République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématiques Appliquées**

Par :

Melle. TEBBIKH FATIMA ZAHRA

Intitulé

La méthode de moyennisation et perturbation d'un centre quadratique

Dirigé par : Dr. OUNESSE NAWEL

Devant le jury

PRESIDENT	Mr. A.H.HAMLAOUI	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Melle. N.OUNESSE	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Mr. F.LAKHAL	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2015

La méthode de moyennisation et perturbation d'un centre quadratique

Tebbikh Fatima Zahra
Mémoire de master de mathématiques
Université 8 Mai 1945 Guelma

20/06/2015

Remerciements

En premier lieu et avant je tiens à exprimer mes remerciements au bon Dieu qui nous a entouré de sa bienveillance et nous a renforcé avec le courage et la force pour avoir enfin mené à lieu ce travail.

Ensuite, Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à notre encadreur **Melle. Ounesse nawel** pour avoir accepté de nous suive, et nos plus vifs remerciements pour son soutien, sa patience, ses conseils judicieux, pertinents, et sa sympathie dont il nous a fait preuve tout au long de l'élaboration de ce travail.

Je remercie très sincèrement les membres de jury **Mr. HAMLAOUI. A.HAMID** et **Mr. LAKHAL FAHIM** pour nous avoir fait l'honneur d'évalue notre travail.

Et finalement à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à accomplir ce travail je leur dis merci.

FATIMA ZAHRA

Dédicace :

- ✓ *Je dédie ce modeste travail :*
  - ❖ *à tours ceux qui sacrifies pour notre vie soit meilleure.*
  - ❖ *A mon très cher* père *qui a consenti d'énorme sacrifices pour me voir réussir, qu'il trouve en ce modeste travail le témoignage de ma profonde affection.*
  - ❖ *A ma très cher* **mère** *s'est consumée telle que une bougie*
  - ❖ *A mes très chère sœurs et très chère frères et ses amis .*
  - ❖ *A toute ma famille*
  - ❖ *A tout promotion 2015 de mathématique.*

FATIMA ZAHRA

Table des matières

Résumé

Le travail de ce mémoire consiste à la recherche des cycles limites des systèmes quadratiques perturbés, en utilisant la méthode de la moyennisation. On étudie également des cycles limites d'un système quadratique perturbé par des polynômes de degré n .

Introduction

Un problème important dans l'étude des équations différentielles est la détermination des cycles limites. Une méthode classique pour produire des cycles limites est de perturber un système qui possède un centre.
Nous utilisons la méthode de la moyennisation du premier ordre. Cette méthode donne une relation entre les solutions des systèmes différentiels périodiques non autonomes et les solutions des systèmes diffèrentiels moyennés, qui sont autonomes. L'idée de la méthode de la moyennisation comme une technique pour étudier le nombre maximum des solutions périodiques du système perturbé est apparue au dix-huitième siècle. Elle a été formulée très clairement par Lagrange en 1788. Ainsi, en 1920 Van der Pol a développé l'utilisation de cette méthode pour les équations provenant de la théorie des circuits électroniques. En 1928 Fatou a donné la première preuve de validité asymptotique de cette méthode. En 1930 Krylov, Bogliub ov et Mitrop olsky de l'école (Kiev) de mathématiques ont suivi ce type de recherche. Nous appliquons cette théorie aux systèmes quadratiques.

Ce mémoire est organisé en 3 chapitres qui se présentent comme suit :
Le chapitre 1 est consacré aux notions générales sur les systèmes dynamiques et les systèmes quadratiques et rappel sur résidu.
Le chapitre 2 est réservé à la théorie de la méthode de la moyennisation et

donnée deux exemples avec les dessins.

Le chapitre 3 est consacré à le recherche des nombres des cycles limites du systèmes perturbées

$$\begin{cases} \dot{x} = -y\,(1+x) + \varepsilon P\,(x,y) \\ \dot{y} = x\,(1+x) + \varepsilon Q\,(x,y) \end{cases}$$

où P et Q sont des polynômes de degré n, en utilisant la méthode de moyennisation de premier ordre, ce travail est validé par une partie application importantes.

