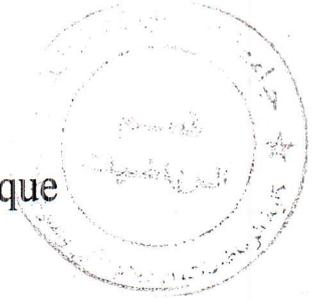


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



M1510.151

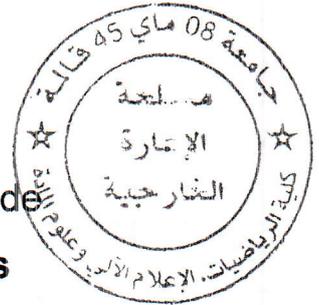


Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématiques appliquées**



Par :

M^{elle} Zedadra Lemya

Intitulé

**Méthodes de la moyenne du premier ordre et
deuxième ordre**

Dirigé par : Dr Yacine Bouattia

Devant le jury

**PRESIDENT
RAPPORTEUR
EXAMINATEUR**

Dr. A.Chaoui	MCA	Univ-Guelma
Dr. Y.Bouattia	MCB	Univ-Guelma
Dr. A.Benrabeh	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2015

Remerciement

En premier lieu et avant tout, je remercie énormément le grand Dieu qui m'a aidé à réaliser ce travail.

Je remercie mon encadreur Mr. Y.BOUATIA pour le sujet qu'il m'a proposé, pour son investissement et ses conseils précieux durant toute cette période.

Je suis très honoré que Mr. A .CHAQUI ait accepté de rapporter mon travail et de présider mon jury de mémoire. je remercie pour ses conseils et ses précieuses remarques.

Je remercie Mr. A .BANRABAH pour avoir accepté d'examiner mon travail. je suis très heureux de le voir participer à mon jury.

Merci à tout ma famille en particulier ma mère, mon père et ma sœur, et mes frères, et à tout mes amis.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

A mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi, et qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. A ceux qui n'ont jamais cessé de m'apporter l'affection, l'amour, le courage et le bon sens. J'espère qu'ils trouveront dans ce travail toute ma reconnaissance.

A ma tendresse mère Hadda

En témoignage de ma profonde gratitude et de mon incontestable reconnaissance, pour tous les sacrifices qu'elle me contente, toute la confiance qu'elle m'accorde et tout l'amour dont elle m'entoure. La plus belle mère du monde.

A mon cher père Mouhamed

Qui est le meilleur père dans ce monde, grâce à l'encouragement, sa confiance et son soutien moral et matériel et pour son amour infini en exprimant mes gratitude, mon profond amour et ma passion.

A toute ma famille et en particulier à mes frères soufian , walid, Alla et mes sœur Fadia et samira, et tous familles.

A tout mes amis (es):

Ibtissem, Hasna, zhor, fulla, Hannan, Hannan. D, zinab, Selma, Nour, Souha, Abir, Lamia, Imene, Hocine.H, Billel, Hocine. G, Fouad, Wassim et pour toute les amis dans cette période d'étude dans la même spécialité ou les autres facultés ou différentes options.

Et la section maths 2015 « Master » et tous ceux qui me sont chers. Que dieu vous garde.

LEMMA

Table des matières

0.1	Introduction	4
1	Notions préliminaires	6
1.1	Systèmes dynamiques, points critiques	7
1.2	Classification des points d'équilibre	8
1.3	Portrait de phase et cycles limites	11
1.4	Symétrie classique	12
1.5	Stabilité	13
2	Méthode de la moyenne du premier ordre	18
2.1	Théorème.	19
2.2	Exemples.	19
3	Méthode de la moyenne du second ordre	26
3.1	Théorème.	26
3.2	Théorème.	28
3.3	Exemple.	28
4	Différence entre les deux méthodes et conclusion	33
4.1	conclusion.	35

تلخيص

موضوع هذه المذكرة يرتكز أساسا على إيجاد الحلول الدورية المعزولة باستعمال طريقة المتوسط من الرتبة الأولى والرتبة الثانية مع ذكر أوجه الاختلاف بينهما.

Résumé

L'objet de cette mémoire est basée principalement sur la recherche de solutions périodiques isolé en utilisant la méthode de la moyenne de premier ordre et de second ordre avec ledit leurs différences.

0.1 Introduction

(a) Historique

Nous allons étudier dans ces chapitres des équations différentielles du deuxième ordre.

$$y'' = F(y', y) \text{ où } y = y(x) \text{ et } ' = \frac{d}{dx}. \quad (0.1)$$

Ces équations peuvent se transformer en un système de 2 équations différentielles du premier ordre. L'espace des phases est alors un plan. La forme générale d'un tel système :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (0.2)$$

Le premier modèle physique publié dans la littérature qui transformé en un système du type (0.2) admette un cycle limite est l'équation :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon \left(\frac{1}{3} \left(\frac{dy}{dt} \right)^3 - \frac{dy}{dt} \right) + y = 0. \quad (0.3)$$

Dans les années vingt, **Balthasar van der Pol**, un ingénieur hollandais, étudiait les propriétés électriques des tubes à néon (**van der Pol** 1922). A cette époque là, les oscillograpes n'existant pas encore, il surveillait l'évolution de son circuit en écoutant les changements de tonalité dans un combiné téléphonique. Il modélisa les charges et décharges du tube par l'équation qui porte maintenant son nom.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} - x = 0. \quad (0.4)$$

On voit que si on dérive l'équation (0.3) par rapport à t et que si l'on note $x = \frac{dy}{dt}$, on retrouve l'équation (0.4). Ces deux équations sont donc équivalentes.

Lienard un ingénieur français, établit un théorème d'existence et d'unicité d'une solution

périodique pour une classe générale d'équations dont fait partie l'équation(0.4).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon f(x) \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (0.5)$$

Levinson & Smith (1942) ont suggéré de généraliser l'équation (0.5).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon f(x) \frac{dx}{dt} + G(x) = 0.$$

et qui est connu sous le nom d'équation de Liénard généralisé.

