République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques, de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématiques Appliquées**

Par :

Melle. MEGUELLATNI Hanane

Intitulé

La théorie des indices

Dirigé par : Dr. BADI Sabrina

Devant le jury

PRESIDENT	Mr. Y. BOUATTIA	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Mme. S. BADI	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Mr. N. OUANESSE	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2015

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier ALLAH qui m'a donné le courage, la santé, et la volonté pour réaliser ce modeste travail tout au long de mes années d'études.

A : **Dr Badi Sabrina**, que je remercie de m'avoir inspiré le choix de ce sujet, pour son encadrement et pour ses précieux et judicieux conseils qu'elle n'a cessé de me prodiguer tout au long de ce travail.

Je suis trés honoré que **Dr Bouattia Yacine**, ait accepté de rapporter mon travail et de préséder mon jury de Memoire, je le remercie pour ses conseils et ses présieuses remarque.

Je remercie **Dr Ouanesse Nawel** d'avoir accepté d'examiner mon travail, je suis trés heureux de le voir participer à mon jury.

Mes remerciements vont également à tous mes enseignants de l'université de Guelma qui m'ont aidé pendant mes années d'étude.

Je remercie tous ceux qui ont participé de loin ou de prés à la réalisation de ce travail.

A mes collègues pour tous les moments qu'on a passé ensemble.

Dédicace

A l'aide de dieu tout puissant, qui m'a tracé le chemin de ma vie, j'ai pu réaliser ce travail que je dédie :

✠ A la lumière de mes yeux, l'ombre de mes pas et le bonheur de ma vie **ma mère** que Dieu ait son âme, qui espérait assister à cette journée, et malheureusement elle n'est pas présente, mais elle est présente dans le cœur de sa fille.

✠ A mon cher **père** qui m'a appris le sens de la persévérance tout au long de mes études, pour son sacrifice, ses conseils et ses encouragements.

✠ A mes soeurs : **Lamia**, **Moufida**, **Madiha**, **Linda** , **Donya** et **Cheyma**

✠ A mes frères : **Wahab**, **Djamel** et **Abd Razak**

✠ A toute la famille

✠ A mes amis : **Amel**, **Samiha**, **Selma**, **Asouma**^{2}, **Fatima**, **Souheyr** et **Sondra**.

"Soit A un succès dans la vie. Alors $A = x + y + z$, où x = travailler, y = s'amuser, z = se taire."

Albert-Einstein

où :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.2 Flot, potrait de phase, point singulier, orbites périodiques

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, un champ de vecteurs X de classe C^k sur U est la donnée d'une application $X \ : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k

$$X \ : x = (x_1, ..., x_n) \mapsto (f_1(x), ..., f_n(x)). \tag{1.1}$$

On lui associe le système différentiel

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, ..., x_n), \quad i = 1, ..., n, \tag{1.2}$$

où les fonction $x = (x_1, ..., x_n) \mapsto f_i(x)$ (appelée composantes du champ de vecteur X) sont des fonctions de classe C^k sur l'ouvert U. D'après le théorème fondamentale, il existe une solution maximale unique $x(t)$ aux équations (1.2) telle que $x(0) = x_0$.

Définition 1.2.1 *la correspondance $\phi_t \ : \ x_0 \mapsto x(t)$ qui associe à une donnée initiale x_0 la valeur de la solution maximale $x(t)$ au temp t, qui correspond à cette donée initiale, est appelé le flot au temp t du champ de vecteur X. Le flot du champ de vecteurs est l'aplication qui associe à (t, x) la solution maximale $x(t)$ au temp t qui correspond à la donnée initiale x :*

$$(t, x) \mapsto \phi(t, x) = \phi_t(x) = x(t).$$

Le flot est dit complet lorsque cette corrspondance est définie pour toute valeur de $t \in [-\infty, +\infty]$.

Définition 1.2.2 *L'orbite (ou courbe intégrale) γ du champ de vecteurs X passant par le point x_0 est la courbe différentiable formée des points $x(t)$ de U donnés par la solution de (1.2) avec donnée initiale x_0. Cette courbe est orientée par le sens de variation de t. Sa tangente au point $x(t)$ est la daroite affine passant par $x(t)$ de direction t le vecteur $X(x(t))$. On distingue éventuellement l'orbite positive $\gamma_+ =\{ \ x(t), \ t \geq 0\}$ et l'orbite négative $\gamma_- = \{ \ x(t), \ t \leq 0\}$ passant par le point $x(0) = x_0$.*
Le portrait de phase du champ de vecteurs X est la partition de l'ouvert U en les orbites.

Définition 1.2.3 *Un point singulier du champ de vecteur X est un point x_0 où toutes les composantes du champ s'annulent simultanément :*

$$f_i(x_0) = 0, \quad i = 1, ..., n.$$

On dit aussi que x_0 est un zéro du champ de vecteurs ou un point d'équilibre (ou aussi un point critique). Un point qui n'est pas singulier est dit régulier.

Définition 1.2.4 *Une orbite périodique d'un champ de vecteur X est une orbite passant par un point x_0, qui n'est pas un point singulier, pour lequel il existe un nombre $T > 0$ appelé période vérifiant*

$$x(T) = x(0).$$

On qualifie de période minimale, le plus petit nombre réel positif T qui satisfait cette condition. Les multiples de la période minimale sont aussi des périodes. Lorsqu'on ne précise pas plus, par exemple pour une orbite périodique de période T, on comprend toujours la période minimale .

