sqRépublique Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématique appliqué**

Par :

Melle . Zerouk Soumia

Intitulé

Sur un schéma de discrétisation pour une équation degenerée parabolic intégrodifférentielle avec condition intégrale

Dirigé par : Dr. CHAOUI Abderazake

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. BENRABAH. A**	**MCA**	**U-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. CHAOUI. A**	**MCA**	**U-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. MEHRI. A**	**MCA**	**U-Guelma**

Session Juin 2015

louange à notre seigneur allah qui nous a dotés de la merveilleuse faculté de raisonnement.

par ce tarvail qui restera toujours notre compensation pour nos longue années d'etudes,

Mes remerciements vont également à tous mes enseignants du primaire, du secondaire et universitaire.

Je tiens en particulier à remercier mon encadreur Docteur. Chaoui abderrazek de m'avoir proposé ce sujet de recherche je lui témoigne aussi, ma gratitude pour son soutien , et d'avoir dirigé mon travail avec ces conseils, ses encouragements. *sa disponibilité tous le temp, sa patience et sa compréhension.*

j'adresse mes vifs remerciements au Docteur BENRABAH. A pour le grand honneur qu'il me fait en presidant le jury de soutenance.

j'exprime également mes chaleureux remerciements au Docteur MEHRI.A pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir acceptés de faire partie de ce jury.

nous remercions tout membre du département

Mathématique de l'université : mais 1945 de guelma

sur un schéma de discrétisation pour une équation degenerée parabolic integrodifferentielle avec condition intégrale *

zerouk soumia
Mémoire de Mastère en Mathématiques
Université de Guelma

Résumé

Dans ce mémoire, nous sommes préoccupés par l'application de Rothe schéma de discrétisation de temps pour trouver une solution approchée parabolique dégénérée équation integro-différentielle avec l'initiale, Neumann et condition integrale non local. Existence et unicité de solution faible ainsi que certains résultats de régularité sont obtenus.

Mots clé Problème non linéaire de la valeur limite, la méthode de Rothe, Equation parabolique, solution faible, problème discret.

Table des matières

*Document saisi à l'aide du logiciel de traitement de texte TEX, au format LATEX 2_ε.

1 Introduction

Dans ce memoire on est intéressé à l'application de la méthode de discretisation en temps (methode de Rothe) pour une solution approchée d'une equation parabolic dégénérée intégro-différentille de type non local, Existence et unicité de solution faible ainsi que certains résultats de régularité condition intégrale non local sont obtenus.

On va étudier l'existence, l'unicité, la dépendance continue de la solution par rapport aux données, l'erreur d''estimation du procédure d'approximation , La methode de Rothe c'est averé un outil théorique et numérique efficace dans l'etude des problémes d'evolutions, ont été etudiés par plusieurs auteurs pour différents types d'equation : parabolique, hyperbolique, pseudo parabolique cette "method of lines".

Rappelons que l'effet de lissage se produit pour les équations paraboliques linéaires, mais pas pour l'équation parabolique dégénérée non linéaire, c-à-d la solution peut commencer à partir d'une fonction initiale régulière mais elle devient non regulieuse en temps.

Il existe de nombreuses méthodes de résolution d'équations aux dérivées partielles, l'une des des ces méthodes est dite la méthode de rothe ou discrétisation en temps, où le dérivées par rapport à une variable sont remplaces par des quotients de différence qui conduisent finalement à des systèmes d'équations différentielles, La méthode de Rothe comme une approche approximative est bien adaptée non seulement pour prouver les résultats d'existence, mais aussi pour diverses applications cette méthode a été présenté par Rothe en 1930 pour résoudre second ordre équation linéaire parabolique avec une variable d'espace plus tard (voir[10]), cette méthode a été adoptée par Ladyzhenskaya ([17,18,]), pour résoudre linéaire et quasi-linéaire problèmes paraboliques de seconde ordre et équations linéaires d'ordres supérieurs. Le développement est connecté avec Rektorys (voir[13,14]), qui a obtenu des solutions, qui ont plus de regularités. Récemment la méthode de Rothe a été développée pour couvrir d'autres types d'équations on peut voir dans ([3-5],[8,12]).

Ce memoire est organisé comme suit : le 1 ere chapitre est l'introduction le 2eme chapitre contient quelques notions de bases qui seront utiles dans la suite. dans le 3eme chapitre on trouve le cadre fonctionnel du probléme posé ainsi que le schema de discrestidation et quelques estimations a priori qui vont utilisé pour obtenir quelques resultats de convergence . le dernier chapiter est consacré à l'etude de L'existence d'une solution failbe du probleme posé est aussi ç l'unicité ce ceratins hypotheses de positivité.

2 Rappelle D'analyse fonctionnelle

2.1 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Soit p élément de $[1, \infty]$, et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on appelle espace de Lebesgue, et on note $L^p(\Omega)$, L'espace vectoriel des fonction numérique u de Ω dans $\mathbb{C}$,
Lebesgue mesurables, vérifaint :

$$1.si \quad 1 \leq p < +\infty, \quad \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty,$$

$$2.si \quad p = +\infty, \quad \sup_{x\in\Omega} |u(x)| < +\infty,$$

où :

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| = \inf\{M \setminus |u(x)| \leq M \ p.p.\}.$$

Définition 2.1.1. *(Espace de Banach)*
Tout espace vetoriel normé complet est appelé espace de Banach.

2.1.1 Quelque propriété

- L'application de $L^p(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^+$:

$$u \longrightarrow \begin{cases} ||u||_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{1/p}, 1 \leq p < +\infty, \\ ||u||_\infty = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|, \quad p = +\infty, \end{cases}$$

définit une norme sur $L^p(\Omega)$, norme par laquelle $L^p(\Omega)$ est un espace de banach

- Dual-pour tout réel p dans $[1, +\infty[$, le dual de $L^p(\Omega)$ est isomorphe algébriquement et topologiquement à $L^q(\Omega)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, l'application de dualité est définit par :

$L^p(\Omega) \times l^q(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}^n$,

$$(u, v) \longrightarrow \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

pour tout réel p dans $[1, +\infty[$, le bidual de $L^p(\Omega)$ s'identifie algébriqument et topologique à $L^p(\Omega)$
on dit que l'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif.

Théorème 2.1.1. *(De densité)*
L'espace $C_c(\Omega)$ des fonction continues à support compact est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$.

2.2 Espace de Hlibert

Soit V un ev sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.2.1. *(produit scalaire)*

Un produit scalaire sur V est une application bilinéaire sur V, notée $(.,.)V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, et vérifiant les trois propriétés suivantes :

(i) symétrie : $\forall v, w \in V, (v,w)_v = (w,v)_v$,

(ii) positivité : $\forall v \in V, (v,v)_v \geq 0$,

(iii) $(w,v)_v = 0 \Longleftrightarrow v = 0$.

Remarque 2.2.1. *Un produit scalaire sur V définit une norme sur V par la formule suivante :*

$$||x||_V = \sqrt{<x,x>}.$$

Définition 2.2.2. *(L'espace de Hilbert)*

Un espace de Hlibert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (donc normé), et complet pour la norme induite. Un espace de Hlibert est donc un cas particulier d'espace de Banach (la norme est définie à partir d'un produit scalaire).

