

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

11510.154

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



**Mémoire**

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
**Master Académique en Mathématiques**  
Option : **Mathématiques Appliquées**



Par :

**Mr. BOUNAYA Mohammed Charif**

**Intitulé**

***Méthode énergétique pour la résolution d'un  
problème de Cauchy mal posé***

**Dirigé par : Dr. BENRABAH Abderafik**

Devant le jury

**PRESIDENT  
RAPPORTEUR  
EXAMINATEUR**

**Mr. N. BOUSSETILA  
Mr. A. BENRABAH  
Mr. A. MEHRI**

**Pr. Univ-Guelma  
MCA. Univ-Guelma  
MCB. Univ-Guelma**

**Session Juin 2015**

## Dédicace

*Nous dédions ce modeste travail,*

*A nos chers parents qui nous ont toujours encouragés,*

*A nos familles et tous nos amis,*

*A mon encadreur Mr "Benrabah Abderafik",*

*A nos collègues étudiants et*

*A tous les enseignants de la faculté des mathématiques et informatique et  
sciences de la matière.*

## Remercîments

*Le plus grand merci revient à Dieux qui, lui seul, nous a guidé dans le bon sens durant notre vie.*

*Nous tenons à remercier vivement notre encadreur "Mr "Benrabah Abderafik" pour sa bienveillance et son aide inestimable.*

*Un grand merci à tous les enseignants qui nous ont accompagnés et encouragés le long de nos années d'études.*

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| Résumé   | 3         |
| Introduction   | 3         |
| <b>1 Problèmes inverses</b>  | <b>7</b>  |
| 1.1 Problèmes bien et mal posés . . . . .  | 7         |
| 1.2 Problèmes directs et problèmes inverses . . . . .                            | 11        |
| 1.3 Exemples de problèmes inverses . . . . .                                     | 13        |
| 1.3.1 Problèmes inverses en thermique . . . . .                                  | 13        |
| 1.3.2 Problèmes inverses en Hydrogéologie . . . . .                              | 15        |
| 1.3.3 Problèmes inverses en Imagerie médicale . . . . .                          | 17        |
| <b>2 Problème de Cauchy</b>  | <b>19</b> |
| 2.1 Introduction . . . . .   | 19        |
| 2.2 Problème de Cauchy pour une équation différentielle ordinaire . . . . .      | 20        |
| 2.2.1 Équation différentielle ordinaire du premier ordre . . . . .               | 20        |
| 2.2.2 Cylindres de sécurité . . . . .  | 21        |
| 2.2.3 Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz . . . . .            | 22        |
| 2.2.4 Équation différentielle d'ordre supérieur à un . . . . .                   | 25        |
| 2.3 Problème de Cauchy pour une équation aux dérivées partielles . . . . .       | 26        |
| 2.3.1 Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Kwalwesky . . . . .            | 27        |
| 2.4 Problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur stationnaire . . . . .      | 31        |
| 2.4.1 Problème stationnaire avec condition de Dirichlet homogène . . . . .       | 31        |
| 2.4.2 Problème stationnaire avec condition de Neumann homogène . . . . .         | 32        |
| <b>3 La méthode énergétique</b>  | <b>34</b> |
| 3.1 Définitions et notations . . . . .   | 34        |
| 3.2 Position du problème . . . . .   | 35        |
| 3.3 Analyse théorique de la méthode énergétique . . . . .                        | 38        |
| 3.3.1 Cadre fonctionnel et variationnel . . . . .                                | 38        |
| 3.3.2 Contrôle optimal . . . . .   | 44        |
| 3.4 Discrétisation . . . . .   | 48        |
| 3.4.1 Estimation d'erreur abstraite . . . . .                                    | 49        |
| 3.4.2 Estimation d'erreur dans le cas de données bruitées . . . . .              | 50        |
| 3.4.3 Déduction d'un critère d'arrêt pour le processus de minimisation . . . . . | 51        |
| 3.5 Mise en œuvre . . . . .  | 53        |
| 3.5.1 Procédures numériques . . . . .  | 53        |

## Résumé

Nous nous sommes intéressés, dans ce travail, à la résolution d'un problème de Cauchy mal posé pour l'équation de la chaleur stationnaire par une méthode basée sur la minimisation d'une fonctionnelle énergétique.

Dans le premier chapitre, le caractère mal posé est introduit ainsi que la notion du problème inverse avec des exemples concrets.

La définition du problème de Cauchy est donnée dans le deuxième chapitre avec les deux célèbres théorèmes d'existence et d'unicité de la solution de ce problème en dimension  $d = 1$  et  $d > 1$ .

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la méthode énergétique : cadre théorique et analyse numérique. Le problème de Cauchy mal posé est introduit avec la fonctionnelle à minimiser qui mesure l'écart énergétique entre deux champs, chaque un est solution d'un problème bien posé. Une fois le cadre variationnel est défini, la discrétisation par éléments finis et l'estimation d'erreur en tenant compte des données bruitées sont données ainsi que la proposition d'un critère d'arrêt qui empêche l'explosion numérique de l'erreur due au bruit pendant le processus de minimisation. Ensuite, on présente le calcul du gradient de la fonctionnelle discrète par la méthode d'états adjoints en utilisant le Lagrangien. Enfin on donne un test numérique dans le cas des données exactes et des données bruitées pour montrer le rôle important du critère d'arrêt et l'efficacité de la méthode.

externe. Cette application intervient dans de nombreux processus industriels. La stratification thermique d'un fluide parcourant un pipeline génère des contraintes mécaniques pouvant provoquer des dégradations du matériel telles que des fissures. La connaissance de la température sur la paroi interne d'un pipeline est donc essentielle pour contrôler l'état du matériel.

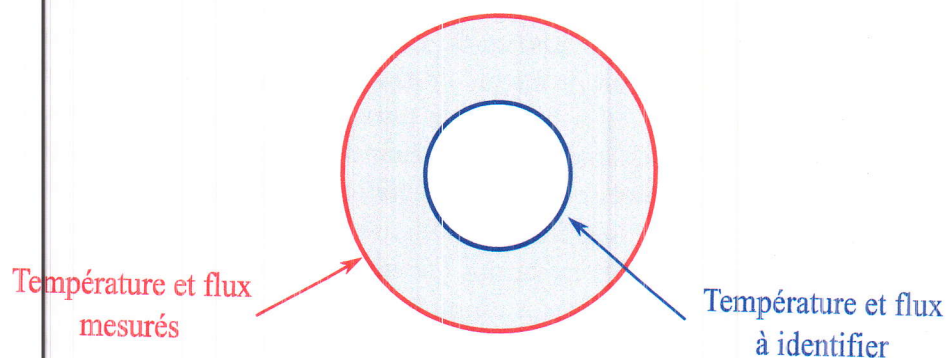


FIGURE 2 – Pipeline

Le dernier exemple concerne la détection de contacts. On considère un solide inclus dans un autre. À partir des mesures de déplacement sur la frontière accessible, on souhaite identifier les zones de contacts et de frottement entre ces deux solides. Cet exemple est illustré par la figure 3.

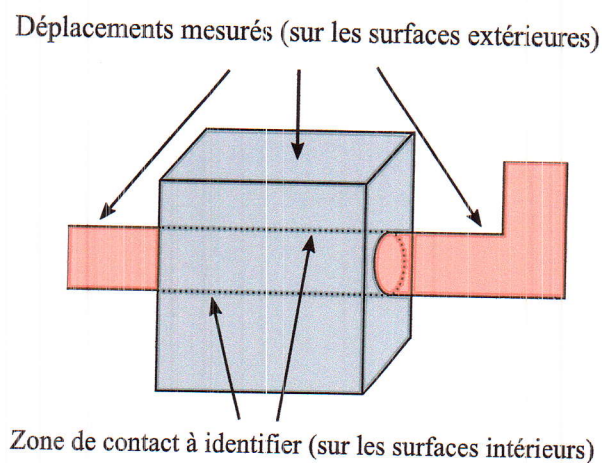


FIGURE 3 – Inclusion

Selon les travaux de J.Hadamard [14], le problème de Cauchy introduit précédemment, est considéré comme mal posé et présente une importante instabilité au

# Chapitre 1

## Problèmes inverses

### 1.1 Problèmes bien et mal posés

En étudiant la résolution des équations aux dérivées partielles, le mathématicien Jacques Hadamard (1902) [14] a exprimé le concept de problème bien-posé. Nous allons voir ci-dessous une définition sous la forme de trois conditions. Ces conditions reflètent les contraintes pour qu'un modèle en physique mathématique ait un sens et conduise à une résolution raisonnable du problème qu'il représente.

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces métriques,  $A : X \rightarrow Y$  un opérateur. Considérons l'équation :

$$Ax = y \tag{1.1}$$

Notons que plusieurs problèmes physiques se ramènent à une telle équation. On dit que le problème (1.1) est bien posé si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. La solution  $x$  existe ; c'est à dire pour tout  $y$  dans  $Y$ , il existe au moins un  $x$  dans  $X$  tel que  $Ax = y$  (Surjectivité de  $A$ ).
2. La solution  $x$  est unique ; c'est à dire pour tout  $y$  dans  $Y$ , il existe au plus un  $x$  dans  $X$  tel que  $Ax = y$  (Injectivité de  $A$ ).
3. La solution  $x$  est stable (dépend continûment de la donnée  $y$ ) ; c'est à dire toute petite perturbation des données  $y$  implique une petite variation de la solution  $x$  :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tel que } d_Y(y, y') < \delta \Rightarrow d_X(x, x') < \varepsilon \text{ avec } Ax' = y'$$

Plusieurs problèmes physique ne vérifient pas forcément ces conditions simultanément, alors au moins l'une des trois conditions n'est pas vérifiée et le problème (1.1) est dit *mal posé*.

**Exemple 1.1.1.** Soit le problème suivant :

$$Au = f$$

résolution de ses problèmes mal posés. Pour amoindrir cette sensibilité, plusieurs méthodes, dites de régularisation, ont été exposées, et dont le principe est de remplacer le problème mal posé par une suite de problèmes bien posés, dépendant d'un paramètre dit de régularisation et de telle façon que la solution approchée obtenue soit stable : On appelle *stratégie de régularisation* de (1.1) toute famille d'opérateurs linéaires bornés  $R_\alpha : Y \rightarrow X$  tel que pour tout  $x \in X$  on a :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha(Ax) = x$$

i.e,  $R_\alpha$  converge simplement vers l'identité ;  $\alpha$  est appelé paramètre de régularisation

On présente maintenant une introduction aux méthodes de régularisation les plus courantes. A savoir la méthode de Tikhonov et la méthode de quasi-reversibilité.

#### ◆ Méthode de Tikhonov :

Considérons le problème (1.1), où  $A$  est un opérateur linéaire compact injectif,  $X$  et  $Y$  sont deux espaces de Hilbert et supposons que  $y \in A(X)$  ; i.e, le problème (1.1) (avec ces conditions) admet une solution unique. La non continuité de l'opérateur inverse de  $A$  rend donc le problème considéré mal posé.