L'appendice est consacré aux calculs de quelques intégrales et résolutions des système linéaires de la forme $Ax = b$ où $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, tracer le cycles limites en utilisant le logiciel Maple 16.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

1.1 Introduction

Dans ce chapitre on donne quelques notions générales et préliminaires pour des systèmes dynamiques et les systèmes quadratiques.

1.2 systèmes dynamiques

Définition 1.2.1 *: Un système dynamique μ sur $\mathbb{R}^n$ est une application $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que*

1) $\mu(.,x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *continue*

2) $\mu(t,.) : \overset{n}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^n$ *continue*

3) $\mu(0,x) = x$

4) $\mu(t+s,x) = \mu(t,\mu(s,x)) \forall t,s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

1.3 Flot d'une équation différentielle

Définition 1.3.1 *: Soit le système non linéaire autonôme*

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $f(x) \in \mathbb{R}^n$. *On appelle flot du système différentiel (1.1), l'ensemble des applications* $\phi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *définies par* $\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$ *où* $\phi(t, x_0)$ *est la solution de (1.1) telle que* $\phi(0, x_0) = 0$

1.4 point d'équilibre

Définition 1.4.1 : *On appelle point d'équilibre du système (1.1), tout point* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *tel que :* $f(x_0) = 0$.

1.5 Solution périodique

Définition 1.5.1 : *On appelle solution périodique toute solution* $x = \phi(t)$ *de l'équation (1.1) telle qu' il existe un nombre* T *vérifiant* $\phi(t + T) = \phi(t)$. *Une solution périodique de (1.1) correspond à une orbite (courbe) fermée dans l'espace des phases.*

1.6 Linéarisation

Définition 1.6.1 : *On appelle système linéarisé de (1.1) au voisinage du point d'équilibre* x_0, *le système*

$$\dot{x} = Df(x_0)x, \tag{1.2}$$

où $Df(x_0)$ *est la jacobienne de* f *au point* x_0 :

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{1 \le i,j \le n}. \tag{1.3}$$

1.7 Point d'équilibre hyperbolique

Définition 1.7.1 *: Si la jacobienne $Df(x_0)$ n'a aucune valeur propre avec une partie réelle nulle, alors le point d'équilibre est dit hyperbolique.*

1.8 portrait de phase

Définition 1.8.1 *: On considère le système planaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases} \tag{1.4}$$

Un portrait de phase est l'ensembles des trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'é quations différentielles ordinaires de deux variables. Les solutions $(x(t), y(t))$ du système(1.4) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelées orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase et le plan (xoy) est le plan de phase.

1.9 Classification des points critiques

Soit le système différentiel linéaire planaire

$$\dot{x} = Ax \tag{1.5}$$

où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est une matrice constante, $x = (x_1, x_2)$
le polynôme caractéristique est

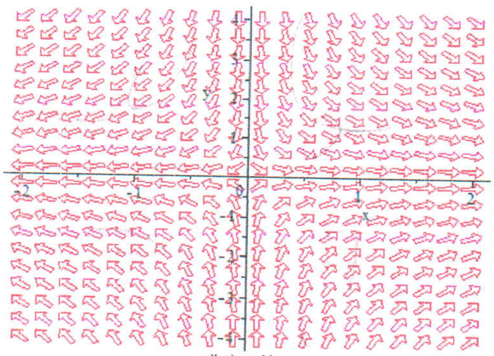
$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A sont les racines du polynôme caractéristique. On se propose de classifier les trajectoires en fonction des valeurs propres λ_1 et λ_2 de (1.5). Le comportement de ces trajectoires au voisinage du point critique détermine le type de point d' équilibre représenté par ce point. Il s'agit d'une classification topologique locale.

