République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Probabilités et Application**

Par : oughidni chama et kouarta karima

Intitulé

Généralisations de la formule d'itô et temps locaux

Dirigé par : SEKRANI SAMIA

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.BENCHAABANE.A	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.SEKRANI SAMIA	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.KERBOUA MOURAD	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2015

Remerciements :

*Nous exprimons toute notre gratitude à tous ceux qui nous ont aidés de prés ou de loin à l'élaboration de ce mémoire que madame **SEKARANI SAMIA** notre encadreur et les jurys **KERBOUA MOURAD ET BENCHAABANE.A** et touts les enseignants du département de mathématiques soient vivement remerciés pour la formation qu'ils nous ont donnée.*

DÉDICACES

Je tiens à dédier ce modeste travail à la plus merveilleuse des mamans, qui ma toujours sur être présente, ma supporté, conseillé et dirigé

Je le dédie également à **mon père**, *ma* **grande mère** *qui sont les personnes que j'aime le plus au monde, je profite cette occasion pour les remercier pour tout ce que ils ont faits pour moi.*

Puis, je le dédie à mon frère **Houssin** *et* **Walid** *et la petite* **Maya** *et mon marie* **Abdelhalim**

Puis, je le dédie à mes **amis** *avec lesquels j'ai partagé mes moments* **Kawther, Imene**...

Enfin, je le dédie à tous ceux que je connais et qui me connaissent de prêt ou de loin.

Table des matières

Résumé :

Dans ce mémiore on introduit une notion important en calcul stochastiques c'est le temps local (L_t) c'est le temps passé par le brownian en

0 avant t .

Avec la formule d' Itô, nous voyons comment les fonctions de classe C^2 opèrent sur les semi-martingales continues X.

On généralise ceci à une fonction convexe en prouvant la formule de Meyer-Itô ainsi que celle de Tanaka .

On cite aussi l'example de Yor d'une fonction f tq $f(X)$ n'est pas une semi-martingales .

Nons nous sommes intéressés aux EDS á coefficients Hölder . On démontre un cas d'unicité forte .

On finit par une étude du processus de Bessel en dimension 1 .

Chapitre 1

Quelque définitions :

1.1 Mesures :

Définition (1-1) : Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω. Une mesure P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application $P : \mathcal{F} \longrightarrow [\mathbb{R}^+]$ telle que :

$i)$ $p(\phi) = 0$

$ii)$ $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ disjoints $(i.e, A_n \cap A_m = \phi, \forall n \neq m) \Longrightarrow p\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p(A_n)$

En particulier : $A \in B \in \mathcal{F}$ et $A \cap B = \phi \implies p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

. De plus :

$i)$ si $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$,$A_n \subset A_{n+1}$ et $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ alors $\lim_{n \to \infty} p(A_n) = p(A)$

.

$ii)$ si $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$,$A_n \supset A_{n+1}$ et $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = A$ alors $\lim_{n \to \infty} p(A_n) = p(A)$

.

1.2 La mesure de lebesgue :

Définition (1-2) : Soient $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = \beta(\mathbb{R})$. On appelle mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ la mesure définie par :

$P(]a, b[) = b - a$, $\forall 0 \leq a \leq b$.

P n'est définie a priori que sur les intervalles, mais elle est extensible à tout ensemble borélien $B \in \beta(\mathbb{R})$.

Un temps d'arrêt est donc un temps aléatoire, tel que sur chaque ensemble $\{\omega : T(\omega) \leq t\}$,

l'application $t \longmapsto T(\omega)$ dépend seulement de ce qui s'est passé avant le temps t.

Propriétés (1-1) : 1 : Si T est un temps d'arrêt alors T est $\mathcal{F}_T$ mesurable.

2 : Si S et T sont des temps d'arrêt alors $S \Lambda T$ est un temps d'arrêt. En particulier

$T \Lambda t$ est un temps d'arrêt.

3 : Si S et T sont des temps d'arrêt tels que $S \leq T$ on a $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

4 : Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus mesurable et T un temps d'arrêt fini.La variable aléatoire X_T définie par :

$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$ est $\mathcal{F}_T$ -mesurable.

5 : Si un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est continu et adapté, alors X_T est $\mathcal{F}_T$ -mesurable .

1.6 Martingales :

Définition (1-11) : Un processus $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ s'il satisfait les propriétés suivantes :

i) $(M_t)_{t \geq 0}$ est $(\mathcal{F}_t)$ adapté .

ii)$(M_t)_{t \geq 0}$ est intégrable pour tout t (c-à-d : $E(| M_t |) < \infty$).

iii) $E(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s$

On parlera de sous-martingale si $(E(M_t \mid \mathcal{F}_s) \geq M_s ;\forall\ s \leq t$) et de sur-martingale si $(E(M_t \mid \mathcal{F}_s) \leq M_s\ ;\forall\ s \leq t$) .

Propriétés (1-2) : 1) Si $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale alors :

$E(M_t) = E(M_0)\ ; \forall t \geq 0$.

2) Si $(M_t)_{t \leq T}$ est une martingale alors le processus est complètment déterminé par sa valeur terminale car

$M_t = E(M_T \mid \mathcal{F}_t)$.

1.7 Inégalité de Doob :

Soit (M_t) une martingale(par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)$) contenue, de carré intégrable et telle que $M_0 = 0$ p.s .

Alors :

a) $P(\sup_{0 \leq s \leq t} \mid M_s \mid \geq \lambda) \leq \frac{E(M_t)}{\lambda}$ $\forall t > 0, \lambda > 0$.

b) $P(\sup_{0 \leq s \leq t} \mid M_s \mid^2) \leq 4E(\mid M_s \mid^2)$, $\forall t > 0$.

1.8 Martingales locales :

Définition (1-12) : Le processus $(M_t)_{t \geq 0}$ est dite martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrêt

(T_n) croissante et $\lim_{n \longrightarrow \infty}(T_n) = +\infty$

telle que :

$(M_{T_n \wedge t})$ soit une martingale.

1.9 Semimartingales continues :

Définition (1-13) : Un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$est une semi-martingale continue s'il s'écrit sous la forme

$X_t = M_t + A_t$

Où : M est une martingale locale et A est un processus à variation finie .

1.10 Le Mouvement Brownien Standard (M.B.S) :

1.10.1 Premiére caractérisation du (M.B.S) :

Définition (1-14) : Un mouvement brownien standard est un processus aléatoire à temps continu $\{B_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ tel que :

i) $B_0 = 0$ p.s ;

ii) $\{B_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ est à accroissements indépendants et stationnaires,

iii) B_t suit une loi normale $N(0, t)$, $\forall t \geq 0$.

iv) (B_t) est à trajictoires continues .

Proposition (1-1) : Dans la définition précédente, on peut remplacer la proprieté ii)

i) $\forall\ t < s \leq t$, $B_t - B_s$ et B_s sont indépendants

Ou bien :

ii) $(B_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien, continu et centré ,

iii) $\forall\ t, s \in \mathbb{R}_+, cov(B_t, B_s) = E[B_t B_s] = s \wedge t$.