**Théorème 1.1.1.** *Soit  $R_\alpha$  une stratégie de régularisation pour l'opérateur  $A : X \rightarrow Y$ , où  $X$  est de dimension infinie. Alors*

1. *Les opérateurs  $R_\alpha$  ne sont pas uniformément bornés ; i.e, il existe une suite  $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  telle que*

$$\lim_j \|R_{\alpha_j}\|_{L(Y,X)} = +\infty$$

2. *Il n'y a pas de convergence de  $R_\alpha A$  au sens de la norme.*

La donnée initiale  $y \in Y$  n'est jamais connue exactement (à cause des incertitudes de mesures expérimentales), il y a toujours un bruit  $\delta$  qui vient la perturber. Notons  $y^\delta$  la donnée perturbée où le nombre  $\delta > 0$  est le niveau de bruit, i.e

$$\|y - y^\delta\|_Y \leq \delta$$

Notons  $x^{\alpha,\delta} = R_\alpha y^\delta$  l'approximation de la solution du problème  $Ax = y$ , obtenue avec l'opérateur de régularisation  $R_\alpha$  et la donnée perturbée  $y^\delta$ . En utilisant l'inégalité triangulaire sur  $\|x^{\alpha,\delta} - x\|_X$  on obtient

$$\|x^{\alpha,\delta} - x\|_X \leq \delta \|R_\alpha\|_{L(Y,X)} + \|R_\alpha Ax - x\|_X$$

Le premier terme de droite représente la majoration d'erreur due au niveau de bruit. Par le théorème (1.1.1), nous avons vu que  $\|R_\alpha\|_{L(Y,X)} \rightarrow +\infty$  lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ . Il ne faut pas donc choisir  $\alpha$  trop petit sinon l'erreur devient grande. Par contre le second



Cette méthode est introduite par R-Lattes, J-Lions [17] et dont le principe est de modifier convenablement l'opérateur différentiel  $A$  qui représente le problème aux limites mal posé, dans le but de le rendre bien posé.

Cette modification consiste à remplacer  $A$  par  $A_\alpha = g_\alpha(A)$  ( $\alpha > 0$  petit) qui fait intervenir des termes différentiels qui sont :

- Petits (il peuvent tendre formellement vers zéro)
- Dégénérés sur la frontière (pour éliminer les conditions aux limites adéquates)

L'opérateur modifié est en général d'ordre différent et peut être de même type (elliptique, parabolique, hyperbolique) ou non que l'opérateur initial.

Notons que la méthode de quasi-reversibilité (en abréviation QR) n'est pas unique pour tout les problèmes mal posés rencontrés, il y a une infinité de méthodes de QR qui peuvent être créées et mises en oeuvre selon les caractéristiques du problème considéré.

Dans la méthode originelle, R-Lattes et J-Lions proposent  $g_\alpha(A) = A - \alpha A^2$  et dans la méthode modifiée, H-Gajewski et K-Zaccharias proposent  $g_\alpha(A) = A(I + \alpha A)^{-1}$  (si  $A$  est un opérateur positif, auto-adjoint et non borné sur un espace de Hilbert,  $g_\alpha(A)$  est appelé *Approximation de Yosida*)

Mais lorsqu'on utilise cette méthode, on est confronté à certaines difficultés. La première résulte du terme correcteur ( $\alpha A^2$ ) qui induit une difficulté pour l'implémentation numérique. La seconde est que le coefficient d'erreur  $e(\alpha)$  résultant d'une petite perturbation des données soit d'ordre  $\exp(\frac{1}{\alpha})$ . Pour toutes ces raisons N-Boussetila et F-Rebbani [18], proposent une modification de cette méthode en introduisant une nouvelle perturbation

$$A_\alpha = g_\alpha(A) = -\frac{1}{pT} \ln(\alpha + e^{pTA}), \quad \alpha > 0, p \geq 1$$

★ Le premier avantage de cette perturbation résulte du fait que ( $A_\alpha \in L(H)$ ), ce qui implique une position correcte du problème perturbé dans les deux directions du temps

★ Le deuxième avantage réside dans la possibilité d'établir des résultats meilleurs (optimalité de la méthode) par rapport aux résultats obtenus précédemment.

## 1.2 Problèmes directs et problèmes inverses

Depuis Newton la notion de causalité est ancrée dans notre subconscience scientifique, nous avons appris à poser, puis résoudre des problèmes pour lesquels les causes sont données en cherchant les effets, ce type de problèmes est considéré comme problème direct. Un problème inverse est donc la formulation inverse d'un problème direct, il consiste à déterminer les causes sachant les effets. Cette définition donne l'impression que les problèmes inverses risquent de poser des difficultés particulières. Il est possible de donner un sens mathématique à la phrase "*Les mêmes causes produisent les mêmes effets*", c'est à dire qu'il est raisonnable d'exiger que le problème direct soit *bien posé*. Par contre, il est facile d'imaginer que les mêmes effets puissent

*mal posé*. En effet, en raison d'incertitude expérimentale, des données  $d$  pourront être incompatibles avec les entrées  $X$  (c'est à dire qu'aucun système ne parvient à produire  $d$  à partir de  $X$ ), d'où l'absence de solution pour les données disponibles. De nombreux cas présentent également des possibilités de solutions multiples. Enfin une caractéristique très répondeue est la très grande sensibilité d'une solution par rapport à une perturbation des données.

### 1.3 Exemples de problèmes inverses

Nous présentons dans cette section quelques exemples concrets de problèmes inverses tels qu'ils interviennent dans de nombreux domaines de la science de l'ingénierie.

#### 1.3.1 Problèmes inverses en thermique

Pour déterminer la répartition de la température dans un matériau non homogène occupant un domaine (ouvert connexe)  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ , on écrit tout d'abord la conservation de l'énergie :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{q}) = f(x, y, z) \text{ dans } \Omega \quad (1.5)$$

où  $T$  est la température,  $\rho$  la densité du matériau,  $c$  la chaleur spécifique,  $\vec{q}$  représente un flux de la chaleur et  $f$  une source de chaleur.

La loi de Fourier relie ensuite le flux de chaleur au gradient de température :

$$\vec{q} = -K \operatorname{grad} T \quad (1.6)$$

où  $K$  est la conductivité thermique (qui peut être un tenseur et dépend de la position).

En éliminant  $\vec{q}$ , on obtient l'équation de la chaleur en milieu hétérogène :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(K \operatorname{grad} T) = f \text{ dans } \Omega \quad (1.7)$$

Cette équation doit être complétée par des conditions aux limites sur le bord de  $\Omega$  et une condition initiale.

Le problème direct est de déterminer  $T$  connaissant les coefficients physiques  $\rho$ ,  $c$  et  $K$ , ainsi que la source de chaleur  $f$ . Ce problème est bien connu. Plusieurs problèmes inverses peuvent être posés, par exemple :

1. étant donné une mesure de la température à l'instant  $t_f > 0$ , déterminer la température initiale (EXEMPLE 1.4.1).
2. étant donné une mesure (partielle) de la température, déterminer certains des coefficients de l'équation (EXEMPLE 1.4.2)

Le problème direct suppose connue la conductivité thermique  $K$  et la source de chaleur  $f$  et consiste à déterminer la répartition de la température  $T$  en tout point du matériau.

Pour pouvoir spécifier le problème inverse, il est tout d'abord nécessaire de préciser de quelle "observation" l'on dispose. Cela dépend bien évidemment du dispositif expérimental utilisé, mais en tout état de cause, il ne sera généralement pas réaliste de supposer que l'on connaît la température en tout point. Dans notre cas, ces observations pourraient être, par exemple, des mesures de la température à l'intérieur du matériau, ou bien des mesures du flux de chaleur  $-K \frac{\partial T}{\partial n}$  sur le bord du domaine (on parle dans ce cas d'observations frontière).

Le problème inverse est alors de chercher la (ou une) fonction de conductivité, tel qu'il existe une fonction  $T$  solution de (1.11) qui coïncide avec les observations.

On voit plusieurs difficultés possibles :

- Tout d'abord celle d'obtenir les observations : dans notre exemple, il n'est pas réaliste de supposer que l'on puisse mesurer la température en tout point du domaine.
- Mais alors on risque de ne pas disposer de suffisamment d'observations par rapport au nombre de paramètres que l'on cherche.
- En particulier, si la température est constante dans un sous-domaine de  $\Omega$ , la conductivité n'y est pas déterminée, cela nécessite des informations supplémentaires permettant de compléter ce manque de mesures.
- Enfin toute mesure est entachée d'erreur, et d'ailleurs le modèle mathématique (1.11) ne reflète pas exactement la réalité. Ainsi il n'y a en fait aucune raison pour que le problème inverse possède une solution.

### 1.3.2 Problèmes inverses en Hydrogéologie

L'hydrogéologie, ou l'étude des nappes phréatiques, est une autre source abondante de problèmes inverses. Il est, en effet, difficile d'accéder aux couches du sous-sol pour mesurer les propriétés aqueuses des roches. On peut citer comme problème d'actualité le contrôle des polluants dans les nappes d'eau souterraines.

**Exemple 1.3.3.** (Transport d'un polluant par un aquifère)

Un milieu poreux est constitué d'une matrice rocheuse, comprenant les pores qui peuvent laisser passer l'eau. Il est essentiellement impossible de décrire l'écoulement d'un fluide dans un tel milieu hétérogène, dans la mesure où l'on doit prendre en compte des échelles spatiales allant du centimètre (le pore) au kilomètre (le modèle régional), et que la disposition précise des pores n'est de toute façon pas connue. On utilise alors des modèles physiques simplifiés, le plus courant étant la loi de Darcy, qui relie la hauteur de l'eau dans le milieu, appelée "charge piézométrique" et notée  $h(x, y, z, t)$ , à la vitesse de filtration  $\vec{q}(x, y, z, t)$ . Cette loi montre que la vitesse est proportionnelle à l'opposé du gradient hydraulique :

$$\vec{q} = -K \operatorname{grad} h \quad (1.12)$$

où  $K$  est le coefficient de conductivité hydraulique. Ce qui peut en principe être un tenseur, mais nous nous restreindrons au cas où c'est un scalaire.

### 1.3.3 Problèmes inverses en Imagerie médicale

Les sciences médicales fournissent un grand nombre de problèmes inverses, dont l'importance pratique n'échappera à personne. Nous allons évoquer rapidement quelques uns d'entre eux.