Ce mémoire est organisé en 4 chapitres qui se présentent comme suit :

Le premier chapitre est un rappel des notions générales. Nous commençons par définir les systèmes dynamiques, les points d'équilibres et le système linéarisés en suite nous introduisons la notion d'un cycle limite et l'amplitude d'un cycle limite d'un système planaire. Puis nous introduisons la définition de la stabilité avec quelque exemple. Dans le deuxième chapitre est réservé à la méthode de la moyenne de premier ordre. On étudie un exemple pour recherche les cycles limites. Le chapitre 3 est réservé à la méthode de la moyenne de second ordre. On étudie un exemple pour recherche les cycles limites Le dernier chapitre est réservé à la différence entre les deux methode.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Résumé

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions générales. Nous commençons par définir les systèmes dynamiques, les points critiques et le système linéarisés d'un système non linéaire au voisinage d'un point d'équilibre. En suite nous introduisons la notion d'un cycle limite et l'amplitude d'un cycle limite d'un système planaire. Puis nous présentons une règle de la symétrie classique. Nous introduisons la stabilité d'une solution d'un système différentiel et quelques théorèmes sur la stabilité.

1.1 Systèmes dynamiques, points critiques

Définition 1.1.1. Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application :

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Définie sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, telle que :

- $U(., x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- $U(t, .) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- $U(0, x) = x$.
- $U(t + s, x) = U(t, U(s, x))$ pour $t, s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$.

Soit le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}^+, x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Où A est une matrice constante. La solution de (1.1) est :

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

Le système (1.1) engendre un système dynamique, car l'application :

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

qui à tout $t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$ associe :

$$U(t, x) = e^{tA}x$$

vérifie les quatre propriétés précédentes.

Définition 1.1.2. Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.3}$$

On appelle point critique ou point d'équilibre du système (1.3), le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$f(x_0) = 0$$

Définition 1.1.3. Considérons le système (1.3)

Le système :

$$\dot{x} = Ax$$

où

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right) = Df(x_0), 1 \leq i, j \leq n$$

et

$$f(x_0) = 0$$

est appelé linéarisation de (1.3) en x_0 .

Définition 1.1.4. On appelle point critique hyperbolique de (1.3), le point x_0 telle que A n'a aucune valeur propre avec une partie réelle nulle.

1.2 Classification des points d'équilibre

Cas des systèmes linéaires

Considérons le système linéaire :

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.4}$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et A une matrice constante inversible. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A .

Définition 1.2.1.

- Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont réelles et du même signe, la solution $x = 0$ est

appelée nœud.

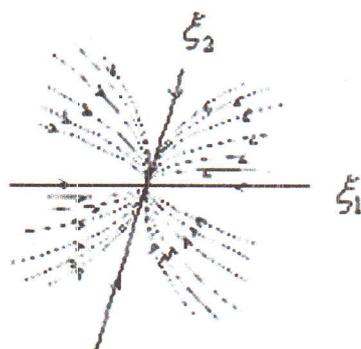


Fig 1.1 Nœud stable.

• Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont réelles, non nulles et de signe différent, la solution $x = 0$ est appelée *selle*.

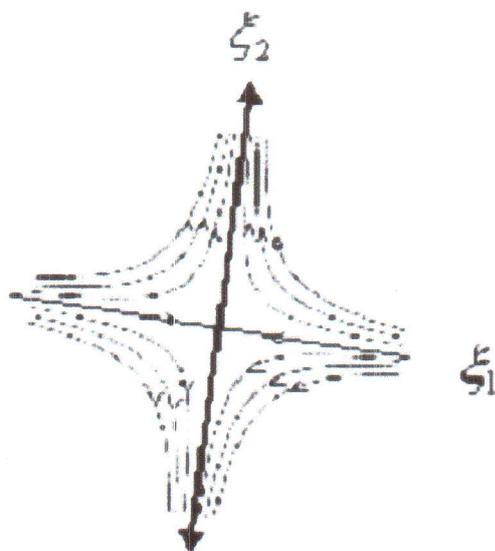


Fig 1.2- point selle.

• Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont complexes avec $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$. La solution

Considérons maintenant le système non-linéaire :

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.5}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), f = (f_1, \dots, f_n)$$

Définition 1.2.2. Un point critique x_0 de (1.5) est appelé *puits* si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles négatives ; Il est appelé *source* si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles positives ; Il est appelé *selle* s'il est hyperbolique et si $A = Df(x_0)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive et au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.

Définition 1.2.3. Deux systèmes planaires :

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.6}$$

et

$$\dot{x} = g(x) \tag{1.7}$$

Définis sur deux ouverts U et V respectivement, sont topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme $h : U \rightarrow V$ tel que h transforme les orbites de (1.6) en celles de (1.7) et préserve le sens du mouvement.

Théorème 1.1. Si x_0 est un point d'équilibre hyperbolique de (1.5), alors il existe un voisinage de ce point dans lequel le système $\dot{x} = f(x)$ est *topologiquement équivalent* à son linéarisé $\dot{x} = Ax$.

1.3 Portrait de phase et cycles limites

Définition 1.3.1. Soit le système planaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \tag{1.8}$$

Où P, Q sont des polynômes en x et y . Les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.8) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelés orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentés dans le plan (x, y) s'appelle portrait de phase, et le plan (x, y) est appelé plan de phase.

Définition 1.3.2. Une solution périodique du système (1.8) est une solution telle que :

$$(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t)) \text{ pour } T > 0$$

A toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace des phases.

Définition 1.3.3. Un cycle limite du système (1.8) est une orbite fermée isolée, c'est à dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage.

Définition 1.3.4. L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable x sur le cycle limite.

1.4 Symétrie classique

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + P(x, y), \\ \dot{y} = -x + Q(x, y). \end{cases} \quad (1.9)$$

tel que le point d'équilibre $(0, 0)$ est un centre pour le **S.L** (système linéarisés) de (1.9).

Si

$$P(x, -y) = -P(x, y) \text{ et } Q(x, -y) = Q(x, y),$$

où

$$P(-x, y) = P(x, y) \text{ et } Q(-x, y) = -Q(x, y).$$

Alors, l'origine est un centre pour (1.9).

Exemple :

On pose : $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = -\varepsilon f(x)y$; donc (1.9) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon f(x)y. \end{cases} \quad (1.10)$$

Le **S.L** de (1.10) est :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\varepsilon f(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

si $f(x)$ est une fonction impaire alors, Le **S.L** devient :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$(0, 0)$ est un centre pour le **S.L** et puisque $P(-x, y) = P(x, y)$ et $Q(-x, y) = -Q(x, y)$ alors $(0, 0)$ est un centre pour le **S.N.L** (1.10) donc il n'existe pas des cycles limites.