1.10.2 Deusième caractérisation du (M.B.S) :

Un mouvement brownien standart $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus à trajectoires continues et gaussien avec moyenne
$m(t) = 0$ et covariance $k(t,s) = t\Lambda s = \min(t,s)$

Proposition (1-2) : Le mouvement brownien standard $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus de Marcov

Proposition (1-3) : Le mouvement brownien standard $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale par raport à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^B)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

1.10.3 Troisième caractérisation du (M.B.S)(Théoreme de Lévy) :

Soit (X_t) un processus à trajectoires continues,adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t)$ et tel que :

$$\begin{cases} i) \quad (X_t) \text{ est une martingale par rapport à } (\mathcal{F}_t) \\ ii)(X_t^2 - t) \text{ est une martingale par rapport à } (\mathcal{F}_t) \end{cases}$$

Alors : (X_t) est un mouvement brownien standard .

1.10.4 Généralisation :

Définition (1-15) : Le processus Z défini par $Z_t = a + B_t$ est un mouvement Brownien issu de a.(a est un réel)

On dit que X est un MB de drift μ et de coefficient de diffusion σ (μ , σ sont des réels) si :

$$X_t = x + \mu t + \sigma B_t$$

où : B est un mouvement Brownien .
La v.a X_t est une v.a gaussienne d'espérance $x + \mu t$ et de variance $\sigma^2 t$.

1.10.5 Variation quadratique :

Variation quadratique du mouvement brownien stadard :

Soit $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un mouvement brownien standard (par convenance,on notera par fois $B_t = B(t)$).pour $t > 0$,on définit

$$\langle B \rangle_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{2n} (B(\frac{it}{2^n}) - B(\frac{i-1}{2^n}))^2$$

Pour : $t > 0$,
$\lim_{n\to\infty} \langle B \rangle_t^{(n)} = t$ p.s .
On définit la varation quadratique du mouvement brownien standard $\langle B \rangle_t$ comme étant donnée cette limite (par convention , on pose également $\langle B \rangle_0 = 0$) .

1.11 L'intégrale stocastique (où l'intégral d'itô) :

Soit $\{B_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ un mouvement brownien standard par rapport à $\{\mathcal{F}_t; t \in \mathbb{R}_+\}$

Soit $T > 0$ fixé(temps d'arrêt),notre but est de construire l'intégrale stocastique :

$$\int_0^t H_s \, dB_s, t \in [0, \infty]$$

1.11.1 Définition (et théorème)- Intégral D'itô :

Soit H un processus $\mathcal{F}_t$-adapté,continu et vérifiant $\int_0^t H_s^2 \, ds < \infty$ pour tout $t > 0$.

Alors : il existe un processus continu $\left(\int_0^t H_s dB_s\right)_{t \geq 0}$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} H_{(i-1)t/n}\,(B_{it/n} - B_{(i-1)t/n}) \quad \xrightarrow{n \to \infty} \quad \int_0^t H_s\, dB_s \quad pour \quad tout \qquad t > 0,$$

Où la convergence a lieu en probabilité '
Pour tout $t \geq 0$,ce processus vérifie l'égalité (isométried'Itô) :

$$E\left(\int_0^t H_s\, dB_s\right)^2 = \int_0^t E(H_s^2)\, ds,$$

Cette dernière quantité pouvant être infinie .

Dans le cas où : $\int_0^t E(H_s^2)\, ds < +\infty$ pour tout $t > 0$, le processus $\left(\int_0^t H_s dB_s\right)_{t \geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$ -martingale.

1.11.2 Formules d'itô :

Formule de base :

Théoreme (1-1) : Soit $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un mouvement brownien stadard par rapport à $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$ et $f \in C^2(\mathbb{R})$ (i.e.f ,$f\,'$ et $f\,''$ sont des fonctions continues) . On
suppose de plus que :

$$E\left(\int_0^t (\ f\,'(B_s))^2 ds\right) < \infty,, \forall t \geq 0.$$

Alors : pour tout $t > 0$.

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\, ds \qquad \text{p.s}$$

Théoreme (1-2) : Soient (B_t) un mouvement brownien standard et $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})(i.e\ f, \frac{df}{dt}, \frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}$ sont continues),telle que :

$$E\left(\int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s,B_s)\right)^2 ds\right) < \infty,, \forall t \geq 0.$$

Alors : pour tout : $t > 0$

$$f(t,B_t) - f(0,B_0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s,B_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,B_s)\, ds \qquad p.s$$

1.12 Processus d'itô(où "semi-martingale continue") :

Définition (1-16) : Un processus d'itô est un processus (X_t) pouvant se décompposer comme $(X_t = M_t + A_t)$,où

$$\begin{cases} (M_t)\text{est une matingale continue de carré intégrable(p.r.à une filtration } (\mathcal{F}_t)) \\ (A_t)\text{est une processus continu à variation bornée,adapté à } (\mathcal{F}_t) \text{ et tèl que } A_0 = 0 \end{cases}$$

1.13 Formule d'itô généralisée :

Théoreme (1-3) : Soit (M_t) une martingale continue de carré intégrable et $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que :

$$E(\int_0^t (f\,'(M_s))^2\, d\langle M\rangle_s) < \infty, \forall t > 0$$

Alors :

$$f(M_t) - f(M_0) = \int_0^t f'(M_s)\, dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(M_s)\, d\langle M\rangle_s\ p.s$$

Remarque (1-2) : Que seul le terme ds de la formule (2)à été remplacé par le terme $d\langle M\rangle_s$ pour tenir compte de la variation quadratique de la martingale M .

Théoreme (1-4) : Soit X une semi- martingale continue et $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que :

$$X = M + A$$

telleque :

$$E\left(\int_0^t (f\,'(X_s))^2 \, d\langle X\rangle_s\right) < \infty, \forall\, t > 0$$

Alors :

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''\,(X_s)\, d\langle M\rangle_s + \int_0^t f'(X_s)\, dA_s\ .$$

Chapitre 2

Temps local et Formule de Tanaka :

Avec la formule d' Itô, nous avons vu comment les fonctions de classe C^2 opèrent sur les semimartingales continues .

On prolonge maintenant ceci à des fonctions convexes de ce fait,

On introduise la notion importante du temps local.

Dans ce qui suit, f est une fonction convexe . Le résultat suivant nous mène à une généralisation de la formule d'Itô.

2.1 Formule de Tanaka :

2.1.1 Introduction :

Les hypothèses de la formule d'Itô nous contraigne de lémployer pour des fonctions de classe C^2. Dans ce chapitre nous essayons de relaxer cette hypothèse.

2.1.2 Premiére généralisation de la formule d'Itô :

On commence par une extension de la formule d'Itô.

