République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématiques Appliquées**

Par :

Mlle . Aifa Sana

Intitulé

Equations de la circulation générale de l'atmosphère

Dirigé par : Pr.Hisao.Fujita Yashima

Devant le jury

PRESIDENT	Pr. M. Z.Aissaoui	Prof	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Pr. H. Fujita Yashima	Prof	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. H. Guebbai	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2015

Equations de la circulation générale de l'atmosphère

Aifa Sana
Mémoire de master en mathématiques
Université 08 mai 1945-Guelma

23 juin 2015

Table des matières

Résumé

Le but de ce travail est de modéliser le modèle de la circulation générale de l'atmosphère : on écrit le système qui décrit le mouvement de l'air dans l'atmosphère, puis on rend ce système d'équations en coordonnées cylindriques suivant les directions radiale, tangentielle et verticale ; ensuite on étudie les propriétés du terme du transport du système obtenu par la projection sur le plan radial-vertical. Enfin on donne quelques caractérisations pour le réchauffement et le refroidissement dans la circulation à partir de l'équation du bilan de l'énergie.

Introdution

Le thème principal de notre travail est la modélisation par des équations aux dérivées partielles de la circulation générale de l'atmosphère qui se réalise globalement dans la couche atmosphérique de la Terre. Nous devons tenir compte des causes principales du phénomène comme les différentes sources de chaleur, la force de Coriolis et la structure verticale de l'atmosphère.

Du point de vue mathématique, les équations fondamentales du modèle seront celles du fluide compressible visqueux et calorifère. Comme le modèle général sera assez compliqué, nous devons proposer certaines simplifications comme l'hypothèse de la symétrie axiale. Nous devons étudier quelques propriétées fondamentales du système d'équations de ces modèles.

Du point de vue énergétique, le système Terre-atmosphère est globalement en équilibre (le rayonnement infrarouge émis vers l'espace est compensé par le rayonnement solaire absorbé). Les pertes sont donc égales aux gains. Mais les différentes zones de ce système ne sont pas séparément en équilibre :

- entre l'équateur et les Tropiques, les gains sont supérieurs aux pertes
- des latitudes tempérées aux pôles, les pertes sont supérieures aux gains

De même, les différentes parties de ce système ne sont pas séparément en équilibre :

- à la surface et quelque soit la latitude, les gains sont supérieurs aux pertes

• pour l'atmosphère, aux latitudes inférieures à 40° les gains sont supérieurs aux pertes alors qu'aux latitudes supérieures, c'est le contraire

Or, en moyenne annuelle, la température est partout à peu près constante.

Il est donc nécessaire que des transferts d'énergie s'effectuent :

• de l'équateur vers les pôles par une circulation méridienne permettant le transport d'énergie excédentaire des basses latitudes vers les zones polaires. Ce transport est réalisé par l'atmosphère (60%) et par les océans (40%)

•de la surface vers l'atmosphère par les flux de chaleur sensible (convection) et par les flux de chaleur latente (évaporation-condensation)

Tout cela contribue aux mouvements de l'air atmosphérique et donc à la circulation générale.

Dans le présent mémoire nous voulons étudier le systhéme d'équations qui modilise la circulation générale de l'atmosphère suivant le plan :

Dans le chapitre 1, nous allons considérer le système d'équations qui décrit la circulation générale de l'atmosphère formée par des équations qui représentent la loi de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

Dans le chapitre 2, nous allons transformer ce système d'équations en coordonnées cylindriques et nous supposons que le mouvement est stationnaire et symétrique autour de l'axe x_3, ainsi que toutes les grandeurs physiques ne dépendent que de r et x_3 et sont indépendentes de θ.

Dans le chapitre 3, nous allons étudier la propriété du terme de transport sur les caractéristiques pour obtenir des caractérisations significatives du système obtenu.

Dans le dernier chapitre, nous allons introduire quelques caractérisations du réchauffement et du refroidissement dans la circulation générale .

Chapitre 1

Description de la circulation générale de l'atmosphère

On va considérer un modèle mathématique qui décrit la circulation générale de l'atmosphère, en particulier celle principale qui est engendrée par le réchauffement de l'air dans la zone tropicale et l'abaissement de la température dans les zones éloignées de l'équateur. Pour modéliser ce phénomène on utilise les équations aux dérivées partielles du mouvement des gaz dans une version adaptée à la structure de l'atmosphère.

Avant d'écrire les équations que nous allons étudier, nous rappelons les propriétés du gèopotentiel $\Phi = \Phi(x)$; on a

$$\Phi = \Phi_g + \Phi_{cf},$$

où $\Phi_g = -\frac{GM}{|x|}$ et $\Phi_{cf} = -\frac{1}{2}|\omega|^2(x_1^2 + x_2^2)$, ici G est la constante de la gravitation, M est la masse de la Terre et ω est la vitesse angulaire de la rotation de la Terre. Φ_g représente le potentiel gravitationnel, tandis que Φ_{cf} représente le potentiel de la force centrifuge.

Nous allons considérer le domaine

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 / |x| < R_1, c_1 < \Phi(x) < c_2\}. \tag{1.1}$$

La surface $\{\Phi(x) = c_1\}$ devrait correspondre à la surface du niveau de la mer, tandis que la surface $\{\Phi(x) = c_2\}$ devrait correspondre à la limite supérieure de l'atmosphère, la constante R_1 est introduite seulement pour que Ω définit par (1.1) correspond au domaine de l'atmosphère autour de la Terre. La limite supérieure de l'atmosphère, en réalité, n'est pas bien définie, mais les phénomènes qui nous intéressent se trouvent seulement dans la couche que les météorologues appellent *troposphère* et qui se limite à 11 - 18 km de hauteur (l'épaisseur dépend de la latitude). Pour un modèle mathématique il est convenable de définir une limite supérieure de l'atmosphère.

Nous rappelons d'abord le système d'équations du mouvement d'un gaz visqueux, que l'on peut trouver par exemple dans [4]. Il est formé des équations qui représentent la loi de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. On rappelle d'abord l'équation de la continuité écrite dans la forme

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho v) = 0. \tag{1.2}$$

L'équation de la quantité de mouvement peut être écrite dans la forme

$$\varrho \partial_t v_j + \varrho \sum_{j,k=1}^{3} v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} p = \tag{1.3}$$

$$= \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\eta \left(\frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} v_k - \frac{2}{3}\delta_{jk} \nabla \cdot v\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta \nabla \cdot v), \qquad j,k = 1,2,3,$$

tandis que l'équation du bilan de l'énergie aura la forme

$$\varrho c_v(\partial_t T + v\cdot\nabla T) + p\nabla\cdot v = \tag{1.4}$$
$$= \nabla\cdot\kappa\nabla T + \eta\sum_{j,k=1}^{3}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla\cdot v\right)\frac{\partial}{\partial x_k}v_j + \zeta(\nabla\cdot v)^2, \qquad j,k = 1,2,3,$$

où

$\varrho = \varrho(t,x)$: est la densité de l'air.

$v = v(t,x)$: est la vitesse moyenne de l'air .

$T = T(t,x)$:est la température de l'air .

$p = p(t,x)$: est la pression .

η et ζ : sont les coefficients de viscosité d'écoulement et volumique de l'air.

c_v : est la chaleur spécifique de l'air.

κ : est la thermoconductibilité de l'air.

Les équations (1.2)-(1.4) (en particulier l'équation (1.3)) sont écrites, en principe, dans les coordonnées inertiales. Mais dans l'étude de l'atmosphère il nous convient d'utiliser le système de coordonnées attaché à la Terre qui fait la rotation chaque jour. La rotation de la Terre cause dans le système de coordonnées qui tourne avec la Terre, la force centrifuge

$$F_{cf} = -\varrho\nabla\Phi$$

et aussi la force de Coriolis

$$F_c = -2\varrho\,\omega\times v,$$

où $\overrightarrow{\omega} = (0,0,\omega)$ de sorte que l'équation de la quantité de mouvement se reduit à

$$\varrho\partial_t v_j + \varrho\sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} p = \tag{1.5}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\eta\left(\frac{\partial}{\partial x_k} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} v_k - \frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla\cdot v\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\zeta\nabla\cdot v) - 2\varrho(\overrightarrow{\omega}\times v)_j - \varrho\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi,$$

$j = 1, 2, 3$. Comme $v = (v_1, v_2, v_3)$, nous pouvons écrire l'équation de la quantité de mouvement pour chaque composante. On a

$$\varrho\partial_t v_1 + \varrho\left(v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \tag{1.6}$$

$$= \eta\Delta v_1 + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta\right)\partial_{x_1}(\nabla\cdot v) - 2\varrho(\overrightarrow{\omega}\times v)_1 - \varrho\frac{\partial}{\partial x_1}\Phi,$$

$$\varrho\partial_t v_2 + \varrho\left(v_1\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \tag{1.7}$$

$$= \eta\Delta v_2 + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta\right)\partial_{x_2}(\nabla\cdot v) - 2\varrho(\omega\times v)_2 - \varrho\frac{\partial}{\partial x_2}\Phi,$$

$$\varrho\partial_t v_3 + \varrho\left(v_1\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial p}{\partial x_3} = \tag{1.8}$$

$$= \eta\Delta v_3 + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta\right)\partial_{x_3}(\nabla\cdot v) - 2\varrho(\overrightarrow{\omega}\times v)_3 - \varrho\frac{\partial}{\partial x_3}\Phi.$$

Dans l'étude de la circulation générale de l'atmosphère il est important de prendre en considération le réchauffement dû à la radiation du Soleil et le refroidissement dans les zones éloignées de l'équateur. Toutefois les transformations fondamentales des équations peuvent être réalisées sur la base des équations (1.2), (1.4), (1.6), (1.7), (1.8).

