République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté de Mathématiques, de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématiques Appliquées**

Par :

L'Etudiante : CHOUINI Samiha

Intitulé

EXISTENCE LOCALE

Dirigé par : Dr. BENARIOUA Khadir

Devant le jury

PRESIDENT	Mr. S. BADRAOUI	Prof	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Mr. K. BENARIOUA	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Mr. F. ELLAGGOUNE	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2015

Remerciements

✓ En premier lieu et avant tout, je remercie énormément le grand **Dieu** qui m'a aidé à réaliser ce travail.

❖ Je suis très heureuse d'exprimer ici mes respectueux remerciements et ma profonde gratitude à mon encadreur,

✓ **Dr. K. BENARIOUA,**

Pour le sujet qu'il m'a proposé, pour ses Précieux conseils, ses encouragements, ses suggestions, sa patience et sa bonne Humeur, sa grande érudition, Disponibilité et qui m'a permis d'atteindre Humblement mon But.

❖ Mes respectueux remerciements vont à Monsieur,

✓ **Prof. S. BADRAOUI,**

D'avoir accepté de juger ce travail.

❖ Mes plus vifs remerciements vont également à Monsieur,

✓ **Dr. F. ELLAGGOUNE,**

D'avoir accepté d'être membre de jury.

❖ Enfin, je remercie vivement toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin, à la réalisation De ce travail.

Samiha

Dédicace :

✓ *Je dédie ce modeste travail :*

- *A mes Parents, en guise de reconnaissance, de gratitude, et de témoignage d'Amour.*

Mille Mercis pour votre dévouement, pour toute la confiance que vous fondez sur moi, et pour l'aide inestimable que vous continuez à m'apporter.

Que dieu me donne la force pour que je puisse toujours vous honorer.

A

- *mes chères sœurs : NAÏMA, AMEL, SARA, RAJA.*
- *mes chers cousins et cousines, surtout : wassila.*
- Mon beau-frère Fares, et mon neveu *Khaled.*
- *A mes amis : Amel, hanane, fatima, selma, souhir.*

- *pour tous les bons moments que nous avons vécus ensemble.*

SAMIHA

Existence locale*

Samiha CHOUINI
Mémoire de Mastère en Mathématiques.
Université 08 mai 1945, Guelma.
Juin 2015.

« Seul le Mathématicien est un Homme Heureux. »
(Dedekind)

RÉSUMÉ : Ce mémoire traite des questions de résolubilité locale d'opérateurs différentiels linéaires. Il contient les démonstrations des théorèmes de Malgrange-Ehrenpreïs et de Cauchy-Kovalevski. Les solutions élémentaires des opérateurs les plus classiques ($\partial/\partial x_n$, Cauchy-Riemann, Laplacien, Chaleur, Schrödinger, Ondes) y sont explicitées, et on y trouve notamment trois exemples d'opérateurs sans solutions (Hans lewy, Mizohata et Grushin). On y trouve également deux conditions suffisantes à la (non) résolubilté locale d'opérateurs différentiels linéaires à cœfficients $\mathscr{C}^\infty$, et une description de problèmes liés aux plongements isométriques de structures de Cauchy-Riemann tangentielles et à l'unique continuation.

MOTS CLÉ : Opérateurs différentiels – Cœfficients constants – Cœfficients analytiques – Cœfficients $\mathscr{C}^\infty$ – Résolubilité locale – Distribution – Transformée de Fourier – Séries de Fourier – Solution élémentaire – Produit de convolution – Cauchy-Kovalevski – Séries majorantes – fortement pseudoconvexe – Hans lewy – Mizohata – Grushin – Holomorphie – Formule de Cauchy – Hartogs.

Table des matières

*Document saisi à l'aide du logiciel de traitement de texte TEX, au format LaTeX 2_ε.

1 Rappels, Notations et Conventions

1.1 Généralités

Les notations sont celles des équations aux dérivées partielles. Lorsque d est un nombre entier strictement positif, $x=(x_1,x_2,\dots,x_d)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^d$, et $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_d)$ est un d-multi-indice (*i.e* un d-uple de nombres entiers ≥ 0), on pose :

$$|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_d \tag{1}$$

$$\|x\| = (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_d^2)^{1/2} \tag{2}$$

$$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\dots\alpha_d! \tag{3}$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_d^{\alpha_d} \tag{4}$$

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (\text{pour } j = 1,2,\dots,d) \tag{5}$$

$$\partial = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_d) \tag{6}$$

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\dots\partial_d^{\alpha_d} \tag{7}$$

$$D_j = \frac{1}{i}\partial_j \quad (\text{pour } j = 1,2,\dots,d, \text{ et } i^2 = -1) \tag{8}$$

$$D = \frac{1}{i}\partial \tag{9}$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\dots D_d^{\alpha_d} \tag{10}$$

de telle sorte que, pour une fonction f suffisamment différentiable, la formule de Taylor s'écrit :

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha|<N} \partial^\alpha f(x)\frac{h^\alpha}{\alpha!} + O(\|h\|^N). \tag{11}$$

1.2 Fonctions test et distributions

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, K une partie compacte de Ω, k un entier naturel, et rappelons que :

- $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions réelles ou complexes, continues sur $\mathbb{R}^n$ et tendant vers zéro à l'infini (*i.e* quand $|x| \to \infty$).

- $\mathscr{C}^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions réelles ou complexes, k-fois continûment différentiables sur Ω. C'est un espace de Fréchet [1] pour la topologie définie par la famille de semi-normes $(N_{K,k})_K$ où K décrit les compacts de Ω et,

$$\forall f \in \mathscr{C}^k(\Omega), \quad N_{K,k}(f) = \sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\le k}} |\partial^\alpha f(x)|. \tag{12}$$

- $\mathscr{C}_b^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions réelles ou complexes, k-fois continûment différentiables sur Ω, bornées ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k. C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|f\|_{\mathscr{C}_b^k} \equiv \sup_{\substack{x\in\Omega\\ |\alpha|\le k}} |\partial^\alpha f(x)|. \tag{13}$$

1. Un espace de Fréchet est un espace **localement convexe** (*i.e* dont la topologie est définie par une famille de semi-normes $(p_\alpha)_{\alpha\in I}$ qui sépare les points, c-à-d. telle que si $p_\alpha(x) = 0$ pour tout $\alpha \in I$, alors $x = 0$), **métrisable** (*i.e* de topologie définie par une famille dénombrable de semi-normes) et **complet**.

• $\mathscr{C}_K^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions réelles ou complexes, k-fois continûment différentiables sur Ω, à supports[2] dans K. C'est un espace de Banach pour la norme $N_{K,k}$.

• $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ (parfois noté $\mathscr{E}(\Omega)$) est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω $\left(\mathscr{C}^\infty(\Omega) = \cap_{k=0}^\infty \mathscr{C}^k(\Omega)\right)$. C'est un espace de Fréchet pour la topologie définie par la famille de semi-normes $(N_{K,k})_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ K\Subset\Omega}}$.

• $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ (également noté $\mathscr{D}(\Omega)$) est l'espace des fonctions réelles ou complexes, indéfiniment différentiables sur Ω, à support compact. Par définition, une application sur $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ est continue si, et seulement si, sa restriction à $\mathscr{C}_K^\infty(\Omega)$ est continue pour tout compact $K \Subset \Omega$.

• $\mathscr{C}^{-\infty}(\Omega)$ (ou $\mathscr{D}'(\Omega)$) est le dual topologique de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$; c'est l'espace des distributions sur Ω. Sur $\mathscr{C}^{-\infty}(\Omega)$, on dispose de plusieurs topologies : la topologie faible, qui est la topologie de la convergence simple sur $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$, et la topologie forte, qui est celle de la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ (une partie B de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ est bornée s'il existe un compact $K \Subset \Omega$ tel que $B \subset \mathscr{C}_K^\infty(\Omega)$ et, pour tout entier $k \geq 0$, $N_{K,k}(B) = \sup_{\varphi\in B} N_{K,k}(\varphi) < \infty$). La topologie faible (resp. forte) est définie par la famille de semi-normes $(p_F)_F$ telle que :

$$\forall T \in \mathscr{C}^{-\infty}(\Omega), \quad p_F(T) = \sup_{\varphi\in F} |\langle T, \varphi\rangle| \tag{14}$$

où F parcourt l'ensemble des parties finies (resp. des parties bornées) de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$. La topologie forte est, comme son nom l'indique, (vraiment) plus fine que la topologie faible : Une **famille** qui converge faiblement ne converge pas toujours fortement. Cependant on a le résultat (qui a l'air miraculeux) :

> Si $(T_n)_n$ est une **suite** de distributions qui converge simplement vers une limite T, alors T est une distribution, et T_n tend fortement vers T. (15)

• $\mathscr{C}(]a,b[, \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))$ $\Big($noté également $\mathscr{C}(a,b;\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))\Big)$ est l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^d\times]a,b[$, continues en la variable de $]a,b[$: A toute U continue de $]a,b[$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$, on associe injectivement la distribution $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d\times]a,b[)$ en posant :

$$\langle u, \varphi\rangle = \int_a^b \langle U(t), \varphi(.,t)\rangle dt \quad \text{où} \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d\times]a,b[). \tag{16}$$

2. Le support d'une fonction f (noté Supp f) est le plus petit ensemble fermé dans le complémentaire duquel f est nulle.

Pour tout $t_0 \in]a, b[$, la « trace sectionnelle » de u sur $\mathbb{R}^d \times \{t_0\}$ est définie par $u(., t = t_0) = U(t_0)$.

• $\mathscr{E}'(\Omega)$ est le dual topologique de $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$; c'est l'espace des distributions à supports compacts sur Ω.

• $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbb{R}^n$ à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées de tout ordre. $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si :

$$f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ et, } \forall N \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathbb{N}^n, (1+|x|)^N \partial^\beta f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^n, \tag{17}$$

ce qui équivaut à

$$f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ et, } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \beta \in \mathbb{N}^n, x^\alpha \partial^\beta f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^n. \tag{18}$$

La topologie naturelle de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, et qui en fait un espace de fréchet, est celle définie par l'une des familles équivalentes de semi-normes :

$$p_N(f) = \sup_{\substack{|\beta|\leq N \\ x\in\mathbb{R}^n}} (1+|x|)^N |\partial^\beta f(x)|, \tag{19}$$

$$p_{N,\beta}(f) = \sup_{\substack{|\alpha|\leq N \\ x\in\mathbb{R}^n}} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|, \tag{20}$$

$$p_{\alpha,N}(f) = \sup_{\substack{|\beta|\leq N \\ x\in\mathbb{R}^n}} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|, \tag{21}$$

$$p_{N,k}(f) = \sup_{\substack{|\alpha|\leq N, |\beta|\leq k \\ x\in\mathbb{R}^n}} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|. \tag{22}$$

Enfin, de (15) on déduit que

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n) \tag{23}$$

et de (16) et de la formule de Leibniz, il découle que :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{La dérivation et la multiplication par un monôme sont} \\ \text{des applications continues de } \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \text{ dans } \mathscr{S}(\mathbb{R}^n). \end{array} \right. \tag{24}$$

• $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ est le dual topologique de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$: C'est l'espace (de Schwartz) des distributions tempérées. Il est muni, soit de la topologie duale faible, soit de la topologie duale forte.

• $\mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n)$ est l'espace vectoriel des fonctions $\alpha \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que l'application $T \mapsto \alpha T$ soit continue de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. $\mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n)$ est appelé l'espace des multiplicateurs de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Si $\alpha \in \mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, $D^\beta \alpha$ est une fonction à croissance lente, c'est-à-dire une fonction qui ne croît pas plus vite qu'un polynôme lorsque $|x| \to \infty$.