1.3 Systèmes différentiels autonômes

Définition 1.3.1 *on appelle système différentiel autonôme plan un système de la forme :*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x(t), y(t)) \\ \dot{y} = Q(x(t), y(t)) \end{cases} \tag{1.3}$$

où $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ et $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$.
le plan des variables x et y s'appelle le plan de phase.
le champ de vecteur associe au système (1.3) est noté $X = (P, Q)$.
nous supposons que les fonctions P et Q de classe C^1 (donc les conditions de Cauchy-Lipchitz sont satisfaites en tout point ordinaire du système (1.3)).

1.4 Classification des points d'équilibre, linéarisation

Soit le système linéaire $\dot{X} = AX$ telle que :

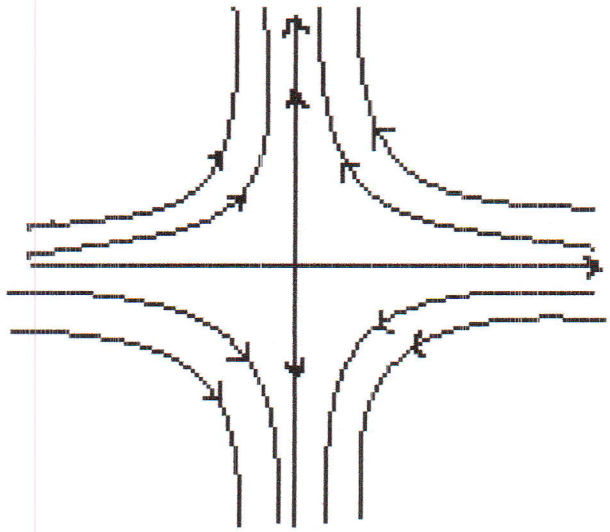
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

avec $det(A) \neq 0$.

- Le portrait de phase local pour ce système est déterminé à partir des valeurs propres de A (le seul point critique (0,0)).
- soit λ_1, λ_2 deux valeurs propres de A :

1) Point Selle :

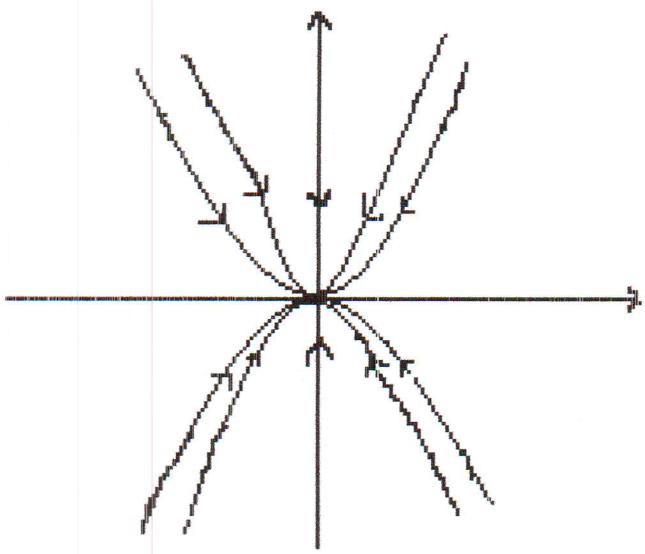
Si λ_1, λ_2 sont réelles et de signes distincts, le point singulier $(0,0)$ est appelé **selle** (il est toujours instable).



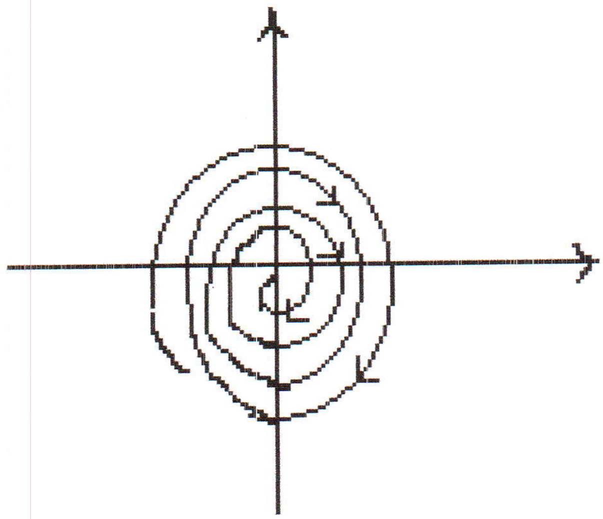
2) Nœud:

Si $\lambda_1 < 0$, et $\lambda_2 < 0 \Rightarrow$ le point$(0,0)$ est appelé **Nœud** (il est asymptotiquement stable).

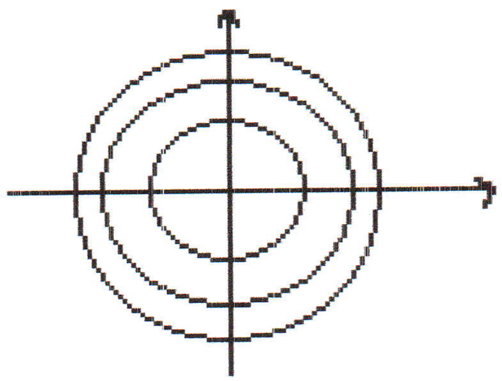
Si $\lambda_1 > 0$, et $\lambda_2 > 0 \Rightarrow$ le point$(0,0)$ est appelé **Nœud** (il est instable).



3) **Foyer**:
Si $\lambda_{1.2} = p \pm iq$, $q \neq 0$ et $p \neq 0$.
Si $p > 0 \Rightarrow$ le point$(0,0)$ est appelé **foyer** (il est instable).
Si $p < 0 \Rightarrow$ le point$(0,0)$ est appelé **foyer** (il est asymptotiquement stable).



4) **Point centre**:
Si $\lambda_{1,2} = p \pm iq$ telle que : $q \neq 0$ et $p = 0 \Rightarrow$ le point$(0,0)$ est appelé **centre** (il est seulement stable).



