République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématique appliqués**

Par :

ZALANI Lamia

Intitulé

Systèmes de contrôles continues et discrets d'ordres fractionnaires

Dirigé par : Dr. A.DEBBOUCHE

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr.**	**K.BOUKERIOUA**	**MCB**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr.**	**A.DEBBOUCHE**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr.**	**N.OUINESSE**	**MCB**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2015

Remerciement

*J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu **Allah** qui m'a donné*

la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

En tout premier lieu, je tiens à remercier

*Le docteur **A.DEBBOUCHE***

D'avoir encadré ce travail tout au long de ce mémoire, ses conseils m'ont été très précieux.

*Je remercier vivement le docteur **K.BOUKERIOUA** de m'avoir fait*

l'honneur de présider ce jury.

*Je remercier également madame **N.OUINESSE** membre de jury*

pour l'honneur qu'elle m'a accordé en acceptant ce juger mon travail.

Mes remerciements vont aussi à toutes les personnes du département

de mathématiques de l'université de Guelma 8- May- 1945.

Dédicace

A mon pére, ma mére

A mes fréres,

A mes sœurs ,

A kosai , Edrice , Haithem

A tout ceux qui m'aiment.

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire, on traite problème pour un systèmes de contrôles continues et discrets d'ordres fractionnaires avec une dérivée fractionnaire de *Riemann-Liouville* D^q d'ordre q $(0 < q < 1)$.

On obtient ainsi quelques résultats sur l'existence de la solution $\alpha-$mild de l'équation fractionnaire d'évolutions en question, à laide des théorèmes de point fixe de type de Leray-Schaulder, dans un espace de *Banach*. En suite, on étudie la contrôlabilité et l'accessibilité des systèmes dynamiques fractionnaires de type de *Sobolev*, et on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour la contrôlabilité et l'accessibilité par rapport aux ordres de dérivation fractionnaire.

Mots clés : Equations fractionnaires d'évolutions, semi-groupe analytique, solution mild, contrôle optimal, système linéaire fractionnaire, temps discret, contrôle de l'énergie minimal.

Introduction

Le concept des opérateurs d'ordres fractionnaires a été défini aux $19^{éme}$ siècle par *Riemann-Liouville* et *Leitinkov*. Leur but est de prolonger la dérivation ou l'intégration d'ordre fractionnaire entier et non entier. Il à été utilisé en mécanique de puis les années 1930 et en électrochimie depuis les années 1960. Plus tard, plusieurs mathématiciens et physiciens ont étudie les opérateurs différentiels et les systèmes d'ordre fractionnaire.

Dans le premier chapitre nous donnons quelques notions préliminaires essentielles, et plusieurs définitions et propriétés de l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire, nécessaires dans les chapitres suivants dans ce travail.

Dans le chapitre 2, nous considérons les équations fractionnaires d'évolutions et on étudie l'existence de solution α-mild, en utilisant le théorème de point fixe du *Banach* et du *Leray-Schaulder* pour démontrer l'existence de la solution mild, pour terminer en étudie l'existence de contrôle fractionnaire optimal.

Au chapitre 3. L'objectif de ce chapitre est de donner la forme intégrale de solution de l'équation d'état du système fractionnaire linéaire de *Sobolev* type avec retards dans le cas discret, on donne des conditions suffisantes et nécessaires de la contrôlabilité avec des entrées bornées.

Chapitre 1

Outils de base

Dans ce chapitre nous introduisons les espaces fonctionnels, le concept de dérivation et d'intégration fractionnaire et certaines des leurs propriétés principales. Nous rappelons ensuite quelques notions essentielles de l'analyse

fonctionnelle, la théorie de semi-groupe, calcul fractionnaire, et nous explicitons les différentes version du théorème du point fixe. Nous commençons par un rappel sur la l'analyse fonctionnelle.

1.1 Introduction d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Les opérateurs.

Opérateurs linéaires

- Un opérateur linéaire est une application $A : D(A) \subseteq X \to Y$ linéaire, où $D(A)$ est le domaine de définition de l'application linéaire A, qui un sous-espace vectoriel de X, que l'on suppose en général dense dans X.
- L'opérateur $A : D(A) = X \to Y$ est dit borné si la quantité

$$\|A\| = \sup \{\|Au\|_Y , u \in D(A), \|u\|_X = 1\};$$

est finie.

- Dans ce cas A est une application linéaire continue sur $D(A)$, et lorsque $D(A)$ est dense dans X, A s'étend de manière unique à un opérateur borné sur X.

- Tout opérateur A est complètement défini par son graphe $G(A)$ qui est un sous-espace vectoriel de $X \times Y$ défini par :

$$G(A) = \{(v, Av), v \in D(A)\}.$$

Opérateurs bornés

On note $\mathcal{L}(X,Y)$ $(resp.\mathcal{L}(X))$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires continues de X dans Y ($resp.$ Des endomorphismes continus de X) muni de la topologie de la convergence uniforme :

$$B \in \mathcal{L}(X,Y), \|B\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Bu\|_Y}{\|u\|_X}.$$

Opérateurs compacts

Définition 1.1.1 *Soient X et Y deux espaces de Banach. Une application $T \in L(X,Y)$ est dite compacte si l'image $T(B_E(0,1))$ par l'application T de la boule unité de X est relativement compacte, i.e., $\overline{T(B_E(0,1))}$ est un ensemble compact pour la topologie forte de $Y \overset{déf}{\Leftrightarrow}$ pour toute suite bornée (x_n) de X, la suite (Tx_n) admet une sous-suite qui converge dans Y.*

Théorème 1.1.1 *Tout opérateur compact $A \in L(X,Y)$ fait correspondre à un ensemble borné dans X un ensemble compacte dans Y.*

- On remarque que A est compact si et seulement si l'image de toute partie bornée est relativement compacte ou, de façon équivalente si et seulement si, l'image de toute suite bornée possède une sous-suite convergente.
- D'après le lemme de *Reisz,* l'identité d'un espace vectoriel normé est compacte si et seulement si cet espace est de dimension finie.
- Tout opérateur de rang fini est compact.
- Si $A = \lim_{n \to \infty} A_n$ (au sens de norme de $L(X,Y)$), ou les A_n sont des opérateurs compacts ou des démentions finis alors, A est un opérateur compact.
- Soient $A \in L(X,Y)$ et $B \in L(X,Y)$, si l'un quelconque (au moins) de ces deux opérateurs est compact, leurs produit BA sont des opérateurs compacts.

Définition 1.1.2 *On dit que l'ensemble A est convexe de E si et seulement si :*

$$\forall x, y \in A \text{ et } \forall \lambda \in [0,1], \text{ alors } \lambda x + (1-\lambda) y \in A.$$

Lemme 1.1.1 *Si $\{C_i\}_{i\in I}$ sont des ensembles convexes de E, alors $\cap_{i\in I} C_i$ est un ensemble convexe de E.*

Définition 1.1.3 *On dit que U est un espace topologique séparé si pour tout $x, y \in U$, si ils existent deux voisinages X et Y de x et y respectivement tels que : $X \cap Y = \phi$.*

1.1.2 Les espaces $\mathbf{L}^P$

Les espaces L^p sont des espace de fonctions dont la puissance $p-$*iéme* de la fonction est intégrable, au sens de *Lebesgue.*

Définition 1.1.4 *Soit $\Omega =]a,b[\, (-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle borné ou non borné de $\mathbb{R}$. On définit l'espace L^p, pour $1 \leq P < \infty$, comme suit :*

1. Pour $1 \leq P < \infty, L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables de puissance $P^{\text{iéme}}$ intégrables sur Ω , c'est-à-dire :

$$f \in L^p(\Omega) \Longleftrightarrow \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty, f \text{ mesurable.}$$

$\|f\|_P = \left(\int |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $L^P(\Omega)$.
$(L^p(\Omega), \|.\|_P)$ est un *Banach.*

2. Pour $p = 2$ alors :

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : f \text{ mesurable à carré intégrable sur } \Omega; \int_\Omega |f|^2(x) \, dx < \infty \right\},$$

$\left(L^2(\Omega); (.,.)_{L^2(\Omega)}\right)$ est un *Hilbert,* ou $\langle .,. \rangle_{L^2(\Omega)}$ est le produit scalaire défini par :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x) . g(x) \, dx, \forall f, g \in L^2(\Omega).$$

3. pour $P = \infty$, $L^{\infty}(\Omega)$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur Ω.

