

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

MISA 0.156

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques, de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques
Option : **Mathématiques Appliquées**



Par :

M^{elle} .LABADLA Amel

Intitulé

**Etude du nombre des cycles limites pour une classe
généralisée des systèmes de Liénard**

Dirigé par : Dr BADI Sabrina

Devant le jury

PRESIDENT	Mr. N.SELLAMI	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Mme. S.BADI	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Mr. Y.BOUATTIA	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2015

Remerciements

En premier lieu et avant tout, je remercie énormément le grand **Dieu** qui m'a aidé à réaliser ce travail.

Je suis très heureuse d'exprimer ici mes respectueux remerciements et ma profonde gratitude à mon encadreur **Dr. BADI Sabrina** pour le sujet qu'elle m'a proposé, pour ses précieux conseils, ses encouragements, ses suggestions valeureuses, sa patience et sa bonne humeur, sa grande érudition, disponibilité et qui m'a permis d'atteindre humblement mon but.

Mes respectueux remerciements vont à Monsieur, **Dr. SELLAMI Nabil** d'avoir accepté de juger ce travail. Mes plus vifs remerciements vont également à Monsieur, **Dr. BOUATTIA Yacine** d'avoir d'être membre de jury.

Enfin, nous remercions vivement toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Après de longues années d'études et de travail, sachant l'importance de l'aide des êtres qui n'aiment, je voudrai humblement leurs, dédier ce modeste travail tout en savant qu'ils méritent le meilleur qui soit.

je dédie ce travail :

✠ A ma cher mère **Houria** qui a fait tant de sacrifice pour m'elver et m'instruire et qui ma encouragé tout le long de mon parcours scolaire et académique.

✠ A mon cher père **Rabeh** qui m'a encourager et suer et a tant travaille pour pouvoir m'instruire.

✠ A mes sœurs : **Lamia, Souhila, Rima, Sabah et Miral**

✠ A mes frères : **Chouaib, Soufiane, Hamza et Khaled**

✠ A toute la famille

✠ A mes amis : **Hanane, Samiha, Asouma, Selma, Fatima, Souhir et Iman.**

“L'imagination est plus importante que le savoir.”

Albert-Einstein

Table des Matières

Introduction générale	6
1 Notions préliminaires et généralités	8
1.1 Système dynamique	8
1.2 Flot, portrait de phase, point singulier, orbites périodiques	9
1.3 Systèmes différentiels autonomes	10
1.4 Classification des points d'équilibres, linéarisation	10
1.5 Cycle limite	14
1.6 Théorèmes fondamentaux	14
1.7 Existence des Cycles limites	16
1.8 Phénomène de bifurcation	17
2 Méthode de la moyenne	19
2.1 Un théorème de moyennisation de Fatou	19
2.2 Existence d'orbites périodiques	23
3 Nombre des cycles limites pour une classe généralisée des systèmes de Liénard	24
3.1 Perturbation du centre linéaire	24
3.2 Application	26
Bibliographie	29

Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude des cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -y$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = x$, perturbé par une classe généralisée d'équations différentielles de Liénard comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \sum_{k \geq 1} \epsilon^k (f_n^k(x, y)y), \end{cases}$$

où pour tout k le polynôme f_n^k est de degré n en x et y , ϵ est un petit paramètre, et ceci en utilisant la méthode de la moyenne d'ordre 1, nous illustrons ceci à travers des exemples.

Abstract

In this work, we study the limit cycles which bifurcate from periodic orbits of the linear center $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -y$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = x$, perturbed inside a generalized class of Liénard differential equations as :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \sum_{k \geq 1} \epsilon^k (f_n^k(x, y)y), \end{cases}$$

Where for every k the polynomial f_n^k has degree n in x and y , ϵ is a small parameter, we use the averaging method of degree 1, we illustrate this with several examples .

Introduction générale

Une question très importante dans l'étude des systèmes différentiels est la recherche des cycles limites, leurs nombre, leurs stabilité. Dans ce travail on étudie des systèmes différentiels du type Liénard qui prennent la forme généralisée :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x), \\ \dot{y} = -G(x), \end{cases} \quad (1)$$

Avec m le degré de $F(x)$, n celui de $G(x)$. Le problème fondamental lié au système (1) est le nombre des solutions périodiques isolées (i.e. cycles limites) qui peuvent exister simultanément.

Ici on s'intéresse à trouver des valeurs minimales de $H(m, n)$. On cherchons le nombre maximum des cycles limites qui peuvent bifurqué des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$ perturbé par une classe généralisée d'équations différentielles de Liénard comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \sum_{k \geq 1} \epsilon^k (f_n^k(x, y)y), \end{cases}$$

Notre mémoire comporte 3 chapitres :

- Le premier chapitre est un rappel sur des notions générales, on introduira des définitions concernant le flot, point singulier, le cycle limite, classification des points singuliers d'un système différentiel plan. On explicitera la notion de bifurcation.
- Dans le second chapitre, on rappelle des résultats sur la méthode de la moyenne.
- Au chapitre 3, on s'intéresse aux cycles limites des systèmes de Liénard. On donne un résultat concernant le nombre des cycles limites qui bifurquent d'un centre linéaire perturbé par une classe généralisée d'équations différentielles de Liénard, en utilisant la méthode de la moyenne d'ordre 1 et on fait des applications sur quelques exemples.