Définition 2.2.3. *(L'espace $L^2(\Omega)$)*

les fonction de careé sommable sur Ω, ou Ω est un domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ c'est à dire telles que l'intégrale : $\int_\Omega |f(x)|^2 < \infty$ *muni du produit scalire :*

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Définition 2.2.4. *(L'espace $C^k[a,b]$)*

Des fonction k fois continument dérivables sur [a,b] de norme :

$$||x|| = \sum_{i=0}^{k} max|x^i(t)|, \text{ telle que } x^0(t) = x(t).$$

Définition 2.2.5. *(L'injection continue)*

Soient $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ deux espace normés avec : $E \subset F$ On dit que E S'injecte continument dans F si :

$$\begin{array}{rcl} i : (E, ||.||_E) & \longrightarrow & (F, ||.||_F) \\ x & \longrightarrow & i(x) = x \end{array}$$

est continues si $\exists M > 0$ tq :

$$||x||_F \leq M||x||_E, \forall x \in E.$$

2.3 Espace de Boschner

1. $C(I,L^2(\Omega)) = \{f : I \longrightarrow L^2(\Omega)$ qui associé à t $\longrightarrow f(t) \in L^2(\Omega)$ continue $\}$ munit de la norme :

$$\|f\|_{C(I,L^2(\Omega))} = \max_{t\in I} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

2. $C(I,B) = \{f : I \longrightarrow B$ qui associé à t $f(t) \in B$ continue $\}$ et munit la norme :

$$\|f\|_{C(I,B)} = \max_{t\in I} \|f\|_{B}.$$

3. $L^2(I,B) = \{f : I \longrightarrow B$ qui associé à t $f(t) \in B\}$ et munit du produit scalaire :

$$(f,g)_{L^2(I,B)} = \int_I (f,g)_B dt.$$

et munit la norme :

$$\|f\|^2_{L^2(I,B)} = \int_I \|f\|^2_B dt.$$

4. $L^2(I,B^*) = \{f : I \longrightarrow B^*$ qui associé a t $f(t) \in B^*\}$ munit du produit scalaire :

$$(f,g)_{L^2(I,B^*)} = \int_I (f,g)_{B^*} dt.$$

et munit de la norme :

$$\|f\|^2_{L^2(I,B^*)} = \int_I \|f\|^2_{B^*} dt.$$

5. $L^2(I,V) = \{f : I \longrightarrow V$ qui associé a t $f(t) \in V\}$ munit du produit scalaire :

$$(f,g)_{L^2(I,V)} = \int_I (f,g)_V dt.$$

et munit la norme :

$$\|f\|^2_{L^2(I,V)} = \int_I \|f\|^2_V dt.$$

Définition 2.3.1. *Si E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ le dual de E est l'espace $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires continue sur $\mathbb{K}$, on le note E' et on munit E' de la norme subordonnée à la norme de E.*

2.4 Convegence Faible

Définition 2.4.1. *(x_n) converge faiblment dans E vers x si l'on a :*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} < x', x_n > = < x', x > \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} < x', x_n - x > = 0,\ \forall x' \in E'.$$

avec E' l'espace dual de E.

Notation

On notera $x_n \rightharpoonup x$, ou $x_n \overset{E}{\rightharpoonup} x$ pour être précis, la convergence faible dans E.
On notera de méme $x_n \longrightarrow x$, ou $x_n \overset{E}{\longrightarrow} x$ pour être précis, la convergence forte dans E (c'est à dire la convergence en norme).

Définition 2.4.2. *on dit qu'une suite x_n est faiblment de cauchy si la suite $f(x_n)$ est de cauchy pour toute forme linéaire continuie $f \in E'$. on dit qu'un espace vectoriel normé E est faiblement complet si toute suite de E qui est faiblment de cauchy converge faiblment dans E.*

Remarque 2.4.1. • *Si $x_n \longrightarrow x$ fortement $(||x_n - x||_E \longrightarrow 0) \Longrightarrow x_n \rightharpoonup x$ car :*

$$\forall x' \in E' : < x', x_n - x > \leq ||x'||||x_n - x|| \longrightarrow 0$$

• *Si $dimE = n < \infty$ on a équivalence de deux notions :*
$m \geq 1, x^m = (x_1^m, x_2^m, \ldots, x_n^m)$, $dimE' = n$, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ base de
$E \Longrightarrow \{e_j^*\}_{j=1}^n$ base dual tq :

$$e^*_{j(e_i)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$x^m \rightharpoonup x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \Longrightarrow \forall i = \overline{1, \ldots, n},\ x' = e_i^*$$

$$< e_i^*, x^m - x > = x_i^m - x_i \overset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i^m - x_i| \overset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

alors : $||x^m - x||_1 \longrightarrow 0$, ce qui donne $||x^m - x|| \longrightarrow 0$ car tout les normes de E sont équivalentes.

Proposition 2.4.1. *Soient E et F deux espaces de banach. soit T une application linéaire continues de E dans F et soit $\{x_n\}$ une suite de E telle que $x_n \overset{E}{\rightharpoonup} x$. alors, $T(x_{n)} \overset{F}{\rightharpoonup} T(x)$.*

Proposition 2.4.2. *Soit E un espace de Banach. Si $x_n \rightharpoonup x$ dans E, alors la suite $\{||x_n||\}$ est bornée et*

$$||x|| \leq \lim\inf ||x_n||.$$

Remarque 2.4.2. *la convergence failbe n'implique pas la convergence forte. On pourra considérer une suite orthonormée dans un espace de Hlibert de dimension infinie puis montere qu'elle converge faiblement vers 0, mais que l'on ne peut extraire aucune sous-suite fortement convergente.*

Proposition 2.4.3. *Soit H un espace de Hlibert. soit $\{x_n\}$ une suite de H telle que*

$$x_n \overset{H}{\rightharpoonup} x \text{ et } \limsup ||x_n|| \leq ||x||.$$

alors, la suite $\{x_n\}$ converge fortement vers x, $x_n \xrightarrow{H} x$.C'est en particulier le cas si $x_n \rightharpoonup x$ et si $||x_n|| \to ||x||$.

Le théoréme suivant joue un rôle fondamental dans l'etude des probléme variationnels.

Théorème 2.4.1. *(Théorème de compacité faible des espaces de Hilbert)*
H un espace de Hilbert, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de H, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite faiblement convergente.

2.5 Les inégalité utilisé

Soit $\Omega \subset R^n$.

2.5.1 inégalité de cauchy-schwartz :

$\forall u, v \in L^2$:

$$\left|\int_\Omega u.v dx\right| \leq \left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$\left|\int_n \sum_{i=1}^n u_i v_i dx\right| \leq \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n u_i dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n v_i dx\right)^{1/2}$$

preuve :

• pour $\lambda \in \mathbb{R}$, definissons le trinôme du second degré $p(\lambda) = (u + \lambda v, u + \lambda v) = \lambda^2(v, v) + 2\lambda(u, v) + (u, u)$. comme $p(\lambda) \geq 0 \forall \in R$, nécessairement le discrimnant $\triangle = (u, v)^2 - (u, u)(v, v)$ doit étre négatif ou nul, soit $|(u, u)| \leq (u, u)^{1/2}(v, v)^{1/2}$.

• Si $\triangle = 0$ alors le polynôme $p(\lambda) = 0$ admet une racine double, ils existe λ_1 tq $p(\lambda_2) = 0$ don u et v colinéaires . □

Remarque 2.5.1. *Cette inégalité montre que l'application bilinéaire $v, w \in V \longrightarrow (v, w)_v$ est une application bilinéaire continue, autrement sit que le produit scalire est une application bilinéaire continue.*

2.5.2 L'ϵ-inégalité

$$|xy| \leq \frac{\epsilon}{2}x^2 + \frac{1}{2\epsilon}y^2, \qquad \forall \epsilon \geq 0 \forall x, y$$

2.5.3 l'inégalité de Gronwall

Si pour tout $t \geq t_0$ on a :

1. $u(t)$ et $V(t)$ deux fonctions condition et $u(t) \geq 0$, $v(t) \geq 0$.
2. $u(t) \leq k + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds$, $k > 0$.

alors :

$$u(t) \leq k \exp \int_{t_0}^{t} V(s),\ t \geq t_0.$$

preuve :

•le cas continu : d'aprés (2) on a :

$$\frac{u(t).v(t)}{k + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds} \leq v(t)$$

intégrons entre t_0 et t les deux membres :

$$\left[\ln\left(k + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds\right)\right]_{t_0}^{t} \leq \int_{t_0}^{t} v(s)ds$$

$$\Rightarrow \ln\left(k + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds\right) - \ln k \leq \int_{t_0}^{t} v(s)ds$$

$$\Rightarrow k + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds \leq k.\exp \int_{t_0}^{t} v(s)ds$$

où

$$u(t) \leq k + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds \leq k.\exp \int_{t_0}^{t} v(s)ds.$$

d'où le résultat.