Définition 1.1.5 *f est dite essentiellement bornée sur Ω s'il $\exists M > 0$ telle que :*

$$\|f\|_{\infty} = \underset{x\in\Omega}{ess\sup}\,|f(x)| = \inf\{M \geq 0; |f(x)| \leq M.\text{p.p sur } \Omega\},$$

$(L^{\infty}(\Omega), \|.\|_{\infty})$ est un *Banach.*

1.1.3 Transformation de Laplace

La transformée de *Laplace* intervient dans la résolution des équations et des systèmes différentiels. Rappelons quelques outils de base de la transformée de Laplace.

1. Si la fonction f est d'ordre exponentiel α (c'est à dire qu'il existe deux constantes positives M et T tels que : $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ pour $t > T$), alors la fonction F de la variable complexe s définie par :

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_{0}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

Est appelée la transformée de *Laplace* de la fonction f

2. L'originale $f(t)$ peut être reconstituée à partir de la transformée de *Laplace* $F(s)$ à l'aide de la transformée de *Laplace* inverse :

$$f(t) = L^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s)\, ds; c = \operatorname{Re}(s) > c_0.$$

3. La transformée de Laplace de la convolution :

$$f(t) * g(t) = \int_{0}^{t} f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau = \int_{0}^{t} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau,$$

sous l'hypothèse que $F(s)$ et $G(s)$ existent.

4. La transformée de *Laplace* du produit de deux fonctions f et g qui sont nulles pour $t < 0$ est égale au produit de leurs transformées de *Laplace*.
$$L\left\{f\left(t\right) * g\left(t\right); s\right\} = F\left(s\right) G\left(s\right)$$

5. La transformée de *Laplace* d'une dérivée d'ordre entier est :
$$\begin{aligned} L\left\{f^{(n)}\left(t\right); s\right\} &= s^n F\left(s\right) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}\left(0\right) \\ &= s^n F\left(s\right) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}\left(0\right). \end{aligned}$$

6. La transformée de *Laplace* de la fonction t^{p-1} est :
$$L\left[t^{p-1}\right](s) = T\left(p\right) s^{-p}.$$

Définition 1.1.6 *L'opérateur :*
$$\begin{aligned} \Re &: A_\omega \to \beta\left(\varepsilon\right), \\ \Re\left(\lambda\right) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T\left(t\right) dt. \end{aligned}$$

S'appelle la transformée de *Laplace* du semi-groupe $\left\{T\left(t\right)\right\}_{t \geq 0} \in SG\left(M, \omega\right)$.

1.1.4 Transformation de Fourier

Outils de base pour la transformée de Fourier

1. La transformée de *Fourier* d'une fonction continue $h(t)$, absolument intégrable dans $(-\infty, +\infty)$ est définie par :
$$F_e\left\{h\left(t\right); \omega\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} h\left(t\right) dt,$$

2. L'originale $h(t)$ peut être reconstituée à partir de sa transformée de *Fourier* $h_e(t)$ à l'aide de sa transformée de Fourier inverse :
$$h\left(t\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_e\left(\omega\right) e^{-i\omega t} d\omega.$$

3. La transformée de *Fourier* de la convolution

$$h(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

de deux fonctions $h(t)$ et $g(t)$, définies sur $(-\infty, \infty)$, est égale au produit de leurs transformées de *Fourier* :

$$F_e \{h(t) * g(t) ; \omega\} = H_e(\omega) G_e(\omega).$$

4. Sous l'hypothèse $H_e(\omega)$ et $G_e(\omega)$ existent. Nous allons utiliser la propriété (3) afin d'évaluer la transformée de Fourier de l'intégrale fractionnaire de *Riemann-Liouville et la transformée de Fourier des dérivée* fractionnaires.

Si $h(t), \acute{h}(t), \ldots, h^{(n-1)}(t)$ tendent vers zéro quand $t \longrightarrow \pm\infty$, alors la transformée de *Fourier* de la $n^{-éme}$ dérivée de $h(t)$ est :

$$F_e \left\{h^{(n)}(t) ; \omega\right\} = (-i\omega)^n H_e(\omega).$$

La transformée de Fourier est un outil très puissant pour plusieurs domaines d'analyse des systèmes dynamiques linéaires.

Transformée de Fourier pour les intégrales fractionnaires

Nous allons calculer la transformée de *Fourier* de l'intégrale fractionnaire de *Riemann-Liouville* avec la borne inférieure $a = -\infty$, i.e de

$${}_{-\infty}D_t^{-\alpha} g(t) = \frac{1}{T(\alpha)} \int_{-\infty}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau$$

où nous supposons $0 < \alpha < 1$.

- La transformée de *Fourier* de la fonction

$$h(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{T(\alpha)}$$

- La transformée de *Fourier* de l'intégrale fractionnaire de *Riemann-Liouville*, laquelle peut s'écrire comme la convolution des fonctions $h_+(t)$ et $g(t)$:

$${}_{-\infty}D_t^{-\alpha} f(t) = h_+(t) * g(t).$$

$$F_e\left\{{}_{-\infty}D_t^{-\alpha} g(t);\omega\right\} = (i\omega)^{-\alpha} G(\omega),$$

ou $G(\omega)$ est la transformée de *Fourier* de la fonction $g(t)$.

Transformée de Fourier des dérivées fractionnaires

Calculons maintenant la transformée de *Fourier* des dérivée fractionnaires.

En considérant la borne inférieure $a = -\infty$ et en exigeant un raisonnable comportement de la fonction $g(t)$ quand $t \to -\infty$ et ses dérivées pour $t \to -\infty$, on peut faire une intégration par parties et écrire les définitions de *Riemann-Liouville*, de *Grunwald-Letnikov* et *Caputo sous la même forme :*

$$\left.\begin{array}{l} {}_{-\infty}D_t^{\alpha} g(t) \\ {}_{-\infty}D_t^{\alpha} g(t) \\ {}_{-\infty}^{C}D_t^{\alpha} g(t) \end{array}\right\} = \frac{1}{T(n-\alpha)} \int_{-\infty}^{t} \frac{g^{(n)}(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} =_{-\infty} D_t^{-\alpha} g^{(n)}(t), (n-1<\alpha<n).$$

1. La transformée de *Fourier* fractionnaire de avec l'utilisation de la transformée *Fourier de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et La transformée de Fourier d'une dérivée d'ordre entier donne la formule suivante pour la transformée de Fourier de la dérivée fractionnaire* de *Riemann-Liouville*, de Grunwald-Letnikov et Caputo avec la borne inférieure $a = -\infty$

$$\begin{aligned} F_e\{D^{\alpha} g(t);\omega\} &= (-i\omega)^{\alpha-n} F_e\left\{g^{(n)}(t);\omega\right\} \\ &= (-i\omega)^{\alpha-n} (-i\omega)^{n} G(\omega) \\ &= (-i\omega)^{\alpha} G(\omega). \end{aligned}$$

Où le symbole D^{α} désigne n'importe quelle différentiation fractionnaire mentionnée ci-dessus :

Riemann-Liouville ${}_{-\infty}D_t^{\alpha}$, *Grunwald-Letnikov*${}_{-\infty}D_t^{\alpha} g(t)$
ou *Caputo*${}_{-\infty}^{C}D_t^{\alpha} g(t)$.