On distingue les différents cas selon les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A

1. λ_1 et λ_2 réel de signe différent

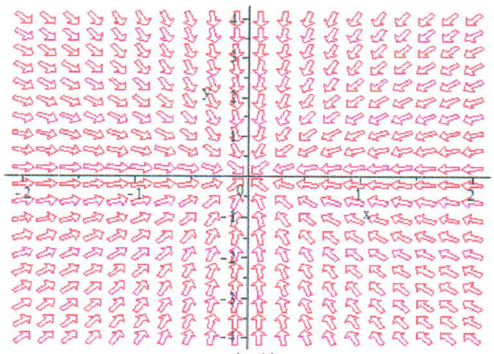
la singularité est un selle qui est toujours instable.



selle instable

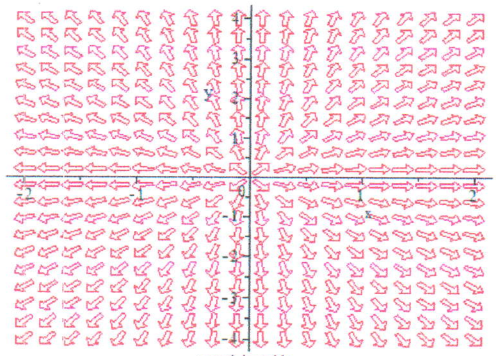
2. λ_1 et λ_2 réel de même signe

si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, la singularité est un noeud stable.



noeud stable

si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, la singularité est un noeud instable.



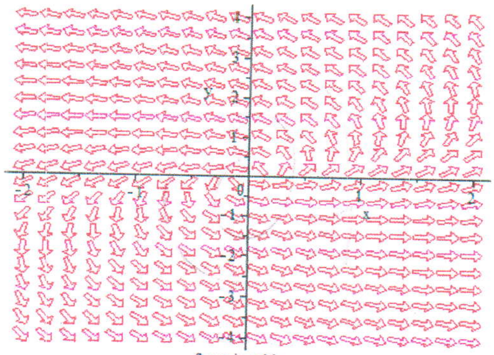
noeud instable

si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, la singularité est un noeud stable

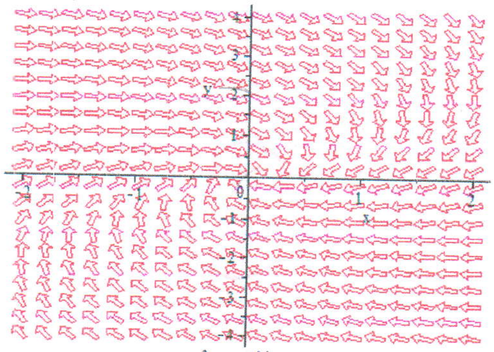
si $\lambda > 0$ sinon il est instable.

3. λ_1 et λ_2 complexe conjuguées avec la partie réelle non nulle.

La singularité est un foyer stable où instable selon le signe de la partie réelle négative ou positive respectivement.



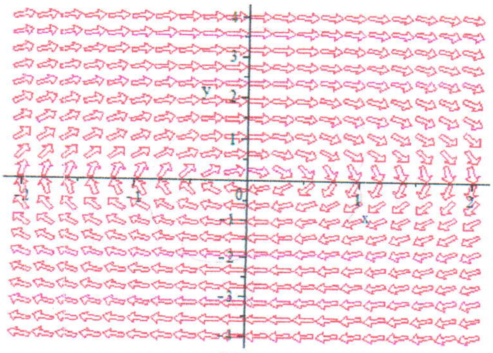
foyer instable



foyer stable

4. λ_1 et λ_2 imaginaires pures.

la singularité est un centre



centre

1.10 Cycle limite

Définition 1.10.1 : *Un cycle limite est une solution périodique isolée, c'est à dire qu'il existe un voisinage de ce cycle où on ne peut pas trouver une autre orbite fermée.*

1.10.1 L'amplitude du cycle limite

Définition 1.10.2 : *C'est la valeur maximale de la variable x du cycle limite.*

Remarque 1.10.1 *Pour un cycle limite, la somme des indices des points critiques l'intérieur de ce cycle limite est égale* 1.