Si $f(x)$ est une fonction paire alors le point $(0, 0)$ est un foyer pour le **S.N.L** (1.10) avec : $\varepsilon^2 f^2(0) - 4 < 0$.

1.5 Stabilité

Soit le système des équations :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.11)$$

On suppose que f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité des solutions.

Définitions. Une solution $\Phi(t)$ du système (1.11) telle que $\Phi(t_0) = \Phi_0$ est dite stable au sens de Lyapunov si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tel que toute solution $x(t)$ de (1.11) dont la valeur initiale $x(t_0)$ vérifie

$$\|x(t_0) - \Phi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \Phi(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Si en plus de cette définition on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \Phi(t)\| = 0.$$

Alors la solution est dite asymptotiquement stable.

Quand $\Phi(t) = 0$ la définition devient :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tel que toute solution $x(t)$ de (1.11) dont la valeur initiale $x(t_0)$ vérifie

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0,$$

Si en plus

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dy}{dt} + \frac{d\Phi(t)}{dt} = f(t, y + \Phi) \\ \frac{dy}{dt} &= f(t, y + \Phi) - f(t, \Phi) \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, y) \end{aligned}$$

On voit bien que $y \equiv 0$ est une solution de ce système.

Exemple 1 : ($n = 1$)

$$\frac{dx}{dt} = -x + 1; \quad x(0) = 1.$$

La solution telle que $x(0) = x_0$ est :

$$x(t) = (x_0 - 1)e^{-t} + 1.$$

La solution $\Phi(t)$ telle que $\Phi(0) = 1$ est $\Phi(t) = 1$

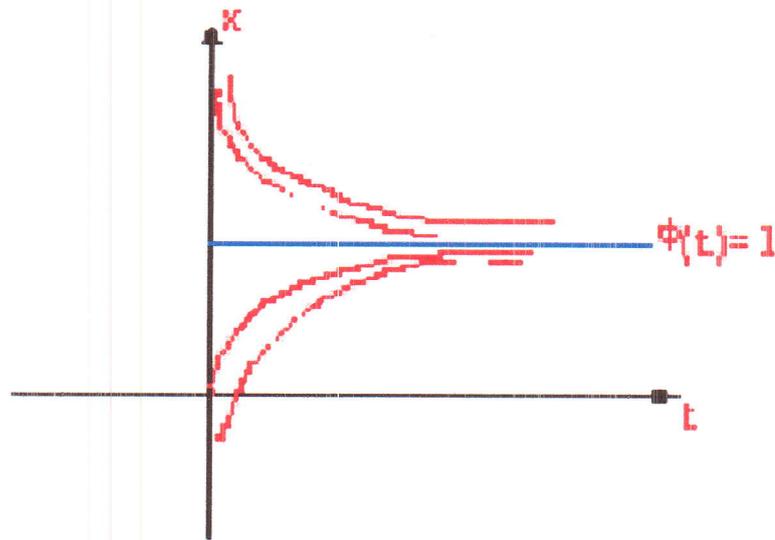
$$|x(t) - \Phi(t)| = |(x_0 - 1)e^{-t}| < |x_0 - 1|, \quad \forall t > 0.$$

Il suffit de prendre $\delta \leq \varepsilon$; $\delta = \varepsilon \Rightarrow \Phi(t)$ est stable.

Stabilité asymptotique.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \Phi(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |(x_0 - 1)e^{-t}| = 0,$$

d'où $\Phi(t)$ est asymptotiquement stable.



Exemple 2 : ($n = 2$).

Soit le système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases} ; \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution qui vérifie $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ est :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix} ; \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0$ telle que :

$$\left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < \delta \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon; \forall t > 0,$$

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| &= |x(t)| + |y(t)| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| + |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < 2(|x_0| + |y_0|) \\ &= 2 \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon; \text{ On prend } \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}; \delta = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

d'où $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est stable

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} (x^2(t) + y^2(t)) = x_0^2 + y_0^2 = c > 0 \not\rightarrow 0$$

Donc la solution n'est pas asymptotiquement stable.

Remarque : Il est possible que la solution $\Phi(t)$ soit non bornée et stable et même asymptotiquement stable. De même il est possible que la solution soit bornée et non stable.

• Dans le premier cas, on a les deux exemples.

1) $\frac{dx}{dt} = 1; x(0) = 0.$

2) $\frac{dx}{dt} = -x + t + 1; x(0) = 0.$

• Dans le deuxième cas, on a l'exemple.

$\frac{dx}{dt} = \sin^2(x); x(0) = 0, \Phi(t) \equiv 0.$

Exemples :

a) $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0.$

$$x = x_1 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2. \end{cases}$$

La solution $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de ce système est asymptotiquement stable.

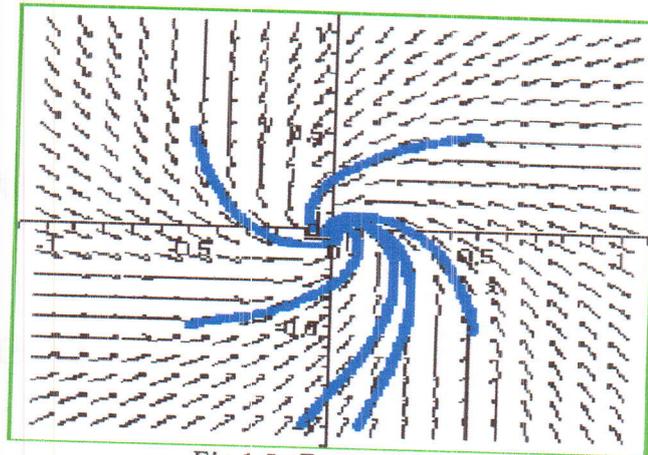


Fig.1.5- Foyer stable.

b)
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est asymptotiquement stable.

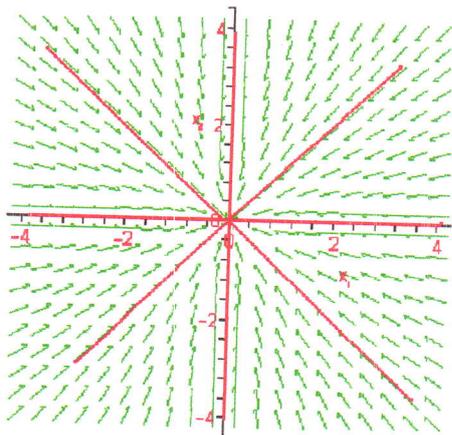


Fig.1.6- Noeud stable.