1.2 La théorie de semi-groupe

Définition 1.2.1 *Soit X un espace de Banach. Une famille de paramètre $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, d'opérateurs linéaires bornés de X vers X, est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si :*

1. $T(0) = I$ (I est l'opérateur identité sur X).
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$ pour tout $t, s \geq 0$ (propriété algébrique des semi-groupes).

Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés $T(t)$, est uniformément continu si :

$$\lim_{t \to 0} \|T(t) - I\| = 0.$$

L'opérateur linéaire A défini par:

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

et

$Ax = \lim\limits_{t \to 0} \frac{T(t)x-x}{t} = \frac{dT(t)x}{dt}|_{t=0}$, pour $x \in D(A)$, est le générateur infinitésimal du semi-groupe $T(t)$, $D(A)$ est le domaine de A.

Remarque 1.2.1 *Par cette définition, si $T(t)$ est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés uniformément continu,*

$$\lim_{t \to 0} \|T(s) - T(t)\| = 0.$$

Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu, si et seulement si A est un opérateur linéaire borné.

Soient $S(t)$ et $T(t)$ deux semi-groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés.

Si :

$$\lim_{t \to 0} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t \to 0} \frac{s(t) - I}{t}.$$

Alors :

$$T(t) = S(t), \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Corollaire 1.2.1 *Soit $T(t)$ un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés, alors :*

1. Il existe une constante $\omega \geq 0$, telle que $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$.
2. Il existe un unique opérateur linéaire A tel que $\|T(t)\| = e^{tA}$, l'opérateur A est le générateur infinitésimal de $T(t)$.

3. $t \longrightarrow T(t)$ est différentiable en norme et,

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

1.2.1 Continuité forte des semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés

Définition 1.2.2 *Un semi-groupe $T(t)$, $0 \leq t \leq \infty$, d'opérateurs linéaires bornés sur X est un semi-groupe fortement continu, d'opérateurs linéaires bornés si :*

$$\lim_{t \to 0} T(t)x = x \text{ , pour tout } x \text{ de } X.$$

Un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur X est appelé un semi-groupe de classe C_0.

Théorème 1.2.1 *Soit $T(t)$ un semi-groupe de classe C_0. Il existe une constante $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tels que :*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}.$$

Corollaire 1.2.2 *Si $T(t)$ est un C_0-semi-groupe, alors pour tout $x \in X$, $t \longrightarrow T(t)$ est une fonction continue de $\mathbb{R}_0^+$ dans X.*

Théorème 1.2.2 *Soit $T(t)$ un C_0-semi-groupe et soit A son générateur infinitésimal, alors :*

1. Pour $x \in X$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

2. Pour $x \in X$,

$$\int_0^t T(s)x ds \in D(A).$$

$$A\left(\int_0^t T(s)x ds\right) = T(t)x - x.$$

3. Pour $x \in D(A), T(t)x \in D(A)$ et,
$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$
4. pour $x \in D(A)$
$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\sigma)Axd\sigma = \int_s^t AT(\sigma)xd\sigma.$$

Corollaire 1.2.3 *Si A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $T(t)$, alors $D(A)$ le domaine de A, est dense dans X et A est un opérateur linéaire fermé.*

1.2.2 Semi-groupes différentiables

Définition 1.2.3 *On dit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe différentiable si l'application :*
$$t \in]0,+\infty) \mapsto T(t)x \in X$$
est différentiable pour chaque $x \in X$.

1.2.3 Semi-groupes analytiques

Soit $\triangle = \{\theta_1 < \arg z < \theta_2; \theta_1 < 0 < \theta_2\}$ et pour $z \in \triangle$, soit $T(z)$ un opérateur linéaire borné. La famille $\{T(z)\}$, $z \in \triangle$ est un semi-groupe analytique sur $\triangle$ si :

1. $z \mapsto T(z)$ est analytique sur X.
2. $T(0) = I$ et $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z\in\triangle}} T(z)x = x$ pour tout $x \in X$.
3. $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ pour $z_1, z_2 \in \triangle$.

1.2.4 Semi-groupes d'opérateurs compacts

Définition 1.2.4 *Un semi-groupe $S(t)$ de classe C_0 est dit compact pour $t > t_0$, si pour tout $t > t_0$, $S(t)$ est un opérateur compact. $S(t)$ est compact s'il est compact pour tout $t > 0$.*

Théorème 1.2.3 *Soit $S(t)$ un semi-groupe de classe C_0. Si $S(t)$ est compact pour $t > t_0$, alors $S(t)$ est continu par rapport à la topologie uniforme des opérateurs pour $t > t_0$.*

Remarque 1.2.2 *Si $S(t)$ est compact pour $t \geq 0$, alors l'identité est compact et X est de dimension finie. De plus, s'il existe $t_0 > 0$ tel que $S(t_0)$ est compact, alors $S(t)$ l'est aussi pour tout $t \geq t_0$ car $S(t) = S(t - t_0) S(t_0)$ et $S(t - t_0)$ est borné.*

Corollaire 1.2.4 *Soit $S(t)$ un semi-groupe de classe C_0 et soit A son générateur infinitésimal. Si $R(\lambda, A)$ est compact pour un certain $\lambda \in \rho(A)$ et $S(t)$ est continu par rapport à la topologie uniforme des opérateurs pour $t > t_0$, alors $S(t)$ est compact pour $t > t_0$.*

Définition 1.2.5 *on dit que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe immédiatement compact, si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est compact pour tout $t > 0$, et C_0-semi-groupe éventuellement compact s'il existe $t_0 > 0$ tel que $\{S(t_0)\}$ est compact.*

1.2.5 Le théorème de Hill-Yoshida

Soit $T(t)$ un semi-groupe de classe C_0. Du théorème (1.2.1), on déduit qu'il ya des constantes $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tels que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \text{ pour } t \geq 0.$$

- Si $\omega = 0$, $T(t)$ est dit uniformément borné, et si de plus $M = 1$ on l'appelle un C_0-semi-groupe de contraction.
- Si A est un opérateur linéaire pas nécessairement borné dans X, l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A est l'ensemble de tous les nombres complexes λ pour lesquels $\lambda I - A$ est inversible, i.e. $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire dans X.

La famille $\Re(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}, \lambda \in \rho(A)$ des opérateurs linéaires bornés, est appelée la résolvante de A.

Théorème 1.2.4 *(Hill-Yosida)*

Un opérateur linéaire borné A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe C_0 de contraction $T(t), t \geq 0$, si et seulement si :

1. A est fermé et $\overline{D(A)} = X$.

2. L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A contient $\mathbb{R}^+$ et pour tout $\lambda > 0$;

$$\|\Re(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

On défini pour tout $\lambda > 0$, l'approximation *Yoshida* de A par :

$$A_\lambda = \lambda A \Re(\lambda : A) = \lambda^2 \Re(\lambda : A) - \lambda I.$$

Corollaire 1.2.5 *Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe satisfaisant :*

$$\|T(t)\| \leq e^{\omega t};$$

si et seulement si,

1. A est fermé et $\overline{D(A)} = X$.
2. L'ensemble résolvant $\rho(A)$, de A contient l'axe $\{\lambda : \operatorname{Im}\lambda = 0, \lambda > \omega\}$, tels que :

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}.$$

1.3 Calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse dont l'étude se rapporte aux opérateurs d'intégration et dérivation d'ordre non entier.

Dans cette section nous présentons des définitions et quelques propriétés pour les fonctions spéciales, et nous présentons aussi déférentes notions de la différentiation et intégration. Le choit étant réduit aux définitions qui sont liées aux applications.