Soit le système non linéaire autonôme :

$$\dot{x} = f(x)$$

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $f = (f_1, f_2, ...f_n)$, considérons le système différentiel autonôme :

$$\dot{x} = f(x)$$

et x_0 un point singulier pour ce système.

Définition 1.4.1 *Le système $\dot{x} = Ax$ où :*

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right] = \mathbf{Df}(x_0),$$

pour $i, j = \overline{1, n}$ est appellé linéairisation de ce système en x_0 ou le système linéairisé en x_0.

Définition 1.4.2 *Soit :*

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.4}$$

x_0 est un point critique du système (1.4) est dit point critique hyperbolique si : $A = Df(x_0)$ n'a pas des valeurs propres avec parties réelles nulles.

Définition 1.4.3 *Soit :*

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.5}$$

x_0 est un point critique hyperbolique de (1.5) :

- *x_0 est appelé **puit** si les v.p de $Df(x_0)$ ont des parties réelles négatives.*
- *x_0 est appelé **source** si les v.p de $Df(x_0)$ ont des parties réelles positives.*
- *x_0 est appelé **selle** si au moins l'une des v.p est avec partie réelle positive et une autre est avec partie réelle négative.*

1.5 Ensemble limite, cycle limite

Définition 1.5.1 *Soit $\phi(t, p)$ une courbe intégrale du champ de vecteurs X, définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, qui passe par le point p. On suppose cette courbe intégrale définie sur un intervalle $[\alpha, \beta]$.*
*Si $\beta = +\infty$, on définit l'ensemble ω-**limite** de l'orbite comme*

$$\omega(p) = q \in U, \textit{il existe une suite } t_n \to +\infty, \lim_{n\to\infty} \phi(t_n) = q.$$

*De même, dans le cas où $\alpha = -\infty$, on définit l'ensemble α-**limite** de l'orbite comme*

$$\alpha(p) = q \in U, \textit{il existe une suite } t_n \to -\infty, \lim_{n\to\infty} \phi(t_n) = q.$$

Si γ_p désigne l'orbite passant par p et si $q \in \gamma_p$, alors $\omega(p) = \omega(q)$.

Preuve : Supposons qu'il existe une solution périodique τ de période T contenue dans E. Elle est représentée par une trajectoire fermée dans le plan.
Soit G l'intérieur de cette trajectoire d'après la formule de Green on a :

$$\begin{aligned}\int\int_G (\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y})dxdy &= \int_\tau fdy - gdx \\ &= \int_0^T [f(x,y)\frac{dy}{dt} - g(x,y)\frac{dx}{dt}]dt \\ &= \int_0^T 0dt = 0\end{aligned}$$

Contradiction avec $divF = 0 \Rightarrow$ Il ne peut pas avoir de solution périodique contenue dans E. ◆

Théorème 1.6.3 ***(Critère de Dulac)*** *Soit $F = (f,g)^\tau \in C^1(E)$ où E est une région simplement connexe dans $\mathbb{R}^2$. S'il existe une fonction $B \in C^1(E)$ tel que $\nabla(BF)$ est non identiquement nulle et ne change pas de signe dans E, alors le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y), \end{cases}$$

n'admet aucune orbite fermée entièrement contenu dans E.

Preuve : Supposons qu'il existe une solution périodique τ de période T contenue dans E. Elle est représentée par une trajectoire fermée dans le plan.
Soit G l'intérieur de cette trajectoire d'après la formule de Green on a :

$$\begin{aligned}\int\int_G B(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y})dxdy &= \int_\tau Bfdy - Bgdx \\ &= \int_0^T B[f(x,y)\frac{dy}{dt} - g(x,y)\frac{dx}{dt}]dt \\ &= \int_0^T B0dt = 0\end{aligned}$$

Contradiction avec $divBF = 0 \Rightarrow$ Il ne peut pas avoir de solution périodique contenue dans E. ◆

Chapitre 2

La théorie des indices

Dans ce chapitre nous illustrons la théorie des indices, nous donnons quelques définitions et quelques résultats permettant le calcul de l'indice.

2.1 Indice des points critiques

Soit le système autonôme :

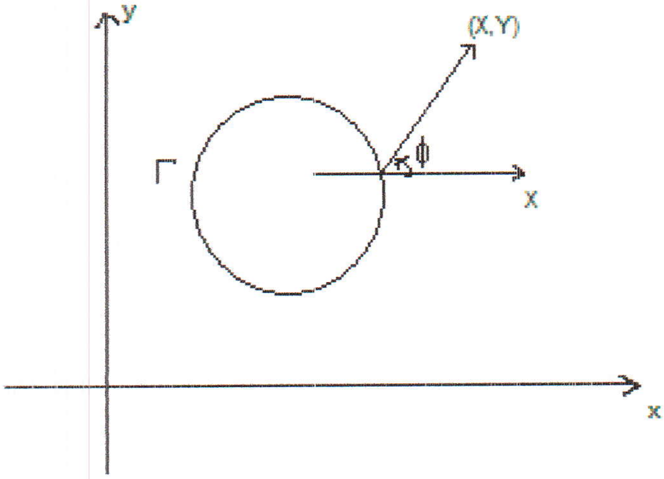
$$\begin{cases} \dot{x} = X(x,y) \\ \dot{y} = Y(x,y), \end{cases} \tag{2.1}$$

et Γ une courbe ne contenant pas de points critiques de (2.1). En chaque point (x,y) le champ de vecteur (X,Y) définit une direction et ϕ l'angle que fait le vecteur (X,Y) avec l'axe des x.

Définition 2.1.1 *L'indice de la courbe Γ relativement au champ de vecteur (X,Y) est :*

$$\frac{\Delta\phi}{2\pi}.$$

où $\Delta\phi$ est la variation de l'angle ϕ quand le point (x,y) parcourt Γ une seule fois dans le sens positif.