Chapitre 2

Formulation des équations dans les coordonnées cylindriques

Si nous rappelons la structure géométrique de la Terre, nous constatons que l'utilisation des coordonnées cylindriques aura une utilité particulière pour l'étude de la circulation générale de l'atmosphère. Nous rappelons d'abord les relations entre les coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) et les coordonnées cylindriques (r, θ, x_3)

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\sin\theta \\ x_3 = x_3 \end{cases},$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right) \\ x_3 = x_3 \end{cases}.$$

En fonction du changement de coordonnées, les composantes de vitesse peuvent être écrites sous la forme suivante

$$\begin{cases} v_1 = w_r\cos\theta - w_\theta\sin\theta \\ v_2 = w_r\sin\theta + w_\theta\cos\theta \\ v_3 = v_3 \end{cases}, \tag{2.1}$$

2.1 Equation de continuité en coordonnées cylindriques

Comme l'équation (1.2) peut être écrite dans la forme

$$\partial_t\varrho + \frac{\partial}{\partial x_1}(\varrho v_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\varrho v_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\varrho v_3) = 0,$$

en substituant (2.1) , (2.2) , (2.3) et (2.4), on a

$$\partial_t\varrho + \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\varrho\left(w_r\cos\theta - w_\theta\sin\theta\right)\right) +$$
$$+\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\varrho\left(w_r\sin\theta + w_\theta\cos\theta\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\varrho v_3\right) = 0,$$

ce qui nous donne

$$\partial_t\varrho+\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial r}(\varrho w_r)-\cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(\varrho w_\theta)+\frac{\sin^2\theta}{r}(\varrho w_r)+\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}(\varrho w_\theta)+\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}(\varrho w_r)+$$
$$+\cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}w_\theta + \frac{\cos^2\theta}{r}(\varrho w_r) - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}(\varrho w_\theta) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\varrho v_3) = 0.$$

Il en résulte que l'équation de continuité se réduit à

$$\partial_t\varrho + \frac{1}{r}\partial_r(r\varrho w_r) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\varrho v_3) = 0. \qquad (2.5)$$

2.2 Equation de quantité de mouvement en coordonnées cylindriques

Calculons chaque opérande des équations (1.6),(1.7) et (1.8), en utilisant les relations (2.2) ,(2.3) et (2.4), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
v\cdot\nabla &= v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial}{\partial x_3}\\
&= (w_r\cos\theta-w_\theta\sin\theta)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+(w_r\sin\theta+w_\theta\cos\theta)\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+v_3\frac{\partial}{\partial x_3}\\
&= w_r\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial r}-w_r\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-w_\theta\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}+w_\theta\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\\
&+ w_r\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}+w_r\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+w_\theta\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}+w_\theta\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+v_3\frac{\partial}{\partial x_3}\\
&= w_r\frac{\partial}{\partial r}+w_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+v_3\frac{\partial}{\partial x_3}.
\end{aligned}
$$

Par l'application de cette formule au vecteur vitesse v nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\bullet(v\cdot\nabla)v_1 &= v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\\
&= \left(w_r\frac{\partial}{\partial r}+w_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+v_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)(w_r\cos\theta-w_\theta\sin\theta)\\
&= w_r\frac{\partial}{\partial r}(w_r\cos\theta)+w_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(w_r\cos\theta)+v_3\frac{\partial}{\partial x_3}(w_r\cos\theta)-w_r\frac{\partial}{\partial r}(w_\theta\sin\theta)+\\
&- w_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(w_\theta\sin\theta)-v_3\frac{\partial}{\partial x_3}(w_\theta\sin\theta)\\
&= \cos\theta\, w_r\frac{\partial w_r}{\partial r}-\sin\theta\, w_r\frac{\partial w_\theta}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}w_r w_\theta-\frac{\cos\theta}{r}w_\theta^2+v_3\cos\theta\frac{\partial w_r}{\partial x_3}-v_3\sin\theta\frac{\partial w_\theta}{\partial x_3}.
\end{aligned}
$$

De manière analogue on a

$$\begin{aligned}
\bullet(v\cdot\nabla)v_2 &= v_1\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\\
&= \left(w_r\frac{\partial}{\partial r}+w_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+v_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)(w_r\sin\theta+w_\theta\cos\theta)\\
&= w_r\frac{\partial}{\partial r}(w_r\sin\theta)+w_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(w_r\sin\theta)+v_3\frac{\partial}{\partial x_3}(w_r\sin\theta)+w_r\frac{\partial}{\partial r}(w_\theta\cos\theta)+\\
&+ w_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(w_\theta\cos\theta)+v_3\frac{\partial}{\partial x_3}(w_\theta\cos\theta)\\
&= \sin\theta\, w_r\frac{\partial w_r}{\partial r}+\cos\theta\, w_r\frac{\partial w_\theta}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}w_r w_\theta-\frac{\sin\theta}{r}w_\theta^2+v_3\sin\theta\frac{\partial w_r}{\partial x_3}+v_3\cos\theta\frac{\partial w_\theta}{\partial x_3}.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\bullet(v\cdot\nabla)v_3 &= v_1\frac{\partial v_3}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial v_3}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\\
&= w_r\frac{\partial v_3}{\partial r}+v_3\frac{\partial v_3}{\partial x_3}.
\end{aligned}$$

Maintenant, nous déterminons l'éxpression de l'opérateur laplacien, on a

$$\begin{aligned}
\triangle &= \nabla\cdot\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\\
&= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\cdot\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\\
&= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}+\\
&+ \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}+\\
&- \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.
\end{aligned}$$

Par l'application de cette formule au vecteur vitesse v, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\bullet \Delta v_1 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)(w_r \cos\theta - w_\theta \sin\theta) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2}(w_r\cos\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(w_r\cos\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(w_r\cos\theta) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(w_r\cos\theta) - \frac{\partial^2}{\partial r^2}(w_\theta\sin\theta) + \\
&- \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(w_\theta\sin\theta) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(w_\theta\sin\theta) - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(w_\theta\sin\theta) \\
&= \cos\theta\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2} - \sin\theta\frac{\partial^2 w_\theta}{\partial r^2} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial w_r}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial w_\theta}{\partial r} - \frac{\cos\theta}{r^2}w_r + \frac{\sin\theta}{r^2}w_\theta + \cos\theta\frac{\partial^2 w_r}{\partial x_3^2} + \\
&- \sin\theta\frac{\partial^2 w_\theta}{\partial x_3^2}.
\end{aligned}$$

De manière analogue on a

$$\begin{aligned}
\bullet \Delta v_2 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)(w_r \sin\theta + w_\theta \cos\theta) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2}(w_r\sin\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(w_r\sin\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(w_r\sin\theta) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(w_r\sin\theta) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(w_\theta\cos\theta) + \\
&+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(w_\theta\cos\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(w_\theta\cos\theta) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(w_\theta\cos\theta) \\
&= \sin\theta\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2} + \cos\theta\frac{\partial^2 w_\theta}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial w_\theta}{\partial r} - \frac{sin\theta}{r^2}w_r - \frac{\cos\theta}{r^2}w_\theta + \sin\theta\frac{\partial^2 w_r}{\partial x_3^2} + \\
&+ \cos\theta\frac{\partial^2 w_\theta}{\partial x_3^2}
\end{aligned}$$

et

$$\bullet \Delta v_3 = \frac{\partial^2 v_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_3}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}.$$

Calculons la divergence de v en coordonnées cylindriques ; on a

$$\begin{aligned}
(\nabla\cdot v) &= \frac{\partial}{\partial x_1}v_1+\frac{\partial}{\partial x_2}v_2+\frac{\partial}{\partial x_3}v_3\\
&= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(w_r\cos\theta-w_\theta\sin\theta)+\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(w_r\sin\theta+w_\theta\cos\theta)+\frac{\partial}{\partial x_3}v_3\\
&= \cos^2\theta\frac{\partial}{\partial r}w_r-\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}w_\theta-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(w_r\cos\theta)+\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(w_\theta\sin\theta)+\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}w_r+\\
&+\ \sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}w_\theta+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(w_r\sin\theta)+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(w_\theta\cos\theta)+\frac{\partial}{\partial x_3}v_3\\
&= \cos^2\theta\frac{\partial w_r}{\partial r}+\frac{\sin^2\theta}{r}w_r+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}w_\theta+\sin^2\theta\frac{\partial w_r}{\partial r}+\frac{\cos^2\theta}{r}w_r-\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}w_\theta+\frac{\partial}{\partial x_3}v_3,
\end{aligned}$$

donc on obtient

$$(\nabla\cdot v)=\frac{\partial}{\partial r}w_r+\frac{1}{r}w_r+\frac{\partial}{\partial x_3}v_3.$$

Comme w_r et v_3 sont independants de θ, et par l'application de la formule precédante on obtient

$$\begin{aligned}
\bullet\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla\cdot v) &= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}w_r+\frac{1}{r}w_r+\frac{\partial}{\partial x_3}v_3\right)\\
&= \cos\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}w_r+\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}w_r\right)+\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x_3}v_3,
\end{aligned}$$

c'est -à-dire on a

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla\cdot v)=\cos\theta\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2}-\frac{\cos\theta}{r^2}w_r+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial w_r}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial^2 v_3}{\partial r\partial x_3}.$$

De manière analogue on obtient

$$\begin{aligned}
\bullet\frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla\cdot v) &= \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}w_r+\frac{1}{r}w_r+\frac{\partial}{\partial x_3}v_3\right)\\
&= \sin\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}w_r+\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}w_r\right)+\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x_3}v_3,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire on a

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla\cdot v)=\sin\theta\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2}-\frac{\sin\theta}{r^2}w_r+\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial w_r}{\partial r}+\sin\theta\frac{\partial^2 v_3}{\partial r\partial x_3}.$$