1.3 Produit de convolution et produit tensoriel

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^n$, leur produit de convolution est la fonction sur $\mathbb{R}^n$, notée $f * g$, et définie par :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \; \Big(= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y = (g * f)(x) \Big), \tag{25}$$

et leur produit externe (ou produit tensoriel) est la fonction $f \otimes g$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, définie par :

$$(f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y). \tag{26}$$

Si h, φ et ψ sont des fonctions continues (ou mesurables) bornées sur $\mathbb{R}^n$, on a d'après le théorème de Fubini :

$$\langle f * g, h \rangle = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} h(x+y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{27}$$

$$\langle f \otimes g, \varphi \otimes \psi \rangle = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} (f \otimes g)(x,y)(\varphi \otimes \psi)(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \langle f, \varphi \rangle \langle g, \psi \rangle. \tag{28}$$

La dernière formule caractérise le produit externe et permet de le définir pour deux distributions : On démontre en effet que si T et S sont deux distributions sur $\mathbb{R}^n$, il existe une unique distribution sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ notée $T \otimes S$ et appelée produit externe (ou produit tensoriel) de T et S, telle que : $\forall \varphi, \psi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle T \otimes S, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \langle S, \psi \rangle. \tag{29}$$

On définit alors le produit de convolution de deux distributions à support compact S et T, comme étant la distribution à support compact notée $T * S$, telle que :

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n),\ \langle T * S, \varphi \rangle = \langle T \otimes S, \varphi(x+y) \rangle. \tag{30}$$

Les principales propriétés de la convolution sont :

$$u * v = v * u \tag{31}$$

$$\delta * v = v * \delta = v \tag{32}$$

$$\partial^\alpha(u * v) = (\partial^\alpha u) * v = u * (\partial^\alpha v) \tag{33}$$

$$\mathrm{Supp}\,(u * v) \subset \mathrm{Supp}\,u + \mathrm{Supp}\,v \tag{34}$$

et si $u \in \mathscr{C}^{-\infty}$, $v \in \mathscr{C}^\infty$, et u ou v est à support compact, alors :

$$u * v \in \mathscr{C}^\infty \quad \text{et} \quad (u * v)(x) = \langle u, \tau_x \check{v} \rangle \tag{35}$$

Sachant que $\tau_x \check{v}(t) = v(x-t)$.

1.4 Séries de Fourier de fonctions et de distributions 2π-périodiques

On définit les Séries de Fourier des fonctions et des distributions sur $\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ par :

$$u(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \widehat{u}(m)e^{imx}, \tag{36}$$

où :

$$\widehat{u}(m) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{T}^n} u(x)e^{imx}dx, \tag{37}$$

si u est une fonction, et

$$\widehat{u}(m) = (2\pi)^{-n} < u, e^{imx} >, \tag{38}$$

si u est une distribution. Il en découle alors les propriétés suivantes :

$$\sum_m |\widehat{u}(m)|^2 = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{T}^n} |u(x)|^2 dx \quad \text{(Parseval-Plancherel)} \tag{39}$$

$$D^\alpha u(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} m^\alpha \widehat{u}(m)e^{imx} \quad \text{(Dérivation)} \tag{40}$$

$$\left(u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)\right) \Longleftrightarrow \left(\forall k \in \mathbb{Z}^n,\ \sup_{m\in\mathbb{Z}^n}(1+|m|)^k|\widehat{u}(m)| < \infty\right) \tag{41}$$

$$\left(u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)\right) \Longleftrightarrow \left(\forall l \in \mathbb{Z}^n,\ |\widehat{u}(m)| \leq C(1+|m|)^l\right) \tag{42}$$

1.5 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier $\widehat{f}$ (notée aussi $\mathscr{F}f$) d'une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}^n$ est définie par la formule :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}f(x)dx. \tag{43}$$

On démontre aisément que

$$\mathscr{F} \text{ est linéaire,} \tag{44}$$

que

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \widehat{f} \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n) \ \text{(lemme de Riemann-Lebesgue),} \tag{45}$$

et que quelles que soient f et g dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx \ \text{(théorème du transfert),} \tag{46}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g}(x)dx \text{ (th. de Plancherel-Parseval).} \tag{47}$$

On démontre également que

$$\mathscr{F} \text{ est continue de } L^1 \longrightarrow L^\infty, \tag{48}$$

et que

$$\mathscr{F} \text{ induit un isomorphisme de } \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S} \tag{49}$$

$$\text{qui se prolonge en un isomorphisme de } \mathscr{S}' \longrightarrow \mathscr{S}' \tag{50}$$

$$\text{et en une isométrie de } L^2 \longrightarrow L^2. \tag{51}$$

Par définition, la transformée de Fourier d'une distribution tempérée $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ est la distribution tempérée $\widehat{u}$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle. \tag{52}$$

L'isomorphisme inverse $\mathscr{F}^{-1}$ est la cotransformée de Fourier notée aussi $\overline{\mathscr{F}}$:

$$[\mathscr{F}^{-1}f](x) = [\overline{\mathscr{F}}f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x)dx. \tag{53}$$

Enfin, la transformation de Fourier jouit des propriétés (dites d'échange) suivantes :

$$\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}(\mathscr{F}f)(\mathscr{F}g), \tag{54}$$

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \forall g \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}(fg) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}[(\mathscr{F}f) * (\mathscr{F}g)], \tag{55}$$

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \forall g \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}^{-1}(fg) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}[(\mathscr{F}^{-1}f) * (\mathscr{F}^{-1}g)], \tag{56}$$

$$\forall u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}(D^\alpha u) = \xi^\alpha \mathscr{F}u, \tag{57}$$

$$\forall u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}(P(D)u) = P(\xi)\mathscr{F}u \quad \text{et} \quad \mathscr{F}^{-1}(P(-D))u = P(\xi)\mathscr{F}^{-1}u, \tag{58}$$

$$\mathscr{F}(\delta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \quad \text{et} \quad \mathscr{F}(1) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta. \tag{59}$$

2 Introduction

Dans ce mémoire, on étudie la question de la résolubilité locale d'équations aux dérivées partielles (EDP) :

$$Pu = f \tag{60}$$

où

$$P = P(x, D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{61}$$

est un opérateur différentiel linéaire à cœfficients $\mathscr{C}^\infty$ sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^n$.

Une formulation de ladite question est la suivante :

> *Etant donné x_0 quelconque dans Ω, existe-t-il un voisinage ouvert V de x_0 dans Ω tel que, pour toute distribution $f \in \mathscr{D}'(V)$, on puisse trouver une distribution $u \in \mathscr{D}'(V)$ qui vérifie $Pu = f$ sur V ?*

Si c'est le cas, on dit que l'opérateur (61) ou que l'équation (60) est ***localement résoluble*** sur Ω. C'est précisément le cas si P est à cœfficients constants, ou à cœfficients analytiques ainsi que le second membre g de (60), ou carrément si P est un champ de vecteurs réels agissant sur les fonctions réelles en tant que dérivée directionnelle.

> *Si P est un opérateur différentiel linéaire non nul à cœfficients constants, le théorème de Malgrange-Ehrenpreis garantit l'existence d'une solution élémentaire[3] pour P, donc assure l'existence d'une solution pour l'équation $Pu = f$ car il suffit alors de prendre $u = E \star f$.*

On connaît depuis fort longtemps les solutions élémentaires des opérateurs les plus classiques :

Opérateur P	**Une solution élémentaire E**
∂_n	$1_{(x_1,\dots,x_{n-1})} \otimes Y(x_n)$
$\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ (Cauchy-Riemann)	$\dfrac{1}{\pi(x+iy)}$
$\Delta = \partial_1^2 + \ldots + \partial_n^2$ (Laplacien)	$\dfrac{\lvert x\rvert^{2-n}}{(2-n)\lvert S^{n-1}\rvert}$; $n \geq 3$,
$\partial_t - \Delta$ (La chaleur)	$\dfrac{Y(t)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\dfrac{\lvert x\rvert^2}{4t}\right)$
$D_t + \Delta$ (Schrödinger)	$\dfrac{Y(t)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\dfrac{\lvert x\rvert^2}{4t} - in\dfrac{\pi}{4}\right)$
$\partial_{tt}^2 - \Delta$ (Ondes)	$< E, \varphi >= \displaystyle\int \dfrac{\hat{\varphi}(\xi, \tau - i\gamma)}{\lvert\xi\rvert^2 - (\tau - i\gamma)^2}\, d\xi d\tau$ Pour $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}), \gamma$ constante > 0

3. Une solution élémentaire pour P est une distribution E telle que $PE = \delta$.

Si $P(x,D)$ est à cœfficients analytiques, le théorème de Cauchy-Kovalevsky fournit une solution analytique pour l'équation $Pu = f$, à condition que le second membre f le soit également.

Malheureusement, cette solution n'existe que sur un intervalle "de temps" relativement court, dépendant souvent de la donnée initiale, et l'analyticité de cette dernière est peu probable dans "la vraie vie".

Pour les opérateurs à cœfficients $\mathscr{C}^\infty$, le cas le plus simple est celui où $P(x,\partial) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\partial_j$ est un champ de vecteurs réels agissant sur les fonctions réelles en tant que dérivée directionnelle. La résolution de l'edp, $P(x,\partial)u = f$ se fait sur les courbes intégrales de $P(x,\partial)$, et se ramène à celle d'équations différentielles linéaires du premier ordre. Localement, on peut se passer des courbes intégrales de $P(x,\partial)$ et trouver un système de coordonnées locales $(y_1,\ldots,y_n)$ dans lequel P prend la forme particulièrement simple $P(x,\partial) = \lambda\frac{\partial}{\partial y_n}$ où $\lambda \neq 0$ (Théorème de redressement de Frobenius). Les solutions de $P(x,\partial)u = 0$ sont alors les fonctions arbitraires de $(y_1,\ldots,y_{n-1})$.

Si P est vraiment à cœfficients complexes et agit sur les fonctions complexes, et en particulier si le second membre f n'est pas analytique, il en va tout autrement :

En 1957, Hans Lewy [4] présenta son fameux exemple sur $\mathbb{R}^3$:

Si :

$$L = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\Big) + i(x_1 + ix_2)\frac{\partial}{\partial x_3}, \tag{62}$$

alors l'équation $Lu = f$ ne possède aucune solution distribution dans aucun ouvert V, et cela pour « presque[4] » toute fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Dans le même temps, il formula les deux questions :

Soit

$$P = \sum_{j=1}^{3} a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{63}$$

un opérateur différentiel linéaire à cœfficients complexes et $\mathscr{C}^\infty$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^3$, tels que $\sum_{j=1}^{3}|a_j| \neq 0$.