1.3.1 Les fonctions spéciales

La Fonction Gamma

En mathématique, la fonction *Gamma* est une fonction complexe, cette fonction généralise le factoriel $n!$, considérée comme fonction spéciale dans le calcul fractionnaire, Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$, on définie la fonction *Gamma*, notée par T :

$$T(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt\,;$$

où

$$t^{z-1} = e^{(z-1)\log(t)}.$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.

Lemme 1.3.1 *La fonction Gamma satisfaite les propriétés suivantes :*

1. Pour $\operatorname{Re}(z) > 0$,
$$T(z+1) = zT(z).$$
En particulier, $T(1) = 1$, en déduit : $\forall n \in N, T(n+1) = n!$.
2. On peut représenter $T(z) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n! n^z}{(z+1)\ldots(z+n)}$, $\operatorname{Re}(z) > 0$.
3. $\frac{1}{T(-m)} = 0, (m = 0, 1, 2, \ldots)$.
4. $T(1) = 1, T\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Remarque 1.3.1 *La fonction Gamma est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa dérivée est :*

$$\acute{T}(z) = T(z)\,\psi(z),$$

où

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln(T(z)).$$

Définition 1.3.1 *La formule du binôme généralisée $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{N}$ est donnée par :*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\beta+1)}{\beta!}, (\beta \in \mathbb{N}^*).$$

En particulier, pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{pmatrix} n \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{n!}{\beta!\,(m-\beta)!}, \; n \geq \beta.$$

Définition 1.3.2 *Cette formule peut être exprimée en terme de fonction Gamma pour $\alpha \notin \mathbb{Z}_{-}^{*}$, comme suit :*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{T(\alpha+1)}{\beta! T(\alpha-\beta+1)}; (\alpha \in \mathbb{C}; \alpha \notin \mathbb{Z}_{-}^{*}; \beta \in \mathbb{N}).$$

La fonction Bêta

Définition 1.3.3 *La fonction Bêta est une type d'intégrale d'Euler définie pour tout complexes r et s par :*

$$B(r,s) = \int_{0}^{1} t^{r-1} (1-t)^{s-1} dt, \mathrm{Re}(r) > 0, \mathrm{Re}(s) > 0.$$

Cette fonction est reliée à la fonction *Gamma* par la relation suivante :

$$B(r,s) = \frac{T(r) T(s)}{T(r+s)}, (\forall r, s; \mathrm{Re}(r) > 0, \mathrm{Re}(s) > 0).$$

Remarque 1.3.2 *La fonction Bêta est symétrique i.e.*

$$B(r,s) = B(s,r).$$

La fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.3.4 *pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffler $E_{\alpha}(z)$ notée par $(M-L)$ est définie comme suit :*

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{T(\alpha k+1)}, (R(\alpha) > 0),$$

et la fonction de *Mittag-Leffler* généralisée $E_{\alpha,\beta}(z)$ est définie comme suit :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{T(\alpha k+\beta)}, (\alpha > 0; \beta > 0).$$

Exemple 1.3.1 *pour des valeurs spéciales de α et β on a :*

1. $E_1(z) = E_{1,1}(z) = e^z$.
2. $E_{1,2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z}\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)} = \frac{1}{z}(e^z - 1)$.

Théorème 1.3.1 *La fonction de Mittag-Leffler possède les propriétés suivantes :*

1. pour $|z| < 1$ la fonction de *Mittag-Leffler* généralisée satisfait :
$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(zt^{\alpha})\, dt = \frac{1}{z-1}.$$
2. La transformée de *Laplace* de cette fonction est donnée par :
$$L\left[z^{\alpha m+\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{(m)}(+az^{\alpha})\right](s) = \frac{m! s^{\alpha-\beta}}{(s^{\alpha}-a)^{m+1}}, \operatorname{Re}(s) > |a|^{\frac{1}{\alpha}},$$
où $E_{\alpha,\beta}^{(m)}(y) = \frac{d^m}{dy^m} E_{\alpha,\beta}(y)$.
3. Intégration de la fonction de $M-L$:
$$\int_0^z E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})\, t^{\beta-1} dt = z^{\beta} E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^{\alpha}).$$
4. La dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la fonction de $M-L$ est donnée par :
$$\frac{d^n}{dz^n}\left(z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda z^{\alpha})\right) = z^{\beta-n-1} E_{\alpha,\beta-n}(z^{\alpha}).$$

La fonction Wright

- Fonction Wright est définie comme suit :
$$W(z;\alpha,\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\Gamma(\alpha k+\beta)}.$$

Cette fonction peut être représentée par l'intégrale suivante :
$$W(z;\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} \tau^{-\beta} e^{\tau+z^{-\alpha}} d\tau.$$

Où Ha désigne le contour de *Hankel.*

– La relation avec d'autres fonctions

On à :

$$W(z;0,1) = e^z, \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} W\left(\mp\frac{z^2}{4};1,\nu+1 = \left\{\begin{array}{l} J_\nu(z) \\ I_\nu(z). \end{array}\right.\right).$$

Si on Prendre $\beta = 1-\alpha$, nous obtenons la fonction de *Mainardi* $M(z;\alpha)$ de la forme :

$$W(-z;-\alpha,1-\alpha) = M(z;\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k!T(-\alpha(k+1)+1)}.$$

– Le cas particulier de la fonction Wright est donnée par :

$W\left(-z;-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = M\left(z;\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{4}\right)$, à été examiné par *Mainardi*.

La fonction Wright est une généralisation de la fonction exponentielle et fonction *Bessel*.

Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ il est une fonction entière dans z.

Mainardi a souligné que $W(z;\alpha,\beta)$ est une fonction entière en z pour $\alpha \in]-1,0[$.

– Avec la relationship on à :

$$T(y)T(1-y) = \frac{\pi}{\sin(\pi y)},$$

Nous pouvons écrire la fonction Wright sous la forme d'une série de majorant auxiliaire :

$$W(z;\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k T(1-\alpha k-\beta)\sin\pi(\alpha k+\beta)}{k!}, \text{ pour } \alpha \in]-1,0[,$$

– Le rayon R de convergence de la série pour $\alpha \in]-1,0[$ est définit par :

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{T(1-\alpha k-\beta)}{k!}\frac{(k+1)!}{T(1-\alpha k-\alpha-\beta)}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{|\alpha|^{\alpha}k^{-\alpha}} = \infty, \text{ (infini)}.$$

- La transformée de Laplace de la fonction Wright à l'aide de la fonction *Mittag-Leffler* est définit comme :

$$\begin{aligned} L\{W(t;\alpha,\beta);s\} &= L\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!T(\alpha k+)};s\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{T(\alpha k+)}.\frac{1}{s^{k+1}} \\ &= s^{-1}E_{\alpha},\beta\left(s^{-1}\right). \end{aligned}$$

1.3.2 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.3.5 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale fractionnaire de Riemann Liouville $I_{a+}^{\alpha}f$ et $I_{b-}^{\alpha}f$ d'ordre α d'une fonction f est définie par :*

$$J_{a+}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{T(\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, (x > a; R(\alpha) > 0).$$

S'appelle intégrale fractionnaire d'ordre α à gauche,
et

$$J_{b-}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{T(\alpha)}\int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, (x < b; R(\alpha) > 0).$$