On a en outre

$$\bullet \frac{\partial}{\partial x_3}(\nabla \cdot v) = \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial r} w_r + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{r} w_r\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} v_3$$
$$= \frac{\partial^2 w_r}{\partial x_3 \partial r} + \frac{1}{r}\frac{w_r}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}.$$

Calculons le terme $\omega \times v$

On a

$$\omega \times v = \begin{pmatrix} \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 \\ -\omega_1 v_3 + \omega_3 v_1 \\ \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\omega_3 v_2 \\ \omega_3 v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega(w_r \sin\theta + w_\theta \cos\theta) \\ \omega(w_r \cos\theta - w_\theta \sin\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Maintenant, calculons le terme $\nabla\Phi$

On a

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Phi = \cos\theta \frac{\partial\Phi}{\partial r},$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Phi = \sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial r},$$
$$\frac{\partial}{\partial x_3}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}.$$

De manière analogue, on a pour ∇p

$$\frac{\partial}{\partial x_1} p = \cos\theta \frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} p = \sin\theta \frac{\partial p}{\partial r},$$
$$\frac{\partial}{\partial x_3} p = \frac{\partial p}{\partial x_3}.$$

Maintenant, en multipliant l'équation de la quantité de mouvement par e_r, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\blacklozenge \left(\varrho \partial_t v\right) \cdot e_r &= \varrho \left((\partial_t v_1) \cos\theta + (\partial_t v_2) \sin\theta + \partial_t v_3 \cdot 0 \right) \\
&= \varrho \left(\partial_t (w_r \cos\theta - w_\theta \sin\theta) \cos\theta \right) + \left(\partial_t (w_r \sin\theta + w_\theta \cos\theta) \sin\theta \right) \\
&= \varrho \partial_t w_r .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\blacklozenge \varrho \left((v \cdot \nabla) v \right) \cdot e_r &= \varrho \left(((v \cdot \nabla) v_1) \cos\theta + ((v \cdot \nabla) v_2) \sin\theta + ((v \cdot \nabla) v_3) .0 \right) \\
&= \varrho \left(\left(w_r \frac{\partial}{\partial r} w_r \cos^2\theta - w_\theta \frac{1}{r} w_r \sin\theta \cos\theta + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} w_r \cos^2\theta - w_r \frac{\partial}{\partial r} w_\theta \sin\theta \cos\theta + \right. \right. \\
&- \left. w_\theta \frac{1}{r} w_\theta \cos^2\theta - v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} w_\theta \sin\theta \cos\theta \right) + \left(w_r \frac{\partial}{\partial r} w_r \sin^2\theta + w_\theta \frac{1}{r} w_r \cos\theta \sin\theta + \right. \\
&+ \left. \left. v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} w_r \sin^2\theta + w_r \frac{\partial}{\partial r} w_\theta \cos\theta \sin\theta - w_\theta \frac{1}{r} w_\theta \sin^2\theta + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} w_\theta \cos\theta \sin\theta \right) \right) \\
&= \varrho \left(w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} - w_\theta^2 \frac{1}{r} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} w_r \right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\blacklozenge (\nabla p) \cdot e_r &= \left(\cos^2\theta \frac{\partial p}{\partial r} + \sin^2\theta \frac{\partial p}{\partial r} \right) \\
&= \frac{\partial p}{\partial r}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\blacklozenge - \varrho (\nabla \Phi) \cdot e_r &= -\varrho \left(\cos^2\theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \sin^2\theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \\
&= -\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial r}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\blacklozenge(\eta\Delta v)\cdot e_r &= (\eta\Delta v_1)\cos\theta+(\eta\Delta v_2)\sin\theta+(\eta\Delta v_3)\cdot 0\\
&= \eta\Bigg(\Bigg(\cos\theta\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2}-\sin\theta\frac{\partial^2 w_\theta}{\partial r^2}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial w_r}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial w_\theta}{\partial r}-\frac{\cos\theta}{r^2}w_r+\frac{\sin\theta}{r^2}w_\theta+\cos\theta\frac{\partial^2 w_r}{\partial x_3^2}+\\
&- \sin\theta\frac{\partial^2 w_\theta}{\partial x_3^2}\Bigg)\cos\theta+\Bigg(\sin\theta\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2}+\cos\theta\frac{\partial^2 w_\theta}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial w_r}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial w_\theta}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r^2}w_r+\\
&- \frac{\cos\theta}{r^2}w_\theta+\sin\theta\frac{\partial^2 w_r}{\partial x_3^2}+\cos\theta\frac{\partial^2 w_\theta}{\partial x_3^2}\Bigg)\sin\theta+\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_3}{\partial r}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}\right)\cdot 0\Bigg)\\
&= \eta\left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w_r}{\partial r}-\frac{1}{r^2}w_r+\frac{\partial^2 w_r}{\partial x_3^2}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\blacklozenge\left(\frac{\eta}{3}+\zeta\right)(\nabla(\nabla\cdot v))\cdot e_r &= \left(\frac{\eta}{3}+\zeta\right)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla\cdot v\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\nabla\cdot v\right)\sin\theta+\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\nabla\cdot v\right)\cdot 0\right)\\
&= \left(\frac{\eta}{3}+\zeta\right)\Bigg(\left(\cos\theta\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2}-\frac{\cos\theta}{r^2}w_r+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial w_r}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial^2 v_3}{\partial r\partial x_3}\right)\cos\theta+\\
&+ \left(\sin\theta\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2}-\frac{\sin\theta}{r^2}w_r+\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial w_r}{\partial r}+\sin\theta\frac{\partial^2 v_3}{\partial r\partial x_3}\right)\sin\theta+\\
&+ \left(\frac{\partial^2\omega_r}{\partial x_3\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\omega_r}{\partial x_3}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}\right)\cdot 0\Bigg)\\
&= \left(\frac{\eta}{3}+\zeta\right)\left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}w_r+\frac{1}{r}\frac{\partial w_r}{\partial r}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial r\partial x_3}\right).
\end{aligned}
$$

$$\blacklozenge -2\varrho(\omega\times v)\cdot e_r = -2\varrho(-\omega(w_r\sin\theta+w_\theta\cos\theta)\cos\theta+\omega(w_r\cos\theta-w_\theta\sin\theta)\sin\theta+0)=2\varrho\omega w_\theta.$$

Donc l'équation de quantité de mouvement se réduit à

$$\varrho\partial_t w_r+\varrho\left(w_r\frac{\partial w_r}{\partial r}-w_r^2\frac{1}{r}+v_3\frac{\partial}{\partial x_3}w_r\right)+\frac{\partial p}{\partial r}= \tag{2.6}$$

$$=\eta\left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w_r}{\partial r}-\frac{1}{r^2}w_r+\frac{\partial^2 w_r}{\partial x_3^2}\right)+\left(\frac{\eta}{3}+\zeta\right)\left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}w_r+\frac{1}{r}\frac{\partial w_r}{\partial r}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial r\partial x_3}\right)+2\varrho\omega w_\theta-\varrho\frac{\partial\Phi}{\partial r}.$$

Par la mème mèthode précedante, multipliant l'équation de quantité de mouvement par e_θ, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\blacklozenge\left(\varrho\partial_t v\right)\cdot e_\theta &= \varrho\left((\partial_t v_1)(-\sin\theta)+(\partial_t v_2)\cos\theta+\partial_t v_3\cdot 0\right)\\
&= \varrho\partial_t w_\theta.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\blacklozenge\varrho\left((v\cdot\nabla v\cdot)\right)\cdot e_\theta &= \varrho\left(((v\nabla)v_1)(-\sin\theta)+((v\cdot\nabla)v_2)\cos\theta+((v\cdot\nabla)v_3).0\right)\\
&= \varrho\left(w_r\frac{\partial w_\theta}{\partial r}+w_r\frac{1}{r}w_\theta+v_3\frac{\partial}{\partial x_3}w_\theta\right).
\end{aligned}
$$

$$\blacklozenge(\nabla p)\cdot e_\theta=0.$$

$$\blacklozenge-\varrho(\nabla\Phi)\cdot e_\theta=0.$$

$$
\begin{aligned}
\blacklozenge(\eta\Delta v)\cdot e_\theta &= (\eta\Delta v_1)(-\sin\theta)+(\eta\Delta v_2)\cos\theta+(\eta\Delta v_3)\cdot 0\\
&= \eta\left(\frac{\partial^2 w_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r^2}w_\theta+\frac{\partial^2 w_\theta}{\partial x_3^2}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\blacklozenge\left(\frac{\eta}{3}+\zeta\right)(\nabla(\nabla\cdot v)\cdot e_\theta) &= \left(\frac{\eta}{3}+\zeta\right)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla\cdot v\right)(-\sin\theta)+\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\nabla\cdot v\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\nabla\cdot v\right)\cdot 0\right)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$$\blacklozenge-2\varrho(\omega\times v)\cdot e_\theta=-2\varrho\omega w_r.$$

Donc, l'équation de quantité de mouvement se réduit à

$$
\begin{aligned}
\varrho\partial_t w_\theta+\varrho\left(w_r\frac{\partial w_\theta}{\partial r}+w_r\frac{1}{r}w_\theta+v_3\frac{\partial}{\partial x_3}w_\theta\right)= \\
=\eta\left(\frac{\partial^2 w_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r^2}w_\theta+\frac{\partial^2 w_\theta}{\partial x_3^2}\right)-2\varrho\omega w_r.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

et l'équation (1.8) devient

$$
\begin{aligned}
\varrho\partial_t v_3+\varrho\left(w_r\frac{\partial v_3}{\partial r}+v_3\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)+\frac{\partial p}{\partial x_3}= \\
=\eta\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_3}{\partial r}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}\right)+\left(\frac{\eta}{3}+\zeta\right)\left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial x_3\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w_r}{\partial x_3}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}\right)-\varrho\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}.
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