2.1 Théorème.

On considère le système (2.1) et on suppose les fonctions $F, R, D_x F, D_x^2 F, D_x^2 R$ sont continues et bornées par une constante M (indépendante de ε) dans $[0, +\infty[\times D$ avec $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ on suppose que F et R sont T -périodique en t avec T indépendante de ε :

(a) si $p \in D$ est un point singulier du système moyenné (2.2) telle que $\det(D_x f^0(p)) \neq 0$ alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit il existe une solution T -périodique $X_\varepsilon(t)$ du système (2.1) telle que $X_\varepsilon(0) \rightarrow p$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

(b) si le point singulier $y = p$ de système moyenné (2.2) est hyperbolique alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, la solution périodique correspondante $X_\varepsilon(t)$ du système (2.1) est unique hyperbolique et de même stabilité que p .

2.2 Exemples.

Exemple 2.1 :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - \varepsilon(x^3 - \alpha x) \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

En posant $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ on obtient

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \cos \theta \dot{x} + \sin \theta \dot{y} \\ &= -r \cos \theta \sin \theta - \varepsilon r \cos^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta - \alpha) + r \sin \theta \cos \theta \\ &= -r \varepsilon \cos^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta - \alpha) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{1}{r} (\cos \theta \dot{y} - \sin \theta \dot{x}) \\ &= \frac{1}{r} (\cos \theta (r \cos \theta) - \sin \theta ((-r \sin \theta) - \varepsilon r \cos \theta (r^2 \cos^2 \theta - \alpha))) \\ &= 1 + \varepsilon \cos \theta \sin \theta (r^2 \cos^2 \theta - \alpha) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} &= \frac{dr}{d\theta} = \frac{-r \varepsilon \cos^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta - \alpha)}{1 + \varepsilon \cos \theta \sin \theta (r^2 \cos^2 \theta - \alpha)} \\ &= -\varepsilon r \cos^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta - \alpha) + o(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}f^0(r) &= \frac{-r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta - \alpha) d\theta \\ &= \frac{-r}{2\pi} \int_0^{2\pi} (r^2 \cos^4 \theta - \alpha \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{-3r}{8} (r^2 - \frac{4}{3}\alpha)\end{aligned}$$

On pose $\alpha = 3$ alors

$$f^0 = 0 \implies \frac{-3r}{8} (r^2 - 4) = 0 \implies r = 2$$

Donc il existe cycle limite d'amplitude 2.

On a

$$\left[\frac{\partial f^0}{\partial r} \right]_{r=2} = \left[-\frac{9}{8}r^2 + \frac{3}{2} \right]_{r=2} = -3 \quad (< 0)$$

Donc le cycle limite d'amplitude 2 est stable.

Exemple 2.2 :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x + \varepsilon(x^2 - \alpha)y \end{cases}$$

En posant $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ on obtient

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \cos \theta \dot{x} + \sin \theta \dot{y} \\ &= -r \cos \theta \sin \theta + \sin \theta (r \cos \theta + \varepsilon(r^2 \cos^2 \theta - \alpha)r \sin \theta) \\ &= -r \cos \theta \sin \theta + r \cos \theta \sin \theta + \varepsilon r \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta - \alpha) \\ &= r \varepsilon \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta - \alpha)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{1}{r}(\cos \theta \dot{y} - \sin \theta \dot{x}) \\ &= \frac{1}{r}(\cos \theta(r \cos \theta + \varepsilon(r^2 \cos^2 \theta - \alpha))r \sin \theta - \sin \theta(-r \sin \theta)) \\ &= \frac{1}{r}(r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta + \varepsilon r \cos \theta \sin \theta(r^2 \cos^2 \theta - \alpha)) \\ &= 1 + \varepsilon \cos \theta \sin \theta(r^2 \cos^2 \theta - \alpha)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} &= \frac{dr}{d\theta} = \frac{r \varepsilon \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta - \alpha)}{1 + \varepsilon \cos \theta \sin \theta (r^2 \cos^2 \theta - \alpha)} \\ &= \varepsilon r \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta - \alpha) + o(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}f^0(r) &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta - \alpha) d\theta \\ &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} (r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \alpha \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{r}{8}(r^2 - 4\alpha)\end{aligned}$$

On pose $\alpha = 1$ alors

$$f^0 = 0 \implies \frac{r}{8}(r^2 - 4) = 0 \implies r = 2$$

Donc il existe cycle limite d'amplitude 2.

On a

$$\left[\frac{\partial f^0}{\partial r} \right]_{r=2} = \left[\frac{3r^2}{8} - \frac{1}{2} \right]_{r=2} = 1 \quad (> 0)$$

Donc le cycle limite d'amplitude 2 est instable.

Exemple 2.3 :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon(x^5 + \alpha x^3 + \beta x) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

En posant $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ on obtient

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \cos \theta \dot{x} + \sin \theta \dot{y} \\ &= \cos \theta (r \sin \theta + \varepsilon r \cos \theta (r^4 \cos^4 \theta + \alpha r^2 \cos^2 \theta + \beta)) + \sin \theta (-r \cos \theta) \\ &= r \cos \theta \sin \theta - r \cos \theta \sin \theta + \varepsilon r \cos^2 \theta (r^4 \cos^4 \theta + \alpha r^2 \cos^2 \theta + \beta) \\ &= \varepsilon r \cos^2 \theta (r^4 \cos^4 \theta + \alpha r^2 \cos^2 \theta + \beta)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{1}{r} (\cos \theta \dot{y} - \sin \theta \dot{x}) \\ &= \frac{1}{r} (\cos \theta (-r \cos \theta) - \sin \theta (r \sin \theta + \varepsilon r \cos \theta (r^4 \cos^4 \theta + \alpha r^2 \cos^2 \theta + \beta))) \\ &= \frac{1}{r} (-r \cos^2 \theta - r \sin^2 \theta - \varepsilon r \cos \theta \sin \theta (r^4 \cos^4 \theta + \alpha r^2 \cos^2 \theta + \beta)) \\ &= -1 - \varepsilon \cos \theta \sin \theta (r^4 \cos^4 \theta + \alpha r^2 \cos^2 \theta + \beta)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} &= \frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r \cos^2 \theta (r^4 \cos^4 \theta + \alpha r^2 \cos^2 \theta + \beta)}{-1 - \varepsilon \cos \theta \sin \theta (r^4 \cos^4 \theta + \alpha r^2 \cos^2 \theta + \beta)} \\ &= -\varepsilon r \cos^2 \theta (r^4 \cos^4 \theta + \alpha r^2 \cos^2 \theta + \beta) + o(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}f^0(r) &= \frac{-r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta (r^4 \cos^4 \theta + \alpha r^2 \cos^2 \theta + \beta) d\theta \\ &= \frac{-r}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^4 \cos^6 \theta + \alpha r^2 \cos^4 \theta + \beta \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{-r}{32} [5r^4 + 12\alpha r^2 + 16\beta] \\ &= \frac{-5r}{32} [r^2 - 1] [r^2 - 2] \\ &= \frac{-r}{32} [5r^4 - 15r^2 + 10]\end{aligned}$$