S'appelle intégrale fractionnaire d'ordre α à droite, pour $(-\infty < a < b < \infty)$.
- Pour $\alpha = 0$, on a :

$$J_{a+}^0 = I, J_{b-}^0 = I, \text{(l'opérateur identité)}.$$

- pour $\alpha = n \in N^*, J_a^{\alpha}$ coincide avec l'intégrale répéter n-fois de la forme :

$$(J_a^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt.$$

La transformée de Laplace de l'intégral fractionnaire de Riemann-Liouville

Lemme 1.3.2 *Soit $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ et $f \in L^1(0, b)$ pour tout $b > 0$, alors la transformée de Laplace de l'intégral fractionnaire de $R - L$ est formulée comme suit :*

$$L\{I_0^\alpha f(t); s\} = s^{-\alpha} F(s).$$

1.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La Dérivée fractionnaire au sens de *Riemann-Liouville* $D_{a+}^\alpha f$ d'ordre réel $\alpha > 0$, est définie par :

$$\begin{aligned} D_{a+}^\alpha f &= \frac{d^n}{dt}\left(I_{a+}^{n-\alpha} f(t)\right) \\ &= \frac{1}{T(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds, (n = [\alpha] + 1, t > a). \end{aligned}$$

Ou $[.]$ dénote la partie entière d'un nombre réel.
En particulier, quand $\alpha = 0$, nous obtenons :

$$D_a^0 f(t) = If(t), D_{a+}^n f(t) = f^{(n)}(t),$$

i) Pour $\alpha = n \in N$, on a :

$$D_a^n f(t) = D^n f(t).$$

ii) pour $\alpha \in N$, la dérivée fractionnaire de $R - L$ coincide avec la dérivée usuelle $f(t)$.

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de *Riemann-Liouville*

La formule de la transformée de *Laplace* de la dérivée fractionnaire de *Riemann-Liouville* d'ordre $\alpha > 0$ est donnée par :

$$L\{D_0^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[D^{\alpha-k-1} f(t)\right]_{t=0}, (n - 1 < \alpha < n).$$

1.3.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire, exprimée par :

$$ {}_{x_0}^{c}D_x^{\alpha} = \frac{1}{T(\alpha - n)} \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n)}(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, (n - 1 < \alpha < n) ; $$

avec n un entier positive vérifiant l'inégalité $(n-1) < \alpha < n$.

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo

La formule de la transformée de *Laplace* de la dérivée fractionnaire de *Caputo* est donnée par :

$$ L\left\{ {}^{c}D_0^{\alpha} f(t) ; s \right\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) ; $$

avec $(n-1) < \alpha < n$.

1.4 Les théorèmes du point fixe.

1.4.1 L'espace de Banach

Définition 1.4.1 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

1.4.2 Théorème du point fixe du type Banach

Ce théorème est dit principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

Théorème de l'application contractante

Soit (M, d) un espace métrique complet et l'application $T : M \to M$.

On dit que T est une application lipchitzienne s'il existe une constante positive $k \geq 0$ telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments x, y de M, l'inégalité

$$d(T(x), T(y)) \leq k(d(x, y)).$$

- Si $k \leq 1, T$ est appelé non expansive.
- Si $k < 1, T$ est appelé non contraction.

Définition 1.4.2 *Soit X un espace de Banach de norme $\|.\|$, et $f : X \to X$.*

On dit que f est lipchitzienne s'il existe $k \geq 0$ tels que :

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \forall x, y \in X.$$

Théorème 1.4.1 *(théorème du point fixe de Banach)*

Soit (M, d) un espace métrique complet et soit $T : M \to M$ une application contractante avec la constante de contraction k alors T a un unique point fixe $x \in M$.

De plus nous avons la propriété suivante qui est importante :

- Si $x_0 \in M$ et $x_n = Tx_{n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$;

et

- $d(x_n, x) \leq k^n (1-k)^{-1} d(x_1, x_0), n \geq 1,$
- x étant le point fixe de T.

Le théorème du point fixe de *Schaulder* est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Et nous avons le résultat suivant :

1.4.3 Théorème (Leray-Schaulder)

Soit (X, d) un espace métrique complet et soit D un sous-ensemble convexe fermé de X. Si $T : X \to X$ est une application et D est relativement compact dans X, alors l'opérateur T admet au moins un point fixe $x^* \in D$

$$Tx^* = x^*.$$

Remarque 1.4.1 *Dans le cas ou D est compact et convexe, il suffit que F soit continue pour avoir un point fixe pour F.*

1.5 Théorème d'Arzela-Ascoli

Les conditions nécessaires et suffisantes exigées pour que D soit un ensemble relativement compact dans l'espace des fonctions continues $C[a,b]$ sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ fini et fermé sont données le théorème d'*Arzela-Ascoli*.

Avant présenter ce théorème, rappelons les définitions des ensembles équicontinus et uniformément bornés.

Définition 1.5.1 *On dit que G un ensemble équicontinu si pour tout $\varepsilon > 0$,*

il existe $\delta > 0$ tel que $\forall g \in G$ et $\forall x_1, x_2 \in [a,b], |x_1 - x_2| < \delta$ on a $|g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon$.

Définition 1.5.2 *On dit que G un ensemble uniformément borné s'il existe un constante $M > 0$ tel que $\|g\|_\infty \leq M$ pour tout $g \in G$.*

Maintenant, on peut citer le théorème *d'Arzela-Ascoli*.

Théorème 1.5.1 *Soit G un sous-ensemble de $C[a,b]$. Si $C[a,b]$ muni une norme de Tchebychev, alors G est relativement compact dans $C[a,b]$ si et seulement si G est équicontinu et uniformément borné.*

1.6 Inégalité de Holder

Théorème 1.6.1 *Soient $X \subset R^N$ mesurables, ainsi que deux réels $p, q \in [1, \infty]$ tels que :*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ avec la convention } 1/\infty = 0.$$

Soient $f \in L^P(X)$ et $g \in L^q(X)$. Alors le produit $fg \in L^1(X)$ et on a :

$$\int_X |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_X |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad si\ p, q < \infty,$$

tandis que

$$\int_X |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \sup_{x \in X} ess\, |g(x)| \int_X |g(x)|\, dx \text{ si } p = 1 \text{ et } q = \infty.$$

1.7 Inégalité de Gronwall :

soient $c \in \mathbb{R}^+$, et $k = \xi([a,b], \mathbb{R}^+)$, et $\phi \in \xi([a,b], \mathbb{R}^+)$ la fonction donnée satisfaite :

$$\varphi(t) \leq c + \int_a^t k(s)\,\varphi(s)\,ds, t \in [a,b],$$

alors

$$0 \leq \varphi(t) \leq c.\exp\left(\int_a^t k(s)\,ds\right).$$

Chapitre 2

Une classe d'équation fractionnaire d'évolution et des contrôles optimaux

Dans ce chapitre, nous considérons les équations fractionnaires d'évolution suivantes tels que :

$$\begin{cases} D^q x(t) = A(t) + f(t, x(t)) + \int_0^t g(s, x(s))\, ds, \\ x(0) = x_0 + h(x(t)), \\ t \in j = [0, T], q \in (0, 1). \end{cases} \tag{2.1}$$

- D^q est la dérivée fractionnaires de *Caputo* d'ordre q $(0 < q < 1)$.
- $A : D(A) \to X$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique.
- $\{T(t), t \geq 0\}$ est une famille d'opérateurs linéaires uniformément bornées, compact.
- $h : j \times X_\alpha \to X$ est une fonction abstraite continue.
- $f : j \times X_\alpha \to X, g : j \times X_\alpha \to X$, sont des fonctions satisfaisant certaines hypothèses.
- $X_\alpha = D(A^\alpha), (0 < \alpha < 1)$ est un espace de *Banach* avec la norme :
- $\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|$ pour tout $x \in X_\alpha$.
- x_0 est un élément de l'espace Banach X.

2.1 Préliminaires

Dans cette section, nous présentons quelques faits sur les puissances fractionnaires du générateur d'un semi-groupe analytique compact, l'opérateur fractionnaire de Riemann-Liouville qui seront utilisé dans le présent chapitre.