QUESTION 1. *L'équation $Pw = 0$ a-t-elle toujours une solution non triviale ?*

QUESTION 2. *On suppose que P est "fortement pseudo-convexe", c'est-à-dire que P, $\overline{P}$ et leur commutateur $[P,\overline{P}]$ $(= P\overline{P} - \overline{P}P)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$. Dans ce cas, l'équation $Pw = 0$ admet-elle localement deux solutions de gradients linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$?*

4. Au sens de Baire.

Evidemment, l'opérateur L de H. Lewy est fortement pseudo-convexe, les fonctions $w_1 = z$ et $w_2 = \overline{z}^2 + 2ix_3$ où $z = x_1 + ix_2$ sont de gradients linéairement indépendants, et on a : $Lw_1 = Lw_2 = 0$. Mais dans [7], L. Nirenberg a construit à partir de l'opérateur de H. Lewy, un opérateur dont les seules solutions sont les constantes :

On suppose que :

$$N = L + z\varphi\frac{\partial}{\partial x_3} + z\psi\frac{\partial}{\partial \theta}, \tag{64}$$

où :

❶ $z = x_1 + ix_2 = re^{i\theta}$,

❷ *L est l'opérateur de H. Lewy,*

❸ $\frac{\partial}{\partial\theta} = i\left(z\frac{\partial}{\partial z} - \overline{z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)$ *avec :* $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$

❹ *φ et ψ sont des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^3$, quelque peu compliquées à décrire mais, disons qu'elles sont plates (i.e s'annulent idéfiniment) sur l'axe des x_3, et analytiques en θ, pour tout $r > 0$ et tout x_3,*

Dans ce cas :

① *N, $\overline{N}$ et $[N, \overline{N}]$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$.*

② *Si $w \in \mathscr{C}^1$ et $Nw = 0$ dans 1 vois. connexe du 0 de $\mathbb{R}^3$, alors $w = cste$.*

Les questions 1 et 2 sont intimement liées à un autre résultat de H. Lewy [5] (sorte de théorème d'extension de Hartogs) concernant les fonctions de deux variables complexes, et que nous décrivons maintenant : Dans l'espace $\mathbb{C}^2$ où les variables sont notées (z_1, z_2), soit Ω un domaine dont le bord $\partial\Omega$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, soit $T\partial\Omega$ et $T\mathbb{C}^2$ les fibrés tangents respectifs des variétés réelles sous-jacentes à $\partial\Omega$ et à $\mathbb{C}^2$, et désignons par $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} T\partial\Omega$ et $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} T\mathbb{C}^2$ les complexifiés respectifs (sur $\mathbb{R}$) de $T\partial\Omega$ et $T\mathbb{C}^2$. Le complexifié de $T\mathbb{C}^2$ a la décomposition $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} T\mathbb{C}^2 = T_{1,0} \oplus T_{0,1}$ en vecteurs holomorphes et antiholomorphes, $T_{1,0}$ est engendré par $\{\partial/\partial z_1, \partial/\partial z_2\}$ et $T_{0,1}$ par $\{\partial/\partial \overline{z_1}, \partial/\partial \overline{z_2}\}$. Si $V = (\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} T\partial\Omega) \cap T_{0,1}$ est le système de Cauchy-Riemann induit sur $\partial\Omega$, alors $V \cap \overline{V} = \{0\}$ (section nulle) car $\overline{\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} T\partial\Omega} = \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} T\partial\Omega$ et $T_{0,1} \cap \overline{T_{0,1}} = T_{0,1} \cap T_{1,0} = \{0\}$ (section nulle), et cela montre que les fibres de V sont de dimension 1 sur $\mathbb{C}$ car celles de $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} T\partial\Omega$ sont de dimension 3. Localement, on peut supposer que $\Omega = \{(z_1, z_2) \ / \ \varrho(z_1, z_2) < 0\}$ et que $\partial\Omega = \{(z_1, z_2) \ / \ \varrho(z_1, z_2) = 0\}$, où ϱ est une fonction suffisamment régulière, de sorte que $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} T\partial\Omega = \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} [\nabla\varrho]^{\perp}$. Soit maintenant

$$P = (\partial\varrho/\partial\overline{z_1})\frac{\partial}{\partial\overline{z_2}} - (\partial\varrho/\partial\overline{z_2})\frac{\partial}{\partial\overline{z_1}} \tag{65}$$

un élément de $T_{0,1}$; comme $(P/\nabla\varrho) = P\varrho = 0$, on conclut que $P \in V$, et que tout générateur de V (que l'on convient d'appeler opérateur de Cauchy-Riemann induit sur $\partial\Omega$) est égal à P, modulo un facteur de classe $\mathscr{C}^\infty$. Ainsi, la restriction à $\partial\Omega$ (valeur au bord) de toute fonction w holomorphe dans Ω (*i.e* de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\overline{\Omega}$ et satisfaisant aux équations de Cauchy-Riemann : $\partial w/\partial\overline{z_1} = \partial w/\partial\overline{z_2} = 0$ dans Ω) vérifie l'« équation de Cauchy-Riemann induite » :

$$Pw = 0.$$

L'opérateur P est, en termes de coordonnées locales, de la forme (63), et le fait de supposer que Ω est fortement pseudo-convexe, c'est-à-dire que la forme de Lewy (Hessienne de ϱ) $\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2\varrho}{\partial z_i \partial\overline{z_j}} \lambda_i \overline{\lambda_j}$ est définie positive sur $\partial\Omega$ pour tous les vecteurs complexes (λ_1, λ_2) tels que $\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial\varrho}{\partial\overline{z_j}} \lambda_j = 0$ implique que :

$$P,\ \overline{P} \text{ et } [P, \overline{P}] \text{ sont linéairement indépendants.} \tag{66}$$

Réciproquement, si un élément P de V vérifie (66), tout autre élément de V la vérifie (on dit alors que cet élément, ou que V, est fortement pseudo-convexe), et cela implique que l'un des deux domaines bordés par $\partial\Omega$ (Ω ou $\mathbb{C}^2 \setminus \Omega$) est à son tour fortement pseudo-convexe, mais ne dit pas lequel des deux. Dans le cas particulier où Ω est la boule unité de $\mathbb{C}^2$, et dans un choix convenable de coordonnées, l'opéateur (65) n'est rien d'autre que l'opérateur L de Hans lewy (62), et dans tout autre choix de coordonnées, il lui est egal modulo un facteur réel $\mathscr{C}^\infty$ qui ne s'annule jamais. Dans [5], Hans Lewy démontra que :

Si w est une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\partial\Omega$, dans un voisinage d'un point (z_1^0, z_2^0), et telle que $Pw = 0$ où P est l'opérateur (65), il existe un voisinage ouvert U de (z_1^0, z_2^0) dans $\mathbb{C}^2$ tel que w puisse se prolonger en une fonction holomorphe sur $U \cap \Omega$.

Par la même occasion,

Il s'interrogea sur la question de savoir si toute équation $Pw = 0$, où P est l'opérateur (63) soumis aux conditions (66), provient localement d'un domaine fortement pseudo-convexe Ω dans $\mathbb{C}^2$, en tant que restriction des équations de Cauchy-Riemann à $\partial\Omega$,

et démontra que :

Une condition nécessaire et suffisante à cela est que l'équation homogène $Pw = 0$ admette localement deux solutions z_1 et z_2 de gradients linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$, De même, L. Nirenberg conjectura dans [7] que :

Si w est une solution $\mathscr{C}^\infty$ dans un domaine G de $\mathbb{R}^3$ de l'équation $Pw = 0$, où P est l'opérateur (63) satifaisant aux conditions (66), et si w est nulle dans un sous-ensemble ouvert G' de G, alors w est identiquement nulle sur G.

Beaucoup de résultats sont connus sur l'unique continuation et l'unicité du problème de Cauchy mais aucun d'entre eux ne résout la question. La technique standard des estimations de Carleman doit nécessairement échouer puisque de telles estimations conduisent à la résolubilité locale de l'équation $Pu = f \in \mathscr{C}^\infty$. Une autre approche naturelle de cette conjecture est celle via les fonctions analytiques sur $\mathbb{C}^2$:

La conjecture précédente est vraie dans le cas où l'équation $Pw = 0$ admet deux solutions φ_1 et φ_2 de gradients linéairement indépendants,

puisque, si tel est le cas, et si : $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, Γ est l'hypersurface fortement pseudo-convexe de $\mathbb{C}^2$ égale à $\varphi(G)$, $\widetilde{P}$ est l'opérateur défini dans un voisinage de Γ par $\widetilde{P}f(z) = [P(f \circ \varphi)]\,(\varphi^{-1}(z))$, alors $\widetilde{P}$ est fortement pseudo-convexe, $\widetilde{P}(w \circ \varphi^{-1}) = 0$ sur Γ, et (*cf.* [5]) $w \circ \varphi^{-1}$ se prolonge du côté fortement peudo-convexe de Γ en une fonction holomorphe. Comme $w \circ \varphi^{-1} = 0$ sur $\Gamma' = \varphi(G')$, elle sera nulle sur tout l'ouvert auquel elle a été étendue, et cela démontre ainsi que $w = 0$ sur G.

3 Opérateurs linéaires à cœfficients constants

Selon Malgrange et Ehrenpreis, tout opérateur différentiel linéaire non nul à cœfficients constants est localement résoluble sur $\mathbb{R}^n$. Dans ce chapitre nous donnons deux démonstrations de ce résultat : Une globale (due à Hörmander), et une seconde purement locale (due à Taylor et Dadok).

3.1 Le cas global

3.1.1 Solution élémentaire

Définition 3.1.1. *Soit $P(D)$ un opérateur différentiel linéaire à cœfficients constants sur $\mathbb{R}^n$. On dit que $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ est solution élémentaire de $P(D)$ ssi : $P(D)E = \delta$.*

Théorème 3.1.1. *(Malgrange-Ehrenpreis) Tout opérateur différentiel linéaire non nul à cœfficients constants admet une solution élémentaire dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration.

Ce théorème général a été démontré par Ehrenpreiss et Malgrange. La démonstration que nous donnons ici est due à L. Hörmander [3]. L'idée principale est de définir E en tant que transformée de Fourier inverse de $\frac{1}{P(\xi)}$, c'est-à-dire par une formule du type :

$$\langle E, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathscr{F}^{-1}(\varphi)(\xi)}{P(\xi)} \, d\xi, \;\; \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{67}$$

Si, quel que soit $\xi \in \mathbb{R}^n$, $P(\xi) \neq 0$, c'est bel et bien la formule (67) qui définit E. En effet, la fonction $\frac{1}{P(\xi)}$ est $\mathscr{C}^\infty$ à croissance lente, ainsi que toutes ses dérivées :

$$\frac{1}{P(\xi)} \in \mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n)$$

Donc, E (ainsi définie) est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n$. De plus, $\forall \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
\langle P(D)E, \varphi \rangle &= \langle E, P(-D)\varphi \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathscr{F}^{-1}[P(-D)\varphi](\xi)}{P(\xi)} \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}^{-1}(\varphi)(\xi) \, d\xi \\
&= \langle 1, \mathscr{F}^{-1}(\varphi) \rangle \\
&= \langle \mathscr{F}(\delta), \mathscr{F}^{-1}(\varphi) \rangle \\
&= \langle \delta, \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

ce qui veut dire que

$$P(D)E = \delta,$$

et que E est solution élémentaire de $P(D)$.