Pour

$$\alpha = \frac{-5}{4} \text{ et } \beta = \frac{5}{8}$$

On a

$$f^0 = 0 \implies \frac{-5r}{32} [r^2 - 1] [r^2 - 2] = 0 \implies r = 1 \text{ ou } r = \sqrt{2}$$

Donc il existe deux cycles limites d'amplitudes 1 et $\sqrt{2}$.

On a

$$\left[\frac{\partial f^0}{\partial r} \right]_{r=1} = \left[-\frac{25}{32}r^4 + \frac{45}{32}r^2 - \frac{10}{32} \right]_{r=1} = \frac{5}{16} \quad (> 0)$$

Donc le cycle limite d'amplitude 1 est instable.

et

$$\left[\frac{\partial f^0}{\partial r} \right]_{r=\sqrt{2}} = \left[-\frac{25}{32}r^4 + \frac{45}{32}r^2 - \frac{10}{32} \right]_{r=\sqrt{2}} = -\frac{5}{8} \quad (< 0)$$

Donc le cycle limite d'amplitude $\sqrt{2}$ est stable.

Exemple 2.4 :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(-x^5 + \alpha_1 x^3 + \beta_1 x) \\ \dot{y} = x + \varepsilon(x^4 - \alpha_2 x^2 + \beta_2)y \end{cases}$$

En posant $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ on obtient

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \cos \theta \dot{x} + \sin \theta \dot{y} \\ &= \cos \theta (-r \sin \theta + \varepsilon r \cos \theta (-r^4 \cos^4 \theta + \alpha_1 r^2 \cos^2 \theta + \beta_1)) + \sin \theta (r \cos \theta + \\ &\quad \varepsilon r (r^4 \cos^4 \theta - \alpha_2 r^2 \cos^2 \theta + \beta_2) \sin \theta) \\ &= -r \cos \theta \sin \theta + r \cos \theta \sin \theta + \varepsilon r \cos^2 \theta (r^4 \cos^4 \theta + \alpha_1 r^2 \cos^2 \theta + \beta_1) + \\ &\quad \varepsilon r \sin^2 \theta (r^4 \cos^4 \theta - \alpha_2 r^2 \cos^2 \theta + \beta_2) \\ &= \varepsilon r (r^4 (-2 \cos^6 \theta + \cos^4 \theta) + r^2 ((\alpha_1 + \alpha_2) \cos^4 \theta - \alpha_2 \cos^2 \theta) + (\beta_1 - \beta_2) \cos^2 \theta + \beta_2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= \frac{1}{r}(\cos \theta \dot{y} - \sin \theta \dot{x}) \\
 &= \frac{1}{r}(\cos \theta(r \cos \theta + \varepsilon r(r^4 \cos^4 \theta - \alpha_2 r^2 \cos^2 \theta + \beta_2)) - \sin \theta(-r \sin \theta + \\
 &\quad \varepsilon r \cos \theta(-r^4 \cos^4 \theta + \alpha_1 r^2 \cos^2 \theta + \beta_1))) \\
 &= \frac{1}{r}(r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta - \varepsilon r \cos \theta \sin \theta((r^4 \cos^4 \theta - \alpha_2 r^2 \cos^2 \theta + \beta_2) + \\
 &\quad (-r^4 \cos^4 \theta + \alpha_1 r^2 \cos^2 \theta + \beta_1))) \\
 &= 1 + \varepsilon \cos \theta \sin \theta((r^4 \cos^4 \theta - \alpha_2 r^2 \cos^2 \theta + \beta_2) + \\
 &\quad (-r^4 \cos^4 \theta + \alpha_1 r^2 \cos^2 \theta + \beta_1))
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} &= \frac{\varepsilon r(r^4(-2 \cos^6 \theta + \cos^4 \theta) + r^2((\alpha_1 + \alpha_2) \cos^4 \theta - \alpha_2 \cos^2 \theta) + (\beta_1 - \beta_2) \cos^2 \theta + \beta_2)}{1 + \varepsilon \cos \theta \sin \theta((r^4 \cos^4 \theta - \alpha_2 r^2 \cos^2 \theta + \beta_2) + (-r^4 \cos^4 \theta + \alpha_1 r^2 \cos^2 \theta + \beta_1))} \\
 &= \varepsilon r(r^4(-2 \cos^6 \theta + \cos^4 \theta) + r^2((\alpha_1 + \alpha_2) \cos^4 \theta - \alpha_2 \cos^2 \theta) \\
 &\quad + (\beta_1 - \beta_2) \cos^2 \theta + \beta_2) + o(\varepsilon^2)
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 f^0(r) &= \frac{r}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} r^4(-2 \cos^6 \theta + \cos^4 \theta) d\theta + \int_0^{2\pi} r^2((\alpha_1 + \alpha_2) \cos^4 \theta - \alpha_2 \cos^2 \theta) d\theta + \right. \\
 &\quad \left. \int_0^{2\pi} (\beta_1 - \beta_2) \cos^2 \theta + \beta_2 d\theta \right] \\
 &= \frac{r}{16} [r^4 + (6\alpha_1 - 2\alpha_2)r^2 + 8(\beta_1 + \beta_2)] \\
 &= \frac{r}{16} \left(r^2 - \frac{1}{4} \right) \left(r^2 - \frac{1}{16} \right) \\
 &= \frac{r}{16} \left(r^4 - \frac{5}{16} + \frac{1}{64} \right)
 \end{aligned}$$

Où

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{5}{32}, \beta_1 = \frac{1}{512} \text{ et } \beta_2 = 0$$

On a

$$f^0 = 0 \implies \frac{r}{16} \left(r^2 - \frac{1}{4} \right) \left(r^2 - \frac{1}{16} \right) = 0 \implies r = \frac{1}{2} \text{ et } r = \frac{1}{4}$$

Donc il existe deux cycles limites d'amplitude $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$.