Théoréme (2-1) : Soit g une fonction de classe C^1. On suppose que g est de classe C^2en dehors d'un ensemble de points finis $z_1, ..., z_n$ et de plus que

$|g''(x)| \leq Q$ pour $x \neq z_i, i = 1, ..., n$.Soit (B_t) un mouvement brownien de dim 1.Alors la formule d'Itô reste valable :

$$g(B_t) = g(B_0) + \int_0^t g'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t g''(B_s)\, ds$$

Où l'on a prolongé :

$$g''(z_i) = g''(z_i-) = \lim_{x \to z_i} g''(x).$$

Preuve de Théoréme (2-1) : Soit ρ_n une suite de fonctions C^∞ à support compact dans $B(0, 1/n)$ telles que, $\rho_n(t) \geq 0$ et $\int \rho_n(t)dt = 1$ (Une telle suite est appelée suite régularisante.On les appelle aussi parfois fonctions test).Alors $g_n = \rho_n * g$ est une fonction C^∞ telle que $g_n \to g$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

($*$: fonction de convolution) .

De plus comme g est de classe C^1 on a $g_n' = (\rho_n') * g = \rho_n * (g')$ et par suite $g_n' \to g'$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Enfin on peut appliquer la formule d'Itô á g_n :

$$g_n(B_t) = g_n(B_0) + \int_0^t g_n'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t g_n''(B_s)\, ds \qquad (2-1)$$

De part la continuité de $s \to B_s$ on a sur $[0, t]$:

$$\lim_{n\to\infty} \| g_n(B_s) - g(B_s) \|_\infty = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \| g_n'(B_s) - g'(B_s) \|_\infty = 0$$

Donc : $\lim_{n\to\infty} g_n(B_t) = g(B_t)$. D'autre part l'inégalité maximale de Doob implique :

$$E\left[\sup_{s\in[0,t]} (\int_0^t g_n'(B_s)\, dB_s - \int_0^t g'(B_s)\, dB_s)^2\right]$$
$$\leq 4 \sup_{s\in[0,t]} E\left[(\int_0^t g_n'(B_s)\, dB_s - \int_0^t g'(B_s)\, dB_s)^2\right]$$

Et par l'isométrie d'Itô on a :

$$= 4E\left[\int_0^t (g_n^{'}(B_s) - g^{'}(B_s))^2 \, ds\right] \to 0 \quad quand \quad n \to \infty$$

On en déduit qu'il existe une sous suite $n_k \to \infty$ telle que :

$$\sup_{s\in[0,t]} \left(\int_0^t g_{n_k}^{'}(B_s)\, dB_s - \int_0^t g^{'}(B_s)\, dB_s\right)^2 \to 0$$

Presque sûrement quand $k \to \infty$.

Pour traiter le dernier terme $K_t^n = \frac{1}{2}\int_0^t g_n^{"}(B_s)ds$ on remarque que $(2-1)$ implique :

$$K_t^{n_k} = g_{n_k}(B_t) - g_{n_k}(B_0) - \int_0^t g_{n_k}^{'}(B_s)\, dB_s$$

Et donc par ce qui précède :

$$\lim_{k\to\infty} K_t^{n_k} = g(B_t) - g(B_0) - \int_0^t g^{'}(B_s)\, dB_s$$

Presque sûrement :

Or en dehors de $z_1, ..., z_n$ on a : $g_n^{"}(x) \to g(x)$.Sans perte de généralité on peut supposer $z_1 < z_2 < ... < z_n$.Posons pour tout $\varepsilon > 0$

$I_\varepsilon = \cup_{i=1}^n]z_i - \varepsilon, z_i + \varepsilon[$.On a donc :

$$\int_0^t (g_n^{"}(B_s) - g^{"}(B_s))1_{R\setminus I_\varepsilon}(B_s)\, ds = 0$$

Et de plus :

$$\int_0^t (g_n^{"}(B_s) - g^{"}(B_s))1_{I_\varepsilon}(B_s)\, ds \leq 2M\lambda(s \in [0,t] : B_s \in I_\varepsilon)$$

Où : λ désigne la mesure de Lebesgue Or :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda(s \in [0,t] : B_s \in I_\varepsilon) = 0$$

D'où l'égalité cherchée.

2.1.3 Formule de Tanaka :

Supposons á présent que l'on veuille appliquer la formule d'Itô á $g(B_s) = |B_s|$.

La difficulté ici c'est que $x \to |x|$ n'est même plus de classe C^1. En revanche c'est une fonction convexe, donc Lipchitzienne et sa dérivée á gauche existes et est une fonction cád-lág . On pose donc :

$$g_k(x) = -x \ \ 1_{]-\infty;\frac{-1}{k}]}(x) + \frac{1}{2}(\frac{1}{k} + kx^2) \ 1_{]\frac{-1}{k};\frac{1}{k}]}(x) + x \ \ 1_{]\frac{1}{k},+\infty[}(x)$$

Clairement g_k est de classe C^1

$$g_k^{'}(x) = -1_{]-\infty;\frac{-1}{k}]}(x) + k\ x\ 1_{]\frac{-1}{k};\frac{1}{k}]}(x) + 1_{]\frac{-1}{k},+\infty[}(x)$$

Et en dehors des points $-1/k$ et $1/k$ la dérivée seconde :

$$g_k^{''}(x) = k \ \ 1_{]\frac{-1}{k};\frac{1}{k}[}(x)$$

Est bien continue et bornée (par k). Par le résultat précédent on a donc :

$$g_k(B_t) = g_k(B_0) + \int_0^t g_k^{'}(B_s)\ dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t g_k^{''}(B_s)\ ds \qquad \bigstar$$

Observer que : $\| \ g_k(x) - |x| \ \|_\infty \leq \frac{1}{2k} \to 0$ lorsque $k \to \infty$. Par ailleurs par l'Isométrie d'Itô on a :

$$\begin{aligned} E\left[(\int_0^t kB_s 1_{]-1/k,1/k]}(B_s)dB_s)^2 \right] &= \int_0^t k^2 E(B_s^2 1_{]-1/k,1/k]}(B_s))\ ds \\ &= k^2 \int_0^t \int_{-1/k}^{1/k} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi s}} \exp(-\frac{x^2}{2s})\ dx\ ds \\ &\leq \frac{2}{k}\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{2\pi s}} = \frac{\sqrt{t}}{k\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Où on a utilisé que : $x^2 \exp(-\frac{x^2}{2s}) \leq \frac{1}{k^2}$ pour tout $x \in [-1/k, 1/k]$.On en déduit que :

$$\lim_{k\to\infty} E\left[(\int_0^t k\ B_s 1_{]-1/k,1/k]}(B_s)\ dB_s)^2 \right] = 0;$$

D'où :

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^t g_k^{'}(B_s)\ dB_s = \int_0^t sign\ (B_s)\ dB_s \ \text{ dans } L^2$$

Et :

$$\lim_{l\to\infty} \int_0^t g_{k_l}^{'}(B_s)\ dB_s = \int_0^t sign\ (B_s)\ dB_s \ \text{ p.s.}$$

Par ★ on a :

$$\frac{1}{2}\int_0^t g_k^{''}(B_s)\ ds = g_k(B_t) - g_k(B_0) - \int_0^t g_k^{'}(B_s)\ dB_s$$

La limite en k existe dans L^2 on pose :

$$L_t = \lim_{k\to\infty} \int_0^t \frac{k}{2} 1_{]-1/k,1/k]}(B_s) ds = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2}\lambda\left(s \in [0,t] : Bs \in \left]-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]\right);$$

Où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Donc quitte à prendre une sous suite de n_l,disons $n_{l_j} \to \infty$ on a presque sûrement :

$$L_t = |B_t| - |B_0| - \int_0^t sign\ (B_s)\ dB_s.$$

On vient de montrer le :

Théorème (2-2) : (Formule de Tanaka). Soit B_t un mouvement Brownien en dimension 1 alors presque sûrement on a :

$$|B_t| = |B_0| + \int_0^t sign\,(B_s)\,dB_s + L_t.$$

Où : $L_t = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \lambda\,(s \in [0,t] : Bs \in]-\varepsilon, \varepsilon])$ et λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

2.2 Temps Local :

2.2.1 Deuxième généralisation de la formule d'Itô :

Nous allons généraliser le résultat précédent. On commence par prouver le

Théoréme (2-3) : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et X une semimartingale continue.