2.3 Equation du bilan de l'énergie en coordonnées cylindriques

Calculons chaque opérande de l'équation (1.4), en utilisant les relations (2.2), (2.3) et (2.4), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\bullet v\cdot\nabla T &= v_1\frac{\partial T}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial T}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial T}{\partial x_3}\\
&= (w_r\cos\theta-w_\theta\sin\theta)\left(\cos\theta\frac{\partial T}{\partial r}\right)+(w_r\sin\theta+w_\theta\cos\theta)\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\\
&+ v_3\frac{\partial T}{\partial x_3}\\
&= w_r\frac{\partial T}{\partial r}+v_3\frac{\partial T}{\partial x_3}.
\end{aligned}$$

$$\bullet p(\nabla\cdot v)=p\left(\frac{\partial}{\partial r}w_r+\frac{1}{r}w_r+\frac{\partial}{\partial x_3}v_3\right).$$

$$\bullet\nabla\cdot\kappa\nabla T=\kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}\right).$$

$$\begin{aligned}
\bullet\zeta(\nabla\cdot v)^2 &= \zeta\left(\frac{\partial}{\partial r}w_r+\frac{1}{r}w_r+\frac{\partial}{\partial x_3}v_3\right)^2\\
&= \zeta\left(\left(\frac{\partial w_r}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}w_r^2+\frac{2}{r}\frac{\partial w_r}{\partial r}w_r+\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)^2+2\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\frac{\partial w_r}{\partial r}+\frac{2}{r}\frac{\partial v_3}{\partial x_3}w_r\right).
\end{aligned}$$

maintenant, pour calculer le deuxième terme du second membre, nous introduisons l'expréssion suivante

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^{3}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla\cdot v\right)\frac{\partial}{\partial x_k}v_j &= \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla\cdot v\right)^2\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}(\nabla\cdot v)^2-\frac{4}{3}(\nabla\cdot v)\left(2\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+2\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+2\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)\right)+\\
&+ \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right)^2\\
&= -\frac{2}{3}(\nabla\cdot v)^2+2\left(\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)^2\right)+\\
&+ \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)^2.
\end{aligned}$$

où

- $\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2=\left(\cos^2\theta\frac{\partial w_r}{\partial r}-\cos\theta\sin\theta\frac{\partial w_\theta}{\partial r}+\frac{\sin^2\theta}{r}w_r+\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}w_\theta\right)^2.$
- $\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)^2=\left(\sin^2\theta\frac{\partial w_r}{\partial r}+\cos\theta\sin\theta\frac{\partial w_\theta}{\partial r}+\frac{\cos^2\theta}{r}w_r-\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}w_\theta\right)^2.$
- $\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)^2=\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)^2.$
- $\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)^2=\left(2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial w_r}{\partial r}+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{\partial w_\theta}{\partial r}-\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r}w_r+\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{r}w_\theta\right)^2.$
- $\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)^2=\left(\sin\theta\frac{\partial w_r}{\partial x_3}+\cos\theta\frac{\partial w_\theta}{\partial x_3}+\sin\theta\frac{\partial v_3}{\partial r}\right)^2.$
- $\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)^2=\left(\cos\theta\frac{\partial v_3}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial w_r}{\partial x_3}-\sin\theta\frac{\partial w_\theta}{\partial x_3}\right)^2.$

$$\bullet -\frac{2}{3}(\nabla\cdot v)^2 = -\frac{2}{3}\left(\left(\frac{\partial w_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}w_r^2 + \frac{2}{r}\frac{\partial w_r}{\partial r}w_r + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)^2 + 2\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_3}{\partial x_3}w_r\right).$$

nous faisons la somme des termes precédants et nous ajoutons le terme $\zeta(\nabla\cdot v)^2$ nous obtenons

$$\eta\sum_{j,k=1}^{3}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\delta_{jk}\nabla\cdot v\right)\frac{\partial}{\partial x_k}v_j+\zeta(\nabla\cdot v)^2=\eta\left(\left(\frac{\partial w_\theta}{\partial r}\right)^2+w_\theta^2-\frac{\partial w_\theta}{\partial r}w_\theta+\left(\frac{\partial v_3}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial w_r}{\partial x_3}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial w_\theta}{\partial x_3}\right)^2+2\frac{\partial w_r}{\partial x_3}\frac{\partial v_3}{\partial r}\right)+\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)\left(\frac{\partial w_r}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{6r^2-2}{3r^2}\eta+\frac{\zeta}{r^2}\right)w_r^2+\left(\frac{2\zeta}{r}-\frac{4}{3r}\eta\right)\frac{\partial w_r}{\partial r}w_r+$$
$$+\left(2\zeta-\frac{4}{3}\eta\right)\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\frac{\partial w_r}{\partial r}+\left(\frac{2\zeta}{r}-\frac{4}{3r}\eta\right)\frac{\partial v_3}{\partial x_3}w_r.$$

donc, l'équation de bilan de l'énergie devient

$$\varrho c_v\left(\partial_t T + w_r\frac{\partial T}{\partial r} + v_3\frac{\partial T}{\partial x_3}\right) + p\left(\frac{\partial}{\partial r}w_r + \frac{1}{r}w_r + \frac{\partial}{\partial x_3}v_3\right) = \tag{2.9}$$
$$=\kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}\right)+\eta\left(\left(\frac{\partial w_\theta}{\partial r}\right)^2+w_\theta^2-\frac{\partial w_\theta}{\partial r}w_\theta+\left(\frac{\partial v_3}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial w_r}{\partial x_3}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial w_\theta}{\partial x_3}\right)^2+2\frac{\partial w_r}{\partial x_3}\frac{\partial v_3}{\partial r}\right)+\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)\left(\frac{\partial w_r}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{6r^2-2}{3r^2}\eta+\frac{\zeta}{r^2}\right)w_r^2+$$
$$+\left(\frac{2\zeta}{r}-\frac{4}{3r}\eta\right)\frac{\partial w_r}{\partial r}w_r+\left(2\zeta-\frac{4}{3}\eta\right)\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\frac{\partial w_r}{\partial r}+\left(\frac{2\zeta}{r}-\frac{4}{3r}\eta\right)\frac{\partial v_3}{\partial x_3}w_r.$$

2.4 Système d'équations stationnaire

Maintenant nous nous intéressons au système d'équations stationnaire, c'est-à-dire système d'équations qui ne dépend pas de t. Nous supposons donc que

$$\partial_t\varrho=0,\quad \partial_t w_r=0,\quad \partial_t w_\theta=0,\quad \partial_t v_3=0,\quad \partial_t T=0.$$

par simplification, le système d'équation devient

L'équation de continuité

$$\frac{1}{r}\partial_r(r\varrho w_r)+\frac{\partial}{\partial x_3}(\varrho v_3)=0. \tag{2.15}$$

Les équations de la quantité de mouvement

$$\varrho\left(w_r\frac{\partial w_r}{\partial r}-w_\theta^2\frac{1}{r}+v_3\frac{\partial w_r}{\partial x_3}\right)+\frac{\partial p}{\partial r}= \tag{2.16}$$

$$=\eta\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw_r)\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x_3}(rw_r)\right)\right)+\left(\frac{\eta}{3}+\zeta\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw_r)\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x_3}(rv_3)\right)\right)+$$

$$+2\varrho\omega w_\theta-\varrho\frac{\partial\Phi}{\partial r},$$

et

$$\varrho\left(\frac{w_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw_\theta)+\frac{v_3}{r}\frac{\partial}{\partial x_3}(rw_\theta)\right)= \tag{2.17}$$

$$=\eta\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw_\theta)\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x_3}(rw_\theta)\right)\right)-2\varrho\omega w_r,$$

et

$$\varrho\left(w_r\frac{\partial v_3}{\partial r}+v_3\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)+\frac{\partial p}{\partial x_3}= \tag{2.18}$$

$$=\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_3}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(r\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)\right)+\left(\frac{\eta}{3}+\zeta\right)\left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial x_3\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w_r}{\partial x_3}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}\right)-\varrho\frac{\partial\Phi}{\partial x_3},$$

tandis que l'équation de bilan de l'énergie devient

$$\varrho c_v \left(w_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) + p \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x_3} (r v_3) \right) = \tag{2.19}$$

$$= \kappa \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(r \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) \right) + \eta \left(\left(\frac{\partial w_\theta}{\partial r} - w_\theta \right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial r} + \frac{\partial w_r}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_\theta}{\partial x_3} \right)^2 \right) +$$

$$+ \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \left(\left(\frac{\partial w_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2 \right) + \left(\frac{2\zeta}{r} - \frac{4}{3r} \eta \right) \left(\frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) w_r + \left(2\zeta - \frac{4}{3} \eta \right) \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \frac{\partial w_r}{\partial r} +$$

$$+ \left(\frac{6r^2 - 2}{3r^2} \eta + \frac{\zeta}{r^2} \right) w_r^2.$$

Chapitre 3

Propriétés des termes de transport

3.1 Changement de variables, difféomorphisme, transformation de l'intégrale

Pour obtenir des caractérisations significatives des équations (2.15)-(2.19), nous proposons avant tout d'étudier la propriété du terme de "transport" sur les caractéristiques. En effet, le champs de vecteur

$$\begin{pmatrix} w_r \\ v_3 \end{pmatrix}$$

définit sur notre domaine, sous certaines hypothèses, peut définir une familles de courbes (caractéristiques) qui nous permet d'écrire notre domaine dans une autre forme et d'obtenir par cela des propriétés intéressantes.