On a

$$\left[\frac{\partial f^0}{\partial r} \right]_{r=\frac{1}{2}} = \left[\frac{5}{16} r^4 - \frac{15}{256} r^2 + \frac{1}{1024} \right]_{r=\frac{1}{2}} = \frac{3}{512} \quad (> 0)$$

Donc le cycle limite d'amplitude $\frac{1}{2}$ est instable.

et

$$\left[\frac{\partial f^0}{\partial r} \right]_{r=\frac{1}{4}} = \left[\frac{5}{16} r^4 - \frac{15}{256} r^2 + \frac{1}{1024} \right]_{r=\frac{1}{4}} = -\frac{3}{2048} \quad (< 0)$$

Donc le cycle limite d'amplitude $\frac{1}{4}$ est stable.

Chapitre 3

Méthode de la moyenne du second ordre

Le théorème suivant fournit une approximation du second ordre pour les solutions d'un certain système différentiel périodique.

3.1 Théorème.

On considère les deux problèmes à valeurs initiales suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x) + \varepsilon^3 h(t, x, \varepsilon) \quad x(0) = x_0 \quad (3.1)$$

et

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon f^0(y) + \varepsilon^2 f^{10}(y) + \varepsilon^3 g^0(y) \quad y(0) = x_0 \quad (3.2)$$

avec $f : [0, +\infty[\times D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0, +\infty[\times D \times]0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$. D est un ouvert de \mathbb{R} . f , g et h sont T -périodiques et

$$f^1(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x} y^1(t, x) - \frac{\partial y^1}{\partial x} f^0(x) \quad (3.3)$$

Où

$$y^1(t, x) = \int_0^t [f(s, x) - f^0(x)] ds + z(x) \quad (3.4)$$

avec $z(x)$ une fonction de class C^1 telle que la moyenne de y^1 est égale à zéro.

En outre f^0, f^{10} et g^0 dénotent les fonctions moyennées de f, f^1 et g respectivement supposons que :

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}$ et lipchitzienne en x et toutes ces fonction sont continues sur leurs domaine de définition.

(ii) $|h(t, x, \varepsilon)|$ est uniformément bornée par une constante dans $[0, \frac{T}{\varepsilon}[\times D \times]0, \varepsilon_0[$.

(iii) T indépendant de ε .

(iv) $y(t)$ appartient à D dans la durée $\frac{1}{\varepsilon}$ Alors

$$x(t) = y(t) + \varepsilon y^1(t, y(t)) + o(\varepsilon^2) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

supposons que $f^0(y) \equiv 0$, alors les affirmations suivantes sont satisfaites.

(a) si p est le point critique du système moyenné telle que :

$$\frac{\partial}{\partial y}(f^{10}(y) + g^0(y))(p) \neq 0 \quad (3.5)$$

donc, il existe une solution T -périodique $\Phi(t, \varepsilon)$ telle que

$$\Phi(t, \varepsilon) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

(b) si le point critique $y = p$ de système est hyperbolique alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit la solution périodique $\Phi(t, \varepsilon)$ correspondante du système (3.1) est unique, hyperbolique et de même type de stabilité que p .

3.2 Théorème.

Considérons le système différentiel :

$$\dot{x} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x; \varepsilon) \quad (3.6)$$

Où $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $R : \mathbb{R} \times D \times]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, T -périodiques en la première variable. D est un ouvert de \mathbb{R}^n .

On suppose que

(i) pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_1(t, ; \cdot) \in C^1(D)$, F_1, F_2, R et $D_x F$: sont localement lipchitziennes par rapport à x . R est différentiable par rapport à ε .

On définit $F_{10}, F_{20} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\begin{aligned} F_{10} &= \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds, \\ F_{20} &= \frac{1}{T} \int_0^T (D_x F_1(s, z) \int_0^s F_1(t, z) dt + F_2(s, z)) ds. \end{aligned} \quad (3.7)$$

et supposons que

(ii) pour $V \in D$, un ensemble ouvert et borné et pour tout

$\varepsilon \in]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\setminus \{0\}$, il existe $a_\varepsilon \in V$ tel que $F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon) = 0$.

et $d_B(F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon), V, a_\varepsilon) \neq 0$

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $\varphi(\cdot, \varepsilon)$ de système (3.1).

3.3 Exemple.

Exemple 3.1 :

On considère le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon x - \varepsilon^2 x, \\ \dot{y} = x + \varepsilon(x^2 - y - 8xy) - \varepsilon^2 y. \end{cases}$$

En utilisant les coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Ce système s'écrit

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon^2 r + \varepsilon(\sin r^2 \cos^2 \theta + 8r^2 \cos^3 \theta + 2r \cos^2 \theta - r - 8r^2 \cos \theta), \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon(r \cos^3 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta - 8r \sin \theta \cos^2 \theta). \end{cases}$$

ou d'une manière équivalente

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3),$$

tel que

$$F_1(r, \theta) = r^2 \sin \theta \cos^2 \theta + 8r^2 \cos^3 \theta + 2r \cos^2 \theta - r - 8r^2 \cos \theta,$$

$$\begin{aligned} F_2(r, \theta) = & 63r^3 \sin \theta \cos^5 \theta + 32r^2 \cos^4 \theta \sin \theta - 64r^3 \cos^3 \theta \sin \theta \\ & + 4r \cos^3 \theta \sin \theta - 24r^2 \cos \theta \sin \theta - 2r \cos \theta \sin \theta - 3r^3 \cos^3 \theta + 16r^3 \cos^4 \theta \\ & - 16r^3 \cos^6 \theta - 4r^2 \cos^5 \theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (r^2 \sin \theta \cos^2 \theta + 8r^2 \cos^3 \theta + 2r \cos^2 \theta - r - 8r^2 \cos \theta) d\theta \end{aligned}$$

D'où on a

$$F_{10}(r) = 0.$$

Calculons

$$\begin{aligned} y_1(r, s) &= \int_0^s F_1(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{3}r^2 - \frac{1}{3}r^2 \cos^3 s + \frac{8}{3}r^2 \sin s \cos^2 s - \frac{8}{3}r^2 \sin s + r \cos s \sin s \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} f^1(r, \theta) &= \frac{\partial F_1}{\partial r} y_1(r, s) \\ &= r(2r \sin s \cos^2 s + 16 \cos s)^3 + 2(\cos^2 s - 1 - 16 \cos s)y_1(r, s) \end{aligned}$$

Donc la fonction $F_{20}(r)$ est

$$\begin{aligned} F_{20}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f^1(r, s) + F_2(r, s)) ds \\ &= r^3 - r \end{aligned}$$

L'unique racine positive de $F_{20}(r)$ est $r = 1$. Comme $\frac{\partial}{\partial r}(F_{10}(r) + \varepsilon F_{20}(r))|_{r=1} = 2\varepsilon \neq 0$. D'après le théorème pour $0 < \varepsilon \ll 1$ suffisamment petit possède un seul cycle limite.