#### Exemple 1.3.5. (Tomographie par rayons X)

C'est la technique utilisée par les scanners. Un tube à rayons X est monté sur un portique qui entoure le patient. Les rayons émis sont mesurés par des détecteurs placés en face de l'émetteur. Nous considérons la situation bidimensionnelle, où le domaine représente une section transverse du patient. On suppose que les rayons suivent des lignes droites, et sont atténués à la traversée des tissus, proportionnellement à l'intensité elle-même, et à la distance parcourue (loi de Bouger). Les rayons X suivent des lignes droites, lesquelles sont paramétrisées par leur vecteur normal  $u \in \mathbb{R}^2$ , et leur distance  $s$  à l'origine (figure 1.1)

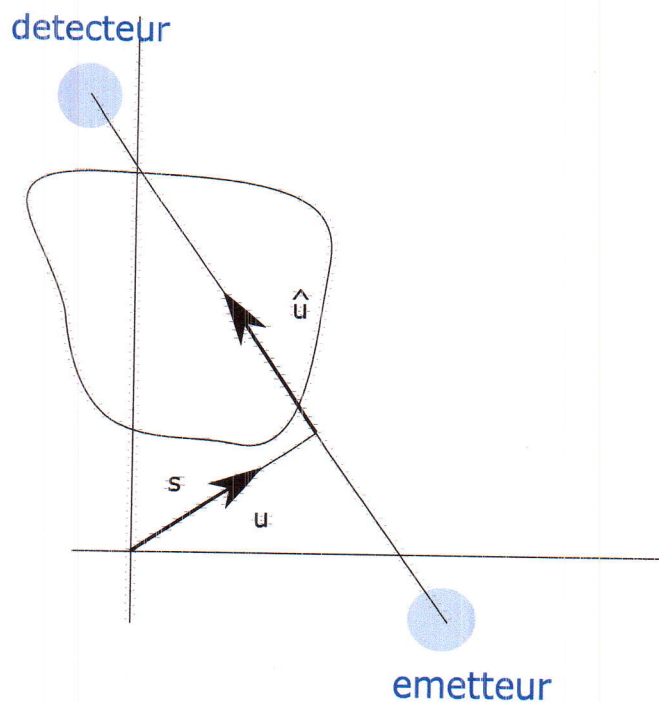


FIGURE 1.1 – Paramétrisation de l'expérience

En notant  $f$  le coefficient d'atténuation (qui peut dépendre du point), on obtient l'équation suivante :

$$\Delta I(su + t\hat{u}) = -I(su + t\hat{u})f(su + t\hat{u})\Delta t$$

où  $\hat{u}$  est un vecteur unitaire orthogonal à  $u$ . En faisant tendre  $\Delta t$  vers 0, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt}I(su + t\hat{u}) = -I(su + t\hat{u})f(su + t\hat{u})$$

## Chapitre 2

# Problème de Cauchy

### 2.1 Introduction

Étant donnée une équation différentielle ou aux dérivées partielles qui admet une infinité de solutions. La préoccupation classique est la recherche de l'intégrale générale d'une telle équation. Cette intégrale qui représente la forme de toutes les solutions possibles, contient des éléments arbitraires (paramètres ou fonctions) qui peuvent représenter n'importe quelle solution, à l'exception des cas particuliers (des cas non réalisables). Mais dans de nombreux cas et fréquemment en ce qui concerne les équations aux dérivées partielles, on est obligé de choisir parmi les solutions possibles des solutions qui vérifient des conditions données (accessoire). On s'intéresse beaucoup à ces problèmes non seulement à cause de la difficulté ou de l'impossibilité de détermination de l'intégrale générale, mais parce qu'ils sont fréquemment rencontrés en science.

Considérons une équation aux dérivées partielles vérifiée dans un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^m$  (l'équation est différentielle ordinaire pour  $m = 1$ ) dans lequel l'inconnue notée  $u$  existe et est bien définie, ainsi que les conditions accessoires qui sont données sur la frontière du domaine. Supposons que nous avons l'expression de l'intégrale générale et qu'on cherche à déterminer les éléments arbitraires dans cette expression qui doit vérifier les conditions accessoires. Alors dans le cas d'une équation différentielle ordinaire, les éléments arbitraires sont des paramètres numériques, et on peut les obtenir en égalant un nombre à une équation numérique. Mais pour les équations aux dérivées partielles, les éléments arbitraires sont des fonctions, et leur détermination devient une question plus délicate, par exemple, on sait l'intégrale générale de l'équation de Laplace  $\Delta u = 0$ , mais, cependant, on ne peut pas avoir une solution sans complication de calculs.

Le problème aux limites vise donc la détermination de la fonction inconnue  $u$  telle quelle satisfasse :

1. Une équation aux dérivées partielles.
2. Des conditions aux limites.

Le problème aux limites le plus simple est connu sous le nom de "Problème de Cauchy".

**Problème de Cauchy :** Étant donné un point  $(t_0, y_0) \in U$ , le problème de Cauchy consiste à trouver une solution  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  de (2.3) sur un intervalle  $I$  contenant  $t_0$  dans son intérieur, telle que  $y(t_0) = y_0$ .

**Interprétation physique :** Dans de nombreuses situations concrètes, la variable  $t$  représente le temps et  $y = (y_1, \dots, y_m)$  est une famille de paramètres décrivant l'état d'un système matériel donné. L'équation (2.3) traduit physiquement la loi d'évolution du système considéré en fonction du temps et de la valeur des paramètres. Résoudre le problème de Cauchy revient à prévoir l'évolution du système au cours du temps, sachant qu'en  $t = t_0$  le système est décrit par les paramètres  $y_0 = (y_{0,1}, \dots, y_{0,m})$ . On dit que  $(t_0, y_0)$  sont les *données initiales* du problème de Cauchy.

Pour  $m = 1$ , résoudre le problème de Cauchy revient à trouver une *courbe intégrale* de (2.3) passant par le point donné  $(t_0, y_0) \in U$ .

Le lemme si-dessous montre que la résolution de (2.3) est équivalente à la résolution d'une équation intégrale.

**lemme 2.2.1.** Une fonction  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une solution du problème de Cauchy de données initiales  $(t_0, y_0)$  si et seulement si :

- (i)  $y$  est continue et  $(\forall t \in I) (t, y(t)) \in U$ ,
- (ii)  $(\forall t \in I) y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du$ .

En effet si  $y$  vérifie (i) et (ii) alors  $y$  est dérivable et on a  $y(t_0) = y_0$ ,  $y'(t) = f(t, y(t))$ . Inversement si  $y$  est une solution du problème de Cauchy, (ii) s'en déduit par intégration.

### 2.2.2 Cylindres de sécurité

Pour résoudre l'équation différentielle (2.3), on va plutôt chercher à construire des solutions de l'équation intégrale (ii) du lemme précédent, et en premier lieu, on va montrer qu'une solution passant par un point  $(t_0, y_0) \in U$  ne peut s'éloigner "trop vite" de  $y_0$ .

On note  $\|\cdot\|$  une norme quelconque sur  $\mathbb{R}^m$ , et  $B(x, r)$  (resp  $\bar{B}(x, r)$ ) la boule ouverte (resp fermée) de centre  $x$  et de rayon  $r$  dans  $\mathbb{R}^m$ . Comme  $U$  est supposé ouvert, il existe un *cylindre*

$$C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \bar{B}(y_0, r_0)$$

de longueur  $2T_0$  et de rayon  $r_0$  assez petit, tel que  $C_0 \subset U$ . L'ensemble  $C_0$  est fermé borné dans  $\mathbb{R}^{m+1}$ , donc compact. Ceci entraîne que  $f$  est bornée sur  $C_0$ , c'est-à-dire

$$M = \sup_{(t,y) \in C_0} \|f(t, y)\| < +\infty$$

Le nombre  $A$  est fini puisque  $C_0$  est compact. Le théorème des accroissements finis appliqué à  $f_i$  sur  $C_0$  donne

$$f_i(t, y_1) - f_i(t, y_2) = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t, \xi)(y_{1,j} - y_{2,j})$$

avec  $\xi \in ]y_1, y_2[$ . On a donc

$$\max_i |f_i(t, y_1) - f_i(t, y_2)| \leq mA \max_j |y_{1,j} - y_{2,j}|.$$

Sous ces hypothèses sur  $f$ , nous allons montrer que la solution du problème de Cauchy est nécessairement unique en utilisant le théorème du point fixe.

Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet et  $\varphi : E \rightarrow E$  une application continue. On dit que  $a \in E$  est un *point fixe* de  $\varphi$  si  $\varphi(a) = a$ . On dit que  $\varphi$  est *contractante* si  $\varphi$  est Lipschitzienne de rapport  $k < 1$ , c'est-à-dire s'il existe  $k < 1$  tel que

$$\forall x, y \in E, \quad d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq kd(x, y).$$

**Théorème 2.2.1.** *Soit  $\varphi : E \rightarrow E$  une application contractante d'un espace métrique complet dans lui même. Alors  $\varphi$  admet un point fixe unique  $a \in E$ . De plus, pour tout point initiale  $x_0 \in E$ , la suite itérée  $(x_p)_{p \geq 0}$  définie par  $x_{p+1} = \varphi(x_p)$  converge vers  $a$ .*

### Preuve

**Existence :** Soit  $x_0 \in E$  un point initial quelconque et  $(x_p)_{p \geq 0}$  la suite itérée associée. On a alors

$$d(x_p, x_{p+1}) = d(\varphi(x_{p-1}), \varphi(x_p)) \leq kd(x_{p-1}, x_p)$$

d'où par récurrence  $d(x_p, x_{p+1}) \leq k^p d(x_0, x_1)$ . Pour tout entier  $q > p$  il vient

$$d(x_p, x_q) \leq \sum_{l=p}^{q-1} d(x_l, x_{l+1}) \leq \left( \sum_{l=p}^{q-1} k^l \right) d(x_0, x_1)$$

avec  $\sum_{l=p}^{q-1} k^l \leq \sum_{l=p}^{+\infty} k^l = \frac{k^p}{1-k}$ . On a donc

$$d(x_p, x_q) \leq \frac{k^p}{1-k} d(x_0, x_1) \quad \forall p < q$$

ce qui montre que  $(x_p)_{p \geq 0}$  est une suite de Cauchy. Comme  $(E, d)$  est complet, la suite converge vers un point limite  $a \in E$ . L'égalité  $x_{p+1} = \varphi(x_p)$  et la continuité de

et  $\phi^p$  est Lipschitzienne de rapport  $\frac{k^p T^p}{p!}$  sur  $\mathcal{F}$ . Comme  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{k^p T^p}{p!} = 0$ , il existe  $p$  assez grand tel que  $\frac{k^p T^p}{p!} \leq 1$ , pour une telle valeur de  $p$ ,  $\phi^p$  est une application contractante de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}$ . Par ailleurs,  $\mathcal{F}$  est un espace métrique complet. Le théorème du point fixe montre alors que  $\phi$  admet un point fixe unique  $y$ . ■

**Remarque 2.2.3.** D'après (\*), on voit que pour toute fonction  $z \in \mathcal{F}$  la suite itérée  $z^{(p)} = \phi^p(z)$  converge uniformément vers la solution exacte  $y$  du problème de Cauchy.

### 2.2.4 Équation différentielle d'ordre supérieur à un

**Définition 2.2.3.** Une équation de la forme

$$y^{(p)} = f(t, y', \dots, y^{(p-1)}) \quad (2.4)$$

est un système d'ordre  $p$  dans  $\mathbb{R}^m$  où  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une application continue définie sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^p$ .