CHAPITRE 1

Notions préliminaires et généralités

Dans ce chapitre, on donne un rappel succinct sur certaines notions fondamentales. On examinera les notions de : point singulier, orbite périodique, cycle limite. On rappelle une classification des trajectoires au voisinage d'un point singulier d'un système plan, le lemme de Gronwall. On introduit aussi un rappel sur la bifurcation.

1.1 Système dynamique

Définition 1.1.1 *Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application $U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que*

- * $U(., x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue
- * $U(t, .) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue
- * $U(0, x) = x$
- * $U(t + s, x) = U(t, U(s, x)) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n$

Exemple 1.1.2 *L'application*

$$U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

définie par :

$$U(t, x) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} x,$$

est un système dynamique dans \mathbb{R}^2 , et pour $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $U(t, x_0)$ est la solution du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.2 Flot, portrait de phase, point singulier, orbites périodiques

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , un champ de vecteurs X de classe C^k sur U est la donnée d'une application $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k

$$X : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)). \quad (1.1)$$

On lui associe le système différentiel

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

où les fonction $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f_i(x)$ (appelée composantes du champ de vecteurs X sont des fonctions de classe C^k sur l'ouvert U).

D'après le Théorème 1.6.2, il existe une solution maximale unique $x(t)$ aux équations (1.2) telle que $x(0) = x_0$.

Définition 1.2.1 la correspondance $\phi_t : x_0 \mapsto x(t)$ qui associe à une donnée initiale x_0 la valeur de la solution maximale $x(t)$ au temps t , qui correspond à cette donnée initiale, est appelé le flot au temps t du champ de vecteurs X . Le flot du champ de vecteurs est l'application qui associe à (t, x) la solution maximale $x(t)$ au temps t qui correspond à la donnée initiale x :

$$(t, x) \mapsto \phi(t, x) = \phi_t(x) = x(t).$$

Le flot est dit complet lorsque cette correspondance est définie pour toute valeur de $t \in [-\infty, +\infty]$.

Définition 1.2.2 L'orbite (ou courbe intégrale) γ du champ de vecteurs X passant par le point x_0 est la courbe différentiable formée des points $x(t)$ de U donnés par la solution de (1.2) avec donnée initiale x_0 . Cette courbe est orientée par le sens de variation de t . Sa tangente au point $x(t)$ est la droite affine passant par $x(t)$ de direction le vecteur $X(x(t))$. On distingue éventuellement l'orbite positive $\gamma_+ = \{x(t), t \geq 0\}$ et l'orbite négative $\gamma_- = \{x(t), t \leq 0\}$ passant par le point $x(0) = x_0$.

Le portrait de phase du champ de vecteurs X est la partition de l'ouvert U en les orbites.

Définition 1.2.3 Un point singulier du champ de vecteur X est un point x_0 où toutes les composantes du champ s'annulent simultanément :

$$f_i(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

On dit aussi que x_0 est un zéro du champ de vecteurs ou un point d'équilibre (ou aussi un point critique). Un point qui n'est pas singulier est dit régulier.

Définition 1.2.4 Une orbite périodique d'un champ de vecteurs X est une orbite passant par un point x_0 , qui n'est pas un point singulier, pour lequel il existe un nombre $T > 0$ appelé période vérifiant

$$x(T) = x(0).$$

On qualifie de période minimale, le plus petit nombre réel positif T qui satisfait cette condition. Les multiples de la période minimale sont aussi des périodes. Lorsqu'on ne précise pas plus, par exemple pour une orbite périodique de période T , on comprend toujours la période minimale.

Lemme 1.2.5 Une solution périodique du champ de vecteur X correspond à une trajectoire fermée (courbe fermée) dans l'espace des phases et une trajectoire fermée dans l'espace des phase correspond à une solution périodique.

1.3 Systèmes différentiels autonomes

Définition 1.3.1 on appelle système différentiel autonome plan un système de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x(t), y(t)) \\ \dot{y} = Q(x(t), y(t)) \end{cases} \quad (1.3)$$

où $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ et $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$.

le plan des variables x et y s'appelle le plan de phase. le champ de vecteur associé au système (1.3) est notée $X = (P, Q)$.

Nous supposons que les fonctions P et Q de classe C^1 (donc les conditions de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites en tout point ordinaire du système (1.3)).