1.11 Système quadratique

Définition 1.11.1 : *Un système quadratique est de la forme*

$$\begin{cases} \dot{x} = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 \\ \dot{y} = b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2 \end{cases} \tag{1.6}$$

1.12 Rappel

Théorème des Résidus

Soit M un domaine simplement connexe et soit γ_0 un chemin fermé de M. Supposons que g est holomorphe dans M sauf aux points singuliers isolés $z_1, \cdots, z_n$ alors on a

$$\int_{\gamma_0} g(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Rés}\left(g(z), z_k\right)$$

Un domaine connexe

Un domaine connexe D est un ensemble ouvert de points dans lequel deux points quelconques peuvent toujours être reliés par une courbe entièrement contenue dans D.

Un domaine simplement connexe

D ans un domaine simplement connexe deux telles courbes ayant les mêmes extrémités peuvent toujours être déformés continument de façons que partant d'une courbe, on atteigne l'autre sans jamais quitter le domaine D.

Série de Laurent

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$$

où

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta \\ a_{-1} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} f(\zeta)\, d\zeta \end{aligned}$$

Et γ_0 est le cercle $\mid z - z_0 \mid = r$, $0 < r < R$, parcouru dans le sens positif. Appliquons le théorème de Résidus à l'intégrale $\int_{|z|=1} h(z)\, dz$ On note que

$$\int_{|z|=1} h(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Rés}(h(z), z_k)$$

Remarque 1.12.1 *Si z_0 est un point critique de $f(z)$, il est un pôle si*

$$\lim f(z) = \infty \quad \textit{quand} \quad z \to z_0$$

Si z_0 *est un pôle d'ordre* m *par rapport à la fonction* f *alors*

$$Rés\,[f(z), z] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}$$

Dans notre cas $m = 1$, *(un pôle simple).*

$$Rés\,[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) f(z)\right]$$

Chapitre 2

Théorie de moyennisation

2.1 Introduction

perturbation des systèmes différentiel une technique usuelle pour obtenir un système différentiel avec cycles limites est de considérer un système différentiel polynômial de type $\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$, où P et Q sont des polynômes à coefficients réels de degré n possédant une singularité de type centre

(ce quand va le faire dans chapitre 3)

l'objectif est rompre le continnum d'orbites périodiques en espérant toute fais qu' il reste des solutions fermées, qui sont isolées.

Un l'importante des méthodes de perturbation des systèmes différentiels, la méthode de moyennisation (averaging méthod) parmis l'une des considéré actuallament méthodes de perturbations le plus utiliser.

L'idée est de réduire la recherche des solutions périodiques à celles des points singuliers bien sur sous des conditions les quelles en les résume dans le thèorème suivant.

2.2 Méthode de moyennisation du premier ordre

On considère le système différentiel à valeur initiale
suivant

$$\dot{x} = \varepsilon F(t, x(t)) + \varepsilon^2 R(t, x(t), \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \tag{2.1}$$

Avec $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, D un domaine borné, et $t \geq 0$. On supposons que $F(t, x)$ et $R(t, x, \varepsilon)$ sont T-périodique en t.

Le système moyenné associée à un système (2.1) est définie par

$$\dot{y}(t) = \varepsilon f^0(y(t)), \quad y(0) = x_0, \tag{2.2}$$

où

$$f^0(y) = \frac{1}{T}\int_0^T F(s, y)ds. \tag{2.3}$$

Théorème 2.2.1 *On considérons le système (2.1) et supposons que les fonctions vectorielles F, R, D_xF, D_x^2F et D_xR sont continués et bornées par une constante M (indépendant de ε) dans $[0, \infty) \times D$ avec $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. De plus, nous supposons que F et R sont T- périodique en t, avec T indépendent de ε.*

(a) si $p \in D$ est un point singulier du système en moyenné (2.2) telle que

$$det(D_x f^0(p)) \neq 0, \tag{2.4}$$

alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T-périodique $x_\varepsilon(t)$ du système (2.1) telle que $x_\varepsilon(t) \longrightarrow p$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

(b) si point singulier $y = p$ du système moyenné (2.2) est hyperbolique alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, la solution périodique correspondante