Exemple 2.1.2 *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x,y) = 2x^2 - 1 \\ \dot{y} = Y(x,y) = 2xy \end{cases}$$

et Γ le cercle unité, cherchons l'indice de Γ relativement au champ de vecteur (X,Y) pour cela, on pose :

$$(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

D'où :

$$\begin{aligned} (X,Y) &= \left(2\cos^2\theta - 1, 2\cos\theta\sin\theta\right) \\ &= (\cos(2\theta), \sin(2\theta)) \end{aligned}$$

on obtient :

$$\Delta\phi = 4\pi \Rightarrow I_\Gamma = \frac{4\pi}{2\pi} = 2.$$

Remarque 2.1.3 *L'indice est un nombre entier relatif, il peut être nul.*

2.2 Représentation de l'indice

posons :

$$(x,y) = (x(s), y(s)), s_0 \leq s \leq s_1,$$

c'est à dire

$$\Gamma = \{(x(s), y(s)) / s_0 \leq s \leq s_1\}$$

on a :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg}\phi &= \frac{Y}{X} \Rightarrow \frac{d}{ds}(\operatorname{tg}\phi) = \frac{d}{ds}\left(\frac{Y}{X}\right) \\
&\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\phi}\frac{d\phi}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{Y}{X}\right) \\
&\Rightarrow \left(1+\operatorname{tg}^2\phi\right)\frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{dY}{ds}X - \frac{dX}{ds}Y}{X^2} \\
&\Rightarrow \left(1+\frac{Y^2}{X^2}\right)\frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{dY}{ds}X - \frac{dX}{ds}Y}{X^2} \\
&\Rightarrow \frac{d\phi}{ds} = \frac{X^2}{X2+Y^2}\,\frac{\frac{dY}{ds}X - \frac{dX}{ds}Y}{X^2} \\
&\Rightarrow \frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{dY}{ds}X - \frac{dX}{ds}Y}{X^2+Y^2}
\end{aligned}
$$

d'où :

$$
\begin{aligned}
I_\Gamma &= \frac{1}{2\pi}\int_{s_0}^{s_1}\frac{d\phi}{ds}ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{s_0}^{s_1}\frac{\frac{dY}{ds}X - \frac{dX}{ds}Y}{X^2+Y^2}ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_R}\frac{XdY - YdX}{X^2+Y^2}.
\end{aligned}
$$

Théorème 2.2.1 *Si Γ est une courbe fermée qui ne contient pas de points critiques de même son intérieur, alors l'indice I_Γ est nul.*

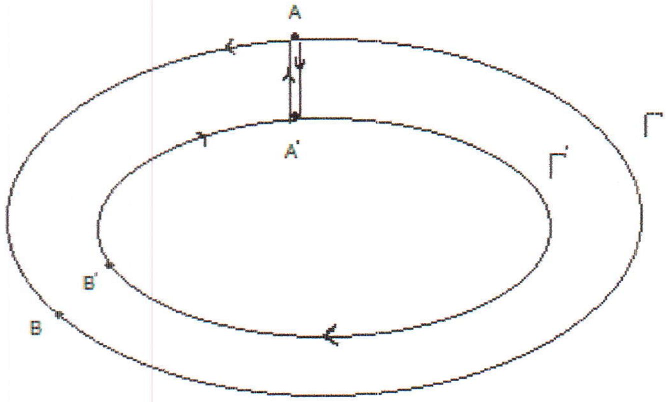
Preuve : On a d'après la formule de Green-Riemann :

$$
\begin{aligned}
I_\Gamma &= \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_R}\frac{XdY - YdX}{X^2+Y^2} \\
&= \int\int_{S_R}\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{X}{X^2+Y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{Y}{X^2+Y^2}\right)\right]dXdY \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

où S_R est l'intérieur de Γ_R. ◆

Corollaire 2.2.2 *Si Γ et Γ' sont deux courbes fermées, avec Γ' à l'intérieure de Γ. Si sur Γ et Γ' et sur la région comprise entre eux il n'y a pas de points d'équilibre. Alors*

$$I_\Gamma = I_{\Gamma'}.$$



Preuve : Soit AA' une ligne liant Γ et Γ', et soit le chemin C définit par $ABAA'B'A'A$. Puisque C ne contient pas de points d'équilibre on a :

$$I_C = 0$$

c'est à dire :

$$\frac{1}{2\pi}\oint_C d\phi = 0$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi}\left[\oint_\Gamma d\phi + \oint_{AA'} d\phi + \oint_{\Gamma'} d\phi + \oint_{A'A} d\phi\right] = 0$$

Or

$$\oint_{AA'} d\phi = -\oint_{A'A} d\phi$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi}\left[\oint_\Gamma d\phi - \oint_{\Gamma'} d\phi = 0\right]$$

ceci implique que :

$$I_\Gamma = I_{\Gamma'}. \quad \blacklozenge$$

Remarque 2.2.3

a) *On voit que l'indice I_Γ du champ de vecteur (X, Y) ne dépend pas de la courbe Γ, mais il dépend des points d'équilibre.*

b) *Si on a un point d'équilibre à l'intérieure de Γ, n'importe quelle courbe Γ contenant ce point donne le même indice; Pour cela, on dit que I est l'indice du point d'équilibre (I non I_Γ).*

Théorème 2.2.4 *Si Γ contient n points d'équilibre $P_1, P_2..., Pn$, alors :*

$$I_\Gamma = \sum_{i=1}^{n} I_i$$

où I_i est l'indice du point $P_i, i = 1, ..., n$.