1.4 Classification des points d'équilibres, linéarisation

Soit le système différentiel linéaire à coefficient constant :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = Ax$$

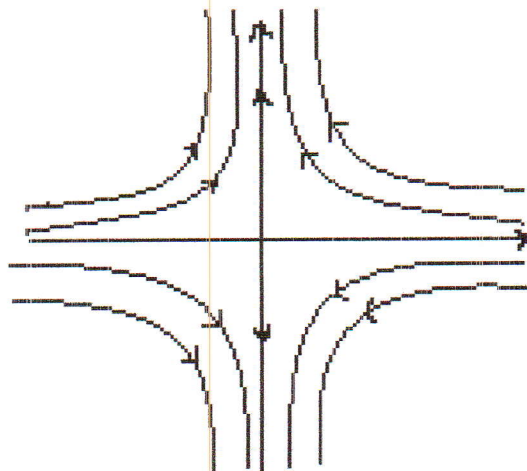
où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice inversible, i.e. $\det(A) = ad - bc \neq 0$.

Le portrait de phase local pour ce système est déterminé à partir des valeurs propres de A (le seul point critique $(0,0)$).

Soit λ_1, λ_2 deux valeurs propres de A :

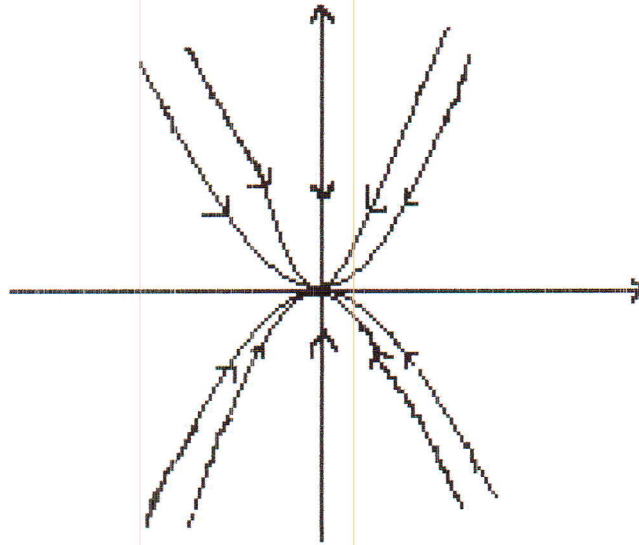
1) Point Selle :

- Si λ_1, λ_2 sont réelles et de signes distincts, le point singulier $(0,0)$ est appelé **selle** (il est toujours instable).



2) Nœud:

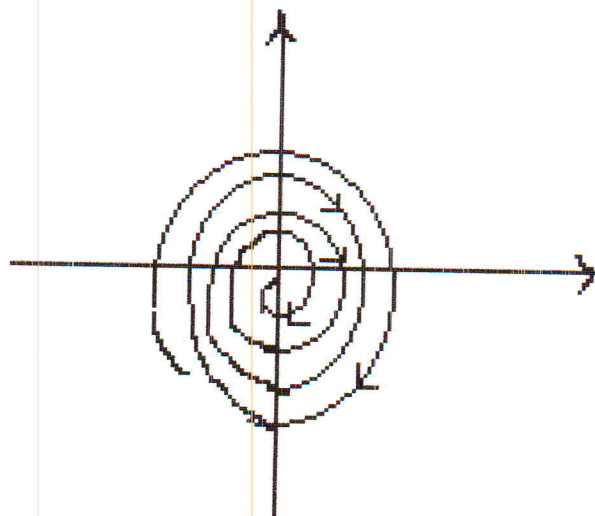
- Si $\lambda_1 < 0$, et $\lambda_2 < 0 \Rightarrow$ le point $(0,0)$ est appelé **Nœud** (il est asymptotiquement stable).
- Si $\lambda_1 > 0$, et $\lambda_2 > 0 \Rightarrow$ le point $(0,0)$ est appelé **Nœud** (il est instable).



3) Foyer:

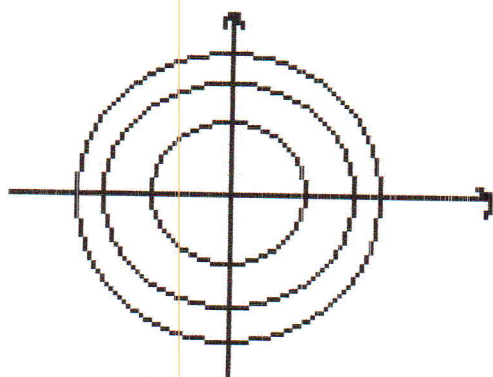
$$\lambda_{1,2} = p + iq, \quad q \neq 0 \text{ et } p \neq 0.$$

- Si $p > 0 \Rightarrow$ le point $(0, 0)$ est appelé **foyer** (il est instable).
- Si $p < 0 \Rightarrow$ le point $(0, 0)$ est appelé **foyer** (il est asymptotiquement stable).