$x_\varepsilon(t) \longrightarrow p$ *du système (2.1) est unique, hyperbolique et de même type de stabilité que p .*

Exemple 2.2.1 *On Considère le système*

$$\begin{cases} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \end{cases} \tag{2.5}$$

En coordonnées polaires (r, θ) *où* $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, *avec*

$$\begin{cases} r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} \\ r^2\dot{\theta} &= x\dot{y} - \dot{x}y \end{cases}$$

Ce système devient

$$\begin{cases} r\dot{r} &= x\,[y] + y\left[-x + \varepsilon\left(1 - x^2\right)y\right] \\ r^2\dot{\theta} &= x\left[-x + \varepsilon\left(1 - x^2\right)y\right] - y\,[y] \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \dot{r} = & \varepsilon r(1 - r^2\cos^2\theta)\sin^2\theta, \\ \dot{\theta} = & -1 + \varepsilon\cos\theta(1 - r^2\cos^2\theta)\sin\theta, \end{cases}$$

ou d'une manière équivalente

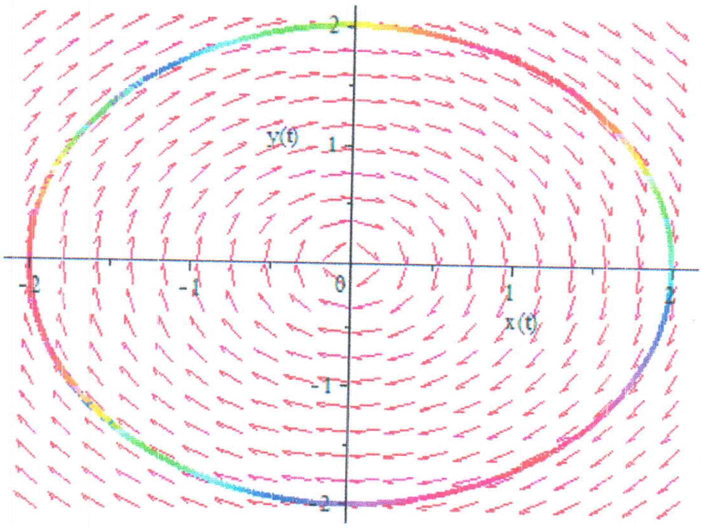
$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r(1 - r^2\cos^2\theta)\sin^2\theta + O(\varepsilon^2).$$

De (2.4) on obtient

$$f^0(r) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^T r\left(1 - r^2\cos^2\theta\right)\sin^2\theta\, d\theta = \frac{1}{8}r\left(r^2 - 4\right).$$

La seule racine positive de $f^0(r)$ *est* $r = 2$. *Comme* $\left(\frac{df^0}{dr}\right)(2) = 1$, *d'après le théorème* 2.2.1 *il suit que le système (2.5) pour* $|\varepsilon| \neq 0$ *suffisamment petit, admet un cycle limite qui tend vers de l'orbite périodique de rayon* 2 *du système non perturbé (2.5) avec* $\varepsilon = 0$.

De plus, comme $\left(\frac{df^0}{dr}\right)(2) = 1 > 0$, *ce cycle limite est instable.*



Exemple 2.2.2 *On Considère le système*

$$\begin{cases} \dot{x} & = y - \varepsilon\left(x^5 - 2x^3 + \frac{1}{2}x\right) \\ \dot{y} & = -x \end{cases} \tag{2.6}$$

En écrivant le système(2.6) en coordonnées polaires (r, θ) *où* $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, *avec*

$$\begin{cases} r\dot{r} & = x\dot{x} + y\dot{y} \\ r^2\dot{\theta} & = x\dot{y} - \dot{x}y \end{cases}$$