•Le cas discret : soit $\{x_n\}$ une suite des nombres réels positifs tq :

$$a_i \leq a$$

et

$$a_i \leq bh \sum_{k=1}^{i-1} a_k, \ \forall i = 2, \dots$$

avec a, b et h sont des constantes positives, alors :

$$a_i \leq exp(b(i-1)h), \ i = 2, \dots$$

□

2.5.4 Inégalité de young

Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$, et $p, q \in]1, +\infty[$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors

$$a.b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

preuve :

la fonction $\theta \longrightarrow \exp(\theta)$ est convenxe (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
on a donc, pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0, 1]$
$\exp(t\theta_1 + (1-t)\theta_2) \leq t\exp(\theta_1) + (1-t)\exp(\theta_2)$
soit $(a, b > 0)$ (les autres cas sont travaux)
on prend $t = \frac{1}{p}$ (de sort que $(1-t) = \frac{1}{q}$), $\theta_1 = p\ln(a)$ et $\theta_2 = q\ln(b)$. on obtient :

$$a.b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

2.6 Quelque Théoréme Utilisées

Définition 2.6.1. *soit H un espace de Hilbert on note :*

$$H' = \{f : H \longrightarrow \mathbb{R},\ f \textit{ lineaire continue } \}.$$

H' est appelé dual topologique de H si $l \in H'$ on note $l(x) = < x, l > \forall x \in H$ on appelle ce crochet, le crochet de dualité entre H et H'.

Proposition 2.6.1. *pour $l \in H'$ on a :*

1. $|l| = \sup_{||x||=1} |l(x)|$ *et on a* $|l|_* = \sup_{||x||||x||\neq 0} |l(x)| = \sup_{||x||\leq 1} |l(x)|$.
2. *H est un espace complet par rapport à $|.|_*$.*

Théorème 2.6.1. *(De Riez) soit H un espace de Hilbert, soit H' sont dual, alors*
$\forall l \in H' \exists! u \in H$ *tq* $\forall v \in H$, $l(v) = < u, v >$.
de plus :

$$||l||_* = ||u||_H.$$

Remarque 2.6.1. $v_n \rightharpoonup v \Longleftrightarrow \forall u \in E : \lim_{n\to\infty} (v_n, u) = (v, u)$

car : $v_n \rightharpoonup v \Longleftrightarrow \forall f \in E' : f(v_n) \rightharpoonup f(v) \overset{\textit{théoréme de Riez}}{\Longleftrightarrow} f(v_n) = (u, v_n)$.

Théorème 2.6.2. *(De lax-Milgram) Soit V un espace de Hlibert et $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continues sur :*

$$V \times V : \exists M > 0,\ \forall (u, v) \in V^2, |a(u, v)| \leq M||u||||v||.$$

si a est V elliptique (ou coercive) c'est-à-dire : si $\exists \alpha > 0, \forall u \in V a(u, v) \geq \alpha ||u||^2$, et si $l : V \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue, alors le probléme :
Trouver $u \in V$ tel que $\forall v \in V$, $a(u, v) = l(v)$ admet une solution unique.

preuve :

Soit $A : V \longrightarrow V$ l'opérateur lineaire, défini par :
$< Au, v >= a(u, v)$ pour tout v dans V, L'existence de Au résulte du théoréme de Riesz, car $v \longrightarrow a(u, v)$ est linéaire continue sur V.
L'opérateur A est linéaire continu car :

$$||Au|| = \sup_{v \in V\{0\}} \frac{| < Au, v > |}{||v||} \leq \frac{M||u||||v||}{||v||} = M||u||$$

D'autre part toujours d'aprés le théoréme de Riez, il existe $b \in V$ tel que $l(v) =< b, v > \forall v \in V$. Le probléme revient donc à montrer qu'il existe $u \in V$ tel que $Au = b$.

On va procéder de maniére itérative en partant d'un $u_0 \in V$ quelque et en définissant, pour $p > 0$, la suite récurrente $u_{k+1} = u_k - \rho(Au_k - b) = F(u_k)$
Montrons que pour $\rho > 0$ suffisamment perit, F est contractante, On a

$$F(u) - F(v) = u - v - \rho(A(u - v))$$

donc $||F(u) - F(v)|| \leq ||u - v||^2 + \rho^2||A(u - v)||^2 - 2\rho < A(u - v) >, u - v >= ||u - v||^2 + \rho^2||A(u - v)||^2 - 2\rho a(u - v, u - v) \leq ||u - v||^2 + M^2\rho^2||(u - v)||^2 - 2\rho\alpha||u - v||^2 \leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2)||u - v||^2$
Choisissons donc ρ tel que $\rho < 2\frac{\alpha}{M}$ Alors F est contractante et le schéma itératif est convergent, ce qui prouve le théoréme. □

Théorème 2.6.3. *(De Fubini) On suppose $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$,*
alors pour presque tout $x \in \Omega$

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \text{ et } \int_{\Omega_2} F(x, y)dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De méme, pour presque tout $y \in \Omega_2$

$$F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1) \text{ et } \int_{\Omega_1} F(x, y)dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

De plus on a :

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y)dx = \int \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y)dxdy$$

.

2.7 Le Schéma de la méthode de Rothe

- On divise l'intervalle du temps en n sous intervalles (t_{i-1}, t_i), $i = 1 \ldots, n$ où $t_i = ih$ et $h = \frac{T}{n}$. On note par $u_i = u_i(x, ih)$ les approximations de u.

- On obtient un systéme formé de n la fonction u, $\frac{\partial u}{\partial t}$ par $\delta u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$ pour tout $t = t_i$.

- On obtient un systéme formé de n équations en x où l'inconnu est $u_i(x)$ donc on approxime le probléme posé à tout point $t = t_i, i = \overline{1, n}$. par un nouveau probléme discret.

- On détermine les fonctions u^n solution du systéme obtenu.

- On construit les fonctions de Rothe comme suit :

$$u^n = u_{i-1} + (t - t_{i-1})\delta u_i \quad t \in [t_{i-1}, t_i] \quad i = 1, \ldots, n$$

c-à-d On vas approximé la solution u par une suite de polynome de degré 1 u^n par morceaux sur chaque sous intervalle $[t_{i-1}, t_i]$.

- les fonctions test correspondantes :

$$\bar{u}^n(t) = \begin{cases} u_i & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ u_0 & t = 0 \end{cases} \quad i = 1\ldots, n$$

- Aprés avoir démontré quelque estimations pour la solution approchée, nous établissons la convergence de la solution approchée $u^n(t)$ vers la solution du probléme posé.

2.8 Classification des équation intégrales

Une equation intégrale peut étre calssée comme état soit une équation intégrale linéaire ou bien comme une équation intégrale non linéaire, il y a une similitude parfaite avec la classification des équation intégrale différentielles ordinaires ou celle aussi des équation aux dérivées partielles, les equation intégrales de volterra et celles de fredholm, qui consituent donc les deux principalles catégories, A ces deux catégories d'equations intégrale, nous pouvons considérer encore deux autre type, à savoir les équation intégro-différentielles les équation intégrale singuliéres

- Nous sommes seulement intéressés par :

2.8.1 Equation intégrales de volterra

Définition 2.8.1. *On appele équation intégrale de Vlterra non linéaire de seconde espéce une equation de la forme :*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt,$$

Où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $K(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonction connues et λ un paramétre reél.

1. *une equation de la forme :*

$$\int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt = \varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue est appelée équation intégrale de volterra non linéaire de premiére espéce.

2. *On appele équation intégrale de Volterra linéaire de seconde espéce une equation de la forme :*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt,$$

Où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $K(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonction connues et λ un paramétre reél.

3. *Si $f(x) = 0$ l'equation s'ecrit :*

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt,$$

ell est appélée équation intégrale linéaire homogéne de volterra de seconde espéce.

4. *Une équation à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme :*

$$\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x),$$

est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de premiére espéce.

Exemple 2.8.1.