4) Point centre:

- Si $\lambda_{1,2} = p + iq$ tq : $q \neq 0$ et $p = 0 \Rightarrow$ le point $(0, 0)$ est appelé **centre** (il est seulement stable).



Soit le système non linéaire autonome :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.4)$$

et soit x_0 un point singulier pour ce système (i.e. $f(x_0) = 0$).

Définition 1.4.1 Le système

$$\dot{x} = Ax$$

où

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) = \mathbf{D}f(x_0), 1 \leq i, j \leq n \right)$$

est appelé linéarisation de (1.4) en x_0 , ou le système linéarisé de (1.4) en x_0 .

Définition 1.4.2 On appelle point singulier hyperbolique de (1.4), le point x_0 tel qu'aucune des valeurs propres de $A = \mathbf{D}f(x_0)$ n'a de partie réelle nulle.

Définition 1.4.3 Soit

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.5}$$

x_0 est un point critique hyperbolique de (1.5) :

- x_0 est appelé **puit** si les v.p de $Df(x_0)$ ont des parties réelles négatives.
- x_0 est appelé **source** si les v.p de $Df(x_0)$ ont des parties réelles positives.
- x_0 est appelé **selle** si au moins l'une des v.p est avec partie réelle positive et une autre est avec partie réelle négative.

1.5 Cycle limite

Définition 1.5.1 Pour un système plan, on appelle cycle limite une orbite périodique qui est isolée dans l'ensemble des orbites périodiques, si toutes les trajectoires voisines approchent le cycle limite lorsque $t \rightarrow +\infty$, on parle de cycle limite stable ou attractif. Si en revanche cela se produit lorsque $t \rightarrow -\infty$, on parle de cycle limite instable ou non-attractif.

1.6 Théorèmes fondamentaux

Définition 1.6.1 Considérons la fonction $f(x, t)$ avec $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n, |t - t_0| \leq a, x \in D \subset \mathbb{R}^n$.

On dit que la fonction $f(x, t)$ est Lipschitzienne par rapport à x si :

$$\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq K \|x_1 - x_2\|, \forall (x_1, t), (x_2, t) \in D \times [t_0 - a, t_0 + a].$$

La constante K est appelée constante de Lipschitz.

Théorème 1.6.2 (Théorème fondamental) On considère le système différentiel :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

et on suppose que la fonction vectoriel $f(x, t)$ est Lipschitzienne de rapport K par rapport à x , uniformément en $t \in [-a, a]$. Soit x_0 une donnée initiale, il existe une seule solution $x(t)$ du système différentiel qui satisfait $x(0) = x_0$ et qui est définie sur l'intervalle $[-c, c]$ avec $c < \min(a, \frac{1}{K})$.

Théorème 1.6.3 (Lemme de Gronwall) Soit $\phi(t)$ une fonction continue, à valeurs positives définie sur un intervalle $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ qui satisfait une inégalité du type :

$$\phi(t) \leq \delta_1 \int_{t_0}^t \phi(s) ds + \delta_2(t - t_0) + \delta_3,$$

alors on peut majorer la fonction par

$$\phi(t) \leq \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) e^{\delta_1(t-t_0)} - \frac{\delta_2}{\delta_1},$$

pour toute valeur de t comprise dans l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$.

1.7 Existence des Cycles limites

Théorème 1.7.1 (Poincaré-Bendixon) On considère un champ de vecteurs du plan X :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

où les fonctions f, g sont partout de classe C^1 . Soit $\gamma_m = \{\phi(t, m), t \in \mathbb{R}\}$ une courbe intégrale de X , définie pour tout t , telle que l'orbite positive passant par le point m : $\gamma_m^+ = \{\phi(t, m), t \geq 0\}$ est contenue dans un compact K . On suppose que le champ X a un nombre fini de singularités contenues dans $\omega(m)$. Il y a trois possibilités :

- Si $\omega(m)$ ne contient pas de points singuliers, c'est une orbite périodique.
- Si $\omega(m)$ contient à la fois des points singuliers et des points réguliers, $\omega(m)$ est constitué d'un ensemble d'orbites et chacune d'entre elle tend vers un des points singuliers lorsque $|t| \rightarrow \infty$. Dans ce cas, l'ensemble $\omega(m)$ est appelé un graphique.
- Si $\omega(m)$ ne contient aucun point régulier, alors c'est un point singulier.

Théorème 1.7.2 (Critère de Bendixon) Soit le système plan :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

et $F = (f, g)^T \in C^1(E)$ où E est une région simplement connexe dans \mathbb{R}^2 . Si la divergence du champ de vecteur F (notée ∇F) est non identiquement nulle et ne change pas de signe dans E , alors ce système n'a aucune orbite fermée entièrement contenu dans E .