Ce système devient

$$\begin{cases} r\dot{r} & = x\left[y - \varepsilon\left(x^5 - 2x^3 + \frac{1}{2}x\right)\right] + y\left[-x\right] \\ r^2\dot{\theta} & = x\left[-x\right] - y\left[y - \varepsilon\left(x^5 - 2x^3 + \frac{1}{2}x\right)\right] \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} \dot{r} & = -\varepsilon\left(r^5\cos^6\theta - 2r^3\cos^4\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta\right) \\ \dot{\theta} & = -1 + \varepsilon\left(r^4\sin\theta\cos^5\theta - 2r^2\sin\theta\cos^3\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta\right) \end{cases}$$

En divisant $\dot{r}$ par $\dot{\theta}$, on trouve

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-\varepsilon\left(r^5\cos^6\theta - 2r^3\cos^4\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta\right)}{-1 + \varepsilon\left(r^4\sin\theta\cos^5\theta - 2r^2\sin\theta\cos^3\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta\right)}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon\left(r^5\cos^6\theta - 2r^3\cos^4\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta\right) + O(\varepsilon^2).$$

Alors on a

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(r^5\cos^6\theta - 2r^3\cos^4\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta\right)$$

$$f^0(r) = \frac{5r^5 - 12r^3 + 4r}{16}$$

donc

$$f^0(r) = 0 \Rightarrow \frac{5r^5 - 12r^3 + 4r}{16} = 0$$

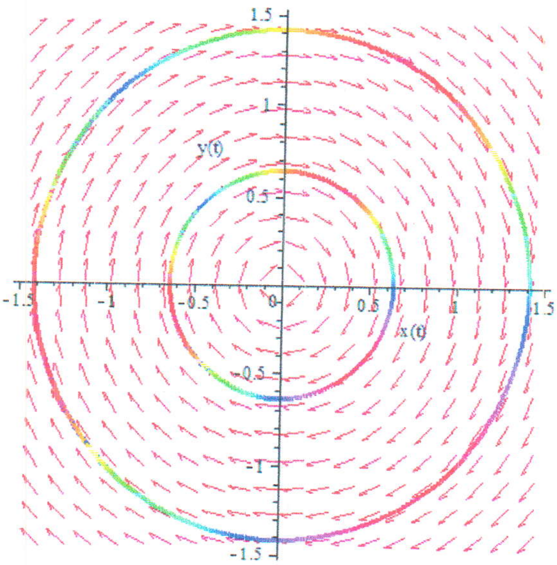
qui a les points singuliers $r = 0, r = \sqrt{\frac{2}{5}}$, $r = -\sqrt{\frac{2}{5}}$, $r = \sqrt{2}, r = -\sqrt{2}$, *les deux racine positive est* $r = \sqrt{\frac{2}{5}}$, $r = \sqrt{2}$.

pour $r = \sqrt{\frac{2}{5}}$

$\frac{df^0}{dr}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = -\frac{2}{5} < 0$ *donc le cycle limite est stable, c'est un cercle de rayon* $\sqrt{\frac{2}{5}}$,

pour $r = \sqrt{2}$

$\frac{df^0}{dr}\left(\sqrt{2}\right) = 2 > 0$ *donc le cycle limite est instable, c'est un cercle de rayon* $\sqrt{2}$.