1. *Equation intégrale linéaire non homogénes de Volterra de la seconde et premiére espéce :*

$$u(x) = x^2 + \sin x + 1 + \lambda \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt, 0 = x^2 + 1 + \lambda \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt.$$

2. *Equation intégrale linéaires homogénes de Volterra de la seconde et premiére espéce :*

$$u(x) = \lambda \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt, 0 = \lambda \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt.$$

2.9 Classification des équations aux dérivées partielles

une équation aux dérivés partielles (E.D.P) est une relation faisant intervenir les varaibles indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la fonction u est dérivés partielles. par exemple, si u est une fonction de deux varaible, une E.D.P peut s'ecrire par la relation

$$f(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u^2}{\partial x^2},\frac{\partial u^2}{\partial y2},\ldots) = 0.$$

2.9.1 Classification Mathématique des E.D.P des second ordre

Ce sont de la forme :

$$g(x,y,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial x})=A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

et $A,B,C,\ldots,F$ sont les coefficient de EDP, ils sont fonction de x et y et peuvent étre des constantes, selon le signe du dicriminant

$$\triangle = B^2-4AC.$$

le polynôme et L'E.D.P sont dits :

1. hyperbolique si $\triangle = B^2-4AC > 0$,
2. parabolique si $\triangle = B^2-4AC = 0$,
3. elliptique si $\triangle = B^2-4AC < 0$.

Exemple 2.9.1. *Soient $u(x,y)$ une fonction de deux varaible et $v(x,y,t)$ une fonction de trois varaibles*

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, *est une E.D.P elliptique.*
2. $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, *est une E.D.P hyperbolique.*
3. $\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, *est une E.D.P parabolique.*
4. $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=0$ *est une E.D.P elliptique pour $x>0$, et hyperbolique pour $x<0$, et parabolique pour $x=0$.*

2.9.2 Classification Physique des E.D.P

De nombreux phénoménes physiques se rangent dans l'une des classes suivantes :

• les probléme d'equlibre étudient l'etat stationnaire d'un phénommméne (champ, chaleur, etc..) dans un domaine bornée ou non, ils sont gouvernés par des E.D.P elliptique

• les problémes de valeurs propres sont en général des extensions des problémes d'equilibre dans lesquels les valeur critique de cetains paramétres doivent étre déterminées, C'est le cas par exemple de la résonance des cicruits électrique.

• les problémes d'evolution étudient lévolution avec le temps d'un phénoméne(champ, chaleur, vibration, etc..) à partir d'un état initial donné, ils sont gouvernés par des E.D.P hyperbolique ou des E.D.P parabolique.

Exemple 2.9.2.

1. *Equation de Cauchy-Riemann dans* $\mathbb{R}^2$ *:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

où u est à valeurs complexes et $i=\sqrt{-1}$.

2. *Equation de Laplace dans* $\mathbb{R}^n$ *:*

$$\Delta u=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0.$$

3. *Equation de la chaleur dans* $\mathbb{R}^{n+1}$ *(on prend $(t,x_1,\ldots,x_n)$ pour coordonnées où, physiquement, t désigne le temps et Δ_x désigne le laplacien dans $\mathbb{R}^n$ pour les coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$) :*

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta_x u=0.$$

4. *Equation des ondes dans* $\mathbb{R}^{n+1}$ *:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta_x u=0.$$

5. *Equation de transport dans* $\mathbb{R}^{n+1}$ *:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\xi.\nabla_x u=\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\xi_i\frac{\partial u}{\partial x_i}=0,$$

où $\xi\in\mathbb{R}^n$.

6. *Equation d'Helmholtz dans* $\mathbb{R}^n$ *:*

$$\Delta u+\lambda u=0,$$

où $\lambda\in R$.

7. *Equation de schrödinger dans* $\mathbb{R}^{n+1}$ *:*

$$i\frac{\partial u}{\partial t}+\Delta_x u=0.$$

8. *Equation de Kolmogorov dans* $\mathbb{R}^{n+1}$ *:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}=0,$$

où $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in M_n(\mathbb{R}^n)$ et $b\in\mathbb{R}^n$.

9. *Equation du télégraphe dans* $\mathbb{R}^2$ *:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$$

10. *Equation des ondes généralisée dans* $\mathbb{R}^{n+1}$ *:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}=0,$$

où $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\in M_n(\mathbb{R}^n)$ *et* $b\in\mathbb{R}^n$.

11. *Equation d'Airy dans* $\mathbb{R}^2$ *:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}=0.$$

12. *Equation de rayonnement dans* $\mathbb{R}^2$ *:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}=0.$$

13. *Equation de Liouville dans* $\mathbb{R}^{n+1}$ *:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi_i u)=0,$$

ξ *est une fonction à valeur dans* $\mathbb{R}^n$ *de classe* C^1.

14. *Equation de Fokker-Planck dans* $\mathbb{R}^{n+1}$ *:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i;j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(a_{i,j}u)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i u)=0,$$

où $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ *est une application à valeur dans* $M_n(\mathbb{R})$ *de classe* C^1 *et* b *est une application à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *de classe* C^1.

15. *Equation d'Eikonal*

$$||\nabla u||=1.$$

16. *Equation de Poisson non linéaire :*

$$\Delta u+f(u)=0,$$

où f *est une fonction continues.*

17. *Equation du p-Laplacien*

$$div(||\nabla u||^{p-2}\nabla u) = 0,$$

où, si F est une fonction de classe C^1 définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$,

$$divF = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}$$

est la divergence du champs de vecteur F.

18. *Equation de Vibration de plaque mince :*

$$u_t - v_0 u_x = \alpha u u_x - b u_{xxx}.$$

19. *Equation de surface minimale :*

$$div\left(\frac{\nabla_u}{\sqrt{1+||\nabla_u||^2}}\right) = 0.$$

20. *Equation de Monge-Ampére en dimension 2 :*

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = f.$$

21. *Equation d'Hamilton-Jacobi :*

$$u_t + H(\nabla_x u, x) = 0.$$

22. *Equation de la loi de conservation scalaire :*

$$u_t + div_x F(u) = 0.$$

23. *Equation de Burger (non dissipative) :*

$$u_t + u u_x = 0.$$

24. *Equation de Burger(dissipative) :*

$$u_t + u u_x = \mu u_{xx}.$$

25. *Equation de réaction-diffusion scalaire :*

$$u_t - \Delta_x u = f(u).$$

26. *Equation de la porosité :*

$$u_t - \Delta_x(u^v) = 0.$$

27. *Equation des ondes non linéaires :*

$$u_{tt} - \Delta_x u = f(u).$$

28. *Equation des ondes sphériques :*

$$u_{tt} = c^2(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r).$$

29. *Equation de korteweg-de-vries (KdV) :*

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0.$$

30. *Equation d'élasticité linéaire en équilibre :*

$$\mu\Delta\vec{u} + (\lambda + u)\nabla(div\vec{u}) = \vec{0}.$$

31. *Equation d'élasticité linéaire en évolution :*

$$\vec{u}_{tt} - \mu\Delta\vec{u} - (\lambda + u)\nabla(div\vec{u}) = \vec{0}.$$

32. *Equation de Maxwell :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \vec{E}_t & = & \overrightarrow{rot}\vec{B} \\ \vec{B}_t & = & -\overrightarrow{rot}\vec{E} \\ div\vec{B} & = & div\vec{E} = 0. \end{array}\right.$$

33. *Systéme des lois de conservation :*

$$\vec{u}_t + div\vec{F}(\vec{u}) = \vec{0}.$$

34. *Equation de réaction-diffusion :*

$$\vec{u}_t - \Delta\vec{u} = f(\vec{u})$$

35. *Equation d'Euler pour un fluide incompressible*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \vec{u}_t + \vec{u}.\nabla\vec{u} & = & \nabla_p \\ div\vec{u} & = & 0. \end{array}\right.$$

3 Position du problémé et estimations a priori

3.1 Espace fonctionnels

Nous introduisons les espaces fonctionnels, dont nous avons besoin dans notre enquête, nous donnons quelques définitions de base.
Soit $I = [0, T]$ et $H = L^2(0, 1)$ être l'espace habituel de carrés intégrables Lebesgue fonctions réelles sur $(0, 1)$ dont le produit produit scalaire et la norme seront désignés par $(,)$ et $||.||$ respectivement.