Preuve : Supposons qu'il existe une solution périodique τ de période T contenue dans E . Elle est représentée par une trajectoire fermée dans le plan. Soit G l'intérieur de cette trajectoire d'après la formule de Green on a :

$$\begin{aligned} \iint_G \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{\tau} f dy - g dx \\ &= \int_0^T \left[f(x, y) \frac{dy}{dt} - g(x, y) \frac{dx}{dt} \right] dt \\ &= \int_0^T 0 dt = 0 \end{aligned}$$

Contradiction avec $\text{div} F = 0 \Rightarrow$ Il ne peut pas avoir de solution périodique contenue dans E . \blacklozenge

Théorème 1.7.3 (Critère de Dulac) Soit $F = (f, g)^T \in C^1(E)$ où E est une région simplement connexe dans \mathbb{R}^2 . S'il existe une fonction $B \in C^1(E)$ tel que $\nabla(BF)$ est non identiquement nulle et ne change pas de signe dans E , alors le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

n'admet aucune orbite fermée entièrement contenu dans E .

Preuve : Supposons qu'il existe une solution périodique τ de période T contenue dans E . Elle est représentée par une trajectoire fermée dans le plan.

Soit G l'intérieur de cette trajectoire d'après la formule de Green on a :

$$\begin{aligned} \iint_G B \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{\tau} B f dy - B g dx \\ &= \int_0^T B \left[f(x, y) \frac{dy}{dt} - g(x, y) \frac{dx}{dt} \right] dt \\ &= \int_0^T B 0 dt = 0 \end{aligned}$$

Contradiction avec $\text{div}BF = 0 \Rightarrow$ Il ne peut pas avoir de solution périodique contenue dans E . \blacklozenge

1.8 Phénomène de bifurcation

Le terme de bifurcation été introduit par Poincaré pour décrire les transformations des points d'équilibres d'une famille de systèmes, obtenue en faisant varier un paramètre. Si la nature du point d'équilibre subit un changement soudain lorsque le paramètre varie, on dit que le système subit une bifurcation. les systèmes d'équations différentielles paramétrées peuvent avoir différents comportements asymptotiques (tendre vers un équilibre, un cycle limite...) en fonction des valeurs de leurs paramètres. Il peut donc exister certaines valeurs pour lesquelles le comportement du système passe d'un état qualitatif à un autre.

La théorie des bifurcations des champs de vecteurs a pour but de décrire les modifications des portraits de phase des champs de vecteurs qui dépendent différentiablement d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^n$:

$$\dot{x} = f(x, \lambda),$$

lorsque le paramètre λ varie.

Il existe des bifurcations locales et des bifurcations globales, dans ce travail, on s'intéresse à un type de bifurcation local c'est la bifurcation d'un centre. On considère un système différentiel plan paramétré (qui dépend de ε).

Pour lequel il admet un centre à l'origine quand $\varepsilon = 0$, on étudie s'il ya naissance d'orbites périodiques lorsque on varie le paramètre ε .

CHAPITRE 2

Méthode de la moyenne

La méthode de moyennisation est une des méthodes classiques qui donne des conditions pour lesquelles les points singuliers du système moyenné fournissent des cycles limites pour des systèmes différentiels ayant un centre. Cette méthode consiste à donner une relation quantitative entre les solutions d'un système différentiel périodique non autonome et celle de son système différentiel moyenné lequel est autonome. Dans cette section, on présente une introduction à la théorie de moyennisation du premier ordre. Cette méthode s'applique aux systèmes de la forme : $\dot{x} = \varepsilon f(x, t)$ où $\varepsilon \ll 1$ et $f(x, t)$ est de période T pour la variable t . Le théorème de la moyenne assure alors que :

- La solution approchée reste proche de la solution exacte sur un temps d'échelle $\frac{1}{\varepsilon}$.
- Si la solution approchée a un point d'équilibre hyperbolique alors la solution exacte a une orbite périodique hyperbolique.
- Si une solution approchée est une variété (stable ou instable) du point d'équilibre hyperbolique alors la solution exacte correspondante évolue sur la variété (de même stabilité) de l'orbite périodique correspondante.

2.1 Un théorème de moyennisation de Fatou

On considère un problème de Cauchy perturbatif :

$$\dot{x} = f(t, x) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon), \quad x(t) = x_0$$

On suppose que le système non perturbé est intégrable. Soit $y(t, x_0)$ la solution du problème de Cauchy non perturbé (pour $\varepsilon = 0$) qui vaut x_0 à l'instant initiale $t = 0$ (notons bien que x_0 est aussi la donnée initiale du système perturbé).