Exemple 3.2 :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(x + \alpha x^2 y) - \varepsilon^2(x - y^2) \\ \dot{y} = x + \varepsilon(\gamma x^2 y + x) - \varepsilon^2 y(x - y^2) \end{cases}$$

En utilisant les coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Ce système s'écrit

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon[r^3(\alpha \cos^3 \theta \sin \theta + \gamma \cos^2 \theta \sin^2 \theta) + r^2 \sin^3 \theta + r \cos^2 \theta] + \\ \varepsilon^2[r^2(\sin^3 \theta - \cos \theta \sin^2 \theta + \cos \theta \sin^2 \theta) - r \cos^2 \theta] \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon[r^2(\gamma \cos^3 \theta \sin \theta - \alpha \cos^2 \theta \sin^2 \theta) + r \cos \theta \sin^2 \theta - \cos \theta \sin \theta] + \\ \varepsilon^2[r(\cos \theta \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta) + \cos \theta \sin \theta]. \end{cases}$$

Donc

$$\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3)$$

tel que

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta) &= r^3(\alpha \cos^3 \theta \sin \theta + \gamma \cos^2 \theta \sin^2 \theta) + r^2 \sin^3 \theta + r \cos^2 \theta \\ F_2(r, \theta) &= [r^2(\sin^3 \theta - \cos \theta \sin^2 \theta + \cos \theta \sin^2 \theta) - r \cos^2 \theta - \\ &\quad ([r^3(\alpha \cos^3 \theta \sin \theta + \gamma \cos^2 \theta \sin^2 \theta) + r^2 \sin^3 \theta + r \cos^2 \theta] \times \\ &\quad [r^2(\gamma \cos^3 \theta \sin \theta - \alpha \cos^2 \theta \sin^2 \theta) + r \cos \theta \sin^2 \theta - \cos \theta \sin \theta))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{10} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [r^3(\alpha \cos^3 \theta \sin \theta + \gamma \cos^2 \theta \sin^2 \theta) + r^2 \sin^3 \theta + r \cos^2 \theta] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (r^3 \gamma \cos^2 \theta \sin^2 \theta + r \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{r}{8} (\gamma r^2 + 4) \end{aligned}$$

Calculons

$$y_1(r, s) = \int_0^s [r^3(\alpha \cos^3 \theta \sin \theta + \gamma \cos^2 \theta \sin^2 \theta) + r^2 \sin^3 \theta + r \cos^2 \theta] d\theta + z(r)$$

On obtient

$$z(r) = \frac{-\gamma}{8} r^3 - \frac{1}{2} r$$

On a

$$\begin{aligned} y_1(r, s) &= r^3 \left[\frac{-\alpha}{4} \cos^4 s - \frac{1}{32} \sin_4 s + \frac{1}{8} s + \frac{\alpha}{4} \right] + r^2 \left[\frac{1}{3} \cos^3 s - \cos s + \frac{2}{3} \right] \\ &\quad + r \left[\frac{1}{2} s + \frac{1}{4} \sin_2 s \right] - \frac{\gamma}{8} r^3 - \frac{1}{2} r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^1(r, \theta) &= \frac{\partial F_1}{\partial r} y_1(r, s) \\
&= [3r^2(\alpha \cos^3 \theta \sin \theta + \gamma \cos^2 \theta \sin^2 \theta) + 2r \sin^3 \theta + \cos^2 \theta] y_1(r, s)
\end{aligned}$$

Donc la fonction F_{20} est

$$\begin{aligned}
F_{20}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f^1(r, s) + F_2(r, s)) ds \\
&= r \left(\left(\frac{-33}{512} \alpha + \frac{189-192\pi}{4096} \gamma + \frac{25}{512} \alpha \gamma - \frac{3}{64} \gamma^2 \right) r^4 + \left(\frac{3\gamma-1}{12} \right) r^3 + \left(\frac{-1}{64} \alpha + \frac{3\pi-4}{16} \gamma + \frac{32\pi-1}{512} \right) r^2 - \frac{1}{3} r + \frac{\pi-3}{4} \right) \\
F_{10}(r) + \varepsilon F_{20}(r) &= \frac{1}{8} (\gamma r^3 + 4r) + \varepsilon r \left(\begin{array}{l} \left(\frac{-33}{512} \alpha + \frac{189-192\pi}{4096} \gamma + \frac{25}{512} \alpha \gamma - \frac{3}{64} \gamma^2 \right) r^4 + \left(\frac{3\gamma-1}{12} \right) r^3 + \\ \left(\frac{-1}{64} \alpha + \frac{3\pi-4}{16} \gamma + \frac{32\pi-1}{512} \right) r^2 - \frac{1}{3} r + \frac{\pi-3}{4} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon = 10^{-5} \\ \alpha = 24\pi - \frac{12\pi + \frac{2399984}{3}}{10800\pi + 719994336} \times \\ (3240\pi + \sqrt{83751126739704\pi + 330868800\pi^2 + 534222158292738689} + 1324764505) \\ + \frac{287993623}{72} \simeq -40192 \\ \gamma = -\frac{1}{10800\pi + 719994336} \times \\ (3240\pi + \sqrt{83751126739704\pi + 330868800\pi^2 + 534222158292738689} + 1324764505) \\ \simeq -5.05 \end{array} \right]$$

On trouve deux cycles limites d'amplitudes 1 et 2

Chapitre 4

Différence entre les deux méthodes et conclusion

Exemple :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(x + \alpha x^2 y) - \varepsilon^2(x - \beta y^2) \\ \dot{y} = x + \varepsilon(\gamma x^2 y + x) - \varepsilon^2 y(x - \delta y^2) \end{cases}$$