Calculons les A_0, A_2, A_4 et B_2

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \sum_{\substack{k=-1\\ k\geq 1}}^{3}\left[\sum_{\substack{i+j=k\\ j \text{ paire}\\ j\geq 0}} p_{i,j}\binom{\frac{j}{2}}{\frac{j}{2}}(-1)^{i+1+\frac{j}{2}}+\sum_{\substack{i+j=k\\ j \text{ impaire}\\ j\geq -1}} q_{i,j}\binom{\frac{j+1}{2}}{\frac{j+1}{2}}(-1)^{i+\frac{j+1}{2}}\right]\\
&= p_{1,0}-q_{0,1}-p_{2,0}+p_{0,2}+q_{1,1}+p_{3,0}-p_{1,2}-q_{2,1}+q_{0,3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \sum_{\substack{k=1\\ k\geq 1}}^{3}\left[\sum_{\substack{i+j=k\\ j \text{ paire}\\ j\geq 2}} p_{i,j}\binom{\frac{j}{2}}{\frac{j-2}{2}}(-1)^{i+1+\left(\frac{j-2}{2}\right)}+\sum_{\substack{i+j=k\\ j \text{ impaire}\\ j\geq 1}} q_{i,j}\binom{\frac{j+1}{2}}{\frac{j-1}{2}}(-1)^{i+\frac{j-1}{2}}\right]\\
&= q_{0,1}-p_{0,2}-q_{1,1}+p_{1,2}+q_{2,1}-2q_{0,3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_4 &= \sum_{\substack{k=3\\ k\geq 1}}^{3}\left[\sum_{\substack{i+j=k\\ j \text{ paire}\\ j\geq 4}} p_{i,j}\binom{\frac{j}{2}}{\frac{j-4}{2}}(-1)^{i+1+\frac{j-4}{2}}+\sum_{\substack{i+j=k\\ j \text{ impaire}\\ j\geq 3}} q_{i,j}\binom{\frac{j+1}{2}}{\frac{j-3}{2}}(-1)^{i+\frac{j-3}{2}}\right]\\
&= q_{0,3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_2 &= \sum_{\substack{k=2\\ k\geq 1}}^{3}\sum_{\substack{i+j=k\\ j \text{ paire}}} p_{i,j}\left(\sum_{\substack{s=\frac{j-2}{2}\\ s\geq 0}}^{\frac{j}{2}}\binom{\frac{j}{2}}{s}\frac{(-1)^{k+s-2}}{2^{2+2s-j}}\binom{2+2s-j}{\frac{2+2s-j}{2}}\right)+\\
&\quad \sum_{\substack{k=2\\ k\geq 1}}^{3}\sum_{\substack{i+j=k\\ j \text{ impaire}}} q_{i,j}\left(\sum_{\substack{s=\frac{j-1}{2}\\ s\geq 0}}^{\frac{j+1}{2}}\binom{\frac{j+1}{2}}{s}\frac{(-1)^{k+s-2}}{2^{1+2s-j}}\binom{1+2s-j}{\frac{1+2s-j}{2}}\right)\\
&= \frac{1}{2}p_{2,0}+\frac{1}{2}p_{0,2}+\frac{1}{2}q_{1,1}-\frac{1}{2}p_{3,0}-\frac{1}{2}p_{1,2}-\frac{1}{2}q_{2,1}+\frac{3}{2}q_{0,3}
\end{aligned}
$$

Déterminant les valeurs de A_0, A_2, A_4 et B_2

$$\begin{aligned}
\widetilde{c_4} &= A_4 = 1 \\
\widetilde{c_3} &= -B_2 = -\frac{5}{2} \\
\widetilde{c_2} &= -A_2 - 2A_4 = \frac{35}{16} \Rightarrow A_2 = -\frac{67}{16} \\
\widetilde{c_1} &= -A_0 + B_2 = -\frac{25}{32} \Rightarrow A_0 = \frac{105}{32} \\
\widetilde{c_0} &= A_0 + A_2 + A_4 = \frac{3}{32}
\end{aligned}$$

Comme

$$A_4 = q_{0,3} \Rightarrow q_{0,3} = 1$$

On a le système suivant

$$\begin{cases}
p_{1,0} - q_{0,1} - p_{2,0} + p_{0,2} + q_{1,1} + p_{3,0} - p_{1,2} - q_{2,1} = 2.28125 & (1) \\
q_{0,1} - p_{0,2} - q_{1,1} + p_{1,2} + q_{2,1} = -2.1875 & (2) \\
p_{2,0} + p_{0,2} + q_{1,1} - p_{3,0} - p_{1,2} - q_{2,1} = 2 & (3) \\
p_{1,0} - p_{2,0} + p_{3,0} = \frac{3}{32} & (4)
\end{cases}$$