On considère le changement de variable :

$$x \mapsto z, \quad x = y(t, z).$$

Pour la nouvelle coordonnée z , on obtient l'équation :

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = f(t, y) + \varepsilon g(t, y, \varepsilon).$$

Si on suppose que $\frac{\partial y}{\partial z}$ est inversible, on obtient pour la variable z une équation différentielle sous "forme standard" (terminologie utilisée pour signifier que le paramètre ε factorise le second membre de l'équation) :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \varepsilon \left(\frac{\partial y(t, z)}{\partial z} \right)^{-1} g(t, y(t, z), \varepsilon) = \varepsilon F(t, x, \varepsilon).$$

On va considérer dans ce paragraphe le premier énoncé basique de la théorie de la moyennisation. On considère la solution du problème de cauchy de l'équation perturbée :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \varepsilon F(t, x, \varepsilon) = \varepsilon f(t, y) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon), \quad (2.1)$$

$$x(t_0) = x_0.$$

On suppose que f est une fonction périodique de période T en la variable t . On introduit l'équation moyennée et le problème de cauchy associé :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \varepsilon f_0(y), \quad (2.2)$$

$$y(t_0) = x_0,$$

avec

$$f_0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt.$$

On a alors le :

Théorème 2.1.1 On considère les deux problèmes de Cauchy (2.1) et (2.2) avec $x, y, x_0 \in D$ un ouvert de \mathbb{R}^n , $t \geq 0$. Supposons que :

- Les fonctions f, g et $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont définies, continues et bornées par une constante M indépendante de ε sur un domaine $[t_0, +\infty[\times D$.
- La fonction g est Lipschitzienne par rapport à x dans D .
- La fonction f est périodique de période T en la variable t et cette période est indépendante de ε .
- La solution $y(t)$ ne quitte pas l'intérieur du domaine D pendant un temps de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$.

Alors, la différence $x(t) - y(t)$ est de l'ordre de $O(\varepsilon)$ pendant un temps de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$.

Preuve :

On définit

$$u(t, y) = \int_{t_0}^t [f(s, y) - f_0(y)] ds,$$

et

$$z(t) = y(t) + \varepsilon u(t, y(t)).$$

On obtient les estimations suivantes :

$$\|u(t, y)\| \leq 2MT,$$

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t) - z(t)\| + 2\varepsilon MT.$$

On évalue ensuite

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} =$$

$$\varepsilon f(t, x(t)) + \varepsilon^2 g(t, x(t)) - \frac{dy}{dt} - \varepsilon \langle \text{grad } u(t, y(t)), \frac{dy}{dt} \rangle > -\varepsilon \frac{\partial u(t, y(t))}{\partial t} =$$

$$\varepsilon f(t, x(t)) - \varepsilon f(t, z(t)) + R.$$

Les hypothèses impliquent

$$\|f_0(y)\| \leq M,$$

$$\|\text{grad } u(t, y)\| \leq 2MT,$$

$$\|f(t, z(t)) - f(t, y(t))\| \leq L\|z(t) - y(t)\| \leq 2\varepsilon LMT.$$

Il existe donc une constante K telle que

$$\|R\| \leq K\varepsilon^2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \|x(t) - z(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \left\| \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} \right\| dt \leq \\ &\varepsilon \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, z(s))\| ds + K\varepsilon^2(t - t_0) \leq \\ &\varepsilon L \int_{t_0}^t \|x(s) - z(s)\| ds + K\varepsilon^2(t - t_0). \end{aligned}$$

On applique alors le lemme de *Gronwall* et on trouve

$$\|x(t) - z(t)\| \leq \varepsilon \frac{K}{L} e^{\varepsilon L(t-t_0)} - \varepsilon \frac{K}{L},$$

et donc

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \varepsilon \left[\frac{K}{L} e^{\varepsilon L(t-t_0)} - \frac{K}{L} + 2MT \right].$$

Il s'ensuit que si $\varepsilon L(t - t_0)$ est borné par une constante indépendante de ε , on a que $x(t) - y(t) = O(\varepsilon)$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$. \blacklozenge

2.2 Existence d'orbites périodiques

En utilisant le théorème des fonctions implicites, la moyennisation à l'ordre un conduit déjà à des théorèmes d'existence d'orbites périodiques. On démontre le résultat suivant

Théorème 2.2.1 *On considère le système*

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon),$$

où f est une fonction périodique de période T du temps, de classe C^1 sur un ouvert U contenant un point a tel que

$$F(a) = 0, \quad F(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, 0) dt.$$

On suppose que la matrice des dérivées partielles

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a),$$

est inversible. Alors le système possède, pour ε suffisamment petit, une orbite périodique de période T qui tend vers a lorsque ε tend vers 0.