Dans le cas général, on utilise le lemme suivant :

lemme 3.1.1. *Si $P(D) \neq 0$, il existe une suite $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec $\theta_k \in \mathbb{R}^n$ et $|\theta_k| \leq 1$, une partition* [5] *de l'unité $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec $\rho_k \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, et une constante $c > 0$ telles que $|P(\xi + z\theta_k)| \geq c$ pour $\xi \in \operatorname{supp}\rho_k$, $z \in \mathbb{C}$ et $|z| = 1$.*

L'idée est d'intégrer dans le champs complexe pour éviter les zéros de $P(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$, ce qui nous donne la formule :

5. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $(V_j)_j$ un de ses recouvrements par des ouverts. Une partition de l'unité sur Ω subordonnée à $(V_j)_j$ est une famille de fonctions $(\varphi_j)_j$ dans $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ telles que : $\operatorname{supp}\varphi_j \subset V_j$, la famille $(\operatorname{supp}\varphi_j)_j$ est localement finie (c'est-à-dire : Pour tout compact K de Ω, l'ensemble des indices j tels que $\operatorname{supp}\varphi_j \cap K \neq \emptyset$ est fini), $\sum \varphi_j = 1$, et $\varphi_j \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\langle E,\varphi\rangle &= \langle E,\mathscr{F}(\mathscr{F}^{-1}\varphi)\rangle\\
&= \langle \widehat{E},\mathscr{F}^{-1}\varphi\rangle\\
&= \langle \sum_k \rho_k\widehat{E},\mathscr{F}^{-1}\varphi\rangle\\
&= \sum_k \langle \rho_k\widehat{E},\mathscr{F}^{-1}\varphi\rangle\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \langle \widehat{E},\rho_k\mathscr{F}^{-1}\varphi\rangle\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho_k(\xi)(\mathscr{F}^{-1}\varphi)(\xi)}{P(\xi)}d(\xi)
\end{aligned}$$

Si maintenant f est la fonction sur $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z)=\frac{(\mathscr{F}^{-1}\varphi)(\xi+\theta_k z)}{P(\xi+\theta_k z)}$$

alors

$$f(0)=\frac{(\mathscr{F}^{-1}\varphi)(\xi)}{P(\xi)}$$

et on peut facilement voir que f est Holomorphe. D'après la formule de Cauchy,

$$f(z_0)=\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz,\, |z_0|<1.$$

Donc :

$$f(0)=\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}dz$$

c'est-à-dire :

$$\frac{(\mathscr{F}^{-1}\varphi)(\xi)}{P(\xi)}=\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{(\mathscr{F}^{-1}\varphi)(\xi+\theta_k z)}{P(\xi+\theta_k z)}\times\frac{dz}{z}$$

Par conséquent :

$$\langle E,\varphi\rangle=\sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k(\xi)\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{\mathscr{F}^{-1}(\varphi)(\xi+z\theta_k)}{P(\xi+z\theta_k)}\times\frac{dz}{z}\right)d\xi,\quad \varphi\in\mathscr{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n). \quad (68)$$

Dans la formule (68), on a $\varphi\in\mathscr{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Donc, d'après le théorème de Paley-Wiener [6], $\mathscr{F}^{-1}(\varphi)$ se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}^n$ que l'on note encore $\mathscr{F}^{-1}(\varphi)$,

6. Théorème de Paley-Wiener : Soit f une distribution tempérée, $\mathscr{F}f$ sa transformée de Fourier. Alors f est une distribution (resp. fonction test) à support dans la boule de rayon R si et seulement si :
(i) $\mathscr{F}f$ se prolonge en une fonction holomorphe de $\zeta=\xi+i\eta$, dans $\mathbb{C}^n$ tout entier.
(ii) Il existe N tel que $|\mathscr{F}f(\zeta)|\leq C^{ste}(1+|\zeta|)^N e^{R|\eta|}$, resp.
(ii-bis) Pour tout N on a $|\mathscr{F}f(\zeta)|\leq C^{ste}(1+|\zeta|)^{-N}e^{R|\eta|}$

et cela donne un sens à $\mathscr{F}^{-1}(\varphi)(\xi+z\theta_k)$ et permet de bien définir (68). En utilisant l'inégalité du lemme 3.1.1., et l'inégalité immédiate,

$$\sup_{\substack{|z|=1\\k\in\mathbb{N}}}|\mathscr{F}^{-1}(\varphi)(\xi+z\theta_k)|\leq CN_{K,n+1}(\varphi)(1+|\xi|)^{-n-1},\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\varphi\in\mathbb{C}_K^\infty$$

on peut facilment voir que E est une distribution. Ainsi, pour tout $\varphi\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
\langle P(D)E,\varphi\rangle &= \sum_k\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k(\xi)\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{\mathscr{F}^{-1}[P(-D)\varphi](\xi+z\theta_k)}{P(\xi+z\theta_k)}\times\frac{dz}{z}\right)d\xi\\
&= \sum_k\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k(\xi)\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1}\frac{\mathscr{F}^{-1}(\varphi)(\xi+z\theta_k)}{z}\,dz\right)d\xi\\
&= \sum_k\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k(\xi)\mathscr{F}^{-1}(\varphi)(\xi)\,d\xi\\
&= \sum_k\langle\rho_k,\mathscr{F}^{-1}(\varphi)\rangle\\
&= \left\langle\sum_k\rho_k,\mathscr{F}^{-1}(\varphi)\right\rangle\\
&= \langle 1,\mathscr{F}^{-1}(\varphi)\rangle\\
&= \langle\mathscr{F}(\delta),\mathscr{F}^{-1}(\varphi)\rangle\\
&= \langle\delta,\varphi\rangle
\end{aligned}$$

Ce qui démontre que, $P(D)E=\delta$, et que E est solution élémentaire de $P(D)$. □

3.1.2 Solution du problème

L'importance d'une solution élémentaire E pour un opérateur différentiel linéaire à cœfficients constants $P(D)$ réside dans le fait que, si $L:\mathscr{E}'\to\mathscr{E}'$ est l'opérateur de convolution défini par :

$$\forall u\in\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n),\ Lu=E*u,$$

on a :

$$L\circ P(D)=P(D)\circ L=Id,$$

car :

$$[L\circ P(D)]u=L[P(D)u]=E*[P(D)u]=[P(D)E]*u=\delta*u=u,$$

et

$$[P(D)\circ L]u=P(D)(Lu)=P(D)(E*u)=[P(D)E]*u=\delta*u=u.$$

En composant avec une homothétie de centre l'origine et de rapport $\frac{R}{\pi}$, et en prolongeant en une fonction 2π-périodique la composée de g par ladite homothétie, on peut supposer que g est 2π-périodique, c'est-à-dire que g et v sont dans $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$, où $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ est le Tore plat de dimension n.

Théorème 3.2.1. *Pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tel que, $\forall j = 1, \dots, n$, $0 \leq \alpha_j \leq \pi$, l'opérateur $P(D+\alpha)$ est un isomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ sur $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$, et de $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ sur $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$.*

Démonstartion

Soit $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$. Donc g s'écrit sous la forme :

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{g}(k)e^{ikx} \tag{73}$$

et il existe un entier positif q tel que :

$$\forall q \in \mathbb{N}, \ \sup_{k\in\mathbb{Z}^n}(1+|k|)^q|\widehat{g}(k)| < \infty. \tag{74}$$

En choisissant f telle que :

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} [p(k+\alpha)]^{-1}\widehat{g}(k)e^{ikx}, \tag{75}$$

On obtient :

$$P(D+\alpha)f = g,$$

et il reste donc à démontrer que f, ainsi définie, est bel et bien dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$. D'aprés la proposition 7.2 de [8], pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tel que, $\forall j = 1, \dots, n$, $0 \leq \alpha_j \leq 1$, il existe des constantes C et N' telles que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^n, |p(k+\alpha)|^{-1} \leq C(1+|k|^2)^{N'},$$

et cela implique que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z}^n, (1+|k|)^N|p(k+\alpha)|^{-1}|\widehat{g}(k)| \leq C(1+|k|)^N(1+|k|^2)^{N'}|\widehat{g}(k)|.$$

Mais :

$$(1+|k|^2)^{N'} \leq (1+|k|)^{2N'},$$

car :

$$\frac{(1+|k|^2)^{N'}}{(1+|k|)^{2N'}} = \left[\frac{1+|k|^2}{(1+|k|)^2}\right]^{N'} = \left(\frac{1+|k|^2}{1+|k|^2+2|k|}\right)^{N'} \leq 1,$$

et on arrive donc à :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \ \forall k \in \mathbb{Z}^n, \ (1+|k|)^N |p(k+\alpha)|^{-1} |\widehat{g}(k)| \leq C(1+|k|)^{N+N'} |\widehat{g}(k)|.$$

Comme $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ on obtient :

$$\forall N, N' \in \mathbb{N}, \ \forall k \in \mathbb{Z}^n, \ \sup_{k\in\mathbb{Z}^n}(1+|k|)^{N+N'} |\widehat{g}(k)| < \infty$$

cela implique que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \ \forall k \in \mathbb{Z}^n, \ \sup_{k\in\mathbb{Z}^n}(1+|k|)^{N} |p(k+\alpha)|^{-1} |\widehat{g}(k)| < \infty$$

c'est-à-dire que :

$$f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n),$$

et cela prouve la surjectivité de $P(D+\alpha)$ en tant qu'opérateur de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$.

D'autre part, si l'on suppose que :

$$P(D+\alpha)f = 0$$

on obtient :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} P(k+\alpha)\widehat{f}(k)e^{ikx} = 0$$

et ceci équivaut à :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^n, \ \widehat{f}(k)P(k+\alpha) = 0$$

Comme :

$$P(k+\alpha) \neq 0$$

pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tel que $0 \leq \alpha_j < 1$ pour $j = 1, \ldots, n$, on conclut que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^n, \ \widehat{f}(k) = 0$$

c'est-à-dire que :

$$f = 0$$

et cela démontre l'injectivité de $P(D+\alpha) : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$.

En fin de compte, $P(D+\alpha)$ est un isomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ sur $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$, et par un raisonnement analogue on peut facilement voir que $P(D+\alpha)$ est également un isomorphisme de $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ sur $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$. □

sée) de $|x|$. En dehors de l'origine on a

$$\underbrace{\Phi''(|x|)+\frac{(n-1)}{|x|}\Phi'(|x|)}_{\Delta E(x)}=0.$$

Donc, pour $x\neq 0$, E est de la forme

$$E(x)=\begin{cases} a|x|+b & \text{si } n=1\\ a\ln|x|+b & \text{si } n=2\\ \dfrac{a}{(2-n)}\cdot\dfrac{1}{|x|^{n-2}}+b & \text{si } n\geq 3\end{cases}$$

où a, b sont des constantes à déterminer, et on peut chercher E sous la forme :

$$E(x)=\begin{cases} c|x| & \text{si } n=1\\ c\ln|x| & \text{si } n=2\\ c|x|^{2-n} & \text{si } n\geq 3\end{cases}$$

Proposition 4.1.1. *la distribution sur $\mathbb{R}^n$ définie par la fonction localement intégrable :*

$$E(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{2} & \text{si } n=1,\\ \dfrac{\ln|x|}{2\pi} & \text{si } n=2,\\ \dfrac{c}{|x|^{n-2}} & \text{si } n\geq 3\ \left(\text{avec } \dfrac{1}{c}=(2-n)\dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\right).\end{cases}$$

est solution élémentaire du Laplacien.

Démonstration.

- Cas où $n=1$: $\forall\varphi\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle\Delta E,\varphi\rangle &= \langle E,\varphi''\rangle\\ &= \int_{\mathbb{R}} E(x)\varphi''(x)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}}\frac{|x|}{2}\varphi''(x)\,dx\\ &= \int_0^\infty x\varphi''(x)\,dx\\ &= -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx\\ &= \varphi(0)\\ &= \langle\delta,\varphi\rangle,\end{aligned}$$

4.2.3 Solution élémentaire

Soit E_+ la distribution tempérée dont la transformée de Fourier partielle en x est :

$$\mathscr{F}_x E_+(t,\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} H(t,\xi)\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}.$$

Pour toute fonction test φ dans $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + |\xi|^2\right)\mathscr{F}_x E_+, \varphi \right\rangle =& \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathscr{F}_x E_+ + |\xi|^2 \mathscr{F}_x E_+, \varphi \right\rangle \\
=&(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(H(t,\xi)\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\right) + |\xi|^2 H(t,\xi)\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}, \varphi \right\rangle \\
=&(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left(\delta_t \otimes 1_\xi \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|} + H(t,\xi)\cos t|\xi|\right)\right. \\
&\left. + |\xi|^2 H(t,\xi)\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}, \varphi \right\rangle \\
=&(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left\langle \delta_t \otimes 1_\xi - |\xi|^2 H(t,\xi)\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\right. \\
&\left. + |\xi|^2 H(t,\xi)\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}, \varphi \right\rangle \\
=&\langle \delta_t \otimes (2\pi)^{-\frac{n}{2}} 1_\xi, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Donc

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + |\xi|^2\right)\mathscr{F}_x E_+ = \delta_t \otimes (2\pi)^{-\frac{n}{2}} 1_\xi,$$

et à l'aide de la transformation de Fourier inverse on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right) E_+ = \delta_t \otimes \delta_x,$$

c'est-à-dire :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right) E_+ = \delta,$$

et cela montre que E_+ est une solution élémenaire de l'opérateur des ondes, portée par le demi-espace $t \geq 0$.