Pour réaliser cette étude, il nous convient de clarifier avant tout la nature du changement de coordonnées que nous allons introduire et l'idée générale des changements de coordonnées qui seront des difféomorphismes. Nous commençons par des exemples élémentaires de changement de coordonnées et leur propriété et ensuite nous allons traiter une certaine classe de difféomorphismes ; dans le cadre de cette catégorie nous allons définir le changement de coordonnées de notre domaine et en tirer des conséquences utiles.

EXEMPLE 1.

Soient $a, b, A, B \in \mathbb{R}$ tels que $a < b, A < B$. On considère le domaine

$$D_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / A < x_1 < B;\ a < x_2 < b\}.$$

Sur ce domaine D_1 on considère le champs de vecteur constant

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si on considère l'équation des caractéristiques relative à ce champs de vecteur, on a

$$\frac{d}{ds}\overrightarrow{\gamma}(s) = \overrightarrow{v}(\overrightarrow{\gamma}(s)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

qui se réduit à

$$\frac{d}{ds}\gamma_1(s) = 0, \frac{d}{ds}\gamma_2(s) = 1,$$

si on prend $\gamma_1(0) = A + r, \qquad 0 < r < B - A, \qquad \gamma_2(0) = a$

on a

$$\gamma_1(s) \equiv \gamma_{r,1}(s) = A + r,$$

$$\gamma_2(s) \equiv \gamma_{r,2}(s) = a + s,$$

Si on définit l'application T de

$$\Gamma = \{(r, s) \in \mathbb{R}^2 / 0 < r < B - A, 0 < s < b - a\}$$

sur D_1 par

$$T(r, s) = (\gamma_{r,1}(s), \gamma_{r,2}(s)) = (A + r, a + s),$$

on a un changement de coordonnées (qui n'est qu'une translation), qui est un difféomorphisme(presque trivial).

Maintenant on considère une fonction $\varphi(x_1, x_2)$ de classe $C^1(D_1)$ et on définit une fonction

$$\psi(x_1, x_2) = \overrightarrow{v} \cdot \nabla\varphi.$$

En réalité, dans ce cas, comme on le voit immédiatemment la fonction $\psi(x_1, x_2)$ n'est autre que la dérivée partielle de φ par rapport à x_2, c'est-à-dire

$$\psi(x_1, x_2) = \partial_{x_2}\varphi(x_1, x_2).$$

Or, comme on a

$$\frac{d}{ds} = \overrightarrow{v} \cdot \nabla,$$

et

$$J = \det \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(r, s)} = 1,$$

en posant

$$\widetilde{\varphi}(r, s) = \varphi(x_1(r, s), x_2(r, s)), \qquad \widetilde{\psi}(r, s) = \psi(x_1(r, s), x_2(r, s)),$$

avec

$$x_1(r, s) = A + r, \qquad x_2(r, s) = a + s,$$

on a formellement

$$\begin{aligned}
\int_{D_1} \psi(x_1,x_2)dx_1dx_2 &= \int_\Gamma \widetilde{\psi}(r,s)|J|drds \\
&= \int_\Gamma \frac{d}{ds}\widetilde{\varphi}(r,s)drds \\
&= \int_0^{b-a}\int_0^{B-A} \frac{d}{ds}\widetilde{\varphi}(r,s)drds \\
&= \int_0^{B-A}\int_0^{b-a} \frac{d}{ds}\widetilde{\varphi}(r,s)dsdr \\
&= \int_0^{B-A} (\widetilde{\varphi}(r,b-a)-\widetilde{\varphi}(r,0))dr \\
&= \int_0^{B-A} (\varphi(A+r,b)-\varphi(A+r,a))dr \\
&= \int_A^B (\varphi(x_1,b)-\varphi(x_1,a))dx_1.
\end{aligned}$$

Il est clair que dans cet exemple la transformation de l'intégrale ne nous donne aucun nouveau résultat significatif; cette transformation n'est autre qu'une transformation formelle d'un calcul bien connu.

Mais cet exemple servira à faciliter la compréhension des exemples suivants.

EXEMPLE 2.

Considérons le domaine

$$D_2 = \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x_1^2 + x_2^2 < R^2\right\}.$$

Comme il est bien connu, si on pose

$$\Gamma = \{(r,s)\in\mathbb{R}^2 \,|0 < r < R, 0 \le s < 2r\pi\},$$

et si on définit l'application $T:\Gamma\to D_2$ par

$$T(r,s) = (x_1,x_2), \qquad x_1 = r\cos\left(\frac{s}{r}\right), \quad x_2 = r\sin\left(\frac{s}{r}\right),$$

alors on peut définir l'inverse T^{-1} de l'application T, qui sera définie explicitement par

$$T^{-1}(x_1, x_2) = (r, s), \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

$$\begin{aligned}
&s = r\operatorname{arctg}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) && \text{si } x_1 > 0,\ x_2 \geq 0\\
&s = r\frac{\pi}{2} && \text{si } x_1 = 0,\ x_2 > 0\\
&s = r\operatorname{arctg}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \pi && \text{si } x_1 < 0\\
&s = r\frac{\pi}{2} && \text{si } x_1 = 0,\ x_2 < 0\\
&s = r\operatorname{arctg}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + 2\pi && \text{si } x_1 > 0,\ x_2 < 0
\end{aligned}$$

Il est clair que T et T^{-1} sont différentiables dans Γ et D_2 respectivement.

Si nous considérons le champ de vecteur

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{pmatrix},$$

l'équation

$$\frac{d}{ds}\gamma(s) = \vec{v}(\gamma(s))$$

avec la condition initiale

$$\gamma(0) = (r, 0),$$

nous donne la famille de courbes $\gamma = \gamma_r$, qui constitue la base de coordonnées dans Γ, c'est-à-dire

$$\gamma_{r,1}(s) = x_1(r, s), \qquad \gamma_{r,2}(s) = x_2(r, s),$$

ou

$$T(r, s) = (x_1, x_2) = (\gamma_{r,1}(s), \gamma_{r,2}(s)) = \left(r\cos\left(\frac{s}{r}\right), r\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right).$$

Maintenant nous déterminons le jacobien de cette transformation. Comme

$$\begin{aligned}
J(T) &= \left|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(r,s)}\right| \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r}\left(r\cos\left(\frac{s}{r}\right)\right) & \frac{\partial}{\partial s}\left(r\cos\left(\frac{s}{r}\right)\right) \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right) & \frac{\partial}{\partial s}\left(r\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos\left(\frac{s}{r}\right)+\left(\frac{s}{r}\right)\left(\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right) & -\sin\left(\frac{s}{r}\right) \\ \sin\left(\frac{s}{r}\right)-\left(\frac{s}{r}\right)\left(\cos\left(\frac{s}{r}\right)\right) & \cos\left(\frac{s}{r}\right) \end{vmatrix} \\
&= \cos^2\left(\frac{s}{r}\right)+\left(\frac{s}{r}\right)\cos\left(\frac{s}{r}\right)\sin\left(\frac{s}{r}\right)+\sin^2\left(\frac{s}{r}\right)-\left(\frac{s}{r}\right)\cos\left(\frac{s}{r}\right)\sin\left(\frac{s}{r}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

on a aussi

$$\frac{\partial\gamma_r(s)}{\partial s}=\begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{s}{r}\right) \\ \cos\left(\frac{s}{r}\right) \end{pmatrix},$$

donc, on voit que

$$\left|\frac{\partial\gamma_r(s)}{\partial s}\right|=1.$$

Maintenans on considère une fonction $\varphi(x_1,x_2)$ de classe $C^1(D_2)$ et on définit une fonction

$$\psi(x_1,x_2)=\overrightarrow{v}\cdot\nabla\varphi$$

donc

$$\psi(x_1,x_2)=-\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x_1,x_2)+\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi(x_1,x_2)$$

alors

$$\begin{aligned}
\int_{D_2}\psi dx_1dx_2 &= \int_{\Gamma}\psi(\gamma_r(s))\cdot|J(\gamma_r(s))|drds \\
&= \int_0^{2\pi r}\int_0^R \psi(\gamma_r(s))drds.
\end{aligned}$$

Or, en posant

$$\widetilde{\varphi}(r,s) = \varphi(\gamma_r(s)), \qquad \widetilde{\psi}(r,s) = \psi(\gamma_r(s)),$$

on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x_1,x_2) &= \frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial s}{\partial x_1}\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial s} \\
&= \cos\left(\frac{s}{r}\right)\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial r} - \sin\left(\frac{s}{r}\right)\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial s}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi(x_1,x_2) &= \frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial s}{\partial x_2}\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial s} \\
&= \sin\left(\frac{s}{r}\right)\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial r} + \cos\left(\frac{s}{r}\right)\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial s}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}(r,s) &= -\sin\left(\frac{s}{r}\right)\left(\cos\left(\frac{s}{r}\right)\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial r} - \sin\left(\frac{s}{r}\right)\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial s}\right) + \cos\left(\frac{s}{r}\right)\left(\sin\left(\frac{s}{r}\right)\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial r} + \cos\left(\frac{s}{r}\right)\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial s}\right) \\
&= \sin^2\left(\frac{s}{r}\right)\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial s} + \cos^2\left(\frac{s}{r}\right)\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial s} \\
&= \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial s}.
\end{aligned}$$

Il en resulte que

$$\begin{aligned}
\int_{D_2} \psi\, dx_1 dx_2 &= \int_0^R \int_0^{2\pi r} \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial s}(r,s)\, ds dr \\
&= \int_0^R \left[\widetilde{\varphi}(r,s)\right]_0^{2\pi r} dr.
\end{aligned}$$

Comme $\gamma_r(0) = \gamma_r(2\pi r)$ et donc $\widetilde{\varphi}(r,0) = \widetilde{\varphi}(r, 2\pi r)$, on a

$$\int_{D_2} \psi\, dx_1 dx_2 = \int_0^R 0 dr = 0.$$

EXEMPLE 3.