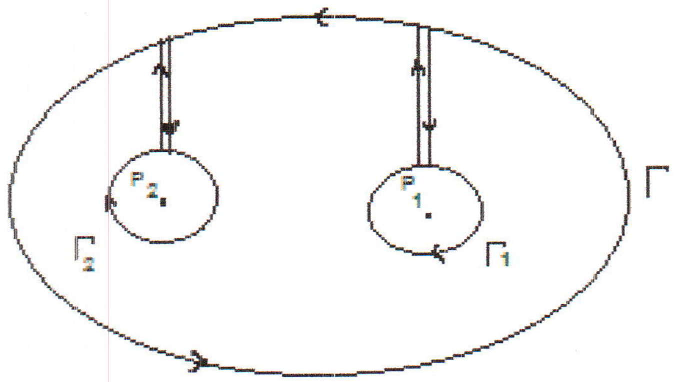
Preuve : Faisons la preuve pour deux point d'équilibre. Construisons un contour Γ liée avec deux cercles Γ_1 et Γ_2. L'intérieure de Γ ne contient pas de points d'équilibre, ceci implique que :

$$I_\Gamma = 0$$

Or

$$I_\Gamma = \frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma d\phi - \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_1} d\phi - \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_2} d\phi$$

$$\Rightarrow I_\Gamma - I_{\Gamma_1} - I_{\Gamma_2} = 0$$



d'où

$$I_\Gamma = I_{\Gamma_1} + I_{\Gamma_2}. \quad ◆$$

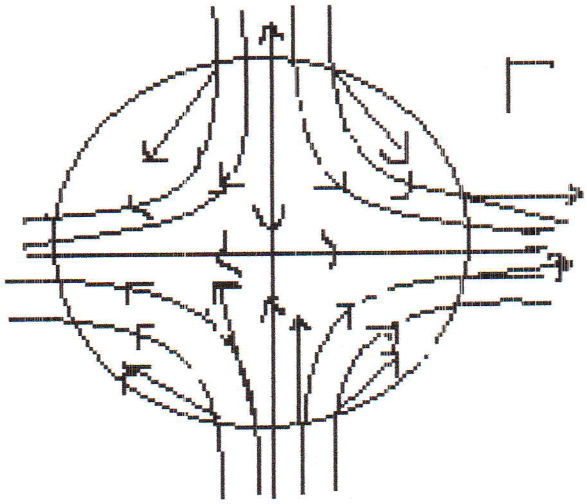
2.3 Indice des points critiques : selle, centre, Nœud et foyer

Si on connaît la nature du point d'équilibre, on peut en déduire l'indice :

1- Point selle: Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x,y) = x \\ \dot{y} = Y(x,y) = -y \end{cases}$$

L'origine $(0,0)$ est un point selle.
le portrait de phase associé est :



d'où :

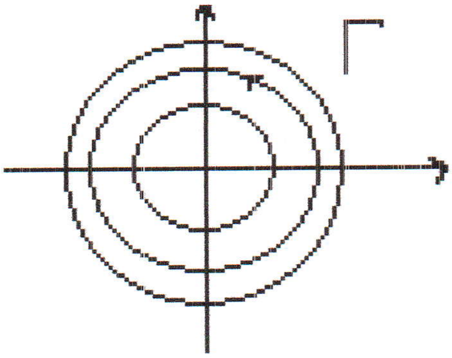
$$\Delta\phi = -2\pi \Rightarrow I_\Gamma = -1.$$

$\boxed{\text{L'indice d'un point selle est toujours égale à } -1.}$

2- Point centre: Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

L'origine $(0,0)$ est un point centre.
le portrait de phase associe est :



d'où :

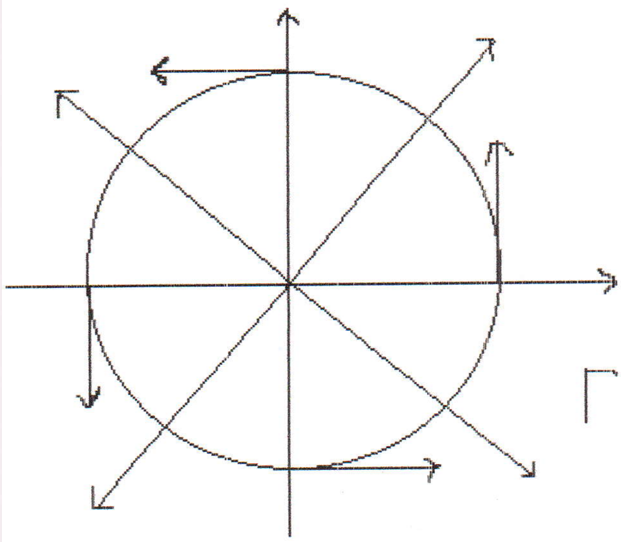
$$\Delta\phi = 2\pi \Rightarrow I_\Gamma = 1.$$

L'indice d'un point centre est toujours égale à 1.

3- **Nœud**: Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

L'origine $(0,0)$ est un point Nœud.
le portrait de phase associe est :



d'où :

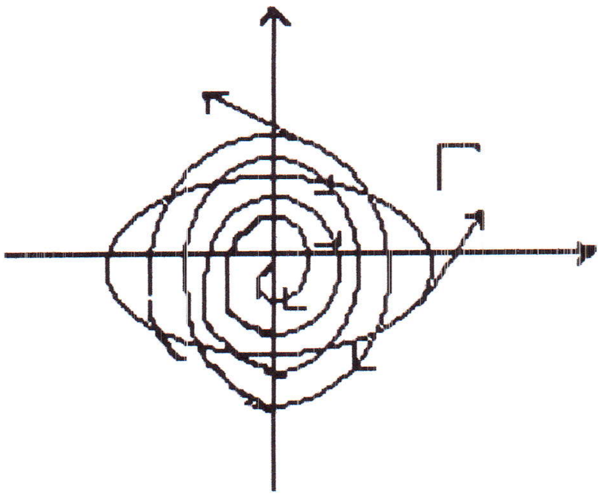
$$\Delta\phi = 2\pi \Rightarrow I_\Gamma = 1.$$

L'indice d'un point Nœud est toujours égale à 1.