4.3 Équation de La Chaleur et Équation de Schrödinger

Les opérateurs de la chaleur et de Schrödinger sont respectivement :

$$C = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \quad \text{et} \quad S = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta.$$

Proposition 4.3.1. *La transformée de Fourier inverse de la fonction*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \xi & \mapsto & \exp(-\omega|\xi|^2) \end{array} \quad \textit{est la fonction} \quad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{(2\omega)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(\dfrac{-|x|^2}{4\omega}\right) \end{array}$$

Démonstration.
On a :

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi-\omega|\xi|^2}d\xi.$$

Donc :

$$g(ix) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x\xi-\omega|\xi|^2}d\xi.$$

Comme :

$$-x\xi-\omega|\xi|^2 = \frac{|x|^2}{4\omega} - \left|\frac{x}{2\sqrt{\omega}}+\sqrt{\omega}\xi\right|^2,$$

on obtient :

$$g(ix) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{|x|^2}{4\omega}}\int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{-\left|\frac{x}{2\sqrt{\omega}}+\sqrt{\omega}\xi\right|^2}d\xi.$$

et en posant :

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\omega}}+\sqrt{\omega}\xi$$

on arrive à :

$$d\xi = \frac{1}{\omega^{\frac{n}{2}}}d\eta$$

et par suite :

$$g(ix) = \frac{1}{(2\pi\omega)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{|x|^2}{4\omega}}\int_{\mathbb{R}^n_\eta} e^{-|\eta|^2}d\eta = \frac{1}{(2\omega)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{|x|^2}{4\omega}}$$

Ce qui implique que :

$$g(x) = \frac{1}{(2\omega)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(\frac{-|x|^2}{4\omega}\right). \quad \square$$

4.3.1 Equation de la chaleur

le problème bien posé associé est le problème initial :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}f = \Delta f \\ f = f_0(x) \quad \text{pour } t=0 \end{cases}$$

où f_0 est tempérée.

Si f en est une solution tempérée, et si $\widehat{f}$ est la transformée de Fourier partielle en x de f, alors :

4.3.2 Équation de Schrödinger

Pour L'opérateur de Schrödinger sur $\mathbb{R}^{n+1}$, $S = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$, on cherche une solution au problème initial :

$$\begin{cases} Sf = 0 \\ f = f_0(x) \quad \text{pour } \ t = 0 \end{cases},$$

sachant que f_0 est tempérée.

Ce problème initial se réécrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widehat{f}}{\partial t} = -i|\xi|^2 \widehat{f} \\ \widehat{f} = \widehat{f_0} \qquad\qquad \text{pour } \ t = 0 \end{cases}.$$

Sa solution est telle que :

$$\widehat{f} = e^{-it|\xi|^2}\widehat{f_0},$$

donc

$$\begin{aligned} f(t,x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}[\mathscr{F}_x^{-1}(e^{-it|\xi|^2})] *_x f_0(x) \\ &= [(4\pi i t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4it}}] *_x f_0(x) \\ &= [(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4it} - in\frac{\pi}{4}}] *_x f_0(x) \end{aligned}$$

• **Solution élémentaire** : On pose $\widehat{E}(t,\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} H(t,\xi) e^{-it|\xi|^2}$ et, pour tout $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, on a :

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} + |\xi|^2\right)\mathscr{F}_x E, \varphi \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\mathscr{F}_x E + i|\xi|^2 \mathscr{F}_x E, \varphi \right\rangle \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\left[H(t,\xi)e^{-it|\xi|^2}\right] + i|\xi|^2 [H(t,\xi)e^{-it|\xi|^2}], \varphi \right\rangle \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \Big\langle e^{-it|\xi|^2}[\delta_t \otimes 1_\xi] - i|\xi|^2 H(t,\xi) e^{-it|\xi|^2} \\ &\qquad\qquad + i|\xi|^2 H(t,\xi) e^{-it|\xi|^2}, \varphi \Big\rangle \\ &= \langle \delta_t \otimes [(2\pi)^{-\frac{n}{2}} 1_\xi], \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Donc

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i|\xi|^2\right)\widehat{E} = \delta_t \otimes [(2\pi)^{-\frac{n}{2}} 1_\xi],$$

de sorte que :

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) E = \delta$$

et que l'équation de la chaleur admet pour solution élémentaire $E = \mathscr{F}_x^{-1}\widehat{E}$.

Définition 5.1.1. *Soit S une hypersurface de $\mathbb{R}^n$ définie par (76) avec g suffisamment régulière (au moins, de classse $\mathscr{C}^m$) et satisfaisant à (77), soit p_m la fonction définie par (79), et soit x un point de S.*

- *On dit que x est caractéristique pour l'équation (80) si $p_m(x, d_x g) = 0$;*
- *On dit que S est caractéristique pour l'équation (80) si tous ses points x le sont.*

5.2 Le Théorème

Théorème 5.2.1. *(Cauchy-Kowalewsky) Soit S une hypersurface de $\mathbb{R}^n$ définie par (76) dans un voisinage U de l'un de ses points a, avec g satisfaisant à la condition (77), et supposons que les fonctions g, p_α ($|\alpha| \leq m$), f, u_j ($j = 0, \ldots, m-1$), qui figurent dans (76),(78),(80),(81), sont analytiques sur U. Si a n'est pas caractéristique pour (80) , alors il existe un voisinage U' de a contenu dans U dans lequel l'équation (80), accompagnée des conditions (81), admet une seule solution analytique u (i.e il existe une seule fonction analytique u qui vérifie l'équation (80) dans U' et les équations (81) sur $S \cap U'$).*

Ce théorème (dont on peut trouver une démonstration dans [6]) est l'un des premiers résultats sur l'existence de solutions, mais pour beaucoup de questions, en particulier pour des questions d'approximation utiles pour la physique, il n'est pas très utilisable. Il ne dit pas quel est le "rayon de convergence" de la série solution ; de la démonstration, on peut extraire une majoration, mais elle est en général mauvaise, en particulier ce "rayon de convergence" peut être très petit même si ceux des données ne le sont pas. Surtout ce théorème ne dit pas que le problème de Cauchy est bien posé, *i.e* que la solution a une limite en un sens raisonable (par exemple au sens des fonctions différentiables) si les données en ont, ni même qu'il a une solution si les données ne sont pas des fonctions analytiques. Si on essaie de résoudre le problème de Cauchy pour une donnée de Cauchy (u_j) diférentiable mais non analytique, la première idée qui serait d'approcher les u_j par des fonctions analytiques et de passer à la limite ne marche pas, parce qu'on ne sait pas si la limite des solutions existe (il faudrait justement pour cela que le problème de Cauchy soit bien posé). Le fait que le problème de Cauchy soit bien posé est une autre question, souvent beaucoup plus difficile.

Le théorème de Cauchy-Kovalevsky a été publié par Cauchy en 1842 dans les Comptes rendus de l'Académie des sciences. Le travail de Sofia Kovalevskaïa est paru en 1874 ; apparemment elle ne connaissait pas celui de Cauchy (et son jury non plus puisqu'il s'agissait d'une thèse !). La démonstration de l'unicité est simple et instructive. Celle de l'existence consiste essentiellement à démontrer la convergence de la série ainsi calculée. Elle repose sur une technique de majoration établie par Cauchy à cette occasion (méthode des séries majorantes). Le théorème de Cauchy-Kovalevskaïa n'exclut pas l'existence de solutions non analytiques au problème de Cauchy. Cette lacune a été comblée, en 1901 par le théorème de Holmgren qui affirme l'unicité des solutions " classiques " (c'est-à-dire m fois différentiables). Très élégante, la démonstration de Holmgren est remarquable pour l'époque par la façon dont elle met en jeu des idées de l'analyse moderne : dualité et densité. Le résultat de Holmgren a été étendu par Hörmander aux solutions distributions. Il est nécessaire dans ce nouveau cadre de reformuler le problème, puisque la restriction d'une distribution à l'hyperplan $x_n = x_n^0$, qui intervient dans les données de Cauchy, n'a à priori pas de sens.

5.3 Démonstration du Théorème

<u>**En trois étapes**</u> :

• On démontre tout d'abord que le problème (80)-(81) se ramène à un problème de Cauchy où $a = 0$, où la fonction g qui définit S est la énième projection canonique de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$ (donc $\vec{v} = \pm e_n$ où e_n est le énième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $D_{\vec{v}} = D_{\pm e_n} = \pm\partial_n$), où le cœfficient de ∂_n^m dans (78) est égal à 1, et où les conditions limites $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ sont nulles.

• On démontre ensuite qu'il existe une unique série formelle [7] (non nécessairement convergente) qui vérifie formellement le nouveau problème de Cauchy.

• On démontre enfin (par la technique des séries majorantes) que l'unique solution formelle est en fait une série convergente.

5.3.1 Réduction du problème

D'après l'hypothèse (77), il existe au moins une dérivée partielle $\partial_j g$ qui ne s'annule pas en a. Donc, sans restreindre la généralité, on peut toujours supposer que

$$\partial_n g \neq 0 \tag{82}$$

dans un voisinage de a. Ceci étant, on peut aisément vérifier que l'application

$$\varphi : \mathbb{R}_x^n \ni x \longmapsto \tilde{x} \in \mathbb{R}_{\tilde{x}}^n \tag{83}$$

7. Série formelle signifie : série entière non nécessairement convergente. On peut effectuer sur les séries formelles les mêmes opérations, produit, dérivation, composition (en prenant garde à l'origine) que sur les fonctions - le résultat est une autre série formelle.

où

$$\widetilde{x}_1 = x_1, \ \dots \ , \ \widetilde{x}_{n-1} = x_{n-1}, \ \widetilde{x}_n = g(x), \tag{84}$$

est un difféomorphisme analytique qui transforme

$$S \ \text{en} \ \widetilde{S} = \{\widetilde{x}_n = 0\}, \tag{85}$$

$$\partial_j \ \text{en} \ \widetilde{\partial}_j + (\widetilde{\partial_j g})\widetilde{\partial}_n \ \ (j = 1, \dots, n-1), \tag{86}$$

$$\partial_n \ \text{en} \ (\widetilde{\partial_n g})\widetilde{\partial}_n, \tag{87}$$

l'équation aux dérivées partielles (80) en l'équation aux dérivées partielles :

$$p_m(x, d_x g)\widetilde{\partial}_n^m \widetilde{u} + \sum_{\substack{|\alpha|<m \\ \alpha_n \leq m-1}} \widetilde{p}_\alpha \widetilde{\partial}^\alpha \widetilde{u} = \widetilde{f}, \tag{88}$$

et les conditions limites (81) en les conditions :

$$\widetilde{u}|_{\widetilde{S}\cap\widetilde{U}} = \widetilde{u}_0, \ \widetilde{\partial}_n \widetilde{u}|_{\widetilde{S}\cap\widetilde{U}} = \widetilde{u}_1, \ \dots, \ \widetilde{\partial}_n^{m-1}\widetilde{u}|_{\widetilde{S}\cap\widetilde{U}} = \widetilde{u}_{m-1}, \tag{89}$$

où $\widetilde{u}$, $\widetilde{f}$, les $\widetilde{p}_\alpha$ (pour $|\alpha| \leq m$), les $\widetilde{\partial_j g}$ (pour $j = 1, \dots, n$), et les $\widetilde{u}_i$ (pour $i = 0, \dots, m-1$) s'obtiennent à partir de u, f, p_α, $\partial_j g$ et u_i par la transformation (83) :

$$\widetilde{u} = u \circ \varphi^{-1}, \ \ \widetilde{f} = f \circ \varphi^{-1}, \ \ \widetilde{p}_\alpha = p_\alpha \circ \varphi^{-1}, \ \ \widetilde{\partial_j g} = (\partial_j g) \circ \varphi^{-1}, \ \ \text{et} \ \ \widetilde{u}_i = u_i \circ \varphi^{-1}, \tag{90}$$

et où l'on a noté

$$\widetilde{\partial}_j = \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_j} \ \ \text{et} \ \ \widetilde{\partial} = (\widetilde{\partial}_1, \widetilde{\partial}_2, \dots, \widetilde{\partial}_n) \tag{91}$$