Une solution de (2.4) sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  est une application  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$   $p$ -fois dérivable, telle que

- (i)  $(\forall t \in I) \quad (t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t)) \in U,$
- (ii)  $(\forall t \in I) \quad y^{(p)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t))$

**Système différentielle d'ordre un associé.**

Il est clair que le système (2.4) est équivalent à un système différentiel d'ordre 1. Posons  $Y_0 = y, Y_1 = y', \dots, Y_{p-1} = y^{(p-1)}$ , on obtient

$$(s) \begin{cases} \frac{dY_0}{dt} = Y_1 \\ \frac{dY_1}{dt} = Y_2 \\ \dots \\ \frac{dY_{p-2}}{dt} = Y_{p-1} \\ \frac{dY_{p-1}}{dt} = f(t, Y_0, Y_1, \dots, Y_{p-1}) \end{cases}$$

Le système (s) peut encore s'écrire

$$Y' = F(t, Y) \quad (2.5)$$

avec

$$\begin{aligned} Y &= (Y_0, Y_1, \dots, Y_{p-1}) \in (\mathbb{R}^m)^p \\ F &= (F_0, F_1, \dots, F_{p-1}) : U \rightarrow (\mathbb{R}^m)^p \\ F_0(t, Y) &= Y_1, \dots, F_{p-2}(t, Y) = Y_{p-1}, F_{p-1} = f(t, Y). \end{aligned}$$

Tout système différentiel (2.4) d'ordre  $p$  dans  $\mathbb{R}^m$  est donc équivalent à un système différentiel (2.5) d'ordre 1 dans  $(\mathbb{R}^m)^p$ . Il en résulte que le théorème d'existence et



Maintenant la question qui se pose est : trouver une solution de (2.7) telle que pour  $x_m = (x_m)_0$ ,  $u$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_m}$  sont des fonctions de  $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$  données :

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, (x_m)_0) &= u_0(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) \\ \frac{\partial u}{\partial x_m}(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, (x_m)_0) &= u_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) \end{aligned}$$

La question précédente est appelée "Problème de Cauchy" selon l'hypersurface  $x_m = (x_m)_0$ .<sup>3</sup>

### 2.3.1 Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Kwalwsky

Le théorème suivant affirme l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy dans le cas de données holomorphes.

**Théorème 2.3.1. (d'existence et unicité de Cauchy-Kwalwsky)** [14], [12]  
*Il est bien connu que Cauchy lui-même et Sophia Kwalwsky et en même temps Darboux, ont considéré le cas où (2.7) peut être résolue par rapport à  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}$  c'est-à-dire*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = f \left( u, x_i, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, m - 1$$

avec

$$\frac{\partial \phi}{\partial \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} \right)} \neq 0$$

où  $f$  est une fonction holomorphe au voisinage des valeurs  $(x_i)_0, (u(x_1, \dots, x_m))_0, \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m) \right)_0, \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_m) \right)_0$ , et de même pour les fonction  $u_0(x_1, \dots, x_{m-1}),$  et  $u_1(x_1, \dots, x_{m-1})$  au voisinage des valeurs  $(x_j)_0$ . A partir de ces conditions, ils ont prouvé que le problème de Cauchy par rapport à  $x_m = (x_m)_0$ , admet une solution unique  $u$  holomorphe au voisinage des valeurs  $(x_i)_0$ .

#### Preuve

Cette démonstration est donnée sous la forme réduite de Goursat [14], [12], [19], [20].

On suppose que  $f$  est holomorphe en ses variables, et considérons le cas de deux variables indépendantes et prenons  $x_0 = 0$  pour simplifier les notations.

Soit l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \left( u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.8)$$

3. Dans un espace de dimension  $m$  on appelle *Hypersurface*(ou *surface*) la sous variété de dimension  $m - 1$  définie par une seule équation reliant les  $x_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

majorante.

Premièrement on peut supposer que  $u_0 = u_1 = 0$  (ce zéro est aussi la valeur de  $u_2$  déduite de l'équation. Dans le cas général ( $u_0, u_1, u_2$  sont  $\neq 0$ ) on peut remplacer  $u$  par une nouvelle variable  $\hat{u} = u - u_0 - u_1x - u_2x^2$ ). Choisissons  $y_0 = 0$  et considérons la fonction majorante de  $f$

$$\frac{K}{\left(1 - \frac{x + y + u + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}}{\rho}\right) \left(1 - \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{R}\right)} - K$$

où  $K, \rho, R$  sont des constantes positives.

(Les valeurs initiales de  $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  sont toutes nulles, et de même pour la valeur correspondante de  $f$ ). On peut remplacer  $u_0$  et  $u_1$  par n'importe quel développement de Maclaurin avec des coefficients positifs, il est clair que ce développement est un majorant de zéros.

Cette démonstration sera achevée si on montre que l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{K}{\left(1 - \frac{x + y + u + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}}{\rho}\right) \left(1 - \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{R}\right)} - K \quad (2.12)$$

admet une solution représentée par un développement de Maclaurin avec des coefficients positifs ou nuls. Le terme de droite de (2.12) sera remplacé par une autre fonction majorante en remplaçant  $x$  par  $\frac{x}{\alpha}$  où  $\alpha < 1$  afin d'augmenter les coefficients du développement. La nouvelle équation devient donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{K}{\left(1 - \frac{\frac{x}{\alpha} + y + u + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}}{\rho}\right) \left(1 - \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{R}\right)} - K \quad (2.13)$$

On cherche une solution qui dépend seulement de la variable  $\sigma = x + \alpha y$ . La fonction  $u$  de  $\sigma$  doit satisfaire l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d^2 u}{d\sigma^2} = \frac{K}{\left(1 - \frac{\frac{\sigma}{\alpha} + u + (1 + \alpha) \frac{du}{d\sigma}}{\rho}\right) \left(1 - \frac{(\alpha + \alpha^2) \frac{du}{d\sigma}}{R}\right)} - K$$

ou

## 2.4 Problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur stationnaire

Soit l'équation de la propagation de la chaleur

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (k(x) \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega$$

où  $u$  est la fonction qui exprime la propagation de la chaleur sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\rho$  est la densité du milieu,  $c$  la chaleur spécifique et  $k(x)$  est la conductivité thermique (qui dépend de la position).

Le régime stationnaire signifie que la chaleur est constante tout le temps, cela veut dire que la fonction  $u$  est constante par rapport au temps, c'est-à-dire  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ , il nous reste donc

$$-\nabla \cdot (k(x) \nabla u) = f$$

On va montrer l'existence et l'unicité (au sens faible) de la solution du problème de Cauchy stationnaire concernant cette dernière équation. Prenons  $k(x) = 1$  et supposons que  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  borné dans une direction<sup>4</sup>

### 2.4.1 Problème stationnaire avec condition de Dirichlet homogène

Le problème s'énonce de la façon suivante :

Déterminer la fonction  $u$  dans un certain espace fonctionnel  $V$  telle que

$$(D) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega & (a) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \text{ (la frontière de } \Omega) & (b) \end{cases}$$

où  $f$  est une fonction donnée dans un certain espace fonctionnel  $H$ .

#### FORMULATION VARIATIONNELLE :

Supposons pour le moment que le problème (D) admet une solution suffisamment régulière (au sens faible)  $u \in H^2(\Omega)$  (espace de Sobolèv d'ordre 2)<sup>5</sup>

Multiplions l'équation (a) par  $v \in H^1(\Omega)$  (espace de Sobolèv d'ordre 1) et intégrons sur  $\Omega$  on obtient

$$-\int_{\Omega} \Delta u v d(\Omega) = \int_{\Omega} f v d(\Omega)$$

4. Par exemple si on choisit la directions de  $x_n$ , alors  $\Omega \subset S = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : a < x_n < b$ .

5. En général  $H^m(\Omega)$  est l'espace de Sobolèv d'ordre  $m$  formé par les fonctions de  $L^2(\Omega)$  (c-à-d de carré intégrable) dont les dérivées (au sens faible) d'ordre inférieur ou égal à  $m$  sont aussi dans  $L^2(\Omega)$ .

$$-\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} v \, d\Gamma = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

On obtient finalement par la condition (d) la formule (Q) vue précédemment. Le problème donc est la recherche de  $u \in H^1(\Omega)$  qui vérifie (Q)  $\forall v \in H^1(\Omega)$ .

✓  $a$  est continue

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| -\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\Omega \right| \leq \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| \, d\Omega \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq (\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) (\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}) = \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

✓  $a$  est coercive

D'après l'inégalité de Poincaré on sait que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

où  $C_{\Omega}$  est une constante positive qui dépend seulement de  $\Omega$ . Donc

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (C_{\Omega}^2 + 1) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

finalement

$$|a(u, u)| = \left| \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\Omega \right| \geq \frac{1}{C_{\Omega}^2 + 1} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

D'après le théorème de Lax-Milgram [21], le problème (N) admet une solution unique.

notées  $\|\cdot\|_{1/2,\gamma}$  et  $\|\cdot\|_{-1/2,\gamma}$ , le produit scalaire dans la dualité est noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2,\gamma}$ .

### 3.2 Position du problème

Étant donné un terme source  $f$ , une conductivité thermique  $k$  définie sur  $\Omega$ , un flux  $\phi$  et une température  $T$  donnés sur le bord  $\Gamma_m$ , on veut identifier le flux et la température sur  $\Gamma_u$ . Considérons le problème de Cauchy suivant :

Trouver  $u \in C^2(\Omega)$  tel que

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (k(x)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ k(x)\nabla u \cdot \vec{n} = \phi & \text{sur } \Gamma_m \\ u = T & \text{sur } \Gamma_m \end{cases} \quad (3.1)$$

Ce problème est considéré comme mal posé. En effet, l'extension du théorème de Holmgren aux espaces de Sobolév [26](p 55) [27], garantit l'unicité d'une éventuelle solution sous certaines hypothèses. Le théorème de Cauchy-Kwalwsky assure l'existence de la solution dans le cas restrictif de données analytiques. Dans ses travaux, J-Hadamard [14] affirme que le problème de Cauchy peut être impossible à résoudre sans que les conditions nécessaires d'existence de la solution puissent être exprimées. Par conséquent l'existence de la solution dépend de la vérification des conditions de compatibilité sur les données difficilement formulables explicitement.

#### lemme 3.2.1. [13]

Soit  $k \geq -3/2$ .

1. Pour un  $T$  fixé dans  $H^{k+1}(\Gamma_m)$ , l'ensemble des données  $\phi$  pour lesquelles il existe une fonction  $u \in H^{k+3/2}(\Omega)$  satisfaisant le problème de Cauchy (3.1) est dense dans  $H^k(\Gamma_m)$ .
2. Pour un  $\phi$  fixé dans  $H^k(\Gamma_m)$ , l'ensemble des données  $T$  pour lesquelles il existe une fonction  $u \in H^{k+3/2}(\Omega)$  satisfaisant le problème de Cauchy (3.1) est dense dans  $H^{k+1}(\Gamma_m)$ .

Pour  $k = -1/2$  le lemme s'énonce comme suit

1. Pour un  $T$  fixé dans  $H^{1/2}(\Gamma_m)$ , l'ensemble des données  $\phi$  pour lesquelles il existe une fonction  $u \in H^1(\Omega)$  satisfaisant le problème de Cauchy (3.1) est dense dans  $H^{-1/2}(\Gamma_m)$ .
2. Pour un  $\phi$  fixé dans  $H^{-1/2}(\Gamma_m)$ , l'ensemble des données  $T$  pour lesquelles il existe une fonction  $u \in H^1(\Omega)$  satisfaisant le problème de Cauchy (3.1) est dense dans  $H^{1/2}(\Gamma_m)$ .

#### Preuve [13], [2]

On va démontrer la première assertion pour  $k = -1/2$ , la deuxième se fait d'une manière analogique.