Alors : $f(X)$ est une semimartingale et :

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s)\,dX_s + K_t$$

Où : f' est la dérivée á gauche de f, c'est-à-dire :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad et \quad K_t = K_t(f, X)$$

est un processus continu croissant adapté .

Remarque (2-1) :

La formule est linéaire en f En effet si f_1 et f_2 sont deux fonction convexe de processus croissants associés :

$$K_t^1 = K_t(f_1, X) \quad \text{et} \quad K_t^2 = K_t(f_2, X) \qquad \text{alors} \qquad K_t(f_1 + f_2, X) = K_t^1 + K_t^2$$

Preuve du théoréme (2-3) : Comme f est convexe,f' la dérivée à gauche existe en tout point et pour tout : $x \in K$ (un compact) :

$$f'(x) \leq c(K) = max_{s\in K} \ f'(x)$$

La stratégie s'inspire des preuves ci dessus. On sait que $X_t = M_t + A_t$ où M_t est une martingale locale et A_t un processus à variation .finie tels que :

$$A_0 = 0$$

Au besoin en utilisant un temps d'arrêt (localisation) on peut sans perte de généralité supposer que : $max\ (|X_t|, |A_t|, \langle M\rangle_t) \leq C < \infty$

Soit ρ_n une suite régularisante, on pose $f_n(x) = f * \rho_n(x)$ comme précédemment f_n est de classe C^∞ (de plus elle est aussi convexe)

Donc par Itô on a :

$$f_n(X_t) - f_n(X_0) = \int_0^t f_n'(X_s)\ dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_n''(X)\ d\langle X\rangle_s$$

De par les propriétés de régularisation et comme on suppose $|X_t| \leq C$ on a que $f_n(X_t) \to f(X_t)$ uniformément en t.

De plus on a pour tout $x \in R$:

$$f_n'(x) = \lim_{h\to 0} \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{f(x-y) - f(x-h-y)}{h}\ \rho_n(y)\ dy$$

Et par convergence dominée on en déduit :

$$f_n'(x) = \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} f'(x-y) - \rho_n(y)\ dy = f' * \rho_n(x)$$

Et donc : $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$

On pose : $I_t^n = \int_0^t f_n'(X_s) dM_s$ et $I_t = \int_0^t f'(X_s)\ dM_s$

Par l'inégalité maximale de Doob dans L_2 et l'Isométrie d'Itô on en déduit :

$$K_t^n = \frac{1}{2}\int_0^t f_n''(X_s)\ d\langle X\rangle_t$$

Alors :

$$K_t^{n_k} = f_{n_k}(X_t) - f_{n_k}(X_0) - \int_0^t f_{n_k}'(X_s)\ dX_s$$

De part ce qui précéde le membre de droite converge presque sûrement lorsque $k \longrightarrow \infty$

vers une limite uniforme en t. Il en est donc de même pour le membre de gauche.Par ailleurs $K_t^{n_k}$ est continu, adapté et

croissant donc sa limite uniforme K_t l'est aussi.

2.2.2 Définition et premiéres propriétés :

Définition (2-1) : Soient X une semimartingale et f une fonction convexe alors le processus $K_t = K_t(f, X)$

défini dans le théoréme précédent est appelé processus croissant associé à f.

Le processus croissant associé à la fonction $x \longrightarrow |x-a|$ est appelé temps local en a et est noté :

$L_t^a = L^a(X)_t$ quand $a = 0$ on écrit simplement L_t

On abouti aisément á la généralisation suivante de la formule de Tanaka.

Corollaire (2-1) : (Formule de Meyer-Tanaka.) : Soit X une semi-martingale continue. Alors pour tout $a \in R$:

$$|X_t - a| = |X_0 - a|\ + \int_0^t sign\ (X_s - a)\ dX_s + L_t^a$$

Le résultat qui suit donne une autre définition du temps local qui sera utile dans le théoréme á suivre.

Lemme (2-1) : Le processus croissant associé á la fonction $x \longrightarrow (x-a)^+$ ou $x \longrightarrow (x-a)^-$ est $(1/2)\ L_t^a$

Preuve de Lemme (2-1) : Les fonctions $x \to (x-a)^+$ et $x \to (x-a)^-$ sont convexes. Soient donc K_t^1 et K_t^2 leur processus croissants associés respectifs. On a : $|x-a| = (x-a)^+ + (x-a)^-$ donc : $L_t^a = K_t^1 + K_t^2$

Par ailleurs $g(x) = x - a = (x-a)^+ - (x-a)^-$ est une fonction (convexe) de classe C^∞ :

Donc par Itô :

$$g(X_t) - g(X_0) = X_t - X_0 = \int_0^t 1 \, dX_s$$

Donc : le processus croissant associé á g est 0. D'où le résultat cherché

Le résultat qui suit précise le sens du "temps local" pour L_t^a

Théoréme (2-4) : Soit X une semimartingale continue.

Le processus $L_t^a = L^a(X)_t$ ne croît que lorsque $X_t = a$; plus précisément pour

presque tout ω la mesure sur $\mathbb{R}^+$;

$dL_t^a(\omega)$ a pour support $\{s \geq 0 : X_s(\omega) = a\}$.

Preuve de Théoréme (2-4) : Comme le processus croissant L_t^a est à trajectoire continue la mesure $dL^a(\omega)$ est une mesure diffuse .

Supposons que l'on ait $0 \leq S < T$ des temps d'arrêts tels que : $\{(s,\omega) : S(\omega) \leq s < T(\omega)\} \subset \{(s,\omega) : X_s(\omega) < a\}$.