Désigne l'espace de Hilbert **V** *définit par :*

$$V = \left\{ \phi \in L^2(0,1), \int_0^1 \phi dx = 0 \right\}.$$

On dénote $C^{0,1}(I,X)$ l'espaces suivant :

$$C^{0,1}(I,X) = \{u : I \longrightarrow X, \, u \text{ continue lipschitzien } \}.$$

où X est un espace normé.

On note $B(0,1)$ l'espace de bouziani qui est le complété de $C_0^1(0,1)$ L'espace des fonctons continues à support compact dans $(0,1)$ par rapport au produit scalaire :

$$(u,v)_B = \int_0^1 \mathscr{B}_x u \mathscr{B}_x v dx.$$

où

$$\mathscr{B}_x u = \int_0^x u(\xi) d\xi.$$

et la norme :

$$||u||_\beta^2 = (u,u)_\beta.$$

Il est facile de voir que

$$||u||_B^2 \leq \frac{1}{2} ||u||_{L^2}^2.$$

Nous avons donc l'injection continue : $L^2(0,1) \longrightarrow B(0,1)$.

L'espace de Hilbert $H = L^2(0,1)$, peut étres injecté continument dans un autre espce de Hlibert $B(0,1)$.

On dénote V_B par l'espace suivant :

$$V_B = \left\{ \phi \in B(0,1), \int_0^1 \phi dx = 0 \right\}.$$

3.2 Position de probléme

Dans ce memoire on considéré le probléme (p) pour une equation integro-differentielle parabolique dégénéré :

$$\partial_t \beta(u) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_0^t a(t-s)k(u(s,x))ds + f(t,x,u). \quad \textbf{(P)}$$

les condition données du problème :

avec condition initiale :

$$u(0,x) = u_0(x), x \in (0,1). \quad (1)$$

condition de Neumann :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0, t \in I = [0,T]. \quad (2)$$

la condition intégrante non local :

$$\int_0^1 u(t,x)dx = 0. \quad (3)$$

Où $\beta(u)$ est une fonction non linéaire.
comprennent le modéle mathématique de grande classe de problémes. il decrit le transport des contaminats dans les milieux poreux (voi[7]). ils se posent également dans la modélisation du flux d'huile et de l'eau dans le réservoir pétrole et le flux de l'air dans les champs agricoles (voir[11]).

Un exemple de la fonction β est donné dans la différentielle partielle suivante équation :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(c + \frac{p_b k}{\theta} c^p\right) - D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + q\frac{\partial c}{\partial x} = 0.$$

qui modélise l'écoulement d'un fluide incompressible à travers un milieu poreux unidimensionnel, où le fluide est contaminé par un soluté dans le cas d'equiLibrium réactions d'adsorption au moyen de Freundlich isotherme, c ici est la concentration du fluide, p_b est la densité apparente du milieu poreux, est $\theta \geq 0$, la porosité, D est le coefficient de dispersion, q est la vitesse moyenne du fluide et $p \in (0,1)$, L'opérateur de memoire est obtenu par la modélisation du flux dans les milieux poreux élastiques Dans le cas du milieu à mémoire, la loi de Darcy prend la forme :

$$q(t,x) = -k(t,x)\nabla_p(t,x) - \int_0^t k(t,s)\nabla_p(s,x)ds.$$

où q dénote le flux volumétique de l'eau et p est la pression capillaire.
la loi de Darcy généralisée :

$$v(t,x) = v_0(x) + \int_0^t A(t-s)(f - \nabla_p)(s,x)ds.$$

3.3 Hypothèses et schéma de discrétisation :

<u>On suppose que</u> :

(H_1) *β une fonction croissante continue et lipschitzienne telle que $h^m \leq \beta' \leq h^{-m}$ et $m \in (0,\frac{1}{3})$, dans le cas dégénéré nous remplaçons β' par $\beta_h'(s) = \max\{h^m, min(\beta'(s), h^{-m})\}$.*

(H_2) *$f(t) \in L^2(0,1)$, et $||f(t) - f(t')||_B \leq l|t-t'|$.*

(H_3) *a une fonction continue telle que :*

$$|a(t) - a(t')| \leq c_1|t-t'|,$$

$k : I \times B(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$ est continue

$$||k(t,u)||_B \leq .||u||_B.$$

(H_4) *pour $u(t), v(t) \in v$ on a :*

$$|k(t,u) - k(t,v)| \leq L(t)||u(t) - v(t)||_B,$$

pour presque tous $t \in I$ où $L \in L^1(I)$ une fonction positive.

<u>Dans ce cas</u> : On donne une solution précis dans sens, On comprend la solution faible.

Définition 3.3.1. *une solution faible du probléme (p) est une fonction satisfaisant :*

❶ $u \in L^2(I,V)$ *avec* $\beta(u) \in C(I,B)$.

❷ $\partial_t \beta(u) \in L^2(I,B^*)$.

❸ *u satisfaisant (1) et (3).*

❹ *pour tout* $\phi \in V$, *alors :*

$$\int_I (\partial_t \beta(u), \phi)_\beta + \int_I (u,\phi) = \int_I (f,\phi)_B + \int_I \left(\left(\int_0^t a(t-s)K(u(s,x))ds, \phi \right) \right)_\beta .$$

3.3.1 Schéma de discrétisation :

• On divise l'interval I en n sous intervalles de longueur $h = \frac{T}{n}$ et on note $u_i = u(x,t_i)$, $t_i = ih$, $\delta u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$, $i = 1, \dots, n$.

• Nous omettrons x par souci de simplicité, le problème discrétisé associé est :

$$(\lambda_{i-1}(u_i - u_{i-1}, \phi)_\beta - h(u_i'', \phi)_\beta = h(f_i, \phi)_\beta + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} (a_{ij} k(u_j), \phi)_\beta. \qquad (4)$$

• L'existence d'une solution faible $u_i \in V$ est garantie par le le Theoréme de Lax-milgram.

• vus à (2) $(u_i'(0) = 0)$ il s'ensuit :

$$(u_i'', \phi)_\beta = \int_0^1 \mathscr{B}_x u_i'' \mathscr{B}_x \phi dx = \int_0^1 [u'_{i(x)} - u_i'(0)] \mathscr{B}_x \phi dx = \int_0^1 u_i'(x) \mathscr{B}_x \phi dx. \qquad (5)$$

• En tenant compte, $\int_0^1 \phi dx = 0$, une integration par partié nous donnons :

$$(u_i'', \phi)_\beta = u_i(x) \mathscr{B}_x \phi |_{x=1}^{x=0} - \int_0^1 u_i \phi dx = -(u_i, \phi)_{L^2(x)}. \qquad (6)$$

• En substituant dans (4), nous obtenons finalement :

$$(\lambda_{i-1}(u_i - u_{i-1}), \phi)_\beta + h(u_i, \phi) = h(f_i, \phi)_\beta + h^2 \sum_{i=1}^{i-1} (a_{ij} k(u_j), \phi)_\beta. \qquad (7)$$

• Où le schéma de relaxation λ_{i-1} Satisfaisant $\lambda_i = \beta_h'(u_i)$.