4- **Foyer**: Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

L'origine $(0, 0)$ est un point foyer.
le portrait de phase associe est :



d'où :

$$\Delta\phi = 2\pi \Rightarrow I_\Gamma = 1.$$

L'indice d'un point foyer est toujours égale à 1.

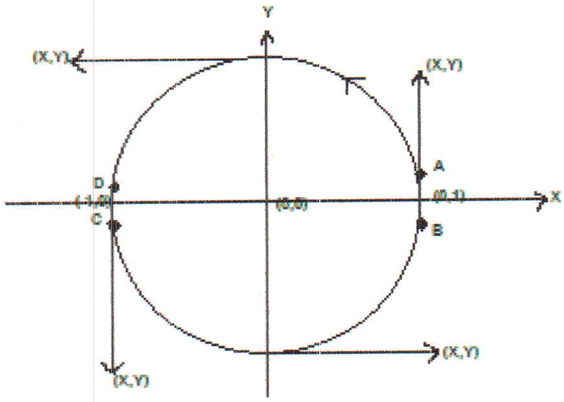
Théorème 2.3.1 *Soit p le nombre de changement de $\frac{Y}{X}$ du $-\infty$ à $+\infty$, et soit q le nombre de changement de $\frac{Y}{X}$ du $+\infty$ à $-\infty$, alors l'indice est égale à :*

$$I_\Gamma = \frac{1}{2}(p - q).$$

Preuve : Voir Jordan [4]. ◆

Exemple 2.3.2 *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x,y) = -y \\ \dot{y} = Y(x,y) = x \end{cases}$$



on a :

$$\frac{Y}{X} = -\frac{x}{y}$$

$$En\ A(1,0) : \frac{Y}{X} = \frac{1^+}{-0^+} = -\infty.$$

$$En\ B(1,0) : \frac{Y}{X} = \frac{1^+}{-0^-} = +\infty.$$

$$En\ C(-1,0) : \frac{Y}{X} = \frac{-1}{-0^-} = -\infty.$$

$$En\ D(-1,0) : \frac{Y}{X} = \frac{-1}{-0^+} = +\infty.$$

d'où :

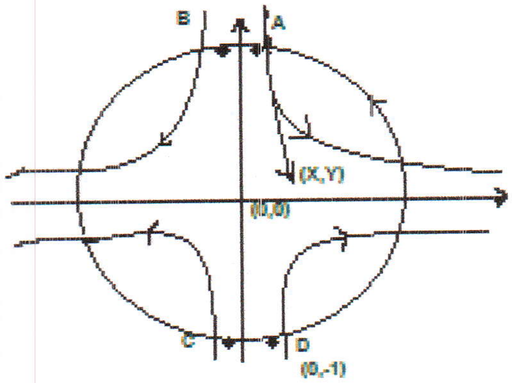
$$p = 2 \quad et \quad q = 0$$

donc :

$$I_\Gamma = \frac{1}{2}(2-0) = 1.$$

Exemple 2.3.3 *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x,y) = x \\ \dot{y} = Y(x,y) = -y \end{cases}$$



on a :

$$\frac{Y}{X} = -\frac{y}{x}$$

$$En\ A(0,1) : \frac{Y}{X} = \frac{-1}{0^+} = -\infty.$$

$$En\ B(0,1) : \frac{Y}{X} = \frac{-1^+}{0^-} = +\infty.$$

$$En\ C(-1,0) : \frac{Y}{X} = \frac{-1^-}{0^-} = -\infty.$$

$$En\ D(-1,0) : \frac{Y}{X} = \frac{-1^-}{0^+} = +\infty.$$

d'où :

$$p = 2 \quad et \quad q = 0$$

donc :

$$I_\Gamma = \frac{1}{2}(2-0) = 1.$$

Exemple 2.3.4 *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x,y) = y^3 \\ \dot{y} = Y(x,y) = x^3 \end{cases}$$

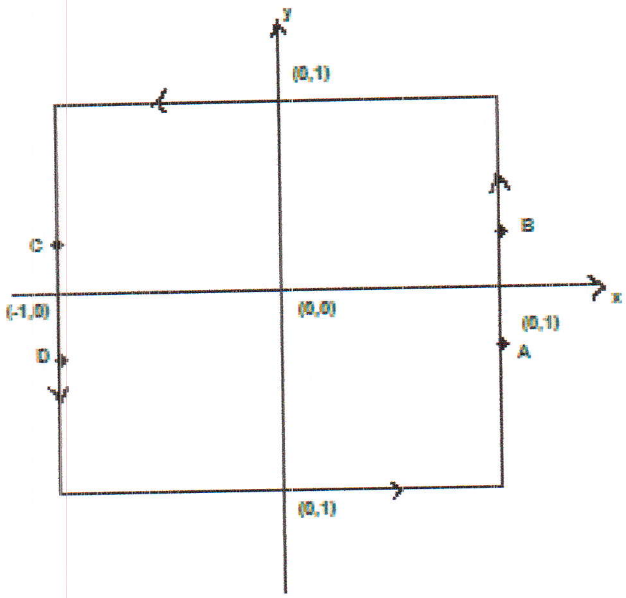
Au voisinage du point critique $(0,0)$ *le système linéarisé est :*

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

les valeurs propres λ_1, λ_2 *sont nulles, on ne peut rien dire.*

On a :

$$\frac{Y}{X} = \frac{x^3}{y^3}$$



et

$$En\ A(1,0) : \frac{Y}{X} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

$$En\ B(1,0) : \frac{Y}{X} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

$$En\ C(-1,0) : \frac{Y}{X} = \frac{-1}{0^+} = -\infty.$$

$$En\ D(-1,0) : \frac{Y}{X} = \frac{-1}{0^-} = +\infty.$$

d'où :

$$p = 0 \quad et \quad q = 2$$

donc :

$$I_\Gamma = \frac{1}{2}(0-2) = -1.$$

On peut considérer un cercle à la place du carré.