Alors : $X \leq a$ sur $[S,T]$. En appliquant deux fois le **(Théoréme**(2-2) et le Lemme précédents à $f(x) = (x-a)^+$ aux temps S et T on a :

$$0 = (X_T - a)^+ - (X_S - a)^+ = \int_S^T 1_{]a,\infty[}(X_s) + \frac{1}{2}(L_T^a - L_S^a)$$

D'oú : $L_T^a - L_S^a = 0$ c'est 'a dire $L_T^a = L_S^a$

Pour tout $q \in Q^+$ on définit les temps d'arrêt S_q par :

$$S_q(\omega) = \begin{cases} q & \text{si } X_q(\omega) < a \\ \infty & \quad\quad sinon. \end{cases}$$

Puis on définit :

$$T_q(\omega) = inf \; \{t > S_q(\omega) : X_t \geq a\}.$$

On a donc : $[S_q, T_q[\subset \{X < a\}$ et de plus :

$$Int\ (\{s > 0 : X_s(\omega) < a\}) = \underset{q \in Q+}{\cup}]S_q(\omega), T_q(\omega)[$$

Où : $Int\ (B)$ représente l'intérieur de l'ensemble B.

l'analyse de ci dessus implique que $dL^a(\omega)$ ne charge pas $Int(\{s > 0 : X_s(\omega) < a\})$.

Or : $\{s > 0 : X_s(\omega) < a\}$ est l'image inverse de l'ouvert $]-\infty, a[$ par une application continue donc est lui même ouvert

Donc : coincide avec son intérieur. donc $dL^a(\omega)$ ne charge pas $\{s > 0 : X_s(\omega) < a\}$.

De façon analogue on montre que dL^a a ne charge pas $\{s > 0 : X_s > a\}$. Donc son support est contenu dans l'ensemble

$\{s \geq 0 : X_s(\omega) = a\}$

2.3 Formule de Meyer-Itô :

2.3.1 Les semimartingales continues :

Le résultat suivant est optimal : Cinclar, Jacod, Protter et Sharpe (1980) ont montré que si B_t est un mouvement Brownien

et si $X_t = f(B_t)$ est une semi martingale alors f doit être la différence de deux fonctions convexes...

Théoréme(2-5) : (Formule de Meyer-Itô) Soit X une semimartingale continue. Soit f la différence de deux fonctions convexes, f' la dérivée á gauche de f et $\mu = f''$

Alors :

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} \int L_t^a\, \mu\,(da)$$

Oú : $L_t^a = L^a\,(X)_t$ est le temps local passé en a par X jusqu'au temps t.

Remarques (2-2) : (a) Pour $f(x) = |x|$ on a $f'(x) = sign\ (x) = 21_{]0,+\infty[}(x) - 1$ et donc $\mu(da) = 2\delta_0(da)$ où δ_0 est la mesure de Dirac en 0.

2.3.2 Cas général :

Théoréme (2-6) : Soit f une fonction convexe et X une semimartingale. Alors : $f(X)$ est une semimartingale et on a :

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_{0+}^{t} f'(X_t-)\, dX_t + A_t$$

Oú : f' est la dérivée à gauche de f et $A = A(f, X)$ est un processus adapté, croissant, continu á droite.De plus on a :

$$\Delta A_t = f(X_t) - f(X_{t^-}) - f'(X_{t^-})\, \Delta X_t$$

Définition (2-2) : Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit le processus croissant $A_t^a = A^a(X)_t$ par :

$$|X_t - a| - |X_0 - a| = \int_{0+}^{t} sign\ (X_{s^-} - a) dX_s + A_t^a$$

Le temps local passé par X en a jusqu'au temps t noté $L_t^a = L^a(X)_t$ est définit par :

$$L_t^a = A_t^a - \sum_{0<s\leq t} [|X_s - a| - |X_{s^-} - a| - sign\ (X_{s^-} - a) X_s]$$

Théoréme (2-7) : Pour presque tout ω le support de la mesure $dL^a(\omega)$ est contenu dans l'ensemble $\{s : X_s - (\omega) = a\}$

Théoréme (2-8) : (Formule de Meyer-Itô) Soit X une semimartingale continue. Soit f la différence de deux fonctions convexes f' la dérivée á gauche de f et $\mu = f''$ au sens des distributions (c'est une mesure signée). Alors :

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \sum_{0<s\leq t} [\, f(X_s) - f(X_{s^-}) - f'(X_{s^-}) \Delta X_s \,] + \frac{1}{2} \int L_t^a\, \mu(da)$$

Oú : $L_t^a = L^a(X)_t$ est le temps local passé en a par X jusqu'au temps t.

2.3.3 Propriétés du temps local :

Une conséquence de la formule d'Itô-Meyer est le résultat significatif suivant :

Corollaire (2-2) : (Formule du temps d'occupations) : Soit X une semimartingale continue de temps local L_t^a . Si g est borélienne bornée alors :

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_t^a \; g(a) \; da = \int_0^{\infty} g(X_s) \; d\langle X\rangle_s$$

Preuve de Corollaire (2-2) : Supposons g continue et positive alors notons f la fonction telle que $f'' = g$. La fonction f est convexe de classe C^2

Donc : on peut lui appliquer la formule d'Itô et la formule de Meyer-Itô Ce qui donne l'identité cherchée.

Si : g est continue de sign quelconque .On pose $g = g^+ + g^-$ et on obtient le résultat par la linéarité et ce qui précède.

Enfin pour g boréliénne bornée : on utilise le fait que les fonctions continues constituent une classe monotone pour les fonctions boréliénnes bornées.

Remarque (2-3) : Pour le MBS B cette formule donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_t^a \; g(a) \; da = \int_0^{t} g(B_s) \; ds.$$

Ainsi on voit que $L_t^a = L_t^a(B)$ peut être interprété comme le temps passé en a par le Brownien jusqu'au temps t .Plus précisément

L_t^a est la densité de la loi du temps d'occupation au temps t :

$$\nu_t(A) = \int_0^t 1_{A(B_s)} \; ds = \int_A L_t^u du$$

Corollaire (2-3) : Soit X une semimartingale càdlàg de temps local $(L^a)_{a\in R}$ Soit g une fonction borélienne bornée. Alors pour tout $t>0$

On a presque sûrement :

$$\int_R L_t^a \, g(a) \, da = \int_0^t g(X_{s^-}) \, d\, [X,X]_s^c$$

Théoréme (2-9) : Soit X une martingale locale continue. Il existe une version de L_t^a telleque $(a,t) \to L_t^a$ est conjointement continue.

Remarque (2-4) : Ce résultat n'est plus vrai pour les sousmartingales ni les semimartingales continues.

En effet posons $X_t = |B_t|$ où B_t est un MBS. La remarque ci dessus implique que $L_t^a(X)$ le temps local passé en a par X

jusqu'au temps t est

$$L_t^a(X) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a<0 \\ L_t^a(B) + L_t^{-a}(B) & si \quad a>0. \end{cases}$$

Comme $L_t^0(B) = |B_t| - \int_0^t sign\ (B_s)\ dB_s \neq 0$ .On en déduit que $a \to L_t^a(X)$ est discontinu en 0.

Le résultat qui suit montre que pour un f n'étant pas différence de deux fonctions convexe alors $f(X)$ n'est pas une semimartingale,(Une réciproque partielle du théoréme(2-5) .

Théoréme (2-10) : (de Yor) : Soit X une martingale locale continue telle que $X_0 = 0$ et soit $\alpha \in]0,1/2[$. Alors : $Y_t = |X_t|^\alpha$ n'est pas une semimartingale sauf dans

le cas trivial où : $X=0$.