L'analyticité de g sur U implique sa continuité dessus, donc implique la continuité sur U de l'application $x \mapsto p_m(x, d_x g)$, et il s'en suit alors que si a n'est pas caractéristique pour (80), c'est-à-dire si

$$p_m(a, d_a g) \neq 0, \tag{92}$$

il existe un voisinage de a tel qu'aucun de ses point sur S ne le soit, et on peut donc mettre l'équation (80) sous la forme

$$[\widetilde{\partial}_n^m u](\widetilde{x}) + \sum_{\substack{|\alpha|\leq m, \\ \alpha_n \leq m-1}} p'_\alpha(\widetilde{x})[\widetilde{\partial}^\alpha u](\widetilde{x}) = f'(\widetilde{x}), \tag{93}$$

où $p'_\alpha = \widetilde{p}_\alpha / p_m$, $f' = f/p_m$ et $\widetilde{x}$ est donné par (83). Il découle également de l'analyticité de g que les fonctions $\widetilde{x} \mapsto p'_\alpha(\widetilde{x})$ ($|\alpha| \leq m, \alpha_n \leq m-1$) et $\widetilde{x} \mapsto f'(\widetilde{x})$ qui figurent dans les nouvelles coordonnées $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)$ sont elles aussi des fonctions analytiques, et il suffit donc de démontrer le théorème pour l'équation

$$\partial_n^m u + \sum_{|\alpha|\le m, \alpha_n \le m-1} p_\alpha \partial^\alpha u = f, \quad \text{dans un voisinage } U \text{ de l'origine,} \tag{94}$$

avec les conditions

$$u|_{S\cap U} = u_0, \quad \partial_n u|_{S\cap U} = u_1, \quad \ldots \quad , \quad \partial_n^{m-1} u|_{S\cap U} = u_{m-1}, \tag{95}$$

et dans le cas où

$$S = \{x_n = 0\}. \tag{96}$$

On suppose maintenant que $S = \{x_n = 0\}$, que les fonctions p_α ($|\alpha| \le m$, $\alpha_n \le m-1$) et f sont analytiques dans U, que les fonctions u_0, u_1, ... , u_{m-1} sont analytiques sur $U \cap S$, et on pose

$$v(x) = u(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x_n^j}{j!} u_j(x'). \tag{97}$$

Comme

$$\partial_n^m \left[\frac{x_n^j}{j!} u_j(x') \right] = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{98}$$

on obtient

$$[\partial_n^m v](x) + \sum_{\substack{|\alpha|\le m \\ \alpha_n \le m-1}} p_\alpha(x)[\partial^\alpha v](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{\substack{|\alpha|\le m \\ \alpha_n \le m-1}} p_\alpha(x) \partial^\alpha \left[\frac{x_n^j}{j!} u_j(x') \right]. \tag{99}$$

D'autre part, de (95) et (97) il résulte immédiatement que

$$\partial_n^j v|_S = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{100}$$

et comme le second membre de (99) est une fonction analytique, le problème se réduit au problème (94) - (95) dans le cas où les fonctions u_j sont identiquement nulles.

Nous considérons donc l'équation (94) accompagnée des conditions (95) où $u_j \equiv 0$, pour $j = 0, 1, \ldots, m-1$, que l'on peut écrire sous la forme

$$[\partial_n^m u](x) = \sum_{j=0}^{m-1} b_j(x, \partial') \partial_n^j u(x) + f(x). \tag{101}$$

avec

$$\partial_n^j u|_S = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{102}$$

où

$$b_j(x,\partial') = -\sum_{\substack{|\alpha|<m \\ \alpha_n=j}} p_\alpha(x)\partial'^{\alpha'}. \tag{103}$$

(La fonction $b_j(x,\xi')$, $j \leq m-1$, ainsi définie est analytique en x et polynomiale de degré inférieur ou égal à $m-j$ en $\xi' = (\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$)

5.3.2 Solution formelle

A présent, on cherche une série formelle

$$u(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} c_\nu x^\nu \tag{104}$$

qui soit solution du problème (101)-(102). En particulier, u doit vérifier :

$$\partial_n^j u\big|_S = j! \sum_{\substack{\nu\in\mathbb{N}^n \\ \nu_n=j}} c_\nu x'^{\nu'}, \quad j\in\mathbb{N}, \tag{105}$$

et en vertu de (102), pour tout $j = 0,1,\dots,m-1$, le premier membre de cette égalité est nul. Il en découle alors que

$$c_\nu = 0 \ \text{ pour } \ \nu_n \leq m-1. \tag{106}$$

et que

$$u(x) = \sum_{\substack{\nu\in\mathbb{N}^n \\ \nu_n\geq m}} c_\nu x^\nu. \tag{107}$$

Pour déterminer les cœfficients c_ν (lorsque $\nu_n \geq m$), nous substituons formellement $\sum_{\substack{\nu\in\mathbb{N}^n \\ \nu_n\geq m}} c_\nu x^\nu$ à $u(x)$ dans l'équation (101) et procédons de la manière suivante :

i) On commence par chercher les c_ν pour les $\nu\in\mathbb{N}^n$ tels que $\nu_n = m$:

$$\partial_n^j[c_\nu x^\nu]\big|_{x_n=0} = 0 \ \text{ pour } \ \nu_n \geq m, \ j \leq m-1, \tag{108}$$

on calcule les valeurs des deux membres de (101) sur $\{x_n = 0\}$, et on obtient

$$\partial_n^m u(x',0) = m! \sum_{\substack{\nu\in\mathbb{N}^n, \\ \nu_n=m}} c_\nu x'^{\nu'} = f(x',0). \tag{109}$$

Comme $x' \mapsto f(x',0)$ est une fonction analytique dans $\mathbb{R}^{n-1}$, un développement en série de Taylor à l'origine de l'espace $\mathbb{R}^{n-1}$ $(x_1 = 0,\dots,x_{n-1} = 0)$, conduit à

$$f(x',0) = \sum_{\nu'\in\mathbb{N}^{n-1}} d_{\nu'} x'^{\nu'}. \tag{110}$$

Donc on peut déterminer c_ν pour les ν tels que $\nu_n = m$, c'est-à-dire

$$c_\nu = d_{\nu'} \text{ pour } \nu_1 = \nu'_1, \ldots, \nu_{n-1} = \nu'_{n-1}, \nu_n = m. \tag{111}$$

ii) On suppose que les cœfficients c_ν avec $\nu_n \leq k-1$ ($k \geq m$) sont connus. En dérivant les deux membres de (101), $(k-m)$ fois par rapport à x_n, et en calculant leurs valeurs sur $\{x_n = 0\}$, on constate que

$$\partial_n^{k-m}\left[\sum_{j=0}^{m-1} b_j(x,\partial')\partial_n^j\Big(\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n,\nu_n\geq k} c_\nu x^\nu\Big)\right]\Bigg|_{x_n=0} = 0, \tag{112}$$

donc la dérivée d'ordre $(k-m)$ du second membre de (101) par rapport à x_n, calculée sur $\{x_n = 0\}$, est déterminée par la fonction analytique connue

$$\partial_n^{k-m}\left[\sum_{j=0}^{m-1} b_j(x,\partial')\partial_n^j\Big(\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n,\nu_n\leq k-1} c_\nu x^\nu\Big)\right]\Bigg|_{x_n=0} + \partial_n^{k-m} f(x)\Big|_{x_n=0}, \tag{113}$$

qui peut être développée en série de Taylor à l'origine de l'espace $\mathbb{R}^{n-1}$ et l'on peut identifier les cœfficients de son développement à $k!c_\nu$, pour les multi-indices ν tels que $\nu_n = k$, car la dérivée d'ordre $(k-m)$ du premier membre de (101), calculée sur $\{x_n = 0\}$, est

$$\frac{\partial^k u(x)}{\partial x_n^k}\Big|_{x_n=0} = k! \sum_{\nu\in\mathbb{N}^n,\nu_n=k} c_\nu x'^{\nu'} \tag{114}$$

iii) en procédant par récurrence sur k (avec $\nu = (\nu', k), \nu' \in \mathbb{N}^{n-1}$), on obtient tous les cœfficients c_ν de la série (107). Une fois que ces cœfficients c_ν sont déterminés, on démontre la convergence de la série (107).

5.3.3 Séries majorantes

Pour démontrer la convergence de la série (107), on utilise les séries majorantes, définies de la manière suivante : Une fonction $F(x)$ est dite série majorante de la fonction $f(x)$ si les cœfficients $C_\nu(F)$ de sa série de Taylor à l'origine, $\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} C_\nu(F)x^\nu$, sont supérieurs ou égaux aux valeurs absolues des cœfficients $C_\nu(f)$ de la série de Taylor à l'origine, $\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} C_\nu(f)x^\nu$, de la fonction $f(x)$, c'est-à-dire que :

$$C_\nu(F) \geq |C_\nu(f)|, \forall \nu \in \mathbb{N}^n. \tag{115}$$

On définit également les séries majorantes pour les $b_j(x,\partial')$: une fonction

$$B_j(x,\xi') = \sum_{|\alpha|\leq m,\alpha_n=j} P_\alpha(x)\xi'^{\alpha'} \tag{116}$$

(où $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$) est dite série majorante à l'origine, de la fonction

$$b_j(x, \xi') = \sum_{|\alpha| \leq m, \alpha_n = j} p_\alpha(x) \xi'^{\alpha'} \tag{117}$$

si, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq m$ et $\alpha_n \leq m-1$, la fonction $P_\alpha(x)$ est une série majorante pour $p_\alpha(x)$.

Les séries majorantes $F(x)$ et $B_j(x, \xi')$ étant introduites, on considère l'équation :

$$\partial_n^m w(x) = \sum_{j=0}^{m-1} B_j(x, \partial') \partial_n^j w(x) + F(x). \tag{118}$$

lemme 5.3.1. *Soit $w(x)$ est une solution analytique de l'équation (118), et supposons que :*

$$\left.\begin{array}{r} \textit{Tous les cœfficients des séries de Taylor à l'origine (de } \mathbb{R}^{n-1}\textit{) de} \\ w(x)\big|_{x_n=0},\ \partial_n w(x)\big|_{x_n=0},\ \ldots,\ \partial_n^{m-1} w(x)\big|_{x_n=0} \\ \textit{sont non-négatifs.} \end{array}\right\} \tag{119}$$

Dans ce cas, $w(x)$ est une série majorante pour l'éventuelle solution analytique du problème (101)-(102).

Démonstration.

Pour tout $\nu \in \mathbb{N}^n$, posons

$$C_\nu(u) = \frac{1}{\nu!} \partial^\nu u(x)|_{x=0}, \tag{120}$$

$$C_\nu(w) = \frac{1}{\nu!} \partial^\nu w(x)|_{x=0}. \tag{121}$$

On a

$$w(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} C_\nu(w) x^\nu, \tag{122}$$

dans un voisinage de l'origine, et l'éventuelle solution analytique $u(x)$ du problème (101)-(102) est telle que

$$u(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} C_\nu(u) x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n}, \tag{123}$$

dans un voisinage de zéro. On a donc $c_\nu = C_\nu(u)$, et comme nous l'avons vu dans (106),

$$c_\nu = C_\nu(u) = 0 \ \text{ pour } \ \nu_n = 0, 1, \ldots, \mathrm{m} - 1. \tag{124}$$

et

$$\frac{1}{\nu!}\partial'^{|\nu'|}\partial_n^{k-m}\Big[\sum_{j=0}^{m-1}B_j(x,\partial')\partial_n^j\Big]. \tag{134}$$

Il s'en suit alors que :

$$C_{\tilde{\nu}}(F)\geq|C_{\tilde{\nu}}(F)|,\gamma_{\nu,\mu}\geq|\beta_{\nu,\mu}|, \tag{135}$$

et en vertu de l'hypothèse de récurrence (128), il résulte de (131), (132) et (135) que :

$$C_\nu(w)\geq|C_\nu(u)|, \tag{136}$$

ce qui démontre que $w(x)$ est une série majorante de la fonction $u(x)$, et achève ainsi la démonstration du lemme.