Ce lemme précise la notion de densité de l'ensemble des données compatibles dans l'ensemble des données possibles. Cela signifie que tout voisinage de tout couple de données non compatibles contient au moins un couple de données compatibles. Considérons l'équation (1.1), soit la donnée incompatible  $\tilde{y}$ , alors il existe une suite de données compatibles  $(y_n)_n$  telles que  $\|y_n - \tilde{y}\|_Y \rightarrow 0$  (quand  $n \rightarrow \infty$ ). La donnée  $\tilde{y}$  n'étant pas compatible, la solution correspondante  $\tilde{x}$  n'est donc pas définie, par conséquent  $\|x_n - \tilde{x}\|_Y \rightarrow 0$  (quand  $n \rightarrow \infty$ ) et la condition de stabilité n'est pas vérifiée, le problème de Cauchy est donc mal posé au sens de Hadamard, la solution du problème n'est pas continue par rapport aux données.

On va maintenant résoudre le problème de complétion de données associé au problème de Cauchy (3.1). Le problème s'énonce comme suit

Trouver  $(\eta_d, \tau_d)$  sur  $\Gamma_u$  tels qu'il existe  $u$  vérifiant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (k(x)\nabla u) = f \text{ dans } \Omega \\ u = T, \quad k(x)\nabla u \cdot \vec{n} = \phi \text{ sur } \Gamma_m \\ u = \tau_d, \quad k(x)\nabla u \cdot \vec{n} = \eta_d \text{ sur } \Gamma_u. \end{cases} \quad (3.7)$$

Suivant la procédure décrite dans [2], on introduit deux champs distincts  $u_1$  et  $u_2$  qui diffèrent par les conditions limites qui leur sont imposées.

Sur  $\Gamma_m$ ,  $u_1$  vérifie la condition de Dirichlet, et  $u_2$  vérifie la condition de Neumann, et inversement sur  $\Gamma_u$ . On considère alors pour tout couple  $(\eta, \tau)$  correspondant aux inconnues du problème de complétion de données, les deux problèmes bien posés suivants dont les champs  $u_1$  et  $u_2$  sont solutions :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (k(x)\nabla u_1) = f \text{ dans } \Omega \\ u_1 = T, \text{ sur } \Gamma_m \\ k(x)\nabla u_1 \cdot \vec{n} = \eta \text{ sur } \Gamma_u. \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (k(x)\nabla u_2) = f \text{ dans } \Omega \\ u_2 = \tau, \text{ sur } \Gamma_u \\ k(x)\nabla u_2 \cdot \vec{n} = \phi \text{ sur } \Gamma_m. \end{cases} \quad (3.9)$$

Les deux champs  $u_1$  et  $u_2$  sont évidemment égaux si le couple  $(\eta, \tau)$  rejoint les données réelles  $(\eta_d, \tau_d)$  sur la frontière  $\Gamma_u$

On considère la fonctionnelle

$$E(\eta, \tau) = \int_{\Omega} k(x)(\nabla u_1(\eta) - \nabla u_2(\tau))^2 dx \quad (3.10)$$

La construction de cette fonctionnelle est basée sur une approche de type "moindres carrés" et est connue sous le nom de "fonctionnelle de coût de Kohn-Vogelius" et qui représente l'écart d'énergie entre les deux champs découplés  $u_1$  et  $u_2$ . Cette construction est similaire de celle proposée dans le cadre d'identification de paramètres [3] [4], et l'identification d'une partie de la frontière [5]. La méthode énergétique consiste alors à résoudre le problème de minimisation suivant

Le théorème précédent permet de préciser les espaces auxquels appartient les données  $(\phi, T)$  et les inconnues  $(\eta, \tau)$ , en effet, pour toute fonction  $u \in H^1(\Omega)$  telle que  $\nabla \cdot (k(x)\nabla u) \in L^2(\Omega)$ , on a

$$u|_{\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}|_{\Gamma} \in H^{-1/2}(\Gamma) \quad (3.12)$$

On suppose donc que  $(\phi, T) \in H^{-1/2}(\Gamma_m) \times H^{1/2}(\Gamma_m)$  et que  $(\eta, \tau) \in H^{-1/2}(\Gamma_u) \times H^{1/2}(\Gamma_u) = W$  (espace des contrôles).

**Remarque 3.3.1.** *Considérons le cas le plus général  $\Gamma = \bar{\Gamma}_u \cup \bar{\Gamma}_m$  avec  $\bar{\Gamma}_u \cap \bar{\Gamma}_m \neq \emptyset$ , illustré par la figure (3.1) :*

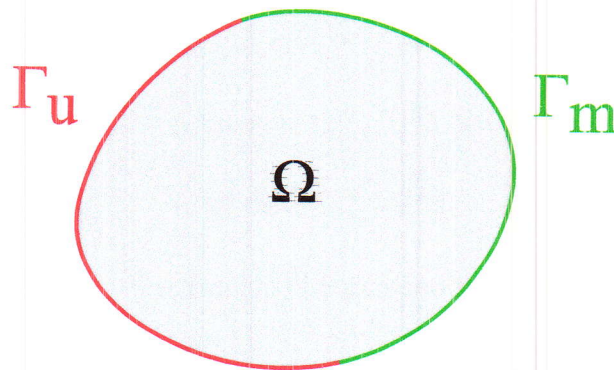


FIGURE 3.1 – Exemple de géométrie

Dans ce cas, on ne peut restreindre les fonctions de  $H^{-1/2}(\Gamma)$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma_m)$  sans s'assurer de la continuité du prolongement par 0 sur  $\Gamma$  des fonctions de  $H^{1/2}(\Gamma_m)$ .

En effet, notons  $H^{-1/2}(\Gamma_m)$  le dual topologique de  $H^{1/2}(\Gamma_m)$ , on a alors

$H^{1/2}(\Gamma_m) \subset L^2(\Gamma_m) \subset H^{-1/2}(\Gamma_m)$  avec injections denses et continues.

On va montrer qu'il n'existe pas d'opérateur continue  $\Pi$  tel que

$$\Pi \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma_m)) \cap \mathcal{L}(L^2(\Gamma), L^2(\Gamma_m)),$$

$$\Pi g = g \text{ presque partout } \forall g \in L^2(\Gamma),$$

Supposons qu'un tel opérateur existe. Soit  $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma_m)$  on a

$$\int_{\Gamma} \bar{\lambda} g \, d\Gamma = \int_{\Gamma_m} \lambda \Pi g \, d\Gamma_m \quad \forall g \in L^2(\Gamma)$$

où

Les espaces fonctionnels des fonctions sur une partie de la frontière ayant été introduits, on donne maintenant le résultat suivant concernant la solution du problème de complétion de données et de minimisation :

**Proposition 3.3.1.** *Si les données  $(\phi, T)$  sont compatibles et si la solution  $(\eta^*, \tau^*)$  du problème de minimisation (3.11) existe, alors  $(\eta^*, \tau^*)$  est solution du problème de complétions de données (3.7) à une constante près pour l'inconnue de Dirichlet. En outre, lorsque le minimum est atteint, on a*

$$\nabla u_1(\eta^*) = \nabla u_2(\tau^*) \text{ et } u_1(\eta^*) = u_2(\tau^*) + c \text{ dans } \bar{\Omega} \text{ où } c \text{ est une constante.}$$

**Preuve**

Si les données  $(\phi, T)$  sont compatibles, il existe une unique solution  $u_d$  du problème de Cauchy. L'unique solution du problème de complétion de données est donc donnée par

$$(\eta_d, \tau_d) = (u_d|_{\Gamma_u}, k(x)\nabla u_d \cdot \vec{n}|_{\Gamma_u}) \text{ sur } \Gamma_u$$

on a donc

$$u_1(\eta_d) = u_2(\tau_d) = u_d \text{ dans } \bar{\Omega}$$

d'où

$$0 \leq E(\eta^*, \tau^*) \leq E(\eta_d, \tau_d) = 0$$

ce qui implique

$$\nabla u_1(\eta^*) = \nabla u_2(\tau^*) \text{ et donc } u_1(\eta^*) = u_2(\tau^*) + c \text{ dans } \bar{\Omega} \text{ où } c \text{ est une constante.}$$

Par conséquent, pour tout  $x \in \Gamma$

$$\begin{aligned} u_1(x; \eta^*)|_{\Gamma} &= u_2(x; \tau^*)|_{\Gamma} + c = \\ &= \mathbf{1}_{\{x \in \Gamma_u\}}(x)(\tau^*(x) + c) + \mathbf{1}_{\{x \in \Gamma_m\}}(x)T(x) = u_d|_{\Gamma}(x) \in H^{1/2}(\Gamma) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} k(x)\nabla u_1(x; \eta^*)|_{\Gamma} \cdot \vec{n} &= \\ &= \mathbf{1}_{\{x \in \Gamma_u\}}(x)\eta^*(x) + \mathbf{1}_{\{x \in \Gamma_m\}}(x)\phi(x) = k(x)\nabla u_d \cdot \vec{n}|_{\Gamma}(x) \in H^{-1/2}(\Gamma) \end{aligned}$$

D'où

$$(\eta^*, \tau^* + c) = (\eta_d, \tau_d).$$

■

Pour se ramener à des problèmes homogènes, il est nécessaire d'introduire la notion de relèvement des conditions aux limites de Dirichlet. Cependant, les opérateurs de relèvement étant définis dans les espaces  $H^s(\Gamma)$  (théorème de traces), il est



où  $V = H_{0,\Gamma_m}^1(\Omega) \times H_{0,\Gamma_u}^1(\Omega)$  avec la norme associée  $\|v\|_V = (\|v_1\|_{1,\Omega}^2 + \|v_2\|_{1,\Omega}^2)^{1/2}$

✓  $a$  est continue

$$\begin{aligned} |a(u, v)|^2 &= |a_1(\tilde{u}_1, v_1) + a_2(\tilde{u}_2, v_2)|^2 \\ &= \left| \int_{\Omega} k(x) \nabla \tilde{u}_1 \nabla v_1 \, dx + \int_{\Omega} k(x) \nabla \tilde{u}_2 \nabla v_2 \, dx \right|^2 \\ &\leq \|K\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \left( \left| \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_1 \nabla v_1 \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_2 \nabla v_2 \, dx \right| \right)^2 \end{aligned}$$

D'après l'inégalité  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  on obtient

$$|a(u, v)|^2 \leq 2\|K\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \left( \left| \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_1 \nabla v_1 \, dx \right|^2 + \left| \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_2 \nabla v_2 \, dx \right|^2 \right)$$

L'inégalité de Hölder nous donne

$$\begin{aligned} |a(u, v)|^2 &\leq 2\|K\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \left( \|\nabla \tilde{u}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla v_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \tilde{u}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla v_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\leq 2\|K\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \left( \|\nabla \tilde{u}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \tilde{u}_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \left( \|\nabla v_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\leq 2\|K\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (\|\tilde{u}_1\|_{1,\Omega}^2 + \|\tilde{u}_2\|_{1,\Omega}^2) (\|v_1\|_{1,\Omega}^2 + \|v_2\|_{1,\Omega}^2) \\ &\leq \|u\|_V \|v\|_V \end{aligned}$$

✓  $a$  est coercive

$$|a(u, u)| = \left| \int_{\Omega} k(x) |\nabla \tilde{u}_1|^2 \, dx + \int_{\Omega} k(x) |\nabla \tilde{u}_2|^2 \, dx \right|$$