Chapitre 3

EDS à coefficients Höldérien et processus de Bessel :

Le temps Local est appliqué deux exemples : Equations Différentielles Stochastiques et Le processus de Bessel .

3.1 Premiére application :

3.1.1 Equations Différentielles Stochastiques :

Définitions-Exemples :

Le but des équation différentielles stochastiques est d'étudier l'évolution d'un systéme physique perturbé par un bruit aléatoire .

Partons d'une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$d\ y_t = b(y_t)\ dt$$

On rajoute , pour exprimer ce bruit et définir son intensité un terme qui sera de la forme σdB_t où B est un mouvement brownien et σ une constante .

On obtient une équation différentielle stochastique de la forme :

$$d\ y_t = b(y_t)\ dt + \sigma\ dB_t$$

On généralise cette équation en permettant à σ de dépendre de l'état de y à l'instant t :

$$d\,y_t = b(y_t)\;dt + \sigma(y_t)\;dB_t$$

On peut encore généraliser cette équation en permettant à b et σ de dépendre aussi du temps t pour avoir enfin une équation différentielle stochastique

de la forme :

$$d\,y_t = b(t, y_t)\;dt + \sigma(t, y_t)\;dB_t$$

Cela conduit à la définition suivante .

On note par $(M)_{d\times m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $d \times m$ à coefficients réels .

Définition (3-1) : (Une solution d'une EDS) Soient d et m deux entiers positifs et soient σ et b des fonctions mesurables localement bornées définies sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ et à valeurs respectivement

dans $(M)_{d\times m}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^d$ .On note : $\sigma = (\sigma_{ij})_{1\,\leq\, i\,\leq\, d,\, 1\,\leq\, j\,\leq m}$ et $b = (b_i)_{1\,\leq\, i\,\leq\, d}$.

Une solution de l'équation :

$$E(\sigma, b)\ :\ dX_t = \sigma(t, X_t)\;dB_t + b(t, X_t)\;dt$$

Est la donnée de :

- Un espace de probabilité filtré $(\Omega\ , \mathcal{F}\ , (\mathcal{F}_t)_{t\,\geq\,0}, P)$ satifaisant les conditions habituelles .

- Un $(\mathcal{F}_t)$ - mouvement brownien défini sur cet espace et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $B = (B^1, ..., B^m)$.

- Un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté continu $X = (X^1, ..., X^d)$ à à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s)\;dB_s + \int_0^t b(s, X_s)\;ds$$

Définition (3-2) : (Différents types d'unicité) Pour l'équation $E(\sigma, b)$, on dit qu'il y a

- Existence faible si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ il existe une solution de $E_x(\sigma, b)$.

- Existence et unicité faible si de plus toutes les solutions de $E_x(\sigma, b)$ ont même loi .

- Unicité trajectorielle si l'espace de probabilité filtré $(\Omega\ , \mathcal{F}\ , (\mathcal{F}_t)_{t\ \geq 0}, P)$ et le mouvement brownien B étant fixés ,deux solutions X et X' telles que :

$$X_0 = X_0' \qquad \text{p.s sont indistinguables .}$$

On dit de plus qu'une solution X de $E_x(\sigma, b)$ est une solution forte si X est adapté par rapport à la filtration canonique de B .

Remarque : (3-1) L'unicité faible est appelée aussi unicité en loi

Exemples :

La solution d'une équation différentielles stochastiques , si elle existe , n'est pas forcément unique et si elle l'est dans un sens ,
elle ne l'est pas forcément dans l'autre .

Quelques exemples pour illustrer ceci sont donnés ci-dessous aussi qu'un théorème qui assure sous certaines conditions sur b et σ, l'existence d'une unique solution forte :

Unicité faible mais pas trajectorielle : Soit B un mouvement brownien standard .

On pose :

$$W_t = \int_0^t sgn\ (B_s)\ dB_s$$

On a alors :

$$B_t = \int_0^t sgn\ (B_s)\ dW_s$$

En effet :

$$\begin{aligned}\int_0^t sgn\ (B_s)\ dW_s &= \int_0^t sgn\ (B_s)\ sgn\ (B_s)\ dB_s \\ &= \int_0^t dB_s \\ &= B_t\end{aligned}$$

W est une martingale issue de 0 telle que $\langle\ W, W\ \rangle_t = t$ ainsi , par la caractérisation de Levy (théorème de Levy) , W est aussi un mouvement brownien .

On voit alors que :

B est solution de l'EDS

$$dX_t = sng\ (X_t)\ dW_t\ ,\quad X_0 = 0$$

On a l'unicité faible . Par la caractérisation de Lévy , toute solution doit être un mouvement brownien .

Par contre , on n'a pas d'unicité trajectorielle pour cette équation . En effet , B et $-B$ sont toutes les deux des solutions correspondant au même mouvement brownien .

Aussi , B n'est pas solution forte : Par la formule de Tanaka , la filtration canonique de W coincide avec la filtration canonique de $|B|$ qui est strictement plus petite que celle de B.En effet,l'événement $\{B_t < 0\}$ appartient à $\mathcal{F}^B$mais pas à $\mathcal{F}^{|B|}$.

Une infinité de solutions fortes et pas d'Unicité faible : Considérons l'EDS :

$$dX_t = 3\ X_t^{1/3}\ dt + 3\ X_t^{2/3}\ dB_t\ ,\quad X_0 = 0$$

et le temps d'arrêt :

$$\tau_\alpha = \inf\ \{s \geq \alpha, B_s = 0\}\quad ,\qquad \alpha \geq 0$$

Où B est un mouvement brownien standard .
Cette équation a une infinité de solution fortes de la forme :

$$X_s^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant \tau_\alpha \\ B_t^3 & \text{si} \quad \tau_\alpha \leqslant t < \infty \end{cases}$$

En effet :

$$3\int_0^t \left(X_s^{(\alpha)}\right)^{1/3} ds + 3\int_0^t \left(X_s^{(\alpha)}\right)^{2/3} dB_s = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant \tau_\alpha \\ 3\int_{\tau_\alpha}^t B_s ds + 3\int_{\tau_\alpha}^t B_s^2 dB_s & \text{sinon} \end{cases}$$

En appliquant la formule d'Itô pour $f(x) = x^3$, on a pour tout $t \geqslant \tau_\alpha$:

$$\begin{aligned} f(B_t) &= B_t^3 = B_{\tau_\alpha}^3 + 3\int_{\tau_\alpha}^t B_s^2 \, dB_s + 3\int_{\tau_\alpha}^t B_s \, ds \\ &= 3\int_{\tau_\alpha}^t B_s^2 \, dB_s + 3\int_{\tau_\alpha}^t B_s \, ds \end{aligned}$$

En effet ,comme le mouvement brownien est continu , même si cet inf n'est pas atteint , on aura quand même $B_{\tau_\alpha} = 0$

D'où :

$$\begin{aligned} 3\int_0^t X_s^{(\alpha)1/3} \, ds + 3\int_0^t X_s^{(\alpha)2/3} \, dB_s &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant \tau_\alpha \\ B_t^3 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= X_t^{(\alpha)} \end{aligned}$$

Passons à présent au théorème d'existence et d'unicité de la solution de $E_x(\sigma, b)$.
On désigne par $|.|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$.

$$3\int_0^t X_s^{(\alpha)1/3}\,ds + 3\int_0^t X_s^{(\alpha)2/3}\,dB_s = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant \tau_\alpha \\ B_t^3 & \text{sinon} \end{cases}$$
$$= X_t^{(\alpha)}$$

Passons à présent au théorème d'existence et d'unicité de la solution de $E_x(\sigma, b)$.