5.3.4 Suite et fin de la démonstration du théorème

Il ne reste donc plus qu'à démontrer l'existence des séries majorantes $B_j(x,\xi')$ pour $b_j(x,\xi')$, $j=0,1,\dots,m-1$, et $F(x)$ pour $f(x)$, et que l'équation (118) avec ces $B_j(x,\xi')$ et ce $F(x)$ admet, dans un voisinage de l'origine, une solution analytique $w(x)$ telle que les cœfficients de la série de Taylor (à l'origine de $\mathbb{R}^n$) de

$$(\frac{\partial}{\partial x_n})^k w(x)\Big|_{x_n=0} \tag{137}$$

soient tous non-négatifs. Rappelons que, par hypothèse, le $f(x)$ et les $p_\alpha(x)$ ($|\alpha|\leq m$, $\alpha_n\leq m-1$) qui figurent dans (101)-(102) sont analytiqyes dans un voisinage de l'origine. Donc, dans un voisinage de l'oigine, on peut les développer en séries de Taylor. Par conséquent, il existe des constantes $r>0$ et $M>0$ telles que

$$\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n}|C_\nu(f)|r^{|\nu|}\leq M,\qquad \sum_{\nu\in\mathbb{N}^n}|C_\nu(p_\alpha)|r^{|\nu|}\leq M,\quad |\alpha|\leq m,\alpha\leq m-1, \tag{138}$$

où

$$C_\nu(f)=\frac{1}{\nu!}\partial^\nu f(x)\Big|_{x=0},\qquad C_\nu(p_\alpha)=\frac{1}{\nu!}\partial^\nu p_\alpha(x)\Big|_{x=0}, \tag{139}$$

et la relation (138) implique que

$$|C_\nu(f)|r^{|\nu|}\leq M,\qquad |C_\nu(p_\alpha)|r^{|\nu|}\leq M,\quad \forall\nu\in\mathbb{N}^n \tag{140}$$

ou

$$\big|C_\nu(f)\big|\leq\frac{M}{r^{|\nu|}},\ \big|C_\nu(p_\alpha)\big|\leq\frac{M}{r^{|\nu|}}\quad \forall\nu\in\mathbb{N}^n. \tag{141}$$

On considère maintenant la fonction

$$F(x) = \frac{M}{1 - \frac{x_1 + \ldots + x_{n-1} + \varrho x_n}{r}}, \tag{142}$$

définie sur

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, |x_1 + \ldots + x_{n-1} + \varrho x_n| < r\right\}, \tag{143}$$

où ϱ est une constante à déterminer de manière convenable, telle que $\varrho \geq 1$. Comme

$$\frac{M}{1-y} = M \sum_{k=0}^{\infty} y^k \text{ pour } |y| < 1,$$

on a :

$$\begin{aligned} F(x) &= M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_1 + \ldots + x_{n-1} + \varrho x_n)^k}{r^k} && (144) \\ &= M \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\nu|=k} \frac{|\nu|!}{\nu!} \times \frac{x_1^{\nu_1} \times \cdots \times x_{n-1}^{\nu_{n-1}} \times (\varrho x_n)^{\nu_n}}{r^k}. && (145) \end{aligned}$$

En dérivant les deux membres de (142), on obtient :

$$\partial^\nu F(x)\big|_{x=0} = M \frac{|\nu|!}{\nu!} \frac{\varrho^{\nu_n} \nu!}{r^{|\nu|}} = \frac{|\nu|! M \varrho^{\nu_n}}{r^{|\nu|}}. \tag{146}$$

Par conséquent, et compte tenu de l'inégalité $\varrho \geq 1$, on a

$$C_\nu(F) = \frac{1}{\nu!} \partial^\nu F(x)\big|_{x=0} = \frac{|\nu|! M \varrho^{\nu_n}}{\nu! r^{|\nu|}} \geq \frac{M}{r^{|\nu|}} \tag{147}$$

Donc, en vertu de (141) on a

$$C_\nu(F) \geq |C_\nu(f)|, \quad C_\nu(F) \geq |C_\nu(p_\alpha)|, \tag{148}$$

c'est-à-dire que la fonction $F(x)$ définie par (142) est une série majorante de $f(x)$ et de $p_\alpha(x)$ ($|\alpha| \leq m, \;\; \alpha_n \leq m-1$). Par conséquent, si l'on pose $P_\alpha(x) = F(x)$ et qu'on la substitue à $P_\alpha(x)$ dans (116), la fonction $B_j(x, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ ainsi définie sera une série majorante de $b_j(x, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. Considérons donc l'équation (118) avec $F(x)$ donnée par (142) et avec $B_j(x, \xi')$ donnée par (116) et $P_\alpha(x) = F(x)$. A l'aide de (142), l'équation (118) peut s'écrire sous la forme :

$$\partial_n^m w(x) = \frac{Q(\partial) W(x) + R(\partial) W(x) + M}{1 - \frac{x_1 + \ldots + x_{n-1} + \varrho x_n}{r}}, \tag{149}$$

où $Q(\xi)$ est un polynôme en ξ de degré m et dont le coefficent de ξ_n^m est nul, tandis que $R(\xi)$ est un polynôme en ξ de degré inférieur ou égal à $m-1$.

En posant

$$s = \frac{x_1 + \ldots + x_{n-1} + \varrho x_n}{r} \tag{150}$$

on obtient :

$$\partial_i = \frac{\partial s}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{r}\frac{d}{ds} \text{ pour } i = 1, \ldots, n-1, \quad \frac{\partial}{\partial x_n} = \frac{\partial s}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\varrho}{r}\frac{d}{ds}. \tag{151}$$

Par suite l'équation (149) se réduit à l'équation en $\widetilde{w}(s)$:

$$(\frac{\varrho}{r})^m \frac{d^m}{ds^m}\widetilde{w}(s) = \frac{1}{1-s}\Big[\frac{q(\varrho)}{r^m}\frac{d^m}{ds^m}\widetilde{w}(s) + R\Big(\frac{1}{r}\frac{d}{ds}, \ldots, \frac{1}{r}\frac{d}{ds}, \frac{\varrho}{r}\frac{d}{ds}\Big)\widetilde{w}(s) + M\Big], \tag{152}$$

où

$$q(\varrho) = Q(1, \ldots, 1, \varrho), \tag{153}$$

est un polynôme en ϱ de degré inférieur ou égal à $m-1$. Comme

$$\Big(\frac{\varrho}{r}\Big)^m - \frac{1}{1-s} \times \frac{q(\varrho)}{r^m} = \Big(\frac{\varrho}{r}\Big)^m \times \frac{1 - s - q(\varrho)\varrho^{-m}}{1-s}, \tag{154}$$

en multipliant(152) par

$$\Big(\frac{r}{\varrho}\Big)^m \frac{1-s}{1 - s - q(\varrho)\varrho^{-m}}, \tag{155}$$

on obtient :

$$\frac{d^m}{ds^m}\widetilde{w}(s) = \Big(\frac{r}{\varrho}\Big)^m \frac{1}{1 - s - q(\varrho)\varrho^{-m}}\Big[R\Big(\frac{1}{r}\frac{d}{ds}, \ldots, \frac{1}{r}\frac{d}{ds}, \frac{\varrho}{r}\frac{d}{ds}\Big)\widetilde{w}(s) + M\Big], \tag{156}$$

et vu que le degré du polynôme $q(\varrho)$ est inférieur ou égal à $m-1$, on peut choisir ϱ tel que

$$q(\varrho)\varrho^{-m} < 1. \tag{157}$$

En résolvant l'équation différentielle ordinaire (156) avec les conditions initiales

$$\frac{d^j}{ds^j}\widetilde{w}(s)\Big|_{s=0} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{158}$$

on obtient la solution unique $\widetilde{w}(s)$ qui est analytique sur l'ensemble $\{s/|s| < 1 - q(\varrho)\varrho^{-m}\}$. la solution $w(x)$ de l'équation (149) s'obtient, en posant

$$w(x) = \widetilde{w}\Big(\frac{x_1 + \ldots + x_{n-1} + \varrho x_n}{r}\Big) \tag{159}$$

dans un voisinage de l'origine

$$\{x \in \mathbb{R}^n \big| |x_1 + \ldots + x_{n-1} + \varrho x_n| < r(1 - q(\varrho)\varrho^{-m})\}. \tag{160}$$

Comme nous l'avons mentionné, l'existence et l'unicité de la solution analytique $w(x)$ dans un voisinage de l'origine, en vertu du lemme 5.3.1, implique l'existence de la solution analytique $u(x)$ du problème (101)-(102) dans un voisinage de l'origine ; d'autre part, la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution analytique $u(x)$ du problème (101)-(102) dans un voisinage de l'origine est suffisante pour affirmer l'existence et l'unicité de la solution analytique du problème (79)-(80) dans un voisinage U' de x^0 . Le théorème est ainsi démontré. □

6 Opérateurs à cœfficients $\mathscr{C}^\infty$

Dans ce paragraphe, on donne trois exemples d'opérateurs différentiels à cœfficients complexes variables et de classe $\mathscr{C}^\infty$, qui sont non résolubles même localement. On donne en outre deux conditions suffisantes, l'une à la non résolubilité et l'autre à son contraire, et on renvoie à [1],[3], [4], [6] et [7] pour les démonstrations. Il y a ainsi, une différence qualitative considérable entre les équations à cœfficients complexes variables et celles à cœfficients constants, ou celles qui proviennent de la physique, qui sont résolubles au moins localement. Ce phénomène de non résolubilité locale est pourtant en un certain sens « générique » pour les équations à cœfficients complexes variables, même s'il a fallu attendre les années 1950 pour s'en convaincre.

6.1 Opérateur de Hans Lewy

Théorème 6.1.1. *(cf. [4]) Si L est l'opérateur de Hans Lewy :*

$$L = -\partial_1 - i\partial_2 + 2i(x_1 + ix_2)\partial_3$$

Alors il existe une fonction $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ tellle que l'équation $Lu = F$ n'admette aucune solution distribution dans aucun ouvert de $\mathbb{R}^3$.

6.2 Opérateur de Mizohata

L'opérateur de Mizohata sur $\mathbb{R}^2$ est

$$M = \frac{\partial}{\partial x} - ix\frac{\partial}{\partial y}. \tag{161}$$

Il est apparenté à celui de Hans Lewy en ce sens que l'un se ramène en gros à l'autre après une « transformation canonique » et, tout comme ce dernier, a des origines dans les problèmes de la géométrie complexe, et ne se comporte pas comme devrait se comporter intuitivement un opérateur associé à un phénomène physique : Il n'y a pas de conditions limites bien posées et n'est pas localement résoluble. L'équation $Mu = 0$ admet évidemment la solution

$$z = y + i\frac{x^2}{2} \tag{162}$$

et plus généralement les distributions de la forme

$$f\left(y + i\frac{x^2}{2} + i0\right) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f\left(y + i\frac{x^2}{2} + i\varepsilon\right) \tag{163}$$

où $f(z)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan de Poincarré $y = \operatorname{Im} z > 0$, à croissance modérée pour $y \to 0$.