Soit D un ensemble ouvert simplement connexe du plan cartésien $\mathbb{R}^2$. Nous supposons que D est l'image d'une application bijective T de

$$\Gamma = \left\{(r,s) \in \mathbb{R}^2 | r_0 < r < r_1, s_0 < s < s_1(r)\right\}, \qquad 0 \leq r_0 < r_1, 0 \leq s_0 < s_1.$$

Donc pour chaque point (x_1, x_2) du domaine D il existe un point (r, s) du domaine Γ et un seul tel que

$$(x_1, x_2) = T(r,s).$$

On a évidemmemt

$$D = T(\Gamma), \qquad \Gamma = T^{-1}(D).$$

On suppose que

$$T \in C^1(D), \qquad T^{-1} \in C^1(\Gamma).$$

Donc l'application T est un difféomorphisme de Γ à D. Pour les détail sur les difféomorphismes, on peut consulter par exemple [6].

Nous définissons la famille de courbes $\gamma = \gamma_r(s)$ par les relations

$$\gamma_r(s) = T(r,s).$$

Donc, si on écrit

$$T(r,s) = (x_1(r,s), x_2(r,s)), \gamma_r(s) = (\gamma_{r1}(s), \gamma_{r2}(s)),$$

on a

$$x_1(r,s) = \gamma_{r1}(s), \qquad x_2(r,s) = \gamma_{r2}(s).$$

On a donc

$$\frac{\partial \gamma_r(s)}{\partial s} = \left(\frac{\partial \gamma_{1r}(s)}{\partial s}, \frac{\partial \gamma_{2r}(s)}{\partial s}\right),$$

$$\left|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(r,s)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\gamma_{r1}(s)}{\partial r} & \dfrac{\partial\gamma_{r1}(s)}{\partial s} \\ \dfrac{\partial\gamma_{r2}(s)}{\partial r} & \dfrac{\partial\gamma_{r2}(s)}{\partial s} \end{vmatrix} \equiv J(\gamma_r(s)).$$

On pose

$$v_1(x_1,x_2) = v_1(\gamma_r(s)) = \frac{\partial\gamma_{r1}(s)}{\partial s}, \qquad v_2(x_1,x_2) = v_2(\gamma_r(s)) = \frac{\partial\gamma_{r2}(s)}{\partial s},$$

de sorte que

$$\frac{\partial\gamma_r(s)}{\partial s} = (v_1(x_1,x_2), v_2(x_1,x_2)) = (v_1(\gamma_r(s)), v_2(\gamma_r(s))).$$

Considérons maintenant une fonction $\varphi \in C^1(D)$ et la fonction

$$\psi(x_1,x_2) = v_1(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x_1,x_2) + v_2(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi(x_1,x_2).$$

D'après la définition de $v_1(x_1,x_2)$ et $v_2(x_1,x_2)$ on a

$$\psi(x_1,x_2) = \psi(\gamma_r(s)) = \frac{d}{ds}\varphi(\gamma_r(s))$$

(considérons r dans la dérivée comme un paramètre), si on pose

$$\widetilde{\psi}(r,s) = \psi(\gamma_r(s)), \qquad \widetilde{\varphi}(r,s) = \varphi(\gamma_r(s)),$$

on a par le changement de variables dans l'intégrale double

$$\begin{aligned} \int_D \psi(x_1,x_2)dx_1dx_2 &= \int_\Gamma \widetilde{\psi}(r,s)|J(\gamma_r(s))|drds \\ &= \int_{r_0}^{r_1}\int_{s_0}^{s_1(r)} \frac{d}{ds}\varphi(\gamma_r(s))|J(\gamma_r(s))|dsdr. \end{aligned}$$

Il est clair que, si pour chaque $r \in]r_0, r_1[$ $|J(\gamma_r(s))|$ ne dépend pas de s, on a

$$\begin{aligned} \int_D \psi(x_1,x_2)dx_1dx_2 &= \int_{r_0}^{r_1}\int_{s_0}^{s_1(r)} \frac{d}{ds}\varphi(\gamma_r(s))|J(\gamma_r(s))|dsdr \\ &= \int_{r_0}^{r_1} (\varphi(\gamma_r(s_1(r))) - \varphi(\gamma_r(s_0)))|J(\gamma_r(\cdot))|dr. \end{aligned}$$

En outre, si

$$\varphi(\gamma_r(s_1(r))) = \varphi(\gamma_r(s_0)) \quad r \in]r_0, r_1[,$$

alors on a

$$\begin{aligned}\int_D \psi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \int_{r_0}^{r_1} \int_{s_0}^{s_1(r)} \frac{d}{ds}\varphi(\gamma_r(s))|J(\gamma_r(s))| ds dr \\ &= \int_{r_0}^{r_1} (\varphi(\gamma_r(s_1(r))) - \varphi(\gamma_r(s_0)))|J(\gamma_r(\cdot))| dr \\ &= 0.\end{aligned}$$

Avant de citer le quatrième exemple qui s'applique bien à notre cas, nous citons une caractérisation importante de la condition pour que pour chaque $r \in]r_0, r_1[$ $|J(\gamma_r(s))|$ ne dépende pas de s.

Proposition 3.1. *Si*

$$\nabla \cdot v = 0 \qquad dans \qquad D,$$

alors le jacobien $J(\gamma_r(s))$ est constant sur chaque courbe γ_r.

Démonstration. Nous désignons par T le difféomorphisme de Γ sur D définit par la relation

$$\gamma_r(s) = T(r, s) = (x_1, x_2) \in D.$$

Soit $(\overline{x_1}, \overline{x_2}) = \gamma_{\overline{r}}(\overline{s})$ un point appartenant à D. On considère un voisinage U de $(\overline{x_1}, \overline{x_2})$ et à chaque point $(x_1, x_2) \in U$ on associe l'expression $\gamma_r(s)$, c'est-à-dire

$$(x_1, x_2) = \gamma_r(s).$$

On pose

$$U' = T^{-1}(U),$$

c'est-à-dire

$$U' = \{(r,s) \in \Gamma \mid \gamma_r(s) \in U\}.$$

On considère la translation de U' donnée par

$$U'_0 = \{(r,s') \in \Gamma \mid (r,s'+\overline{s}) \in U'\} \equiv \{(r,s') = (r,s-\overline{s}) \in \Gamma \mid (r,s) \in U'\}.$$

En général pour $\gamma_r(s) \in U$, le point $\gamma_r(s-\overline{s})$ n'est pas nécessairement défini, c'est-à-dire pour $(r,s) \in U'$, le point $(r,s-\overline{s})$ n'appartient pas nécessairement à $\Gamma = T^{-1}(D)$. Mais, par hypothèse, $\gamma_{\overline{r}}(0)$ est bien défini et appartient à D et, dans tous les cas, U'_0 est un voisinage de $(\overline{r},0)$. Pour notre raisonnement il suffit de considérer un voisinage U de $(\overline{x_1},\overline{x_2}) = \gamma_{\overline{r}}(\overline{s})$; par exemple le voisinage de $(\overline{x_1},\overline{x_2}) = \gamma_{\overline{r}}(\overline{s})$

$$T(\{(r,s) \in \Gamma \mid (r,s-\overline{s}) \in U'_0\}).$$

Pour cette raison, pour simplifier l'exposé, nous supposons que

$$U' = \{(r,s) \in \Gamma \mid (r,s-\overline{s}) \in U'_0\}, \qquad U = T(U').$$

Enfin on pose

$$U_0 = T(U'_0). \tag{3.1}$$

On voit aisément que U_0 est un voisinage de $\gamma_{\overline{r}}(0)$ dans D, caractérisé comme l'ensemble des points (x_1,x_2) tels que

$$(x_1,x_2) = \gamma_r(s-\overline{s}), \quad (s,r) \in U'.$$

Si nous rappelons la construction des ensembles U', U'_0, U_0, nous pouvons sans difficulté nous convaincre que $\gamma_r(s) \mapsto \gamma_r(s-\overline{s})$ est une bijection de U sur U_0 et définit un difféomorphisme. Donc, en posant

$$(\xi_1,\xi_2) = \gamma_r(s-\overline{s}),$$

nous considérons la matrice

$$\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(\xi_1,\xi_2)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}.$$

Comme on le connaît bien dans le cadre des relation entre les coordonnées lagrangiennes et les coordonnées eulériennes (voir le lemme (3.1)), la condition

$$\nabla \cdot v = 0,$$

implique que

$$\det \frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(\xi_1,\xi_2)} = 1.$$

Considérons maintenant U_0 définit par(3.1), qui est un voisinage de

$$\gamma_{\overline{r}}(0) \equiv (\xi_1^0, \xi_2^0).$$

Pour chaque point (ξ_1,ξ_2) de U_0 nous posons $(r,s') = T^{-1}(\xi_1,\xi_2)$, c'est-à-dire on a

$$(\xi_1,\xi_2) = \gamma_r(s').$$

Il est clair que

$$\det \frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(r,s')}$$

est bien défini.