On désigne par $|.|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$.

Théorème d'existence et d'unicité :

Théorème (3-1) : (Existence et unicité) : On suppose qu'il existe une constance K positive telle que pour tout : $t \geq 0.x, y \in \mathbb{R}^d$.

1.Condition de Lipschitz

$$| b(t,x) - b(t,y) | + | \sigma(t,x) - \sigma(t,y) | \leq k \mid x - y \mid$$

2.Croissance linéaire

$$| b(t,x) | \leq k(1+ | x |) : \quad | \sigma(t,x) | \leq k\ (1+ | x |)$$

Alors : il ya unicité trajectorielle pour $E(\sigma, b)$.

De plus,pour tout espace de probabilité filtré $(\Omega\ , \mathcal{F}\ , (\mathcal{F}_t)_{t\ \geq 0}, P)$ et tout $(\mathcal{F}_t)_{t\ \geq 0}$−mouvement broewnien , il existe pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$,une (unique) solution forte pour $E_x(\sigma, b)$.

Exemples :

Dans cette section.on donne deux exemples de résolution d'EDS

Exemple (3-1) : Soit l'EDS suivante :

$$dX_t = -X_t\ dt + e^{-t}\ dB_t \quad , \quad X_0 = x$$

les conditions du théorème d'existence et d'unicité sont sont vérifiées, on cherche alors l'unique solution de cette EDS.

Et donc, la solution s'écrit :

$$X_t = x + e^t \, B_t$$

Exemple (3-2) : Equation d'Ornstein Uhlenbeck
On cherche à résoudre l'EDS suivante :

$$dX_t = \mu X_t \, dt + \sigma \, dB_t \quad , \quad X_0 = x$$

Où : μ et σ sont deux réels .

Le théorème d'existence et d'unicité assure qu'il existe une unique solution.

On multiplie les deux côtés de cette équation par $e^{-\mu t}$ on optient :

$$e^{-\mu t} \, dX_t = \mu X_t \, e^{-\mu t} \, dt + \sigma \, e^{-\mu t} \, dB_t$$

Ou encore :

$$e^{-\mu t} \, dX_t - \mu \, X_t \, e^{-\mu t} \, dt = \sigma \, e^{-\mu t} \, dB_t$$

D'un autre côté , la formule d'intégration par parties donne :

$$d(X_t e^{-\mu t}) = e^{-\mu t} \, dX_t - \mu \, X_t \, e^{-\mu t} \, dt$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on trouve :

$$d(X_t e^{-\mu t}) = \sigma \, e^{-\mu t} \, dB_t$$

D'où , la solution :

$$X_t = x + \sigma \, e^{\mu t} \int_0^t e^{-\mu s} \, dB_s$$

$$d(X_t e^{-\mu t}) = \sigma \ e^{-\mu t} \ dB_t$$

D'où , la solution :

$$X_t = x + \sigma \ e^{\mu t} \int_0^t e^{-\mu s} \ dB_s$$

3.1.2 Le cas de coefficients Hôldériens de support en dimention 1 :

Dans cette section , nous déccrivant une situation où l'unicité faible implique l'unicité forte , prolongeant ainsi le champ d'application de cette dernière propriété. Nous comptons beaucoup sur le temps local et par concéquent , avoir à garder de dimensionner 1 . Nous étudions l'équation $e(a,b)$ où a est localement bornée sur $\mathbb{R} \times x \ \mathbb{R}$ et envisager paires de solutions à cette équation définie sur le même espace et par rapport au même BM .Nous rappelons que toute solution X est une semimartingale continue et on note $L^X(X)$ la vertion continue à droite de ses temps locaux .

Ce qui peut paraître surprenant dans les résultats que nous sommes sur le point de prouver est que nous obtenons uncité dans les cas où il n'y a pas d'unicité d'ODE (équations différentielles ordidinaires) . .

Cela est du à l'effet de la régularisation de la variation quadratique de BM,comme on le verra dans les preuves . On peut aussi observer que, dans le cas d'EDO , la borne supérieure des deux solutions est une solution ce qui est généralement pas de même pour les EDS cause de l'apparition d'un temps local .En fait, nous avons ce qui suit .

Proposition (3-1) : Si X_1^2 et X_2 sont deux solutions de $e(a,b)$ de telle sorte que $X_0^1 = X_0^2$ p.s alors : $X^1 \vee X^2$ est une solution si et seulement $L^0(X1 - X2)$ est identiquement nulle.

preuve : par la formule de Tanaka :

$$X_t^1 \vee X_t^2 = X_t^1 + (X_t^2 - X_t^1)^+ = X_t^1 + \int_0^t 1_{(X_s^2 > X_s^1)} \ d \ (X^2 - X^1)_s + \frac{1}{2} \ L_t^0(X^2 - X^1)$$

$$X_t^1 \vee X_t^2 = (X_0^1 \vee X_0^2) + \int_0^t \sigma(s, X_s^1 \vee X_s^2)\, dB_s + \int_0^t b(s, X_s^1 \vee X_s^2)\, ds + \frac{1}{2}\, L_t^0(X^2 - X^1).$$

ce qui établit notre proposition .

Le résultat suivant est la clé de cette section .

Proposition (3-2) : Si on a l'unicité en loi pour $e(a,b)$ et si $L^0(X_1 - X_2) = 0$ pour tout couple (X_1, X_2) tel que $X_0^1 = X_0^2$ p.s,alors on a l'unicité trajectorielle pour $e(a,b)$.

preuve : Par la proposition précédente,si X_1 et X_2 sont deux solutions $X_1 \vee X_2$ est également une solution,

mais X_1 et $X_2 \vee X_1$ ne peuvent pas avoir la même loi,sauf si elles sont égales ce qui achève la démonstration .

Le lemme suivant est crucial pour vérifier l'état ci-dessus sur le temps local.à la suite ρ sera toujours pour une fonction borel de $]\ 0\ ,\ \infty\ [$ dans lui-même

telle que :

$$\int_{0^+} da/\rho(a) = +\infty$$

lemme (3-1) : Si X est une semimartingale continue de tel que , pour un certain $\varepsilon > 0$ et tout $t \geq 0$:

$$A_t = \int_0^t 1_{(0 < X_s \leq \varepsilon)} \rho(X_s)^{-1} d\langle X, X\rangle_s < \infty \quad a, s,\ alors\ :\ L^0(X) = 0.$$

preuve : Fixons $t > 0$,par la formule des temps d'occupation

$$A_t = \int_0^t \rho(a)^{-1}\, L_t^a(X)\, da$$

Si L_t^0 s'a nnule pas quand a tend vers 0 ,on obtiendrait $A_t = \infty$ avec une probabilité positive , ce qui est une contradiction .