Théorème 6.2.1. *L'équation $Mf = g$ a une solution au voisinage d'un point $(x_0, 0)$ si et seulement si, pour toute distribution $\widetilde{g}$ à support compact égale à g dans un voisinage de $(x_0, 0)$, $H\widetilde{g}$ est analytique au voisinage de x_0, sachant que H est l'opérateur de Hermite défini par :*

$$\widehat{Hf}(\eta) = \int \widehat{f}(x, \eta) e^{-|\eta|\frac{x^2}{2}} dx$$

où $\widehat{f}$ est la transformée de Fourier partielle en y.

6.3 Opérateur de Grushin

L'opérateur de Grushin sur $\mathbb{R}^2$ est

$$G = \frac{\partial}{\partial x} + ix\frac{\partial}{\partial y}.$$

Théorème 6.3.1. (*cf.* [1]) *Si D_n, $n = 1, 2, \ldots$, est une suite de disques fermés non emboités dans le demi-plan $x > 0$ de centres $(x_n, 0)$ avec $x_n > 0$ et $x_n \to 0$, et si $f(x, y)$ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact, paire en x, nulle sur $x \geq 0$ en dehors de D_n et telle que :*

$$\iint_{D_n} f(x, y)\,dx\,dy = 0 \text{ pour } n = 1, 2, \ldots$$

alors l'équation $Gu = f$ n'admet aucune solution $\mathscr{C}^1$ dans aucun voisinage de l'origine.

6.4 Conditions suffisantes à la (non) résolubilité

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, et soit sur Ω l'opérateur différentiel d'ordre m à cœfficients $\mathscr{C}^\infty$:

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

de symbole total

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha,$$

et de symbole principal

$$p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|= m} a_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

On désigne par $\overline{P}(x,D)$ l'opérateur d'ordre m dont les cœfficients sont les conjugués de ceux de $P(x,D)$:

$$\overline{P}(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} \overline{a}_\alpha(x) D^\alpha,$$

son symbole total est :

$$\overline{p}(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} \overline{a}_\alpha(x)\xi^\alpha,$$

et son symbole principal est :

$$\overline{p}_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|= m} \overline{a}_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

Proposition 6.4.1. *Le commutateur*

$$C(x,D) = [P(x,D), \overline{P}(x,D)] = P(x,D)\overline{P}(x,D) - \overline{P}(x,D)P(x,D)$$

est un opérateur différentiel d'ordre $2m-1$ et son symbole principal est

$$C_{2m-1}(x,\xi) = \frac{1}{i}\{P_m, \overline{P}_m\}(x,\xi)$$

où $\{\cdot,\cdot\}$ est le crochet de Poisson [8].

Démonstration.

La formule de Leibniz, $D^\alpha(fg) = \sum_{\gamma\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!} D^\gamma f D^{\alpha-\gamma} g$, implique que :

8. Le crochet de Poisson $\{.,.\}$ est défini sur les fonctions qui dépendent des variables (x,ξ) par $\{f,g\}(x,\xi) = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial \xi_j}\right](x,\xi)$.

$$\begin{aligned}
\overline{P}(x,D)P(x,D) &= \sum_{|\alpha|\le m} \overline{a}_\alpha(x)D^\alpha\Big[\sum_{|\beta|\le m} a_\beta(x)D^\beta\Big]\\
&= \sum_{|\alpha|\le m}\sum_{|\beta|\le m} \overline{a}_\alpha(x)D^\alpha\big[a_\beta(x)D^\beta\big]\\
&= \sum_{|\alpha|\le m}\sum_{|\beta|\le m} \overline{a}_\alpha(x)\Big[\sum_{\gamma\le\alpha}\frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!}[D^\gamma a_\beta](x)D^{\alpha-\gamma+\beta}\Big]\\
&= \sum_{|\beta|\le m}\sum_{|\alpha|\le m}\sum_{\gamma\le\alpha}\frac{1}{\gamma!}[D^\gamma a_\beta](x)\Big[\frac{\alpha!}{(\alpha-\gamma)!}\overline{a}_\alpha(x)D^{\alpha-\gamma}\Big]D^\beta\\
&= \sum_{|\beta|\le m}\sum_{|\gamma|\le m}\frac{1}{\gamma!}[D^\gamma a_\beta](x)\big[[\partial_\xi^\gamma \overline{p}](x,D)\big]D^\beta
\end{aligned}$$

et de façon similaire

$$P(x,D)\overline{P}(x,D) = \sum_{|\beta|\le m}\sum_{|\gamma|\le m}\frac{1}{\gamma!}[D^\gamma \overline{a}_\beta](x)\big[[\partial_\xi^\gamma p](x,D)\big]D^\beta.$$

Donc, le commutateur $C(x,D)$ est tel que

$$C(x,D) = \sum_{|\beta|\le m}\sum_{|\gamma|\le m}\frac{1}{\gamma!}\Big[[D^\gamma \overline{a}_\beta](x)[\partial_\xi^\gamma p](x,D) - [D^\gamma a_\beta](x)[\partial_\xi^\gamma \overline{p}](x,D)\Big]D^\beta,$$

son symbole total est :

$$\begin{aligned}
C(x,\xi) &= \sum_{|\beta|\le m}\sum_{|\gamma|\le m}\frac{1}{\gamma!}\Big[[D^\gamma \overline{a}_\beta](x)[\partial_\xi^\gamma p](x,\xi) - [D^\gamma a_\beta](x)[\partial_\xi^\gamma \overline{p}](x,\xi)\Big]\xi^\beta\\
&= \sum_{|\gamma|\le m}\frac{1}{\gamma!}\Big[\Big[\sum_{|\beta|\le m}[D^\gamma \overline{a}_\beta](x)\xi^\beta\Big][\partial_\xi^\gamma p](x,\xi)\\
&\qquad - \Big[\sum_{|\beta|\le m}[D^\gamma a_\beta](x)\xi^\beta\Big][\partial_\xi^\gamma \overline{p}](x,\xi)\Big]\\
&= \sum_{|\gamma|\le m}\frac{1}{\gamma!}\Big[[D^\gamma \overline{p}](x,\xi)[\partial_\xi^\gamma p](x,\xi) - [D^\gamma p](x,\xi)[\partial_\xi^\gamma \overline{p}](x,\xi)\Big]\\
&= \sum_{0\ne|\gamma|\le m}\frac{1}{\gamma!}\Big[[D^\gamma \overline{p}](x,\xi)[\partial_\xi^\gamma p](x,\xi) - [D^\gamma p](x,\xi)[\partial_\xi^\gamma \overline{p}](x,\xi)\Big]
\end{aligned}$$

et cela montre que $C(x,D)$ est d'ordre inférieur ou égal à $2m-1$, et que son symbole principal $C_{2m-1}(x,\xi)$ est donné par :

$$
\begin{aligned}
C_{2m-1}(x,\xi) &= \sum_{|\gamma|=1}\Big[[D^\gamma\overline{p}_m](x,\xi)[\partial_\xi^\gamma p_m](x,\xi)-[D^\gamma p_m](x,\xi)[\partial_\xi^\gamma\overline{p}_m](x,\xi)\Big]\\
&= \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{n}\Big[[\partial_{\xi_j}p_m](x,\xi)[\partial_{x_j}\overline{p}_m](x,\xi)-[\partial_{\xi_j}\overline{p}_m](x,\xi)[\partial_{x_j}p_m](x,\xi)\Big]\\
&= \frac{1}{i}\{p_m,\overline{p}_m\}(x,\xi) \quad \square
\end{aligned}
$$

Théorème 6.4.1. *On suppose que, quelle que soit f dans $\mathscr{D}(\Omega)$, l'équation*

$$P(x,D)u=f$$

admet une solution $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$. Dans ce cas, on a nécessairement :

$$C_{2m-1}(x,\xi)=0 \text{ pour tout } (x,\xi) \text{ tel que } x\in\Omega,\ \xi\in\mathbb{R}^n, \text{ et } p_m(x,\xi)=0. \tag{164}$$

Corollaire 6.4.1. *On suppose que les cœfficients d'ordre m de l'opérateur $P(x,D)$ sont $\mathscr{C}^\infty$, et que la propriété (164) n'est vérifiée pour aucun ouvert $\omega\subset\Omega$. Dans ce cas, il existe une fonction*[9] *$f\in\mathscr{S}(\Omega)$ telle que l'équation $P(x,D)u=f$ ne possède aucune solution $u\in\mathscr{D}'(\omega)$ et cela pour tout ouvert non vide $\omega\in\Omega$.*

Théorème 6.4.2. *On suppose que les cœfficients de $P(x,D)$ sont $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω et que, pour tout ouvert non vide ω inclus dans Ω, il existe une fonction $f\in\mathscr{D}(\Omega)$ telle que l'équation $P(x,D)u=f$ ne possède aucune solution $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$. Dans ce cas, il existe des fonctions $g\in\mathscr{S}(\Omega)$ telles que l'équation $P(x,D)u=g$ ne possède aucune solution dans aucun ouvert non vide $\omega\subset\Omega$.*

Définition 6.4.1. *Un opérateur différentiel $P(x,D)$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est dit « of constant strength » sur Ω si, pour tout x et y fixés dans Ω, les opérateurs à cœfficients constants $P(x,D)$ et $P(y,D)$ sont fortement équivalents en ce sens que :*

$$\exists C_{xy}\in\mathbb{R}/\forall\xi\in\mathbb{R}^n,\ \frac{P(x,\xi)}{P(y,\xi)}\le C_{x,y}.$$

9. $\mathscr{S}(\Omega)$ est la fermeture de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

Théorème 6.4.3. *Soit $P(x,D)$ un opérateur à cœfficients continus et « of constant strength » dans un voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}^n$. Si Ω est un voisinage ouvert suffisamment petit de x_0, on peut trouver un opérateur linéaire $E : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ tel que :*

$$P(x,D)Ef = f, \text{ pour tout } f \in L^2(\Omega),$$

$$EP(x,D)u = u, \text{ pour tout } u \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Théorème 6.4.4. *Soit $P(x,D)$ un opérateur à cœfficients $\mathscr{C}^\infty$ et « of constant strength » dans un voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}^n$. Si Ω est un voisinage ouvert suffisamment petit de x_0, on peut trouver un opérateur linéaire $E : \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ tel que :*

$$P(x,D)Ef = f \text{ dans } \Omega, \text{ pour tout } f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n),$$

$$EP(x,D)u = u \text{ dans } \Omega, \text{ pour tout } u \in \mathscr{E}'(\Omega).$$

Remarque 6.4.1. *Pour les démonstrations du corollaire 6.4.1, et des théorèmes 6.4.1, 6.4.2, 6.4.3 et 6.4.4, on réfère à Hörmander* [3].

Références

[1] V. V. Grušin « *A certain exemple of differential equation without solutions* » Math. Zametki **10** (1971) 499-501. **MR 44** ♯3010.

[2] Hisao Fujita Yashima. « *Séminaire des doctorants en mathématiques* » Université 08 mai 1945, Guelma, 2010-2011.

[3] Lars Hörmander. « *Linear Partial Differential operators* » Springer-Verlag, 1976.

[4] Hans Lewy. « *An example of a smooth linear partial differential equation without solution* » Annals of Mathematics, Vol. 66, No. 1, July, 1957.

[5] Hans Lewy. « *On the local character of the solution of an atypical linear differential equation in three variables and a related theorem for regular functions of two complex variables, Ann. of math. (2)* **66** *(1957), 155-158.*

[6] Sigeru Mizohata. « *Te Theory of Partial Differential Equations* » Cambridge university Press, 1979.

[7] Louis Nirenberg. « *On a question of Hans Lewy* » Russian Math. Surveys **29**, 251-262 (1974)

[8] M. E. Taylor « *Pseudodifferential Operators* » Princeton university Press, 1981.

Index