On rapelle que U' n'est autre qu'une translation de U_0', de sorte que l'on a

$$\det \frac{\partial(r,s')}{\partial(r,s)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Par la définition des ensembles U, U', U_0, U_0', on a

$$\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(r,s)} = \frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(\xi_1,\xi_2)} \frac{\partial(\xi_1,\xi_2)}{\partial(r,s')} \frac{\partial(r,s')}{\partial(r,s)}.$$

De cette relations et des relations démontrées ci-dessus on déduit que

$$\begin{aligned}
\det\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(r,s)} &= \det\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(\xi_1,\xi_2)}\det\frac{\partial(\xi_1,\xi_2)}{\partial(r,s')}\det\frac{\partial(r,s')}{\partial(r,s)}\\
&= 1\cdot\det\frac{\partial(\xi_1,\xi_2)}{\partial(r,s')}\cdot 1\\
&= \det\frac{\partial(\xi_1,\xi_2)}{\partial(r,s')}. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Comme sur les courbes $\gamma_{\overline{r}}(\cdot)$ on peut choisir quelconque s appartenant au domaine de définition de $\gamma_{\overline{r}}(\cdot)$, la relation (3.2) implique que pour tout point sur la courbe $\gamma_{\overline{r}}$, on a

$$\det\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(r,s)} = \det\frac{\partial(\xi_1,\xi_2)}{\partial(r,s')}\Big|_{r=\overline{r},s'=0} = \det\frac{\partial(\xi_1,\xi_2)}{\partial(r,s')}\Big|_{(\xi_1,\xi_2)} = \gamma_{\overline{r}}(0),$$

ce qui achève la démonstration de la proposition. □

Lemme 3.1. *Si* $\nabla\cdot v=0$, *alors* $\det\dfrac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(\xi_1,\xi_2)}=1.$

Démonstration. Soit $(\xi_1,\xi_2)\in U_0$ et soit $(x_1,x_2)\in U$. En rappelant comment on a défini U_0, on peut définir (x_1,x_2) comme fonction de $(\xi_1,\xi_2)\in U_0$ de la manière suivante :

pour chaque $(\xi_1,\xi_2)\in U_0$ il existe $(r,s')\in U_0'$ tel que

$$(\xi_1,\xi_2)=\gamma_r(s')=(\gamma_{r1}(s'),\gamma_{r2}(s'));$$

on pose

$$(x_1,x_2)=\gamma_r(s'+\overline{s})=(\gamma_{r1}(s'+\overline{s}),\gamma_{r2}(s'+\overline{s})),$$

de sorte que, pour $\overline{s}$ fixé, (x_1,x_2) peut être considéré comme fonction de $(\xi_1,\xi_2)\in U_0$. On peut exprimer $\gamma_r(s'+\overline{s})=(\gamma_{r1}(s'+\overline{s}),\gamma_{r2}(s'+\overline{s}))$ dans la forme

$$(x_1,x_2)=\gamma_r(s'+t)\big|_{t=\overline{s}}=(\gamma_{r1}(s'+t),\gamma_{r2}(s'+t)\big|_{t=\overline{s}}.$$

Or, comme nous l'avons remarqué en haut, (r,s') est déterminé par $(\xi_1,\xi_2)\in U_0$, on peut considérer $\gamma_r(s'+t)$ comme fonction de ξ et de t, que nous désignons par $\gamma(\xi,t)$, c'est-à-dire

$$\gamma(\xi,t)=\gamma_r(s'+t)\equiv(x_1(\xi,t),x_1(\xi,t)).$$

Posons

$$U_t=\gamma(U_0,t)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|\,(x_1,x_2)=\gamma(\xi,t),\,\xi\in U_0\}.$$

On a évidemment $U=U_{\bar{s}}$.

Désignons par ψ_t le difféomorphisme de U_0 sur U_t définit par la relation

$$(x_1,x_2)=\gamma(\xi,t).$$

On pose

$$\Psi=\Psi(\xi,t)=\frac{\partial}{\partial\xi_j}\psi=\left(\frac{\partial(x_i(\xi,t)}{\partial\xi_j}\right)=\frac{\partial(x_1(\xi,t),x_2(\xi,t))}{\partial(\xi_1,\xi_2)},$$

supposons que cette application est un difféomorphisme, c'est-à-dire une application bijective telle que Ψ_t ainsi que Ψ_t^{-1} soit de classe C^1.

En faisant la dérivée de Ψ par rapport à t, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\xi,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial(x_i(\xi,t))}{\partial(\xi_j)}\right)=\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)=\frac{\partial v_i}{\partial\xi_j},\qquad i,j=1,2$$

On a encore

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\xi,t)=\frac{\partial v_i}{\partial\xi_j}=\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\xi_j},\qquad i,j=1,2.$$

Donc, si on introduit la matrice

$$G=\frac{\partial v_i}{\partial x_j},\qquad i,j=1,2,$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Psi &= G\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(\xi_1,\xi_2)}\\ &= G\Psi.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Maintenant, on va considérer la dérivée par rapport à t du jacobien $J = \det\Psi$(en considérant ce dernier en coordonnées lagrangiennes).

On rappelle que

$$\begin{aligned}
\det\Psi &= \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1(\xi,t)}{\partial\xi_1} & \dfrac{\partial x_1(\xi,t)}{\partial\xi_2} \\ \dfrac{\partial x_2(\xi,t)}{\partial\xi_1} & \dfrac{\partial x_2(\xi,t)}{\partial\xi_2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial x_1(\xi,t)}{\partial\xi_1}\frac{\partial x_2(\xi,t)}{\partial\xi_2} - \frac{\partial x_2(\xi,t)}{\partial\xi_1}\frac{\partial x_1(\xi,t)}{\partial\xi_2}
\end{aligned}$$

Il en resulte que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}J &= \frac{\partial}{\partial t}\det\Psi \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_1}{\partial\xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial\xi_2}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_2}{\partial\xi_1}\frac{\partial x_1}{\partial\xi_2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_1}{\partial\xi_1}\right)\frac{\partial x_2}{\partial\xi_2} + \frac{\partial x_1}{\partial\xi_1}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_2}{\partial\xi_2}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_2}{\partial\xi_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial\xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial\xi_1}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_1}{\partial\xi_2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)\frac{\partial x_2}{\partial\xi_2} + \frac{\partial x_1}{\partial\xi_1}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)\frac{\partial x_1}{\partial\xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial\xi_1}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right) \\
&= \frac{\partial v_1}{\partial\xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial\xi_2} + \frac{\partial x_1}{\partial\xi_1}\frac{\partial v_2}{\partial\xi_2} - \frac{\partial v_2}{\partial\xi_1}\frac{\partial x_1}{\partial\xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial\xi_1}\frac{\partial v_1}{\partial\xi_2} \\
&= \left(\frac{\partial x_1}{\partial\xi_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial\xi_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial x_2}{\partial\xi_2} + \frac{\partial x_1}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial\xi_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial\xi_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) - \\
&- \left(\frac{\partial x_1}{\partial\xi_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial\xi_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)\frac{\partial x_1}{\partial\xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial\xi_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial\xi_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) \\
&= \det\left(\frac{\partial x_1, x_2}{\partial\xi_1,\xi_2}\right)\nabla\cdot v \\
&= J\,\nabla\cdot v,
\end{aligned}$$

et comme $\nabla\cdot v = 0$ par hypotèse, on a $\dfrac{\partial}{\partial t}J = 0$.

Donc

$$J = \det\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(\xi_1,\xi_2)} = \text{constant}.$$

On rappelle que lorsque $t = 0$ alors $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2$, donc on a

$$\det \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)}\Big|_{t=0} = \det \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} = 1;$$

par conséquent

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} J = 0 \\ J(t)\big|_{t=0} \end{cases} \qquad \text{implique que} \qquad J = \det \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} = 1.$$

ce qui achève la démonstration . □

EXEMPLE 4.

Nous considérons un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ (on suppose que sa frontière ∂D, si elle n'est pas vide, est de classe C^1). Nous supposons que sur D un champ de vecteur v de classe C^1 est donné. Désignons, pour $(x_1, x_2) \in D$, par $\gamma(x_1, x_2)$ la courbe définie par la solution du problème de Cauchy

$$\frac{d}{ds}\gamma(s) = v(\gamma(s)),$$

$$\gamma(0) = (x_1, x_2).$$

Nous supposons que $\nabla \cdot v = 0$ et que

$$v(x_1, x_2) \neq 0 \qquad \forall (x_1, x_2) \in D \backslash \{(\overline{x}_1^0, \overline{x}_2^0)\}, \quad (\overline{x}_1^0, \overline{x}_2^0) \in D$$

et qu'il existe une courbe λ de classe C^1 contenue dans D et représentée par

$$\lambda = \{(x_1, x_2) = (\lambda_1(r), \lambda_2(r)) \,|\, 0 < r < R_\lambda\},$$

qui vérifie les conditions

i) $\sqrt{\lambda_1'(r)^2 + \lambda_2'(r)^2} = 1 \qquad \forall r \in]0, R_\lambda[,$

ii) $v_1(\lambda(s))\lambda_2'(r) \neq v_2(\lambda(s))\lambda_1'(r) \qquad \forall r \in]0, R_\lambda[,$

iii) $\lambda \cap \gamma_{(x_1,x_2)}$ a un point et un seul pour tout $(x_1, x_2) \in D$ sauf pour $(\overline{x}_1^0, \overline{x}_2^0)$.

La condition **iii)** nous permet de définir la famille de courbes

$$\{\gamma_{\lambda_{(r)}}(s)\}$$

de telle sorte que, en écrivant

$$\gamma_r(s) = \gamma_{\lambda_{(r)}}(s),$$

on peut définir le difféomorphisme T par la relation

$$T(r,s) = \gamma_r(s) \equiv (x_1, x_2) \in D.$$

Pour ce changement de variable de $(x_1, x_2) \in D$ à $(r,s) \in \Gamma$(Γ sera définit de manière naturelle), si on définit les courbes $\gamma_r(s)$ par $\frac{d}{ds}\gamma_r(s) = v(\gamma_r(s))$, alors le jacobien $J(\gamma_r(s))$ ne dépend pas de s, et d'après la proposition (3.1) on peut conclure que

$$J(\gamma_r(s)) = \text{constant}.$$

Maintenant on considère une fonction $\varphi(x_1, x_2)$ de classe $C^1(D)$, et on définit une fonction $\psi(x_1, x_2) = \overrightarrow{v} \cdot \nabla\varphi$.