Corollaire (3-1) : Soient $b_i, i = 1, 2$ deux fonctions de borel ;si :

$$| \sigma(s,x) - \sigma(s,y) |^2 \leq \rho \left(| x - y |\right)$$

pour chaque s, x, y et si $X^i, i = 1, 2$ sont des solutions à $E(a, b_i)$ par rapport au même BM, alors : $L^0(X^1 - X^2) = 0$

preuve : Nous avons

$$X_t^1 - X_t^2 = X_0^1 - X_0^2 + \int_0^t (\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2))\ dB_s + \int_0^t b_1(s, X_s^1) - b_1(s, X_s^2))\ ds$$

et donc :

$$\int_0^t \rho(X_s^1 - X_s^2)^{-1}(\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2))^2 1_{(X_1^1 > X_1^2)}\ ds \leq t.$$

Nous pouvons maintenant énoncer :

Théorème (3-2) : Dans chacun des cas suivants on à l'unicité trajectorielle de L'EDS $e(\sigma, b)$

i) $| \sigma(x) - \sigma(y) |^2 \leq \rho(| x - y |)$, $| \sigma | \geq \varepsilon > 0$ et b et σ sont bornés ;

ii)$| \sigma(s,x) - \sigma(s,y) |^2 \leq \rho(| x - y |)$ et b Lipschitz continu , pour chaque H compact et chaque t, il existe un constant K_t , tel que pour tout x, y en H

et $s \leq t$

$$| \sigma(s,x) - \sigma(s,y) |^2 \leq K_t \, | x - y |;$$

iii)$| \sigma(s,x) - \sigma(s,y) |^2 \leq | f(x) - f(y) |$ où : f est croissante et bornée , et b est borné

3.2 Deuxiéme application :

3.2.1 Le processus de Bessel :

Définition (3-3) : Soit $m \geq 0$ un réel. On appelle carrée de processus de Bessel de dimension m un processus à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ qui est solution de l'equation

3.2 Deuxiéme application :

3.2.1 Le processus de Bessel :

Définition (3-3) : Soit $m \geq 0$ un réel. On appelle carrée de processus de Bessel de dimension m un processus à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ qui est solution de l'equation

différentielle stochastique

$$dX_t = 2\sqrt{X_t}\, dB_t + m\; dt....(3.1)$$

Remarques (3-2) : 1) Remarquons que cette equation n'entre pas dans le cadre lipschitzien discuté dans

ce chapitre, parce que la fonction $\sigma(x) = 2\sqrt{x}$

n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ (on pourrait aussi observer que cette fonction est definie seulement sur $\mathbb{R}_+$, mais il s'agit d'un point mineur car on peut la

remplacer par $2\sqrt{\mid x \mid}$ et verifier a posteriori que la solution partant d'une valeur initiale positive reste positive).

2) Il existe en dimension un des résultats plus fins que ceux du cadre lipschitzien, qui permettent : pour un critère d'unicité et trajectorèlle qui s'applique

à (3.1).

3) L'intéret des carrés de processus de Bessel vient en partie de l'observation suivante, qui est une consequence simple de la formule d'It'ô.

Si $B = (B^1, ..., B^d)$ est un mouvement brownien en dimension d , le processus :

$$\mid B_t \mid^2 = (B_t^1)^2 + ...(B_t^d)^2$$

Est un carré de processus de Bessel de dimension entière $m = d$.

Supposons a partir de maintenant que $m \geq 0$ et $X_0 = x > 0$. Pour tout $\varepsilon \geq 0$,

notons $T_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : X_t = \varepsilon\}$. Posons pour tout $T \in [0, T_0[$,

$$M_t = \begin{cases} (X_t)^{1-\frac{m}{2}} & si \quad m > 2 \\ \log\,(X_t) & si \quad m = 2 \end{cases}$$

Et si : $m = 2$,

$$P(T_\varepsilon < T_A) = \frac{\log\ A - \log\ x}{\log\ A - \log\ \varepsilon}.$$

En particulier, en faisant tendre ε vers 0, on obtient que $P(T_0 < \infty) = 0$ (lorsque m est un entier, cela correspond a la propriété que le mouvement brownien en dimension $d \geq 2$ ne visite p.s. pas un point fixé autre que son point de départ).

Si on fait tendre A vers ∞ dans les formules precédentes, on obtient que :

$$p(T_\varepsilon < \infty) = 1 \quad si \quad m = 2 \quad et \quad p(T_\varepsilon < \infty) = (\varepsilon/X)^{(m/2)-1} \quad si \quad m > 2.$$

En prenant $m = 2$, on obtient la propriété de recurrence du mouvement brownien plan.

Il découle des remarques précédentes que le processus M_t est bien défini pour

tout $t \geq 0$ et est une martingale locale.

On montre que cette martingale locale n'est pas une vraie martingale.

Remarque (3-3) :

Le processus de Bessel de dimension m est (bien évidemment) obtenu en prenant $Y_t = \sqrt{X_t}$ et lorsque $m = d$ est un entier strictement positif il correspond

a la norme du mouvement brownien en dimension d. L'equation stochastique satis-faite par Y est cependant moins facile a manier que (3.1).

Bibliographie

[1] Abi,yad-I. Introduction aux équations différentielles stochastiques. Mémoire de magister en probabilités statistiques.

[2] AIMÉ.F,DOMINIQUE,F. Processus stochastiques. Dunod,Paris, 2002.

[3] Belabbaci-O.M. La penalisationdes trajectoires du mouvement brownien, Mémoire de magister en probabilités statistiques.

[4] Briand,P.Equations Differentielles Stochastiques Rétrograde,cours,Mars 2001.

[5] Hervé-G.Coure de calcul stochastique TIMB/TIMC-IMAG,2006.

[6] Jeanblanc,M. et Simon,T. Eléments de calcul stochastique. Cours, IRBID, sebtembre 2005.

[7] Jeanblanc,M. Exercices de calcul stochastique DESS IM Evry, option nance.Univercité d'EVRY octobre 2005.

[8] Kahane,J.P. Le mouvement brownien, Un essai sur les origines de la théorie mathématique Société Mathématique de france1998,p.123-155.

[9] LE GALL,J. F. Mouvement brownien et calcul stochastique, Cours du DEA1996 -1997. Université Pierre et Marie Curie. Janvier1997

[10] P. E. Protter. Stochastic integration and differential equations, volume 21 of Applications of Mathematics
(New York). Springer-Verlag,Berlin,second edition,2004.

[11] Protter,P. E. StochasticIntegration and Differential Equations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg NewYork, 2nd Edition.

[12] REVUZ,D. YOR,M. Continuous martingales and Brownian motion, volume 293 de Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental
Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1999. MR 2000h :60050.