Preuve :

On écrit que la solution du système correspondant à la donnée initiale ξ au temps t : $x(t, \xi, \varepsilon)$ est

$$x(t, \xi, \varepsilon) = \xi + \varepsilon \int_0^t f(x(s, \xi, \varepsilon), s, \varepsilon) ds.$$

L'existence d'une orbite périodique de période T s'exprime maintenant par l'équation

$$\int_0^T f(x(s, \xi, \varepsilon), s, \varepsilon) ds = 0.$$

Par le théorème des fonction implicites, on sait qu'il existe une solution différentiable $\xi = \xi(\varepsilon)$ qui tend vers a lorsque ε tend vers 0. ♦

CHAPITRE 3

Nombre des cycles limites pour une classe généralisée des systèmes de Liénard

Dans ce chapitre on étudie le nombre de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre linéaire perturbé par une classe généralisée d'équations différentielles de Liénard. en utilisant la méthode de la moyenne d'ordre un.

3.1 Perturbation du centre linéaire

On étudie le nombre maximum des cycles limites qui peuvent bifurquer du centre linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

après l'avoir perturbé par une classe d'équations différentielles de Liénard comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \sum_{k \geq 1} \epsilon^k (f_n^k(x, y)y), \end{cases} \quad (3.1)$$

où pour tout k le polynôme $f_n^k(x, y)$ est de degré n en x et y , ϵ est un petit paramètre.

En appliquant la méthode de la moyenne d'ordre un (Théorème 2.1.1) à ce système on obtient :

Théorème 3.1.1 En appliquant la méthode de la moyenne d'ordre un au système de Liénard (3.1), au plus $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ cycles limites bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = y, \dot{y} = \frac{dy}{dt} = -x$.

Preuve :

Pour appliquer la moyennisation d'ordre un, on écrit le système (3.1) avec $k = 1$, en coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta), r > 0$. Avec ceci, le système (3.1) se met sous la forme standard pour pouvoir appliquer la méthode de la moyenne.

En effet, si $f_1(x, y) = \sum_{i+j=0}^n a_{ij} x^i y^j$ alors le système (3.1) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j+1} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta), \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+1}(\theta). \end{cases} \quad (3.2)$$

On considérons maintenant θ comme nouvelle variable indépendante, le système (3.2) s'écrit sous la forme

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \left(\sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j+1} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) \right) + O(\varepsilon^2)$$

et

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j+1} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) \right) d\theta.$$

Pour calculer l'expression exacte de F_{10} , on utilise les formules suivantes

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ impair ou } j \text{ impair} \\ \alpha_{ij} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair,} \end{cases} \quad (3.3)$$

d'où

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i+j=0}^n a_{ij} \alpha_{ij} r^{i+j+1} \text{ où } i \text{ pair et } j \text{ pair.} \quad (3.4)$$

Donc le polynôme $F_{10}(r)$ a au plus $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ racines positives, et de plus on peut choisir les coefficients a_{ij} avec i pair et j pair de tel que $F_{10}(r)$ admet exactement $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ racines positives simples. \blacklozenge

3.2 Application

Exemple 3.2.1 On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(-2 + x - xy + x^2 + 2y^2)y. \end{cases} \quad (3.5)$$

En utilisant les coordonnées polaires $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, le système (3.5) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon r \sin^2 \theta (2r^2 - 2 + r \cos \theta - r^2 \cos \theta \sin \theta - r^2 \cos^2 \theta) \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon [r^2 (2 \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos^3 \theta - \cos^2 \theta + \cos^4 \theta + \\ r \sin^2 \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta)] \end{cases} \quad (3.6)$$

On considérons maintenant θ comme nouvelle variable indépendante, le système (3.6) s'écrit sous la forme

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon (r \sin^2 \theta (2r^2 - 2 + r \cos \theta - r^2 \cos \theta \sin \theta - r^2 \cos^2 \theta)) + O(\varepsilon^2).$$

On pose

$$f(\theta, r) = (r \sin^2 \theta (2r^2 - 2 + r \cos \theta - r^2 \cos \theta \sin \theta - r^2 \cos^2 \theta)).$$

On calcule la fonction moyennée $F_{10}(r)$ telle que :

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, r) d\theta,$$

d'où

$$F_{10}(r) = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta (2r^2 - 2 + r \cos \theta - r^2 \cos \theta \sin \theta - r^2 \cos^2 \theta)) d\theta.$$

Alors

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \left(-2r\pi + \frac{7}{4}r^3\pi \right) = 0 \quad (3.7)$$

Pour déterminer les cycles limites, on résoud l'équation (3.7).

Cette équation possède une racine positive $r = \frac{2}{7}\sqrt{14}$. D'après le théorème (3.1.1), le système (3.5) a exactement un unique cycle limite qui serait créé par bifurcation des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$, en utilisant la méthode de la moyenne d'ordre un.