Proposition 2.3.5 *Si* Γ *est une orbite périodique du système* (2.1)*, alors son indice est égale à 1.*

Preuve : Une orbite périodique C d'un système autonôme :

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, y) \\ \dot{y} = Y(x, y) \end{cases}$$

correspond à une courbe fermée, le vecteur (X, Y) est tangent à cette orbite en chaque point (x, y), la variation de ϕ est donc 2π, d'où l'indice est $(+1)$. ◆

2.4 Propriétés

- On déduit pour un cycle limite C que la somme des indices des points d'équilibre à l'intérieure de C est égale à 1.
- L'intérieure d'un cycle limite ne peut pas être une région qui n'a aucun point d'équilibre ou qui contient seulement un point selle.
- L'indice d'une courbe ne change pas quand on remplace (f_1, f_2) par $(-f_1, -f_2)$ dans le système :
$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases}.$$
- Si Γ est une orbite périodique, et Γ contient des points critiques; Si les points critiques sont hyperboliques, alors Γ contient $2n+1$ points critiques (pour un certain $n \geq 0$), n sont des selles et le reste sont des puits ou des sourses.

2.5 Indice d'un point critique simple

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \tag{2.2}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Théorème 2.5.1 *Si $detA \neq 0$. Alors l'indice du point d'équilibre $(0, 0)$ du système (2.2) est :*

$$I((0,0)) = \begin{cases} +1 = si\ detA > 0 \\ -1 = si\ detA < 0 \end{cases}$$

Preuve : Soit Γ une courbe qui ne contient pas du points critiques de $(2,2)$. En chaque point (x_1, x_2) le champ de vecteur (X, Y), $(X = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, Y = a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$ définit une direction. Soit ϕ l'angle que fait le vecteur (X, Y) avec l'axe des x_1.

On a d'après la formule de Green-Riemann :

$$I_\Gamma = \frac{1}{2\pi}\int_{s_0}^{s_1} \frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{2\pi}\int_{s_0}^{s_1} \frac{X\dot{Y} - Y\dot{X}}{X^2+Y^2} ds \tag{2.3}$$

Posons :

$$\begin{cases} x_1(s) = \dfrac{a_{22}\cos(s) - a_{12}\sin(s)}{detA} \\ x_2(s) = \dfrac{a_{11}\sin(s) - a_{21}\cos(s)}{detA} \end{cases} \tag{2.4}$$

ceci donne :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{ds} = \dfrac{-a_{22}\sin(s) - a_{12}\cos(s)}{detA} \\ \frac{dx_2}{ds} = \dfrac{a_{11}\cos(s) + a_{21}\sin(s)}{detA} \end{cases} \tag{2.5}$$

Comme l'indice du point $(0,0)$ est égale à l'indice d'une courbe arbitraire autoure de $(0,0)$.
On considère l'ellypse E définie par :

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)^2 = 1$$

Posons :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \tag{2.6}$$

D'où :

$$y_1^2 + y_2^2 = 1$$

et posons :

$$y_1 = \cos\theta, y_2 = \sin\theta, \; avec\, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
I_E &= I_\Gamma \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{y_1\dot{y}_2 - y_2\dot{y}_1}{y_1^2 + y_2^2} ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)(a_{21}\dot{x}_1 + a_{22}\dot{x}_2) - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)(a_{11}\dot{x}_1 + a_{12}\dot{x}_2)] ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (a_{11}a_{22}x_1\dot{x}_2 + a_{12}a_{21}x_2\dot{x}_1 - a_{21}a_{12}x_1\dot{x}_2 - a_{22}a_{11}x_2\dot{x}_1) ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1\dot{x}_2 + (a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})x_2\dot{x}_1] ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [(detA)x_1\dot{x}_2 - (detA)x_2\dot{x}_1] ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (detA)(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1) ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{detA}{(detA)^2} [(a_{22}\cos\theta - a_{12}\sin\theta)(a_{11}\cos\theta + a_{21}\sin\theta) + \\
&\quad (a_{11}\sin\theta - a_{21}\cos\theta)(a_{22}\sin\theta + a_{12}\cos\theta)]\, ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{detA}{(detA)^2} (a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12})\, ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{detA}{(detA)^2} (detA) ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\pm\frac{1}{detA}\int_0^{2\pi} (detA) ds\right] \\
&= \pm 1.
\end{aligned}$$

où le signe $\pm$ est choisi selon le detA est positif ou négatif. ◆

CHAPITRE 3

L'indice à l'infini

Dans ce chapitre, on va définir la notion de l'indice à l'infini. On va donner aussi un exemple pour expliquer en détail comment calculer l'indice à l'infini.

3.1 Indice à l'infini

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x,y) \\ \dot{y} = Y(x,y) \end{cases} \tag{3.1}$$

Définition 3.1.1 *Soit les nouvelles coordonnées x_1, y_1 définies par la transformation :*

$$x_1 = \frac{x}{x^2+y^2}\ ,\ y_1 = \frac{-y}{x^2+y^2} \tag{3.2}$$

on coordonnées polaires :

$$\theta_1 = -\theta\ ,\ r_1 = \frac{1}{r}$$

L'indice de l'origine (x_1, y_1) pour l'équation transformée est appelée l'indice du point à l'infini de l'équation d'origine (3.1).