On note X par un espace de *Banach* avec la norme $\|.\|$ et $A : D(A) \longrightarrow X$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\{T(t), t \geq 0\}$ des opérateurs linéaires compacts , uniformément bornés sur X. Il signifie quel existe $M > 1$ tel que $\|T(t)\| \leq M$.

Nous supposant sans perte de généralité que $0 \in \rho(A)$. Cela nous permet de définir la puissance fractionnaire pour $0 < \alpha < 1$, comme opérateur linéaire fermé sur sont domaine $D(A)$ avec inverse $A^{-\alpha}$.

Nous avons les propriétés de base suivantes :

Théorème 2.1.1

1. $X_\alpha = D(A^\alpha)$ est un espace de *Banach* avec la norme $\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|$ pour tout $x \in X_\alpha$.
2. $T(t) : X \longrightarrow X_\alpha$ pour chaque $t > 0$.
3. $A^\alpha T(t) x = T(t) A^\alpha x$ pour chaque $x \in X_\alpha$ et $t \geq 0$.
4. pour tout $t > 0, A^\alpha T(t)$ et borné dans X et ils existent $M_\alpha > 0$ et $\gamma > 0$ tels que :
$$\|A^\alpha T(t)\| \leq \frac{M_\alpha}{t^\alpha} e^{-vt} \leq \frac{M_\alpha}{t^\alpha}.$$
5. $A^{-\alpha}$ est un opérateur Linéaire borné dans X avec $X_\alpha = \operatorname{Im}(A^{-\alpha})$.
6. Si $0 < \alpha \leq \beta < 1$, alors $D(A^\beta) \hookrightarrow D(A^\alpha)$.

Remarque 2.1.1 *D'après le théorème* (2.1.2) *et* (3), *la restriction* $T_\alpha(t)$ *de* $T(t)$ *à* X_α *est exactement la partie de* $T(t)$ *dans* X_α.

Soit $x \in X_\alpha$, comme

$$\|T(t) x\|_\alpha \leq \|A^\alpha T(t) x\| = \|T(t) A^\alpha x\| \leq \|T(t)\| \|A^\alpha x\| = \|T(t)\| \|x\|_\alpha ;$$

et quand t inférieur à 0,

$$\|T(t) x - x\|_\alpha = \|A^\alpha T(t) x - A^\alpha x\| = \|T(t) A^\alpha x - A^\alpha x\| \rightarrow 0,$$

pour tout $x \in X_\alpha$.

En résulte que $\{T(t), t \geq 0\}$ est la famille de semi-groupe fortement continue sur X_α, et

$$\|T_\alpha(t)\| \leq \|T(t)\| \leq M \text{ pour tout } t \leq 0.$$

Dans la suite, nous allons également utiliser $\|f\|_{L^p(J,\mathbb{R}^+)}$ pour désigner $L^p(J,\mathbb{R}^+)$ la norme de f, chaque fois $f \in L^p(J,\mathbb{R}^+)$ pour certains p, avec $1 < p < \infty$.

Fixera $\alpha \in (0,1)$ et notons par $\mathbb{C}_\alpha$.

Dans l'espace de *Banach* $C(J, X_\alpha)$, pour $x \in \mathbb{C}_\alpha$, la norme sup est donnée par :

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in J} \|x\|_\alpha,$$

Définition 2.1.1 *l'intégrale fractionnaire d'ordre γ avec la limite inférieure à zéro pour une fonction f est définie comme suit :*

$$I^\gamma f(t) = \frac{1}{T(\gamma)} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\gamma}} ds, t > 0, \gamma > 0,$$

à condition que le côté droit est point par point défini sur $[0,\infty)$, où $T(.)$ est la fonction *Gamma*.

Définition 2.1.2 *La dérivée au sens de Riemann-Liouville d'ordre γ avec la limite inférieure de zéro pour une fonction $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ peut être écrite comme :*

$$^L D^\gamma f(t) = \frac{1}{T(n-\gamma)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\gamma+1-n}} ds, t > 0, n-1 < \gamma < n.$$

Définition 2.1.3 *La dérivée au sens de Caputo de l'ordre γ pour une fonction $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ peut être écrite comme suit :*

$$D^\gamma f(t) =^L D^\gamma \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f(k)(0) \right),$$

$t > 0, n - 1 < \gamma < n$.

Remarque 2.1.2 *1) Si $f(t) \in \mathbb{C}^n[0,\infty)$, alors :*

$$D^{\gamma} f(t) = \frac{1}{T(n-\gamma)} \int_{t_0}^{t} \frac{f^n(s)}{(t-s)^{\gamma+1-n}} ds = I^{n-\gamma} f^{(n)}(t),$$

$t > 0, n - 1 < \gamma < n$.

2) La dérivée au sens de *Caputo* d'une constante est égale à zéro.

3) Si f, g sont des fonctions abstraites avec des valeurs dans X, alors les intégrales qui apparaissent dans les définitions (2.1.2) et (2.1.3), sont prises au sens de *Bochner.*

Nous utilisons la définition suivante de solution α-mild pour le problème ci-dessus.

Définition 2.1.4 *On a la solution $\alpha-$mild du système (2.1), alors la fonction $x \in \mathbb{C}_{\alpha}$ satisfait :*

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(t)\left[x_0 + h(x)\right] \\ &+ \int_0^t (t-s)^{q-1} \psi(t-s) \left[f(s, x(s)) + \int_0^s g(\eta, x(\eta)) d\eta \right] ds, \\ t &\in J, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int_0^{\infty} \xi_q(\theta) T(t^q \theta) d\theta, \psi(t) = q \int_0^{\infty} \theta \xi_q(\theta) T(t^q \theta) d\theta, \\ \xi_q(\theta) &= \frac{1}{q} \theta^{-1-\frac{1}{q}} \varpi_q\left(\theta^{-\frac{1}{q}}\right) \geq 0, \\ \varpi_q(\theta) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \theta^{-qn-1} \frac{T(nq+1)}{n!} \sin(n\pi q), \theta \in (0,\infty), \end{aligned}$$

ξ_q est une fonction densité de probabilité définie sur $(0, \infty)$, c'est-à-dire :

$$\xi_q(\theta) \geq 0, \theta \in (0, \infty) \text{ et } \int_0^\infty \xi_q(\theta)\, d\theta = 1.$$

Remarque 2.1.3 *il n'est pas difficile de vérifier que pour $v \in [0,1]$,*

$$\int_0^\infty \theta^v \xi_q(\theta)\, d\theta = \int_0^\infty \theta^{-qv} \varpi_q(\theta)\, d\theta = \frac{T(1+v)}{(1+qv)}.$$

Lemme 2.1.1 *Pour les opérateurs ϕ, ψ, on a les propriétés suivantes :*

1. pour chaque point fixe $t \geq 0$, Les opérateurs $\psi(t)$ et $\phi(t)$ sont linéaires et bornés pour tout $x \in X$, c'est-à-dire :

$$\|\phi(t)x\| \leq M\|x\|, \|\psi(t)x\| \leq \frac{qM}{T(1+q)}\|x\|.$$

2. $\{\phi(t), t \geq 0\}$ et $\{\psi(t), t \geq 0\}$ sont fortement continus.
3. pour chaque $t > 0$, les opérateurs $\phi(t)$ et $\psi(t)$ sont aussi compacts.
4. Pour chaque $x \in X, \beta \in (0,1)$ et $\alpha \in (0,1)$, on à

$$A\psi(t)x = A^{1-\beta}\psi(t)A^\beta x, t \in J,$$

$$\|A\psi(t)\| \leq \frac{qM}{T(1+q(1-\alpha))}t^{-\alpha q}, 0 < t \leq T.$$

5. pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \in X_\alpha$, on à

$$\|\phi(t)x\| \leq M\|x\|_\alpha, \|\psi(t)x\|_\alpha \leq \frac{qM}{T(1+q)}\|x\|_\alpha.$$

6. $\psi_\alpha(t)$ et $\phi_\alpha(t)$ uniformément continues, pour tout $t > 0$, et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $h > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} \|\phi_\alpha(t+\epsilon) - \phi_\alpha(t)\|_\alpha &< \epsilon, \text{ pour } t+\epsilon \geq 0 \text{ et } |\epsilon| < h, \\ \|\psi_\alpha(t+\epsilon) - \psi_\alpha(t)\|_\alpha &< \epsilon, \text{ pour } t+\epsilon \geq 0 \text{ et } |\epsilon| < h, \end{aligned}$$

où

$$\phi_\alpha(t) = \int_0^\infty \xi_q(\theta) T_\alpha(t^q\theta)\, d\theta, \psi_\alpha(t) = q\int_0^\infty \theta\xi_q(\theta) T_\alpha(t^q\theta)\, d\theta.$$

nous pouvons prouver (5) et (6) avec (3) de théorème (2.1.1).

