réversibilité analytique.

Bibliographie

[1] SOPHIE LAURIN, Le Problème centre-foyer et application, Sophie Laurin, 2011.

[2] VALERY G. ROMANOVSKI DOUGLAS S. SHAFER, The Center and Cyclicity Problems : A Computational Algebra Approach.

[3] S.BADI, Cours de licence 3^{eme} année, cours de P,G,Introduction aux système dynamique.

[4] S.BADI, Cours de 1^{re} année Master, Introduction aux système dynamique et EDO.

[5] DANIEL ZWILLINGER, Handbook of Differential Equations 3rd edition, Academic Press, 1997.

[6] Cours EDO1 Master.