L'inégalité de Poincaré implique

$$|a(u, u)| \geq \inf_{x \in \Omega} |K(x)| \frac{1}{C_\Omega^2 + 1} (\|\tilde{u}_1\|_{1,\Omega}^2 + \|\tilde{u}_2\|_{1,\Omega}^2)$$

✓  $L$  est continue

$$\begin{aligned} |L(v)|^2 &= |l_1(v_1) + l_2(v_2)|^2 \leq (|l_1(v_1)| + |l_2(v_2)|)^2 \\ &\leq 2(|l_1(v_1)|^2 + |l_2(v_2)|^2) \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} |l_1(v_1)|^2 &\leq \left( \int_{\Omega} |f| |v_1| \, dx + \|K\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla \tilde{u}_1| |\nabla v_1| \, dx + |\langle \eta, v_1 \rangle_{1/2, \Gamma_u}| \right)^2 \\ &\leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_1\|_{L^2(\Omega)} + \|K\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla \tilde{u}_1\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v_1\|_{L^2(\Omega)} + \|\eta\|_{1/2, \Gamma_u} \|v_1\|_{1,\Omega})^2 \\ &\leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|K\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla \tilde{u}_1\|_{L^2(\Omega)} + \|\eta\|_{1/2, \Gamma_u})^2 \|v_1\|_{1,\Omega}^2 = C_1 \|v_1\|_{1,\Omega}^2 \end{aligned}$$

est équivalent au problème de minimisation (3.10). On note alors  $\omega = (\eta^*, \tau^*)$  le contrôle optimal. De plus lorsque le contrôle optimal est atteint on a

$$\nabla \tilde{u}_1(\eta^*) = \nabla \tilde{u}_2(\tau^*) \text{ et } \nabla \bar{u}_1(\eta^*) = \nabla \bar{u}_2(\tau^*) \text{ p.p sur } \Omega. \quad (3.18)$$

### Existence et unicité du contrôle optimal

L'application  $\sigma \mapsto u(\sigma)$  est affine d'après (3.16) (car : pour  $\sigma = 0$ , l'application de  $A^{-1}$  sur les deux membres nous donne  $u(0) = A^{-1}(F) \neq 0$ ). La fonction de coût peut s'écrire donc

$$J(\sigma) = \frac{1}{2}\pi(\sigma, \sigma) - l(\sigma) + c$$

où  $c$  est une constante positive, avec  $\pi(\sigma_1, \sigma_2)$  est une forme bilinéaire continue sur  $W \times W$ , et  $l(\sigma)$  est une forme linéaire continue sur  $W$  définies comme suit

$$\begin{aligned} \pi(\sigma_1, \sigma_2) &= 2(M(u(\sigma_1) - u(0)), M(u(\sigma_2) - u(0)))_{L^2(\Omega)} \\ l(\sigma) &= -2(M(u(\sigma) - u(0)), M(u(0)))_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

La forme bilinéaire  $\pi(\sigma_1, \sigma_2)$  est définie positive et non dégénérée, en effet on peut voir immédiatement que  $\pi(\sigma, \sigma) \geq 0 \quad \forall \sigma \in W$ , de plus

$$\pi(\sigma, \sigma) = \|A^{-1}B\sigma\|_{L^2(\Omega)}^2 > 0 \quad \forall \sigma \neq 0$$

On peut alors vérifier que pour tout  $\lambda \in ]0; 1[$  et  $\sigma_1, \sigma_2 \in W$

$$J(\lambda\sigma_1 + (1 - \lambda)\sigma_2) - \lambda J(\sigma_1) - (1 - \lambda)J(\sigma_2) = -\frac{1}{2}\lambda(1 - \lambda)\pi(\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_1 - \sigma_2) < 0$$

La fonctionnelle  $J(\cdot)$  est donc strictement convexe, cela signifie que si  $J(\cdot)$  atteint un minimum sur  $W$  alors il est unique.

Soit maintenant  $\sigma_n$  une suite minimisante (i.e :  $J(\sigma_n) \rightarrow \inf_{\sigma \in W} J(\sigma)$ ). Supposons que cette suite soit bornée c'est-à-dire il existe une constante  $c > 0$  telle que  $\|\sigma_n\| < c$ , on peut alors extraire de  $\sigma_n$  une sous suite  $\sigma_m$  telle que  $\sigma_m \rightarrow \omega$  faiblement dans  $W$ , c'est-à-dire  $\forall g \in W' : \lim_{m \rightarrow \infty} g(\sigma_m) = g(\omega)$ , d'où  $\lim_{m \rightarrow \infty} J(\sigma_m) = J(\omega)$ , on a donc une suite  $(J(\sigma_m))_m$  convergente extraite d'une suite de Cauchy  $(J(\sigma_n))_n$ , cela veut dire que  $J(\sigma_n) \rightarrow J(\omega) = \inf_{\sigma \in W} J(\sigma)$ .

Nous avons donc prouver l'existence de la solution du problème du contrôle.

Cette preuve est basée sur le caractère borné de la suite minimisante qui découle de la coercivité de  $J(\cdot)$ .

Or, on sait seulement que  $J(\sigma) \geq 0$  pour tout  $\sigma \in W$ . La forme  $\pi(\cdot, \cdot)$  n'étant pas nécessairement coercive et donc on ne peut pas s'assurer de la coercivité de  $J(\cdot)$ , la suite minimisante  $\sigma_n$  peut ainsi ne pas être bornée et l'existence du contrôle optimal ne peut être prouvée. Néanmoins, le fait de ne pouvoir prouver l'existence du contrôle optimal n'est pas restrictif puisque, comme nous le verrons plus tard, on peut utiliser une méthode numérique stable permettant d'approcher la solution de

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} -\nabla \cdot (k(x) \nabla P_1(\eta^*)) v_1 dx + \int_{\Omega} -\nabla \cdot (k(x) \nabla p_2(\tau^*)) v_2 dx \\
 & + \int_{\Gamma_u} k(x) \nabla P_1(\eta^*) \cdot \vec{n} v_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_m} k(x) \nabla P_2(\tau^*) \cdot \vec{n} v_2 d\Gamma. \\
 & = \int_{\Omega} -\nabla \cdot (k(x) \nabla (u_1(\eta^*) - u_2(\tau^*))) v_1 dx + \int_{\Omega} \nabla \cdot (k(x) \nabla (u_1(\eta^*) - u_2(\tau^*))) v_2 dx \\
 & + \int_{\Gamma_u} (\eta^* - k(x) \nabla u_2(\tau^*) \cdot \vec{n}) v_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_m} (\phi - k(x) \nabla u_1(\eta^*) \cdot \vec{n}) v_2 d\Gamma
 \end{aligned}$$

Par identification on obtient les deux problèmes adjoints

$$\begin{cases} \nabla \cdot (k(x) \nabla P_1(\eta^*)) = \nabla \cdot (k(x) \nabla (u_1(\eta^*) - u_2(\tau^*))) & \text{dans } \Omega \\ p(\eta^*) = 0 & \text{sur } \Gamma_m \text{ (par définition)} \\ k(x) \nabla P_1(\eta^*) \cdot \vec{n} = \eta^* - k(x) \nabla u_2(\tau^*) \cdot \vec{n} & \text{sur } \Gamma_u \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot (k(x) \nabla P_2(\eta^*)) = \nabla \cdot (k(x) \nabla (u_2(\tau^*) - u_1(\eta^*))) & \text{dans } \Omega \\ p(\tau^*) = 0 & \text{sur } \Gamma_u \text{ (par définition)} \\ k(x) \nabla P_2(\tau^*) \cdot \vec{n} = \phi - k(x) \nabla u_1(\eta^*) \cdot \vec{n} & \text{sur } \Gamma_m \end{cases} \quad (3.22)$$

La résolution de ces deux problèmes fournit l'état adjoint  $p(\omega)$ . On peut maintenant calculer le gradient de la fonctionnelle. On sait que pour que le contrôle  $\omega$  soit optimal, il doit également vérifier (3.20).

D'où

$$\left( \frac{1}{2} \nabla J(\omega), \xi \right)_{W', W} = (B^* p(\omega), \xi)_{W', W} \quad \forall \xi = (\mu, \nu) \in W$$

ou encore

$$\left( \frac{1}{2} \nabla J(\omega), \xi \right)_{W', W} = (B\xi, p(\omega))_{V', V} \quad \forall \xi = (\mu, \nu) \in W$$

Et par définition de  $B$ , il vient

$$\left( \frac{1}{2} \nabla J(\omega), \xi \right)_{W', W} = \langle \mu, p_1(\eta^*) \rangle_{1/2, \Gamma_u} - a_2(\bar{u}_2(\nu), p_2(\tau^*)) \quad \forall \xi = (\mu, \nu) \in W$$

De plus d'après la proposition (3.3.1) et (3.22), on a

$$\nabla \cdot (k(x) \nabla P_2(\eta^*)) = \nabla \cdot (k(x) \nabla (u_2(\tau^*) - u_1(\eta^*))) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

et

$$k(x) \nabla P_2(\tau^*) \cdot \vec{n} = \phi - k(x) \nabla u_1(\eta^*) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_m$$

Par la définition de  $a_2(.,.)$  on a

$$a_2(\bar{u}_2(\nu), p_2(\tau^*)) = \int_{\Omega} k(x) \nabla \bar{u}_2(\nu) \nabla p_2(\tau^*) dx$$

(H3) Tout triplet  $(K, P_K, \Sigma_K)$  est affine-equivalent à un élément de référence  $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ , i.e, il existe une application affine  $F$  bijective bicontinue telle que  $K = F(\hat{K})$ ,  $\Sigma = \{\partial^\alpha v_h|_K \circ F(\hat{a}_j)\}$ ,  $P_K = \{v_h|_K = v_h|_{\hat{K}} \circ F^{-1}, v_h \in X_h\}$ .

**Théorème 3.4.1.** [16]

Supposons qu'on a les inclusions suivantes :  $P_K \subset H^1(K)$  pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$  et  $X_h \subset \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ , alors

$$X_h \subset H^1(\Omega), \\ X_{0,h} = \{v_h \in X_h; v_h = 0 \text{ sur } \Gamma\} \subset H_0^1(\Omega).$$

Ce théorème implique que  $X_h \subset \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ . On définit alors les espaces

$$X_{mh} = \{v_h \in X_h; v_h|_{\Gamma_m} = 0\} \quad \text{et} \quad X_{uh} = \{v_h \in X_h; v_h|_{\Gamma_u} = 0\}$$

Posons  $V_h = X_{mh} \times X_{uh}$ , et associons à cet espace le problème discret suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u = (u_{1h}, u_{2h}) \in V_h \text{ telle que} \\ a(u_h, v_h) = L(v_h), \forall v_h = (v_{1h}, v_{2h}) \in V_h \\ \text{avec } a(u_h, v_h) = a_1(u_{1h}, v_{1h}) + a_2(u_{2h}, v_{2h}) \\ \text{et } L(v) = l_1(v_{1h}) + l_2(v_{2h}). \end{cases} \quad (3.23)$$

D'après le lemme de Lax-Milgram [16] on peut affirmer que le problème discret (3.23) admet une solution unique.