Remarque 3.1.2 *La transformation* (3.2) *s'appelle inversion de l'origine.*

Posons :

$$z = x + iy, \quad Z = X + iY$$

le système (3.1) s'écrit :

$$\frac{dz}{dt} = Z \tag{3.3}$$

On sait que : $\phi = \arg Z$, $l =$ module de Z

(3.2) s'écrit :

$$z_1 = \frac{1}{z}$$

car :

$$z_1 = x_1 + iy_1 = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

(3.3) s'écrit :

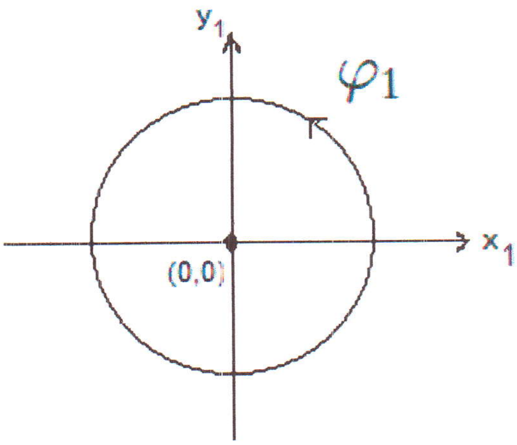
$$-\frac{1}{z_1^2}\frac{dz_1}{dt} = Z \Rightarrow \frac{dz_1}{dt} = -z_1^2.Z = Z_1 \tag{3.4}$$

On cherche l'indice de $z_1 = 0$ de (3.4).

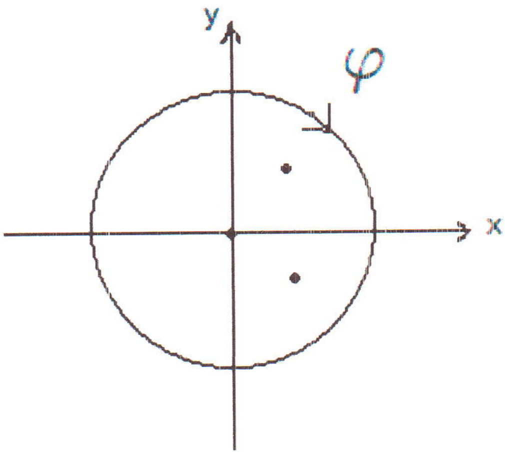
Théorème 3.1.3 *L'indice I_∞ du système (3.1) ayant un nombre fini de points d'équilibre avec les indices I_i, $i = 1, ..., n$, est donné par :*

$$I_\infty = 2 - \sum_{i=1}^{n} I_i.$$

Preuve : Cherchons l'indice de $z_1 = 0$ ($(x_1, y_1) = (0, 0)$); Pour cela traçons la courbe qui entoure $z_1 = 0$ et qui ne contient pas d'autres points d'équilibre.



Par la transformation $z = \frac{1}{z_1}$, on a l'image :



Si :

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$$
$$\Rightarrow z = \frac{1}{r_1} e^{-i\theta_1}$$

Si $r_1 \to 0$, $\frac{1}{r_1}$ est très grand.
φ contient les points d'équilibre du système (3.1)
L'extérieur de φ_1 devient l'intérieur de φ, φ_1 devient φ dans l'autre sens.
On a :

$$I_\infty = \frac{1}{2\pi} \Delta\phi_1|_{\varphi_1}.$$

de l'équation (3.4) on a :

$$Z_1 = l_1 e^{i\phi_1} = -r_1^2 e^{2i\theta_1} l e^{i\phi} = r_1^2 l e^{i(2\theta_1+\phi+\pi)}.$$

$$\begin{aligned} I_\infty &= \frac{1}{2\pi}\Delta(2\theta_1+\phi+\pi)|_{\varphi_1} = \frac{1}{2\pi}[\Delta(2\theta_1) + \Delta\phi|\varphi] \\ &= \frac{1}{2\pi}[4\pi - 2\pi\sum_{i=1}^{n} I_i] = 2 - \sum_{i=1}^{n} I_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_\infty = 2 - \sum_{i=1}^{n} I_i \quad \blacklozenge$$

3.2 Exemple

Trouvons l'indice à l'infini du système :

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x - y^2 \end{cases} \qquad (i)$$

Les points d'équilibre du système (i) sont : $(0,0)$, $(1,1)$.

- Le système linéarisé de (i) au voisinage du point $(0,0)$ est :

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

d'où le point $(0,0)$ est un foyer alors son indice est 1.

- Le système linéarisé de (i) au voisinage du point $(1,1)$ est :

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$$

les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{5}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

d'où le point $(1,1)$ est un point selle alors son indice est -1. Ceci implique d'après le théorème (2.4.3) que :

$$I_\infty = 2 - (1 - 1) = 2$$

Bibliography

[1] *Badi Sabrina, Thèse de doctorat Bifurcation des cycles limites des systèmes polynomiaux suivant la méthode de la moyenne* (2012).

[2] Boulfoul Amel, *Thèse de doctorat Cycles limites de certains systèmes de Liénard généralisés dépendant d'un petit paramètre* (2013).

[3] *Eric Benoit, Polycopié du cours : Equation différentielle CIMPA Tlemcen (2008)* (29.Avril.2008).

[4] *D.W. Jordan and P. Smith*, Oxford, New York, Third edition 1999. Nonlinear ordinary differential equations, Discrete and Continuous Dynamical Systems **17** (2007), 529–540.

[5] *J. Hale and H. Kocak, Dynamics and bifurcations Springer-Verlog, New York, 1991*

[6] *L.Perko*, Differential equations and Dynamical systems (2001)

[7] Verhulst, *Nonlinear differential equations and dynamical systems. Universitex, Springer,* (1991).