3.4 Estimation a priori

Dans cette section on va démontrer quelques estimations a priori obtenir quelques resultat de convergence en basant sur la compacité faible dans un espace de Hilbert.

lemme 3.4.1. *Les estimations suivantes sont vérifiées de maniére uniforme par rapport n, i, j et h :*

$$h^m \sum_{i=1}^{j} h||\delta u_i||_\beta^2 \leq C, \ ||u_i|| \leq C, \ \sum_{i=1}^{j} ||u_i - u_{i-1}||^2 \leq C. \tag{8}$$

preuve : On pose $\phi = u_i - u_{i-1}$ dans (7) et en sommant pour $i = 1 \ldots, l$, nous obtenous :

$$\sum_{i=1}^{l} h(\lambda_{i-1}\delta u_i, \delta u_i)_\beta + \sum_{i=1}^{l}(u_i, u_i - u_{i-1}) = \sum_{i=1}^{l} h(f_{i,}\delta u_i)_\beta + \sum_{i=1}^{l}\left(h^2\sum_{j=1}^{i-1}(a_{ij}k(u_j), \delta u_i)_\beta\right). \tag{9}$$

L'égalité (9) est brièvement notée par : $J_1 + J_2 = J_3 + J_4$ maintenant on va estimer chaque terme à coté :

1. $J_1 \overset{?}{\geq} h^m \sum_{i=1}^{l} h||\delta u_i||_\beta^2.$

   alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{l} h\left(\lambda_{i-1}\left(\frac{u_i - u_{i-1}^*}{h}\right), \delta u_i\right)_\beta &\geq \sum_{i=1}^{l} h\beta_h'(u_i)||\delta u_i||_\beta^2 \\ &\geq h^m \sum_{i=1}^{l} h||\delta u_i||_\beta^2\end{aligned}$$

   donc :

$$J_1 \geq h^m \sum_{i=1}^{l} h||\delta u_i||_\beta^2. \tag{10}$$

2. $J_2 \overset{?}{=} ||u_l||_{L^2} - ||u_0||_{L^2} + \sum_{i=1}^{l} ||u_i - u_{i-1}||_{L^2}$. on utilisé :

$$\begin{aligned}
(x, x-y) &= \frac{1}{2}\left[||x||^2 - ||y||^2 + ||x-y||^2\right] \\
2J_2 &= 2\sum_{i=1}^{l}(u_i, u_i - u_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{l}\left[||u_i||_{L^2} - ||u_{i-1}||_{L^2} + ||u_i - u_{i-1}||_{L^2}\right] \\
&= \left[||u_l||_{L^2} - ||u_0||_{L^2} + \sum_{i=1}^{l}||u_i - u_{i-1}||_{L^2}\right]
\end{aligned}$$

$$= ||u_l||_{L^2} - ||u_0||_{L^2} + \sum_{i=1}^{l}||u_i - u_{i-1}||_{L^2}. \quad (11)$$

3. $J_3 \overset{?}{=} \left|\sum_{i=1}^{l}(f_i, \delta u_i)_\beta\right|$

$$\begin{aligned}
J_3 &= \left|\sum_{i=1}^{l}(f_i, \delta u_i)_\beta\right| \\
&\overset{c.s}{\leq} \sum_{i=1}^{l} h||f_i||_\beta||\delta u_i||_\beta \\
&\leq C\sum_{i=1}^{l} h||\delta u_i||_\beta \\
&\overset{\epsilon.I}{\leq} C\sum_{i=1}^{l} h\left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2c}||\delta u_i||_\beta^2\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{l} Ch\frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2\epsilon}C\sum_{i=1}^{l} h||\delta u_i||_\beta^2 \\
&\leq \left[Clh\tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{1}{2\epsilon}C\sum_{i=1}^{l} h||\delta u_i||_\beta^2\right] \\
&\leq \mathrm{CT}\tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{1}{2\epsilon}Ch\sum_{i=1}^{l}||\delta u_i||_\beta^2 \\
&\leq max(CT, C)\left[\tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{1}{2\epsilon}h\sum_{i=1}^{l}||\delta u_i||_\beta^2\right]
\end{aligned}$$

on obtient :

$$|j_3| = \left|\sum_{i=1}^{l} h(f_i, \delta u_i)\right| \leq C\left(\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\sum_{i=1}^{l} h\|\delta u_i\|_\beta^2\right). \qquad (12)$$

4. $|j_4| \stackrel{?}{=} \left|\sum_{i=1}^{l} h^2 \sum_{j=1}^{i-1}(a_{ij}k(u_j), \delta u_i)_\beta\right|$

Par l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalités de young, le terme mémoire peut être estimée comme suit :

$$\begin{aligned}
|J_4| &= \left|\sum_{i=1}^{l} h \sum_{j=1}^{i-1}(a_{ij}k(u_j), \delta u_i)_\beta h\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{l} h \sum_{j=1}^{i-1} |(a_{ij}k(u_j), \delta u_i)_\beta h| \\
&\stackrel{\text{c.s}}{\leq} C\sum_{i=1}^{l} h^2 \sum_{j=1}^{i-1} \|\delta u_i\|_\beta^2 \\
&\stackrel{\epsilon\text{I}}{\leq} C\sum_{i=1}^{l} h^2 \sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2\epsilon}\|\delta u_i\|_\beta^2\right) \\
&\leq C\sum_{i=1}^{l} h^2(i-1)\epsilon + C\sum_{i=1}^{j}\frac{h^2}{\epsilon}(i-1)\|\delta u_i\|_\beta^2 \\
&\leq C\sum_{i=1}^{l} h\epsilon + C\frac{h}{\epsilon}\sum_{i=1}^{l}\|\delta u_i\|_\beta^2 \\
&\leq C\epsilon + C\tfrac{h}{\epsilon}\sum_{i=1}^{l}\|\delta u_i\|_\beta^2 \\
&\leq C\left[\epsilon + \tfrac{1}{\epsilon}\sum_{i=1}^{l} h\|\delta u_i\|_\beta^2\right]
\end{aligned}$$

donc :

$$|J_4| = \left|\sum_{i=1}^{j} h \sum_{j=1}^{i-1}(a_{ij}k(u_i), \delta u_i)h\right| \leq C\left(\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\sum_{i=1}^{j} h\|\delta u_i\|_\beta^2\right). \qquad (13)$$

En résumant toutes ces considérations, en tenant compte de (10)-(13) et, en choisissons ϵ suffisamment petit, alors d'apres le lemme de Gronwall on conclut la preuve. Soient les fonctions auxiliaires $\bar{u}^n$, $\bar{\beta}(\bar{u}^n)$ définies par :

$$\bar{u}^n(t) = \begin{cases} u_i & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ u_0 & t = 0 \end{cases} \quad i = 1\ldots, n \qquad (14)$$

$$\bar{\beta}(\bar{u}^n(t)) = \begin{cases} \beta(u_i) & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ \bar{\beta}^n(\bar{u}^n(0)) = \beta(u_0) & t = 0 \end{cases} \quad i = 1\dots, n \tag{15}$$

On note par f^n et K^n les fonctions :

$$f^n(t) = \begin{cases} f_i & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ f_0 & t = 0 \end{cases} \quad i = 1\dots, n \tag{16}$$

$$k^n(t) = \begin{cases} h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k(u_j) & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ h a_{10} k_0 & t = 0 \end{cases} \quad i = 1\dots, n \tag{17}$$

on définit les suites de Roth sur l'intervalle I par :

$$u^n(t) = u_{i-1} + (t - t_{i-1})\delta u_i, \quad t \in [t_{i-1}, t_i] \quad i = 1\dots, n \tag{18}$$

$$\beta^n(\bar{u}^n(t)) = \beta(u_{i-1}) + \lambda_{i-1}(t - t_{i-1})\delta u_i, \quad t \in [t_{i-1}, t_i] \quad i = 1\dots, n \tag{19}$$

lemme 3.4.2. *L'estimation a priori*

$$\|\lambda_{i-1}\delta u_i\|_* \leq C. \tag{20}$$

est satisfaite $1 \leq i \leq n$, *où*

$$\|\lambda_{i-1}\delta u_i\|_* = \sup_{\|\phi\|\leq 1,\ \phi in V} |(\lambda_{i-1}\delta u_i, \phi)\|.$$

Corollaire 3.4.1. *D'aprés les lemmes (3.4.1) et (3.4.2) on déduit les estimations suivantes :*

a) $\|\partial_t \beta^n(\bar{u}^n)\|_{(L^2,\beta^*)} \leq c$,

b) $\|\bar{u}^n\|_{L^2(I,V)} \leq c$,

c) $\|\beta(\bar{u}^n) - \beta^n(\bar{u}^n)\|_{L^2(I,\beta)} \leq \frac{C}{n^{1-2m}}$,

d) $\|u^n - \bar{u}^n\|_{L^2(I,\beta)} \leq \frac{c}{n^{\frac{1-m}{2}}}$,

$$e)\|u^n - \bar{u}^n\|_{L^2(I,L^2(\Omega))} \leq \frac{c}{\sqrt{n}}. \tag{21}$$

preuve :

a) $\|\partial_t \beta^n(\bar{u}^n)\|_{(L^2,\beta^*)} \overset{?}{\leq} C$.