Exemple 3.2.2 On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon y(-x^4 - x^2 + y^2 - \frac{3}{8}). \end{cases} \quad (3.8)$$

En utilisant les coordonnées polaires $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, alors le système (3.8) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon r(r^4 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - r^2 \sin^4 \theta + \frac{3}{8} \sin^2 \theta), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon [\cos \theta \sin \theta (-r^4 \cos^4 \theta - r^2 \cos^2 \theta - \frac{3}{8}) + r^2 \cos(\theta) \sin^3 \theta] \end{cases} \quad (3.9)$$

On considérons maintenant θ comme nouvelle variable indépendante, le système (3.9) s'écrit sous la forme

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon r \left(r^4 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - r^2 \sin^4 \theta + \frac{3}{8} \sin^2 \theta \right) + O(\varepsilon^2)$$

On pose

$$f(\theta, r) = r(r^4 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - r^2 \sin^4 \theta + \frac{3}{8} \sin^2 \theta).$$

On calcule la fonction moyennée $F_{10}(r)$ telle que :

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, r) d\theta,$$

d'où

$$F_{10}(r) = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} (r^4 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - r^2 \sin^4 \theta + \frac{3}{8} \sin^2 \theta) d\theta.$$

Alors

$$F_{10}(r) = \frac{1}{16}r^5 - \frac{1}{4}r^3 + \frac{3}{16}r. \quad (3.10)$$

Pour déterminer les cycles limites, on résoud l'équation (3.10)

Cette équation possède deux racines positives $r_1 = 1$ et $r_2 = \sqrt{3}$. D'après le théorème (3.1.1), le système (3.8) a exactement deux cycles limites qui seraient créés par bifurcation des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$, en utilisant la méthode de la moyenne d'ordre un.

Exemple 3.2.3 On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon \left(\frac{1}{2} - \frac{128}{5}x^6 + 100x^4 - 40x^2 \right) y. \end{cases} \quad (3.11)$$

En utilisant les coordonnées polaires $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, le système (3.11) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r \sin^2 \theta \left(-\frac{128}{5}r^6 \cos^6 \theta + 100r^4 \cos^4 \theta - 40r^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \right) \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \sin \theta \cos \theta \left(-\frac{128}{5}r^6 \cos^6 \theta + 100r^4 \cos^4 \theta - 40r^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \right) \end{cases} \quad (3.12)$$

On considérons maintenant θ comme nouvelle variable indépendante, le système (3.12) s'écrit sous la forme

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon r \left(-\frac{128}{5}r^6 \cos^6 \theta \sin^2 \theta + 100r^4 \cos^4 \theta \sin^2 \theta - 40r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) + O(\varepsilon^2).$$

On pose

$$f(\theta, r) = r \left(-\frac{128}{5}r^6 \cos^6 \theta \sin^2 \theta + 100r^4 \cos^4 \theta \sin^2 \theta - 40r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right).$$

On calcule la fonction moyennée $F_{10}(r)$ telle que :

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, r) d\theta,$$

d'où

$$F_{10}(r) = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{128}{5}r^6 \cos^6 \theta \sin^2 \theta + 100r^4 \cos^4 \theta \sin^2 \theta - 40r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) d\theta.$$

Alors

$$F_{10}(r) = r\left(r^6 - \frac{25}{4}r^4 + \frac{5}{2}r^2 - \frac{1}{4}\right) = 0. \quad (3.13)$$

Pour déterminer les cycles limites, on résoud l'équation (3.13).

Cette équation possède les racines suivantes $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}, \sqrt{2}-1$ et $-\sqrt{2}+1$, puisque r doit être strictement positive on aura les trois racines $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = 1 + \sqrt{2}$ et $r_3 = \sqrt{2} - 1$. D'après le théorème (3.1.1), le système (3.11) a exactement trois cycles limites qui seraient créés par bifurcation des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$, en utilisant la méthode de la moyenne d'ordre un.

Bibliography

- [1] P. Alsholm, *Existence of limit cycles generalized Liénard equations. J. math. anal. appl.*, 171 (1992), p. 242.
- [2] Badi Sabrina, *Thèse de doctorat, Bifurcation des cycles limites des systèmes polynomiaux suivant la méthode de la moyenne* (2012).
- [3] Badi Sabrina and Amar Makhlouf, *Limit cycles of the generalized Liénard differential equation via averaging theory, Annals of Differential Equations*, (december 2011).
- [4] Boufoul Amel, *Thèse de doctorat, Cycles limites de certains systèmes de Liénard généralisés dépendant d'un petit paramètre* (2013)
- [5] Jean-pierre François, *Mathématiques et application Université P-M paris*, (2005).
- [6] Jean-Pierre François, *Oscillations en biologie Analyse qualitative et modèles*.
- [7] L.PERKO ,*Differential equations and Dynamical systems* (2001)
- [8] Sébastien Neukrich, *Les attracteur des systèmes dynamique dissipatifs de Lorenz et de Liénard* (6 novembre 1998).
- [9] J. A. Sanders and F. Verhulst, *Averaging methods in nonlinear dynamical systems. Applied Mathematical Sci, Vol. 59, Springer-Verlag, New York, 1985.*
- [10] F. Verhulst, *Nonlinear differential equations and dynamical systems. Universitex, Springer*, (1991).