5/Pour tout fixé $t \geq 0$ et pour $x \in X_\alpha$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|\phi(t)x\|_\alpha &\leq \int_0^\infty \xi_q(\theta)\|A^\alpha T(t^q\theta)x\|\, d\theta \\
&\leq \int_0^\infty \xi_q(\theta)\|T(t^q\theta)\|\,\|A^\alpha x\|\, d\theta \\
&\leq M\int_0^\infty \xi_q(\theta)\|A^\alpha x\|\, d\theta = M\|x\|_\alpha \\
\|\psi(t)x\|_\alpha &\leq q\int_0^\infty \theta(\xi_q(\theta)\|A^\alpha T(t^q\theta)x\|\, d\theta \\
&\leq q\int_0^\infty \theta\xi_q(\theta)\|T(t^q\theta)\|\,\|A^\alpha x\|\, d\theta \\
&\leq qM\int_0^\infty \theta\xi_q(\theta)\|A^\alpha x\|\, d\theta = \frac{qM}{T(1+q)}\|x\|_\alpha.
\end{aligned}$$

6/Pour tout $t > 0$, et $h > \epsilon > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|\phi_\alpha(t+\epsilon)-\phi_\alpha(t)\|_\alpha &\leq \int_0^\infty \xi_q(\theta)\|T_\alpha((t+\varepsilon)^q\theta)-T_\alpha(t^q\theta)\|_\alpha d\theta \\
&\leq M\int_0^\infty \xi_q(\theta)\|T_\alpha((t+\varepsilon)^q\theta-t^q\theta)-I\|_\alpha d\theta \\
\|\psi_\alpha(t+\epsilon)-\psi_\alpha(t)\|_\alpha &\leq q\int_0^\infty \theta\xi_q(\theta)\|T_\alpha((t+\varepsilon)^q\theta)-T_\alpha(t^q\theta)\|_\alpha d\theta \\
&\leq qM\int_0^\infty \theta\xi_q(\theta)\|T_\alpha((t+\varepsilon)^q\theta-t^q\theta)-I\|_\alpha d\theta.
\end{aligned}$$

$T_\alpha(t)$ uniformément continue pour $t>0$, alors en résulte :

$$\|T_\alpha((t+\varepsilon)^q\theta-t^q\theta)-I\|_\alpha \to 0 \text{ quand } \epsilon\to 0.$$

On utilise :

$$\left(\int_0^\infty \xi_q(\theta)\,d\theta=1\right) \text{ et } \left(\int_0^\infty \theta\xi_q(\theta)\,d\theta=\frac{1}{T(1+q)}\right).$$

où

$\phi_\alpha(t)$ et $\psi_\alpha(t)$ sont uniformément continues, pour tout $t>0$.

Lemme 2.1.2 *Pour tout $\Psi\in L^p(J,X)$ avec $1\leq p<\infty$,*

$$\lim_{h\to 0}\int_0^T \|\Psi(t+h)-\Psi(t)\|^p\,dt=0,$$

où

$$\Psi(s)=0 \text{ pour } s\notin J.$$

Lemme 2.1.3 *A une fonction mesurable $V:J\to X$ est intégrale de Bochner si $\|V\|$ est intégrale de Lebesgue.*

2.2 Existence de solution $\alpha-$mild

Dans cette section, on donne l'existence de solution α-mild de système (2.1).

Nous présentons les hypothèses suivantes :

$[HFG]$: $(f,g) : J \times X_\alpha \to X$ satisfaisants :

1) pour tout $x \in X_\alpha, t \to f(t,x)$ est mesurable.

2) pour tout $x \in X_\alpha, t \to g(t,x)$ est mesurable.

3) On suppose :

- $T = \sup\limits_{s\in[0,t_1]} \left\{ \int\limits_0^s g(\eta, x(\eta))\, d\eta \right\} < +\infty,$
- $T^* = \sup\limits_{s\in[0,t]} \left\{ \int\limits_0^s g(\eta, x(\eta))\, d\eta \right\} < +\infty.$
- $l = \sup\limits_{s\in[t_1,t_2]} \left\{ \int\limits_0^s g(\eta, x(\eta))\, d\eta \right\} < +\infty,$
- $\|h(t_1) - h(t_2)\| \leq d(t)\|h_1 - h_2\|,$
- $d^* = \sup\limits_{t\in[0,t_1]} \{d(t)\} < +\infty.$
- suppose qu'il existe deux fonctions $\{m_1(\eta), m_2(\eta)\}$ positives telles que :

$$\left\| \int\limits_0^s g(\eta, x_1(\eta))\, d\eta - \int\limits_0^s g(\eta, x_2(\eta))\, d\eta \right\|_\alpha \leq m(\eta)\|x_1 - x_2\|_\alpha .$$

- On pose

$$M^* = \sup_{s\in[0,t]} \{m_1(\eta) - m_2(\eta)\} < +\infty.$$

4) pour les arbitraires $x_1, x_2 \in X_\alpha$: si on définit la fonction $F : C_\alpha \to C_\alpha$ avec $\|x_1\|_\alpha \leq \rho$, $\|x_2\|_\alpha \leq \rho$, alors il existe des constantes $L_f(\rho) > 0$ tels que :

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq L_f(\rho)\|x_1 - x_2\|_\alpha, \text{ pour tout } t \in J.$$

5) Si on définit la fonction $G : C_\alpha \to C_\alpha$ avec $\|x_1\|_\alpha \leq \rho$, $\|x_2\|_\alpha \leq \rho$, alors il existe des constantes $L_g(\rho) > 0$ tels que :

$$\|g(t,x_1) - g(t,x_2)\| \leq Lg(\rho)\|x_1 - x_2\|_\alpha, \text{ pour tout } t \in J.$$

6) Il existe des constantes $a_f > 0, a_g > 0$ tels que :

$$\|f(t,x)\| \leq a_f(1+\|x\|_\alpha), \|g(t,x)\| \leq a_g(1+\|x\|_\alpha),$$

pour tout $x \in X_\alpha$ et $t \in J$.

Théorème 2.2.1 *Les conditions de l'hypothèse $[HFG]$ sont satisfaisants. Si $x_0 \in X_\alpha$ et $\alpha q < \frac{1}{2}$ pour $\frac{1}{2} < q < 1$, alors le système (2.1) admet une solution α-mild unique sur J.*

Preuve. Notre preuve sera divisée en deux étapes : ∎

– $1^{ére}$ étape.

1. $F \in C_\alpha$?