### 3.4.1 Estimation d'erreur abstraite

**Théorème 3.4.2.** [16] En plus des hypothèses (H1), (H2), (H3), on suppose qu'il existe un entier  $l \geq 1$  tel que les inclusions suivantes soient satisfaites

$$P_l(\hat{K}) = \{p|_{\hat{K}}; p \in P_l(\text{l'espace des polynômes de degré } l)\} \subset \hat{P} \subset H^1(\hat{K}) \\ H^{l+1}(\hat{K}) \hookrightarrow \mathcal{C}^s(\hat{K}) \text{ avec injection continue,}$$

où  $s$  est l'ordre maximal des dérivées partielles intervenant dans la définition de l'ensemble  $\hat{\Sigma}$ .

Alors, si la solution  $u \in V$  du problème variationnel (en général) est aussi dans l'espace  $H^{l+1}(\Omega)$ , il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^l |u|_{l+1,\Omega}$$

où  $u_h$  est la solution discrète.

**Proposition 3.4.1.** En plus des hypothèses (H1), (H2), (H3), on suppose qu'il existe un entier  $l \geq 1$  tel que l'inclusion suivante soit satisfaite

$$H^{l+1}(\hat{K}) \hookrightarrow \mathcal{C}^s(\hat{K}) \text{ avec injection continue,}$$

où  $s$  est l'ordre maximal des dérivées partielles intervenant dans la définition de

**Preuve**

La différence entre le problème discret (3.23) et discret bruité (3.25) donne

$$a(u_h - u_h^\delta, v_h) = -a_1(\mathcal{R} P_m(T - T^\delta), v_{1h}) + \langle (\phi - \phi^\delta), v_{2h} \rangle_{1/2, \Gamma_m}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la continuité des opérateurs de trace, de prolongement et de relèvement, il existe une constante  $C$  telle que

$$\begin{aligned} |a(u_h - u_h^\delta, v_h)| &\leq C [\|T - T^\delta\|_{1/2, \Gamma_m} \|v_{1h}\|_{1, \Omega} + \|\phi - \phi^\delta\|_{-1/2, \Gamma_m} \|v_{2h}\|_{1, \Omega}] \leq \\ &\leq C [(\|T - T^\delta\|_{1/2, \Gamma_m} + \|\phi - \phi^\delta\|_{-1/2, \Gamma_m}) \|v_h\|_V] \end{aligned}$$

L'inégalité  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  nous donne

$$|a(u_h - u_h^\delta, v_h)| \leq C [(\|T - T^\delta\|_{1/2, \Gamma_m}^2 + \|\phi - \phi^\delta\|_{-1/2, \Gamma_m}^2)^{1/2} \|v_h\|_V]$$

Prenons  $v_h = u_h - u_h^\delta$  comme fonction teste, par coercivité de la forme bilinéaire  $a(., .)$  il vient

$$\|u_h - u_h^\delta\|_V \leq \frac{C}{\alpha} (\|T - T^\delta\|_{1/2, \Gamma_m}^2 + \|\phi - \phi^\delta\|_{-1/2, \Gamma_m}^2)^{1/2} \quad (3.27)$$

où  $\alpha$  est la constante de coercivité.

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\|u - u_h^\delta\|_V = \|u - u_h + u_h - u_h^\delta\|_V \leq \|u - u_h\|_V + \|u_h - u_h^\delta\|_V \quad (3.28)$$

En appliquant (3.24) et (3.27) sur (3.28) on obtient (3.26). ■

### 3.4.3 Dédution d'un critère d'arrêt pour le processus de minimisation

Lorsque les données sont bruitées, on remarque au cours du processus d'optimisation que l'erreur entre la solution exacte  $u$  et approchée  $u_h^\delta$  atteint un minimum et la fonctionnelle atteint asymptotiquement un seuil strictement positif dépendant du taux de bruit, et après un certain nombre d'itérations cette erreur augmente rapidement et en même temps les variations de la fonctionnelle, après le seuil, deviennent insignifiantes par rapport à son minimum.

On va donc estimer ce seuil théoriquement afin de déterminer un critère d'arrêt qui permet de stopper l'algorithme d'optimisation avant l'explosion de l'erreur.

Soit

$$E_h^\delta(\eta, \tau) = \int_{\Omega} k(x) (\nabla u_{1h}^\delta(\eta) - \nabla u_{2h}^\delta(\tau))^2 dx \quad (3.29)$$

### 3.5 Mise en œuvre

Nous allons expliquer dans cette section les procédures numériques utilisées pour la mise en œuvre de la méthode énergétique, et présenter les résultats numériques obtenus de l'application de cette méthode sur un exemple de problème de Cauchy pour l'équation de Laplace.

#### 3.5.1 Procédures numériques

L'implémentation de la méthode est établie en utilisant la discrétisation en éléments finis et il est préférable de calculer le gradient de la fonctionnelle dans le cas discret. Ce calcul est effectué par la méthode d'état adjoint basée sur la dérivation du Lagrangien associé au problème de minimisation discret ; l'avantage de ce choix est que le gradient exact de la fonctionnelle discrète est obtenu, ainsi que cette dernière devient facilement implémentable.

Supposons que la triangulation  $\mathcal{T}_h$  de  $\bar{\Omega}$  soit caractérisée par  $n$  nœuds. Soit  $p$  et  $q$  les nombres de nœuds respectivement sur les frontières  $\Gamma_u$  et  $\Gamma_m$  et  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq n} = (\omega_{1i}, \omega_{2i})_{1 \leq i \leq n}$  sont les fonctions de base de l'espace d'approximation  $V_h$ . On note  $X_\eta$  et  $X_\tau$  les vecteurs correspondant aux inconnues de Neumann et Dirichlet,  $\Phi$  et  $\Theta$  les vecteurs correspondant aux données de Neumann et Dirichlet,  $U_1$  et  $U_2$  les vecteurs correspondant aux champs  $u_1$  et  $u_2$ . On introduit les notations suivantes :  $(K_1)_{kl} = a_1(\omega_{1k}, \omega_{1l})$ ,  $(K_2)_{kl} = a_2(\omega_{2k}, \omega_{2l})$ ,  $(F_1)_k = l_1(\omega_{1k})$ ,  $(F_2)_k = l_2(\omega_{2k})$ .  $L_m \in \mathcal{M}_{q \times n}(\mathbb{R})$  et  $L_u \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{R})$  sont des matrices contenant seulement des 0 et des 1 et permettant de conserver les valeurs de  $U_1$  et  $U_2$  respectivement sur  $\Gamma_m$  et  $\Gamma_u$ .

**Remarque 3.5.1.** Les formes bilinéaires  $a_1(.,.)$  et  $a_2(.,.)$  sont identiques, on note donc  $K = K_1 = K_2$ , de plus elles sont symétriques, les solutions uniques  $u_1$  et  $u_2$  respectivement des problèmes variationnels (3.13) et (3.14), sont aussi solutions des problèmes de minimisations

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_1 \in H^1(\Omega) \text{ telle que} \\ J_1(u_1) \leq J_1(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases} \quad (3.32)$$

et

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_2 \in H^1(\Omega) \text{ telle que} \\ J_2(u_2) \leq J_2(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\text{où } J_i(v) = \frac{1}{2} a_i(v, v) - l_i(v) \quad i = 1; 2$$

**Définition 3.5.1.** Soit  $\mathcal{P}$  un problème d'optimisation d'une fonction à  $n$  variables sous  $m$  contraintes de la forme  $g_j(x_1, \dots, x_m) = c_j \quad j = 1 \dots m$ . Considérons le problème de minimisation suivant

$$\mathcal{P} \left| \begin{array}{l} \min_x \quad f(x) \\ \text{s.c} \quad g_j(x) = c_j \quad j = 1 \dots m \end{array} \right.$$

De la même manière le système (3.35) peut s'écrire

$$\begin{cases} KU_2 + L_u^T p_2 = F_2(\Phi) \\ L_u U_2 = X_\tau \end{cases} \quad (3.37)$$

### Fonctionnelle discrète et Lagrangien associé

La fonctionnelle continue s'écrit

$$\begin{aligned} E(\eta, \tau) &= \int_{\Omega} k(x) (\nabla u_1(\eta) - \nabla u_2(\tau))^2 dx = \\ &= \int_{\Omega} k(x) (\nabla u_1)^2 dx - \int_{\Omega} k(x) \nabla u_1 \nabla u_2 dx - \int_{\Omega} k(x) \nabla u_2 \nabla u_1 dx + \\ &\quad + \int_{\Omega} k(x) (\nabla u_2)^2 dx = \\ &= a_1(u_1, u_1) - a_1(u_1, u_2) - a_2(u_2, u_1) + a_2(u_2, u_2) \end{aligned}$$

Les formes bilinéaires  $a_1(.,.)$  et  $a_2(.,.)$  sont identiques et symétriques. Lorsque on substitue les expressions des champs discrets  $u_{1h}$  et  $u_{2h}$  dans  $E$  on obtient la fonctionnelle discrète

$$E(X_\eta, X_\tau) = U_1^T K U_1 - U_1^T K U_2 - U_2^T K U_1 + U_2^T K U_2$$

et donc

$$E(X_\eta, X_\tau) = (U_1 - U_2)^T K (U_1 - U_2) \quad (3.38)$$

Le calcul du gradient de cette fonctionnelle sera effectué par la méthode d'états adjoints discrète en utilisant le Lagrangien suivant associé au problème de minimisation de la fonctionnelle sous les contraintes (3.36) et (3.37)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U_1, U_2, \lambda_1, \lambda_2, X_\eta, X_\tau) &= E(X_\eta, X_\tau) - \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K U_1 + L_m^T p_1 - F_1 \\ L_m U_1 - \Theta \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K U_2 + L_u^T p_2 - F_2 \\ L_u U_2 - X_\tau \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U_1, U_2, \lambda_1, \lambda_2, X_\eta, X_\tau) &= (U_1 - U_2)^T K (U_1 - U_2) \\ &\quad - \lambda_{11}^T (K U_1 + L_m^T p_1 - F_1) - \lambda_{12}^T (L_m U_1 - \Theta) \\ &\quad - \lambda_{21}^T (K U_2 + L_u^T p_2 - F_2) - \lambda_{22}^T (L_u U_2 - X_\tau) \end{aligned}$$

La remarque fondamentale est que si  $U_1(X_\eta)$  et  $U_2(X_\tau)$  vérifient les équations d'états (3.36), (3.37), on a l'identité

$$\mathcal{L}(U_1, U_2, \lambda_1, \lambda_2, X_\eta, X_\tau) = E(X_\eta, X_\tau)$$

En dérivant cette relation par rapport aux variables  $X_\eta$  et  $X_\tau$ , il vient

où les  $x_i$  sont les noeuds de  $\Gamma_m$ . les  $X_i$  sont les réalisations d'une variable aléatoire qui suit une loi de distribution normale (Gaussienne) centré réduite ( $X \leftrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ ).<sup>2</sup> On va donc majorer la norme de la différence entre les données Dirichlet exactes et bruitées comme suit :

Pour tout  $x \in \Gamma_m$  on a

$$(1 - a)T(x) \leq T^\delta(x) \leq T(x)(1 + a)$$

d'où

$$-(1 + a)T(x) \leq -T^\delta(x) \leq T(x)(a - 1)$$

ou encore

$$\frac{-a}{1 + a}T^\delta(x) \leq -aT(x) \leq T(x) - T^\delta(x) \leq aT(x) \leq \frac{a}{1 - a}T^\delta(x)$$

et donc

$$\|T - T^\delta\|_{1/2, \Gamma_m} \leq \max\left(\frac{a}{1 - a}, \frac{a}{1 + a}\right) \|T^\delta\|_{1/2, \Gamma_m}$$

En procédant de la même façon pour les conditions de Neumann, le critère d'arrêt (3.31) peut s'écrire de la façon suivante :

$$|E_j - E_{j-1}| \leq \frac{a^2}{(1 - a)^2} (\|T^\delta\|_{1/2, \Gamma_m}^2 + \|\phi^\delta\|_{-1/2, \Gamma_m}^2)$$

La mise en œuvre d'un tel critère d'arrêt nécessite donc une connaissance suffisante de la forme du bruit de mesure.