On dérive par rapport à t :

$$\partial \beta^n(\bar{u}^n(t)) = \lambda_{i-1}\delta u_i \quad t \in [t_{i-1,t_i}] \quad , i = 1, \dots, n$$

en appliquat le lemme (3.4.2) on aura :

$$||\partial\beta^n(\bar{u}^n(t))||^2 = ||\lambda_{i-1}\delta u_i||_*^2 \leq C$$

on intégre par rapport a t :

$$\int_0^T ||\partial\beta^n(\bar{u}^n(t))||^2 = \int_0^T ||\lambda_{i-1}\delta u_i||_*^2 \leq \int_0^T C$$

On obtient :

$$||\partial_t\beta^n(\bar{u}^n)||_{L^2(I,\beta^*)} \leq C.$$

b) $||\bar{u}^n||_{L^2(I,V)} \overset{?}{\leq} C.$

$$||\bar{u}^n|| = ||u_i|| \leq C$$

On intégre par rapport à t :

$$\int_0^T ||(\bar{u}^n)||^2 = \int_0^T ||u_i||^2 \leq \int_0^T C$$

donc :

$$\Longrightarrow ||\bar{u}^n||_{L^2(I,\beta)} \leq C.$$

d) $||u^n - \bar{u}^n||_{L^2(I,\beta)} \overset{?}{\leq} \frac{c}{n^{\frac{1-m}{2}}}.$

$$\begin{aligned}
||u^n - \bar{u}^n|| &= ||u_i - u_{i-1} - (t - t_{i-1})\delta u_i||_\beta \\
&\leq ||h\delta u_i - (t - t_{i-1})\delta u_i||_\beta \\
&\leq |\delta u_i(h - t + t_{i-1})||_\beta \\
&\leq h||\delta u_i||_\beta
\end{aligned}$$

et on a :

$$h^{m+1}||\delta u_i||_\beta^2 \quad \leq \quad C$$

alors :

$$\begin{aligned}
h^{m+1}||\delta u_i||_\beta^2 &\leq C \\
h||\delta u_i||_\beta &\leq \frac{h^c}{h^{\frac{m+1}{2}}} \\
&= \frac{C}{(\frac{T}{n})^{\frac{m-1}{2}}} = \frac{C}{n^{\frac{1-m}{2}}} \text{ avec } h = \frac{T}{n}
\end{aligned}$$

donc :

$$||u^n - \bar{u}^n||_{L^2(I,\beta)} \leq \frac{c}{n^{\frac{1-m}{2}}}.$$

e) $||u^n - \bar{u}^n||_{L^2(I,L^2(\Omega))} \overset{?}{\leq} \frac{c}{\sqrt{n}}$.

on a :

$$u^n(t) = u_{i-1} + (t - t_{i-1})\delta u_i, \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1\dots, n$$

donc :

$$\begin{aligned}
u_{i-1} + (t - t_{i-1})\delta u_i - u_i &= -h\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right) + (t - t_{i-1})\delta u_i \\
&= -h\delta u_i + (t - t_{i-1})\delta u_i \\
||u_{i-1} + (t - t_{i-1})\delta u_i - u_i||^2 &= ||-h\delta u_i + (t - t_{i-1})\delta u_i||^2 \\
&= |-h + t - t_{i-1}|^2 ||\delta u_i||^2 \\
&\leq 4h^2 ||\delta u_i||^2 \\
&\leq \frac{C}{n}
\end{aligned}$$

alors :

$$||u^n - \bar{u}^n||_{L^2(I,L^2(\Omega))} \leq \frac{c}{\sqrt{n}}.$$

□

4 L'existence et l'unicité de la solution

Maintenant on va montrer que Le probleme discrétisé va converge vers notre problème variationnelle continue

4.1 Résultats de convergence de la solution

Selon le lemme (4.1.1) dans [14] on a :

$$h^m||\beta(u)-\beta^n(\bar{u})^n||_{L^2(I,\beta)} \leq C(h+h^{1-2m}) \tag{22}$$

ce qui donne :

$$\beta^n(\bar{u}^n) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \beta(u) \text{ dans } L^2(I,\beta) \tag{23}$$

D'autre part, D'aprés le Corollaire (3.4.1) on en déduit que la suite $\{\bar{u}^n\}_n$ uniformément bornée dans $L^2(I,V)$, par la suite nous pouvons extraire une sous suite $\{\bar{u}^{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\bar{u}^{nk} \underset{k\longrightarrow\infty}{\rightharpoonup} u \text{ dans } L^2(I,V) \tag{24}$$

Il résulte de (H_2) que :

$$\begin{aligned}
|f^n(t)-f(t)| &= |f_i(t)-f(t)|, t\in[t_{i-1},t_i]\\
|f^n(t)-f(t)| &\leq L|t_i-t|\\
&\leq Lh=\tfrac{LC}{n}=\tfrac{C}{n}
\end{aligned}$$

par suite :

$$\begin{aligned}
||f^n(t)-f(t)||_{L^2(I,V)} &= \int_0^t ||f^n(t)-f(t)||_V^2\\
&\leq \int_0^t \frac{C}{n^2}dx=\frac{C}{n^2}
\end{aligned}$$

sachant que :

$$||u||_\beta \leq \tfrac{1}{2}||u||_{L^2}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
2||f^n(t)-f(t)||_\beta^2 &\leq ||f^n(t)-f(t)||^2_{L^2(I,v)} \leq \tfrac{C}{n^2}\\
||f^n(t)-f(t)||^2_{L^2(I,\beta)} &= \int_0^T ||f^n(t)-f(t)||_\beta^2 dt\\
&\leq \int_0^T \frac{C}{n^2}dt
\end{aligned}$$

donc :

$$\|f^n(t)-f(t)\|_{L^2(I,\beta)} \leq \frac{C}{n}$$

D'ou :

$$f^n(t) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} f \text{ dans } L^2(I,\beta). \tag{25}$$

lemme 4.1.1. *La suite $\{K^n\}_n$ est uniformément bornée et possèdent une sous-suite $\{K^{nk}\}_k$ telle que :*

$$k^{nk} \underset{k\longrightarrow\infty}{\rightharpoonup} k \text{ dans } L^2(I,\beta) \tag{26}$$

preuve : la preuve est similaire à celle de [2].

lemme 4.1.2. *la propriété suivante est vérifiée :*

$$\partial_t\beta^{nk}(\bar{u}^{nk}) \underset{k\longrightarrow\infty}{\rightharpoonup} \partial_t\beta(u) \text{ dans } L^2(I,\beta^*) \tag{27}$$

preuve : D'aprsé le Corollaire (3.4.1) il est facile de voir que $\partial_t\beta^n(\bar{u}_n)$ est uniformément bornée dans $\beta(0,1)$ et donc une sous-suite $\{\partial_t\beta^{nk}(\bar{u}^{nk})\}$ telle que :

$$\partial_t\beta^{nk}(\bar{u}^{nk}) \underset{k\longrightarrow\infty}{\rightharpoonup} \xi \tag{28}$$

à l'aide du théoréme de Fubini, on obtient :

$$(\beta^{nk}(\bar{u}^{nk})-\beta^{nk}(U_0),\phi)=\int_0^t(\partial_t\beta^{nk}(\bar{u}^{nk}),\phi) \tag{29}$$

prenons la limite quad $K\longrightarrow\infty$, cette derniére donne :

$$(\beta(u)-\beta(U_0),\phi)=\int_0^t(\xi,\phi)ds \tag{30}$$

ce qui implique :

$$\left(\beta(u)-\beta(U_0)-\int_0^t\xi(s)ds,\phi\right)=0 \tag{31}$$

sachant que $\phi\in V$ et $V^\perp=\{0_v\}$ alors :

$$\beta(u)-\beta(U_0)=\int_0^t\xi(s)ds$$

par conséquent on a :

$$\partial_t \beta(u) = \xi(t) \text{ p.p}$$

par la suite :

$$\partial_t \beta(u) = \xi.$$

□

Le résultat principal de ce memoire est donnée dans le théorème suivant :