$(1) + (3) \Rightarrow$

$$p_{1,0} - q_{0,1} - 2p_{2,0} + 2p_{3,0} = 0.28125 \qquad (5)$$

$(2) + (3) \Rightarrow$

$$q_{0,1} + p_{2,0} - p_{3,0} = -0.1875 \qquad (6)$$

$(3) + (4) \Rightarrow$

$$p_{0,2} + q_{1,1} - p_{1,2} - q_{2,1} + p_{1,0} = \frac{67}{32} \qquad (7)$$

$(1) + (2) + (3) + (4) \Rightarrow$

$$2p_{1,0} - p_{2,0} + p_{0,2} + q_{1,1} - p_{1,2} - q_{2,1} + p_{3,0} = 2.1875 \qquad (8)$$

On peut écrire le système de (8) équations sous la forme

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_{1,2} \\ p_{2,0} \\ p_{0,2} \\ p_{3,0} \\ p_{1,0} \\ q_{1,1} \\ q_{2,1} \\ q_{0,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.28125 \\ -2.1875 \\ 2 \\ \frac{3}{32} \\ 0.28125 \\ -0.1875 \\ \frac{67}{32} \\ 2.1875 \end{bmatrix}$$

Résolvant par Maple 16

$$\begin{bmatrix} p_{1,2} \\ p_{2,0} \\ p_{0,2} \\ p_{3,0} \\ p_{1,0} \\ q_{1,1} \\ q_{2,1} \\ q_{0,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.807546149 \\ -0.3214347713 \\ 0.0944911153 \\ -0.2060063497 \\ -0.0875811312 \\ -0.04383970603 \\ 0.02647468948 \\ 0.06139394466 \end{bmatrix}$$

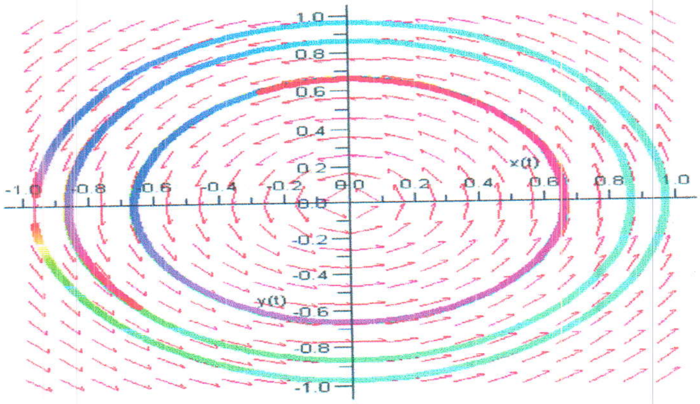
Les deux polynômes de systèmes perturbées sachant que $q_{0,3} = 1$ *sont*

$$\begin{aligned} P(x,y) &= -0.0875811312 \times x - 0.3214347713 \times x^2 + 0.0944911153 \times y^2 \\ &\quad -4.807546149 \times xy^2 - 0.2060063497 \times x^3 \\ Q(x,y) &= 0.06139394466 \times y + 0.02647468948 \times x^2 y - 0.04383970603 \times xy + y^3 \end{aligned}$$

Le système différentiel perturbé

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(1+x) + \varepsilon(-0.0875811312 \times x - 0.3214347713 \times x^2 + 0.0944911153 \times y^2 \\ \qquad -4.807546149 \times xy^2 - 0.2060063497 \times x^3) \\ \dot{y} = x(1+x) + \varepsilon(0.06139394466 \times y + 0.02647468948 \times x^2 y - 0.04383970603 \times xy + y^3) \end{cases}$$

Les trois cycles limites de l'exemple 3.3.2



Bibliographie

[1] J.A. sanders and F.verhulest, averaging méthods in nonlineare dynamical systems, applied mathematical sciences 59.springers, new york, 1985

[2] J.Llibre, Jesus perez delrio, joé angel roduiguez, averaging analysis of a perturbated quadratic centre. Non analysis (2001)46.pp.45 − 51

[3] L.Perko, différential équations dynamical systems, texts in applied mathématics, 7 .Third edition, springer-verlag, new york,(2001)

[4] N.Ouanas : mémoire de doctorat. 2014

[5] N.Sellami : mémoire de doctorat. 2013