### 3.5.2 Test numérique : équation de Laplace

On considère le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace [1] sur le domaine  $\Omega$  donné par le figure 3.2

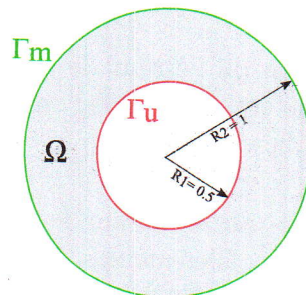


FIGURE 3.2 – Anneau

2. On dit qu'une variable aléatoire continue sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathbb{B}, P)$  suit une loi de distribution normale de paramètres  $m \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ , si sa densité est donnée par :  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .



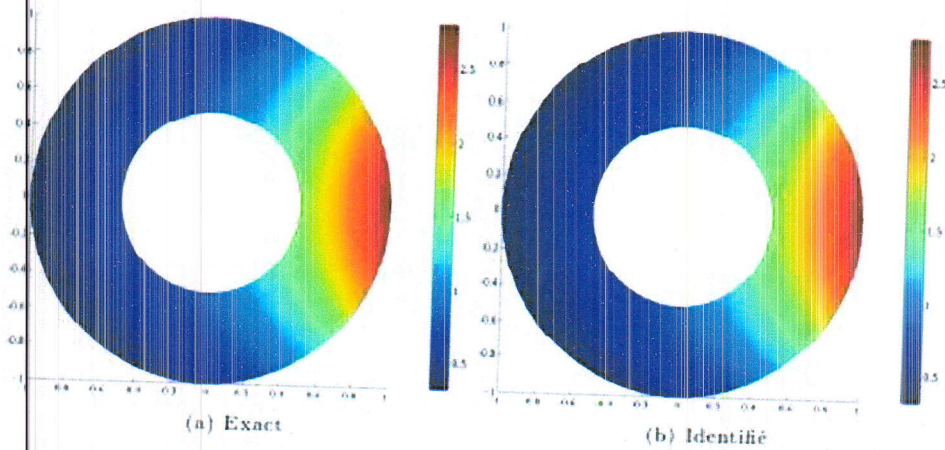


FIGURE 3.4 – Champs de températures : exact et identifié ( $h = 0,03$ )

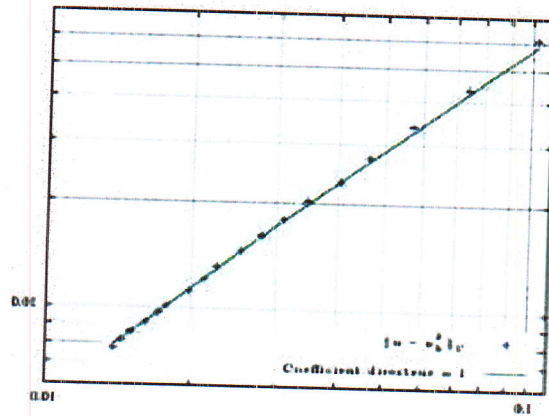


FIGURE 3.5 – Évolution de  $\|u - u_h^\delta\|_V$  par rapport à  $h$

négligeable en comparaison de l'erreur due au bruit. la figure 3.8 représente le comportement de l'erreur et la fonctionnelle par rapport à la norme du bruit définie par :

$$\|\delta\| = (\|T - T^\delta\|_{1/2,\Gamma_m}^2 + \|\phi - \phi^\delta\|_{-1/2,\Gamma_m}^2)^{1/2}$$

On s'intéresse maintenant aux solutions identifiées dans le cas de données bruitées, les figures 3.9 et 3.10 décrivent l'évolution de l'erreur et de la fonctionnelle et ses variations au cours du processus d'optimisation ainsi que le seuil et le critère d'arrêt avec l'itération d'arrêt .

Les solutions du problème de complétion de données avec des taux de bruits de 3% et 5% avec les champs de températures identifiés sont représentées respectivement par les figures 3.11 , 3.12, et 3.13.

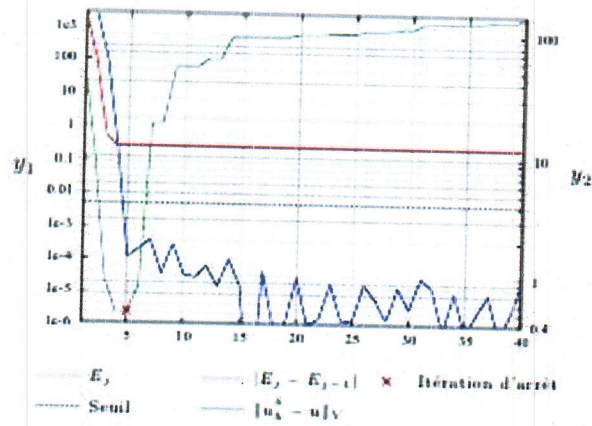


FIGURE 3.9 – Évolution au cours du processus d'optimisation, seuil et itération d'arrêt (fig 3.11),  $a = 3\%$ ,  $h = 0,03$

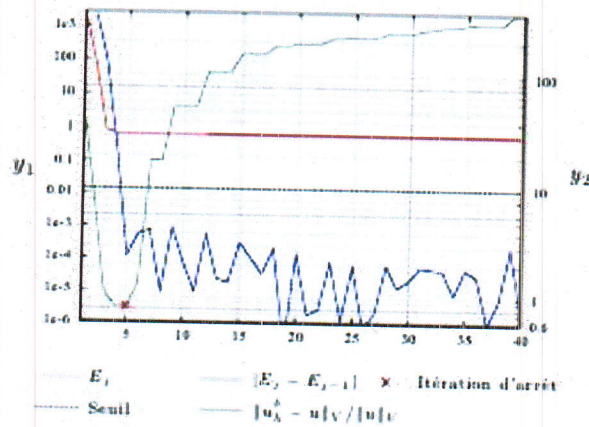


FIGURE 3.10 – Évolution au cours du processus d'optimisation, seuil et itération d'arrêt (fig 3.12),  $a = 5\%$ ,  $h = 0,03$

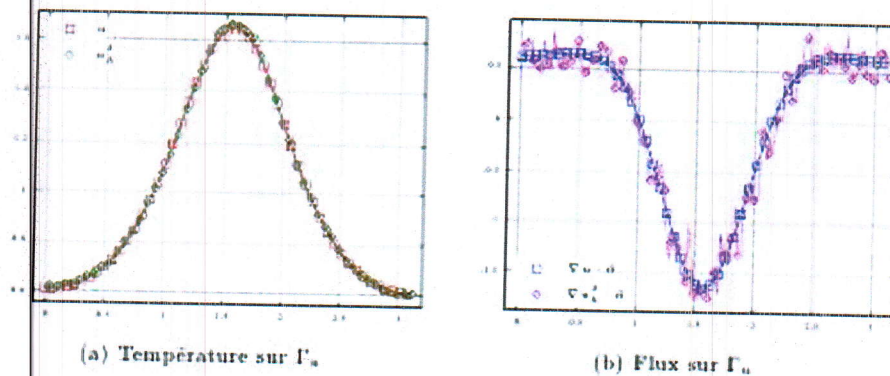


FIGURE 3.11 – Température et flux exacts ( $\square$ ) et identifiés ( $\circ$ ) sur  $\Gamma_u$ ,  $a = 3\%$ ,  $h = 0,03$

## Conclusion

En science, les problèmes inverses sont divers et leurs applications se retrouvent dans de nombreux domaines, tel que l'électromagnétisme, la géophysique, l'imagerie médicale, le traitement de l'image, la mécanique des structures,...

Généralement les problèmes inverses sont mal posés (au sens de Hadamard) ce qui rend leur résolution assez délicate. Il existe toutefois des techniques de résolution qui ont un large champ d'applications, tel que les méthodes de régularisation des problèmes mal posés dues initialement à Tikhonov et la méthode des moindres carrés.

Les problèmes de complétion de données sont des problèmes inverses de type Cauchy, lesquels sont connus par leur caractère mal posé du aux conditions de compatibilité sur les données qui remettent en cause l'existence et la stabilité de la solution. Le lemme de densité des données de Cauchy et le théorème des traces précisent les espaces dans lesquels doivent appartenir les données pour que la solution existe. Plusieurs méthodes numériques ont été proposées pour approcher la solution du problème de complétion de données. Ces méthodes présentent une importante instabilité lorsque les données de Cauchy sont bruitées.

Ce mémoire concerne l'étude théorique et numérique d'une méthode dite énergétique utilisée pour résoudre un problème de complétion de données en thermique stationnaire. Cette méthode est basée sur la minimisation d'une fonctionnelle de coût construite par une approche de moindres carrés et permet d'obtenir des résultats prometteurs et à l'avantage d'être adaptable à différents types de problèmes régis par des opérateurs elliptiques, paraboliques et hyperboliques.

- [15] **A. N. Tikhonov and V.Y. Arsenin**; *Solution to Ill-posed Problems* (New York : Winston-Wiley) (1977).
- [16] **P. G. Ciarlet**; *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. SIAM, (2002).
- [17] **R. Lattès and J. L. Lions**; *The Method of Quasireversibility, Applications to Partial Differential Equations*, Amer.Elsevier, New-York, (1969).
- [18] **N. Boussetila and F. Rebbani**; *The modified quasi-reversibility method for a class of ill-posed Cauchy problems*, G.M.Journal, (2006).
- [19] **E. Goursat**; *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Tome 1. Librairie scientifique A.HERMANN. Paris (1996).
- [20] **E. Goursat**; *A course in Mathematical Analysis*, Vol 2, Part 2. Dover Publication, INC. New York (1959).
- [21] **W. Bouguerne et A. Brahmia**; *Distributions et espaces de Sobolèv, Théorèmes des injections de Sobolèv, Applications aux Problèmes de Dirichlet..* Mémoire de Master, université 8 Mai 1945 Guelma.
- [22] **J. P. Demailly**; *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP sciences.(2006).
- [23] **R. Dautray and J. Louis Lions**; *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology* Volume 2, Springer-Verlag.
- [24] **J. Louis Lions**; *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1971.
- [25] **J. L. Lions and E. Magenes**; *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Volume 1, Dunod, 1968.
- [26] **V. Isakov**; *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, Second Edition, Springer.
- [27] **F. John**; *Partial Differential Equations*, Springer, 1982.