4.2 Le Théorème

Théorème 4.2.1. *la limite u est a solution faible du problème (p) dans le sens de la définition (3.3.1) si la solution faible u est unique alors la suite originale $\{u^n\}$ converge vers u.*

preuve : En vertu de (14)-(19), identité (7) peut étre ecrite comme suit :

$$\int_I (\partial_t \beta^n(\bar{u}^n), \phi)_\beta + \int_I (\bar{u}^n, \phi) = \int_I (f^n, \phi)_\beta + \int_I (K^n, \phi)_\beta, \forall \phi \in V \tag{32}$$

selon (24) on a $u \in L^2(I, V)$ et que $u(t) \in V$ presque pour tout $t \in I$
donc u satisfait (3), D'autre part (30) implique que $\beta(u(0)) = \beta(U_0)$ ce qui donne $u(0) = U_0$ (parce ce que β est fonction croissante continue).
maintenant remplaçant n par $n_k \longrightarrow \infty$ dans (32) puis en prenant (24), (26) le lemme (4.1.1), et (4.1.2) et en considération, il s'ensuit :

$$\int_I (\partial_t \beta(u), \phi)_\beta + \int_I (u, \phi) = \int_I (f, \phi)_\beta + \int_I (Ku, \phi)_\beta, \forall \phi \in V$$

Donc u est une solution faible de (P) dans le sens de la définition (3.3.1), L'unicité de la solution implique que la suite original $\{u^n\}_n$ est convergente vers u voir [5] □

4.3 Unicité de solution faible

Dans cette section, on va démontré l'unicité de solution faible, pour cela, on fait l'hypothese supplémentaire suivante :

H5)

$$||\beta(u_1) - \beta(u_2)||_\beta \geq C_0 ||u_1 - u_2||_\beta.$$

Notez que la monotonie de β implique $(\beta(u_1) - \beta(u_2), u_1 - u_2)_\beta \geq 0$.

4.4 Le Théorème

Théorème 4.4.1. *Sous les hypothèses (H1)-(H5) le probleme (p) a un unique, solution faible.*

preuve : On suppose que le problème (p) a deux solutions faibles u_1, u_2 puis $u = u_1 - u_2$

$$\int_I (\partial_t(\beta(u_1)-\beta(u_2)), \phi)_\beta dt + \int_I (u,\phi)dt = \int_I \left(\int_0^t a(t-s)[k(s,u_1)-k(s,u_2)]ds, \phi\right)_\beta dt \tag{33}$$

posons $W = \frac{1}{C_0}\max_I |a(t)| \int_0^T L(t)dt$, on divise l'intervalle I en sous-intervalles avec la longueur p telle que $W.P < 1$ est on choisissons la fonction ϕ dans (33) comme

$$\phi(t) = \begin{cases} u(t) & t \in [0,p] \\ 0 & t \in]p, T[\end{cases}$$

il est facile de voir que $\phi \in L^2(I,V)$ on obtient :

$$(\beta(u_1(p)) - \beta(u_2(p)), u_1(p) - u_2(p))_\beta + \int_0^p ||u||^2 dt = \int_0^p \left(\int_0^t a(t-s)[k(s,u_1)-k(s,u_2)]ds, u\right)_\beta dt \tag{34}$$

En utilisant les conditions (H_4), (H_5) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$\begin{aligned} C_0||u(p)||_\beta^2 = C_0||u_1(p)-u_2(p)||_\beta^2 &\leq (\beta(u_1(p)) - \beta(u_2(p)), u_1-u_2)_\beta \\ &\leq \int_0^p \left\| \int_0^t a(t-s)[k(s,u_1)-k(s,u_2)]ds \right\|_\beta .||u(t)||_\beta dt \end{aligned}$$

alors :

$$C_0||u(p)||_\beta^2 \leq \max_I |a(t)| \int_0^T L(t)dt.p. \max_{t\in[0.p]} ||u(t)||_\beta^2 \tag{35}$$

soit $t^* \in [0,p]$ tel que $\max_{t\in[0.p]} = ||u(t^*||_\beta$, il s'ensuit :

$$\int_0^{t^*} \frac{d}{dt}||u(t)||_\beta^2 dt \leq \int_0^p \frac{d}{dt}||u(t)||_\beta^2 dt = ||u(p)||_\beta^2 \tag{36}$$

ce qui implique :

$$\int_0^{t^*} ||u(t)||_\beta^2 = ||u(t^*||_\beta^2 \leq W.P||u(t^*||_\beta^2 \tag{37}$$

comme $W.P \prec 1$ il résultat :

$$u(t) = 0, \ \forall t \in [0, p]$$

de manière similaire sur les intervalles $[ip, (i+1)p]$, i=1... on obtient :

$$u(t) = 0, \ \forall t \in I$$

donc :

$$u_1 = u_2$$

□

5 References

[1] **A. Bouziani, N. Merazga,** Solution to a semiliear pseudoparabolic problem with integral conditions, E. J. D. E. 115(2006)1-18.

[2]**A. Chaoui and A. Guezane Lakoud,** solution to an integrodifferential degenerate equation witch integral condition to à pear in applied mathematics and computations B. P. 4.1.2400, Guelma. Algeria

[3] **A. Chaoui and A. Guezane Lakoud,** Rothe-Galerkin's method for a nonlinear integrodifferential equation, Boundary Value Problems 2012, 2012 :10

[4] **A. Guezane-Lakoud, D. Belakroum,** Rothe's method for a telegraph equation with integral conditions, Nonlinear Anal. 70 (2009) 3842_3853.

[5] **A. Guezane-Lakoud, M. S. Jasmati, A. Chaoui,** Rothe's method for an integro-differential equation with integral conditions, Nonlinear Analysis. 72 (2010) 1522_1530.

[6] **Brezis, haim.** Analyse fonctionnelle, Théorie et applications. masson 1987

[7] **C. N. Dawson,** C. J. vanDuijn, R. F. Grundy, Large time asymptotes in contaminant transport in porous media, SIAM J. Appl. Math. 56(4)(1996)965-993.

[8] **D. Bahuguna, S. Abbas, and J. Dabas,** Partial functional differential equation with an integral condition and applications to population dynamics. Nonliear analysis 69(2008) 2623-2635.

[9] **D. Bahuguna, V. Raghavendra,** Rothe's method to parabolic integrodiferential equation via abstact integrodifferential equation, Appl, anal, 33 (1989) 153-167.

[10] **E. Rothe,** Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenz fall eindimonsionaler Randwertaufgaben, Math. Ann. 102.(1930)650-670.

[11] **G. C. Sander,** J. Norbury, S. W. Weeks, An exact solution to the nonlinear diffusion-convection equationfor two phase flow, Q. J. Mech. Appl. Math. 46(4)(1993) 709-723.

[12] **K. Kuliev, L.-E. Persson,** An extension of Rothe's method to non-cylindrical domains, Application of mathematics, Vol. 52(2007), No. 5, 365-389.

[13] **K. Rektorys,** On application of direct variational methods to the solution of parabolic boundary value problems of arbitrary order in space variables, Czech. Math. J. 21 (1971) 318-339.

[14] **K. Rektorys,** The method of discretization in time and partial differential equations, D. Reidel Publishing Company, 1982.

[15] **memoire de Taleb charifa et benabassa Fatima** la méthode de Rothe sur une équation intégro-différentielle dégénérée dérigé par Dr. chaoui abderrazek

[16] **M.. S. El-Azab,** Solution of nonlinear transport-diffusion problems by linearization, Applied Mathematics and computation. 192(2007)205-215.

[17] **O. A. Ladyzenskaja,** On solution of nonstationary operator equations, Math. Sb. 39(4)(1956)

[18] **O. A. Ladyzenskaja,** Solution of the third boundary value problem for quasilinear parabolic equations, Trudy Mosk. Mat. Obs 7(1957)(in Russian).

[19] **Walter Rudin.** Analyse réelle et complexe. Masson, 1975.