En utilisant les coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Ce système s'écrit

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon[r^3(\alpha \cos^3 \theta \sin \theta + \gamma \cos^2 \theta \sin^2 \theta) + r^2 \sin^3 \theta + r \cos^2 \theta] + \\ \varepsilon^2[r^2(\delta \sin^3 \theta - \cos \theta \sin^2 \theta + \beta \cos \theta \sin^2 \theta) - r \cos^2 \theta] \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon[r^2(\gamma \cos^3 \theta \sin \theta - \alpha \cos^2 \theta \sin^2 \theta) + r \cos \theta \sin^2 \theta - \cos \theta \sin \theta] + \\ \varepsilon^2[r(\delta \cos \theta \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \sin \theta - \beta \sin^3 \theta) + \cos \theta \sin \theta]. \end{cases}$$

Donc

$$\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3)$$

1^{ère} ordre

$$\begin{aligned}f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [r^3(\alpha \cos^3 \theta \sin \theta + \gamma \cos^2 \theta \sin^2 \theta) + r^2 \sin^3 \theta + r \cos^2 \theta] d\theta \\&= \frac{1}{8} r [\gamma r^2 + 4]\end{aligned}$$

On pose $\gamma = 1$ alors

$$f^0 = 0 \implies \frac{r}{8}(r^2 - 4) = 0 \implies r = 2$$

Donc il existe cycle limite d'amplitude 2.

On a

$$\left[\frac{\partial f^0}{\partial r} \right]_{r=2} = \left[\frac{3r^2}{8} - \frac{1}{2} \right]_{r=2} = 1 \quad (> 0)$$

Donc le cycle limite d'amplitude 2 est instable.

2^{ème} ordre

$$\begin{aligned}F_{10} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [r^3(\alpha \cos^3 \theta \sin \theta + \gamma \cos^2 \theta \sin^2 \theta) + r^2 \sin^3 \theta + r \cos^2 \theta] d\theta \\&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (r^3 \gamma \cos^2 \theta \sin^2 \theta + r \cos^2 \theta) d\theta \\&= \frac{r}{8} [\gamma r^2 + 4]\end{aligned}$$

Calculons

$$y_1(r, s) = \int_0^s [r^3(\alpha \cos^3 \theta \sin \theta + \gamma \cos^2 \theta \sin^2 \theta) + r^2 \sin^3 \theta + r \cos^2 \theta] d\theta + z(r)$$

On obtient

$$z(r) = \frac{-\gamma}{8} r^3 - \frac{1}{2} r$$

On a

$$y_1(r, s) = r^3 \left[\frac{-\alpha}{4} \cos^4 s - \frac{1}{32} \sin_4 s + \frac{1}{8} s + \frac{\alpha}{4} \right] + r^2 \left[\frac{1}{3} \cos^3 s - \cos s + \frac{2}{3} \right] + r \left[\frac{1}{2} s + \frac{1}{4} \sin_2 s \right] - \frac{\gamma}{8} r^3 - \frac{1}{2} r$$

$$\begin{aligned} f^1(r, \theta) &= \frac{\partial F_1}{\partial r} y_1(r, s) \\ &= [3r^2(\alpha \cos^3 \theta \sin \theta + \gamma \cos^2 \theta \sin^2 \theta) + 2r \sin^3 \theta + \cos^2 \theta] y_1(r, s) \end{aligned}$$

Donc la fonction F_{20} est

$$\begin{aligned} F_{20}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f^1(r, s) + F_2(r, s)) ds \\ &= r \left(\left(\frac{-33}{512} \alpha + \frac{189-192\pi}{4096} \gamma + \frac{25}{512} \alpha \gamma - \frac{3}{64} \gamma^2 \right) r^4 + \left(\frac{3\gamma-1}{12} \right) r^3 + \left(\frac{-1}{64} \alpha + \frac{3\pi-4}{16} \gamma + \frac{32\pi-1}{512} \right) r^2 - \frac{1}{3} r + \frac{\pi-3}{4} \right) \\ F_{10}(r) + \varepsilon F_{20}(r) &= \frac{1}{8} (\gamma r^3 + 4r) + \varepsilon r \left(\begin{aligned} &\left(\frac{-33}{512} \alpha + \frac{189-192\pi}{4096} \gamma + \frac{25}{512} \alpha \gamma - \frac{3}{64} \gamma^2 \right) r^4 + \\ &\left(\frac{3\gamma-1}{12} \right) r^3 + \left(\frac{-1}{64} \alpha + \frac{3\pi-4}{16} \gamma + \frac{32\pi-1}{512} \right) r^2 - \frac{1}{3} r + \frac{\pi-3}{4} \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

Pour

$$\left[\begin{aligned} \varepsilon &= 10^{-5} \\ \alpha &= 24\pi - \frac{12\pi + \frac{2399984}{3}}{10800\pi + 719994336} \times \\ &\quad \left(3240\pi + \sqrt{83751126739704\pi + 330868800\pi^2 + 5342222158292738689} + 1324764505 \right) \\ &\quad + \frac{287993623}{72} \simeq -40192 \\ \gamma &= -\frac{1}{10800\pi + 719994336} \times \\ &\quad \left(3240\pi + \sqrt{83751126739704\pi + 330868800\pi^2 + 5342222158292738689} + 1324764505 \right) \\ &\simeq -5.05 \end{aligned} \right]$$

On trouve deux cycles limites d'amplitudes 1 et 2.

4.1 conclusion.

D'après l'exemple précédent on conclut que la méthode de la moyenne de second ordre est très précisée avec le premier ordre.

Bibliographie

- [1] **J.Giné, J. Llibre**, Limit cycles of cubic polynomial vector fields via the averaging theory, *Nonlinear Analysis* 66 (2007) 1707–1721.
- [2] **L Perko** : "Differential equations and dynamical systems", *Texts in Applied Mathematics*, 7. Third edition. Springer-Verlag, New York, (2001).
- [3] **J.A. Sanders, F. Verhulst**, Averaging methods in nonlinear dynamical systems, in : *Applied Mathematical Sci.*, vol. 59, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [4] **Sébastien. Neukirch**, Thèse de doctorat de l'université Paris 6, Les attracteurs des systèmes dynamiques dissipatifs de Lorenz et de Liénard, nombre, forme et localisation.
- [5] **Y.Bouatia**, Recherche des cycles limites des centres non linéaires perturbés.