Et par la même manière que nous avons vu dans (3.1), on déduit que

$$\int_D \psi(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_D \overrightarrow{v} \cdot \nabla\varphi dx_1, dx_2 = 0.$$

3.2 Applications aux termes de transport du système d'équations

Notre champs de vecteur est

$$\tilde{v} = \begin{pmatrix} r\varrho w_r \\ r\varrho v_3 \end{pmatrix}.$$

D'après (2.15) on a

$$\nabla \cdot \tilde{v} = \frac{\partial}{\partial r}(r\varrho w_r) + \frac{\partial}{\partial x_3}(r\varrho v_3) = 0.$$

En multipliant les équations (2.16), (2.17), (2.18) et (2.19) par r puis on fait l'integrale sur D de chaque terme de ces équations, on obtient

le premier membre de (2.16) devient

$$\begin{aligned}
\int_D \left(r\varrho w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} - \varrho w_\theta^2 + r\varrho v_3 \frac{\partial w_r}{\partial x_3} \right) dr dx_3 &= -\int_D w_r \left(\frac{\partial}{\partial r}(r\varrho w_r) + \frac{\partial}{\partial x_3}(r\varrho v_3) \right) dr dx_3 - \int_D \varrho w_\theta^2 dr dx_3 \\
&= -\int_D w_r \nabla \cdot v dr dx_3 - \int_D \varrho w_\theta^2 dr dx_3 \\
&= -\int_D \varrho w_\theta^2 dr dx_3.
\end{aligned}$$

le premier membre de (2.17) devient

$$\begin{aligned}
\int_D \left(\varrho w_r \frac{\partial}{\partial r}(r w_\theta) + \varrho v_3 \frac{\partial}{\partial x_3}(r w_\theta) \right) dr dx_3 &= \int_D \left(r\varrho w_r \frac{\partial w_\theta}{\partial r} + \varrho w_r w_\theta + r\varrho v_3 \frac{\partial w_\theta}{\partial x_3} + \varrho v_3 w_\theta \right) dr dx_3 \\
&= -\int_D w_\theta \left(\frac{\partial}{\partial r}(r\varrho w_r) + \frac{\partial}{\partial x_3}(r\varrho v_3) \right) + \int_D \varrho w_\theta (w_r + v_3) dr dx_3 \\
&= -\int_D w_\theta \nabla \cdot v dr dx_3 + \int_D \varrho w_\theta (w_r + v_3) dr dx_3 \\
&= \int_D \varrho w_\theta (w_r + v_3) dr dx_3.
\end{aligned}$$

le premier membre de (2.18) devient

$$\begin{aligned}
\int_D \left(r\varrho w_r \frac{\partial v_3}{\partial r} + r\varrho v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) dr dx_3 &= -\int_D \left(v_3 \frac{\partial}{\partial r}(r\varrho w_r) + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3}(r\varrho v_3) \right) dr dx_3 \\
&= -\int_D v_3 \nabla \cdot v dr dx_3 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

et le premier membre de (2.19) devient

$$\begin{aligned} c_v \int_D \left(r\varrho w_r \frac{\partial T}{\partial r} + r\varrho v_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) dr dx_3 &= -c_v \int_D \left(T \frac{\partial}{\partial r}(r\varrho w_r) + T \frac{\partial}{\partial x_3}(r\varrho v_3) \right) dr dx_3 \\ &= -c_v \int_D T \nabla \cdot v dr dx_3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Chapitre 4

Quelques caractérisations du réchauffement et du refroidissement dans la circulation générale

Si on néglige le second membre de (2.19), on a

$$\varrho c_v \left(w_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) + R_1 \varrho T \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r w_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x_3}(r v_3) \right) = 0,$$

en multipliant par r on aura

$$c_v r \varrho \left(w_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) + R_1 \varrho T \left(\frac{\partial}{\partial r}(r w_r) + \frac{\partial}{\partial x_3}(r v_3) \right) = 0,$$

en utilisant l'équation de continuité, on obtient

$$c_v r \varrho \left(w_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) - R_1 T r \left(w_r \frac{\partial \varrho}{\partial r} + v_3 \frac{\partial \varrho}{\partial x_3} \right) = 0.$$

Maintenant au second membre, au lieu de 0 on considère le terme de la source de la chaleur E et la dissipation de la chaleur $-\alpha T$; pour la nature physique du problème, E devrait représenter le réchauffememt par la radiation du soleil et être concentré dans les zones tropicales, d'autre part, dans ce contexte même la dissipation devrait être comme celle due à l'émission de la radiation de la part de l'air, qui dépend directement de la température T ; ici nous adoptons une approximation linéaire de cet effet de refroidissement représenté par

$$-\alpha T \qquad (\alpha > 0,\ \text{constant})$$

Ainsi nous avons l'équation

$$c_v r\varrho\left(w_r\frac{\partial T}{\partial r}+v_3\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)-R_1 Tr\left(w_r\frac{\partial \varrho}{\partial r}+v_3\frac{\partial \varrho}{\partial x_3}\right)=E-\alpha T. \tag{4.1}$$

De l'équation (4.1) nous faisons deux caractérisations.

4.1 Première caractérisation

La première caractérisation s'obtient, en transformant (4.1) dans la forme

$$c_v r\varrho\left(w_r\frac{\partial T}{\partial r}+v_3\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)-R_1 r\varrho\left(w_r\frac{\partial T}{\partial r}+v_3\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)= \tag{4.2}$$

$$=-R_1 r\varrho^2\left(w_r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{T}{\varrho}\right)+v_3\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{T}{\varrho}\right)\right)+E-\alpha T.$$

Cette équation peut être réécrite sur chaque caractéristique $\gamma(s)$ définie par l'équation

$$\frac{d}{ds}\gamma(s)=\tilde{v}(\gamma(s))$$

dans la forme

$$(c_v-R_1)\frac{d}{ds}T=-R_1\varrho\frac{d}{ds}\left(\frac{T}{\varrho}\right)+E-\alpha T. \tag{4.3}$$

En intégrant l'équation (4.3) le long de la courbe γ et en tenant compte que γ est une courbe fermée, on a

$$-\int_\gamma R_1\varrho\frac{d}{ds}\left(\frac{T}{\varrho}\right)ds+\int_\gamma E ds-\alpha\int_\gamma T ds=0. \tag{4.4}$$

ou

$$\frac{d}{ds'}\log\frac{T^{c_v}}{\varrho^{R_1}} = \frac{E}{\varrho T} - \alpha\frac{1}{\varrho}. \tag{4.7}$$

Cette équation peut être interprétée comme la loi adiabatique avec le réchauffement E et la dissipation (radiative)$-\alpha T$. En intégrant sur la courbe $\beta(s')$, on a

$$\int_{\beta}\left(\frac{E}{\varrho T} - \alpha\frac{1}{T}\right)ds' = 0. \tag{4.8}$$

La différence entre (4.4) et (4.8) est due au fait que dans (4.4) les fonctions intégrandes sont considérées comme fonctions de $\gamma(s)$, tandis que dans (4.8) les fonctions intégrandes sont considérées coome fonctions de $\beta(s')$, même si $\gamma(s)$ et $\beta(s')$ désignent les mêmes lieux géométriques dans le domaine. Si on considère les fonctions intégrandes directement comme fonctions de s dans (4.4) et comme fonctions de s' dans (4.8), cette différence peut être considérée comme consequence du fait que $ds \neq ds'$.

Perspectives

Dans la section 3.2 nous avons remarqué certaines applications des propriétés des termes de transport à nos équations de la circulation générale de l'atmosphère. Les égalités intégrales obtenues pourront être utilisées pour le système complet d'équations pour la circulation générale de l'atmosphère. En effet, les équations (2.16)-(2.19) sont du type elliptique, mais elles comprennent des termes de transport, qui souvent empêche d'utiliser les méthodes usuelles pour les équations du type elliptique. Mais, nous pouvons espérer que les égalités obtenues dans la section 3.2 seront utiles pour surmonter cette difficulté. Donc notre première perspective est d'approfondir les résultats obtenus dans la section 3.2 et chercher à les appliquer à la résolution des équations (2.16)-(2.19).

D'autre part, comme nous l'avons évoqué plusieurs fois, nous nous intéressons en particulier à des caractérisation du rôle de la circulation générale de l'atmosphère dans le bilan énergétique de la Terre. Nous avons fait quelques remarques dans le chapitre 4. Nous voulons développer ces analyses en utilisant les résultats obtenus dans la présente étude.

Bibliographie

[1] *Benabidallah.R, L. Taleb, H. Fujita Yashima : Existence d'une solution stationnaire d'un système d'équations d'un fluide visqueux compressible et calorifère modélisant la convection*...Boll. U. M. I., Serie 8, vol. 10-B (2007), pp. 1101-1124.

[2] *Fujita Yashima.H : Fluides newtoniens*..cours de l'université de Guelma, 2010.

[3] *Fujita Yashima.H : Modélisation de la physique des fluides*..cours de l'université de Guelma, 2010.

[4] *Landau.L et Lifchitz.L :Physique théorique tome1 Mécanique(tradiction française)* .Edition Mir 1982.

[5] *Mikhailov.V.P : Equations aux dérivées partielles (traduit du russe)*.. Mir, Moscou, 1980.

[6] *Postnikov.M : Leçons de géométrie, Variétés différentialbles(tradiction française,Dj.Embarek,1990)*.Edision Mir Moscou.