On définit la fonction $F : C_\alpha \to C_\alpha$ par :

$$\begin{aligned}(Fx)(t) &= \phi(t)[x_0 + h(x(t))] \\ &+ \int_0^t (t-s)^{q-1}\psi(t-s)\left[f(s,x(s)) + \int_0^s g(\eta, x(\eta))\,d\eta\right] ds.\end{aligned}$$

A partir de lemme (2.1.1), et compte tenu d'inégalité de Holder avec : $\{\alpha q < \frac{1}{2}; 0 \leq s < t_1 < t_2 \leq T\}$, on déduit les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}&\|(Fx)(t_1) - (Fx)(t_2)\|_\alpha \leq \|\phi(t_1)[x_0 + h(x(t_1))] - \phi(t_2)[x_0 + h(x(t_2))]\|_\alpha \\
&+ \int_0^{t_1} (t_1-s)^{q-1} \left\|\psi(t_1-s)\left[f(s,x(s)) + \int_0^s g(\eta,x(\eta))\,d\eta\right]\right\|_\alpha \\
&- \int_0^{t_1} (t_1-s)^{q-1} \left\|\psi(t_2-s)\left[f(s,x(s)) + \int_0^s g(\eta,x(\eta))\,d\eta\right]\right\|_\alpha ds \\
&+ \int_0^{t_1} \left|(t_1-s)^{q-1} - (t_2-s)^{q-1}\right| \left\|\psi(t_2-s)\left[f(s,x(s)) + \int_0^s g(\eta,x(\eta))\,d\eta\right]\right\|_\alpha ds \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{q-1} \left\|\psi(t_2-s)\left[\|f(s,x(s))\| + \int_0^s g(\eta,x(\eta))d\eta\right]\right\|_\alpha ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq \|\phi_\alpha(t_1) - \phi_\alpha(t_2)\|_\alpha [\|x_0\|_\alpha + \|d^*\|_\alpha] + \tfrac{qM_{\alpha+1}T(2-\alpha)}{\alpha T(1+q(1-\alpha))} \\
&\times \left[\|f\|_{C(J,\,X)} + T\|g\|_{C(J,\,X)}\right] \int_0^{t_1} (t_1-s)^{q-1} \left|(t_1-s)^{-q\alpha} - (t_2-s)^{-q\alpha}\right| ds \\
&+ \tfrac{M_\alpha qT(2-\alpha)}{T(1+q(1-\alpha))} \int_0^{t_1} \left|(t_1-s)^{q-1} - (t_2-s)^{q-1}\right|\end{aligned}$$

$$\times (t_2 - s)^{-q\alpha} \left[\left\| f(s, x(s)) + Tg(\eta, x(\eta)) \right\|\right] ds$$

$$- \frac{qM_{\alpha+1}T(2-\alpha)}{\alpha T(1+q(1-\alpha))} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-\alpha q-1}$$

$$\times \left[\left\| f(s, x(s)) \right\| + T \left\| g(\eta, x(\eta)) \right\|\right] ds$$

$$\leq \left\| \phi_\alpha(t_1) - \phi_\alpha(t_2) \right\|_\alpha \left[\left\| x_0 \right\|_\alpha + \left\| d \right\|_\alpha\right]$$

$$+ \frac{qM_{\alpha+1}T(2-\alpha)}{\alpha T(1+q(1-\alpha))} \left[\left\| f \right\|_{C(J,\, X)} + T \left\| g \right\|_{C(J,\, X)}\right]$$

$$\times \left(\int_0^{t_1} \left| (t_1 - s)^{-q\alpha} - (t_2 - s)^{-q\alpha} \right|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{t_1} (t_1 - s)^{2(q-1)} ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{M_\alpha q T(2-\alpha)}{T(1+q(1-\alpha))} \left(\int_0^{t_1} \left| (t_1 - s)^{q-1} - (t_2 - s)^{q-1} \right|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left(\int_0^{t_1} (t_1 - s)^{-2\alpha q} ds \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left\| f \right\|_{c(J,X)} + T \left\| g \right\|_{c(J,\, X)}\right]$$

$$+ \frac{M_\alpha q T(2-\alpha)}{T(1+q(1-\alpha))} \frac{1}{q(1-\alpha)} \left((t_2 - t_1)^{q(1-\alpha)} \right) \left[\left\| f \right\|_{c(J,X)} + l \left\| g \right\|_{c(J,X)}\right]$$

$$\leq \left\| \phi_\alpha(t_1) - \phi_\alpha(t_2) \right\|_\alpha \left[\left\| x_0 \right\|_\alpha + \left\| d^* \right\|_\alpha\right]$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{2q-1}} t_1^{q-\frac{1}{2}} \frac{qM_{\alpha+1}T(2-\alpha)}{\alpha T(1+q(1-\alpha))} \left[\left\| f \right\|_{c(J,X)} + T \left\| g \right\|_{c(J,\, X)}\right]$$

$$\times \left(\int_0^{T} \left| (t_1 - s)^{-q\alpha} - (t_2 - s)^{-q\alpha} \right|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{M_\alpha q T(2-\alpha)}{T(1+q(1-\alpha))} \left(\int_0^{T} \left| (t_1 - s)^{q-1} - (t_2 - s)^{q-1} \right|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{1-2\alpha q}}$$

$$\times \left(t_2^{1-2\alpha q} - (t_2 - t_1)^{1-2\alpha q} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left[\left\| f \right\|_{c(J,X)} + T \left\| g \right\|_{c(J,X)}\right]$$

$$+ \frac{M_\alpha q T(2-\alpha)}{T(1+q(1-\alpha))} \frac{1}{q(1-\alpha)} \left((t_2 - t_1)^{q(1-\alpha)} \right) \left[\left\| f \right\|_{c(J,X)} + l \left\| g \right\|_{c(J,X)}\right]$$

Ce qui implique $Fx \in C_\alpha$.

– $2^{éme}$ étape

Pour clair démonstration on à besoin de divise la $2^{éme}$ étape en quatre parties :

$1/F$ un opérateur continu sur C_α

Soient $x_1, x_2 \in C_\alpha$ et $\left\| x_1 - x_2 \right\|_\infty \leq 1$, pour $\left\| x_2 \right\|_\infty \leq 1 + \left\| x_2 \right\|_\infty = \rho$, on à :

$$
\begin{aligned}
& \left\| (Fx_1)(t) - (Fx_2)(t) \right\|_\alpha \\
\leq & \int_0^t (t-s)^{q-1} \left\| \psi(t-s) \left[f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s)) \right] \right\|_\alpha ds \\
& + \int_0^t (t-s)^{q-1} \left\| \psi(t-s) \left[\int_0^s g(\eta, x_1(\eta))\, d\eta - \int_0^s g(\eta, x_2(\eta))\, d\eta \right] \right\|_\alpha ds \\
\leq & \int_0^t (t-s)^{q-1} \left\| A^\alpha \psi(t-s) \right\| \\
& \times \left[\left\| \left[f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s)) \right] \right\| + M^* \left\| g(\eta, x_1(\eta) - g(\eta, x_2(\eta))) \right\| \right] ds \\
\leq & \left[L_f(\rho) + M^* L_g(\rho) \right] \frac{M_\alpha q T(2-\alpha)}{T(1+q(1-\alpha))} \\
& \times \int_0^t (t-s)^{q-1-\alpha q} \left[\left\| x_1(s) - x_2(s) \right\|_\alpha + \left\| x_1(\eta) - x_2(\eta) \right\|_\alpha \right] ds \\
\leq & \left[L_f(\rho) + M^* L_g(\rho) \right] \frac{2 M_\alpha q T(2-\alpha)}{T(1+q(1-\alpha))} \left(\int_0^t (t-s)^{q-1-\alpha q} ds \right) \left\| x_1 - x_2 \right\|_\infty \\
\leq & \left[L_f(\rho) + M^* L_g(\rho) \right] \frac{2 M_\alpha q T(2-\alpha)}{T(1+q(1-\alpha))} \frac{1}{q(1-\alpha)} t^{q(1-\alpha)} \left\| x_1 - x_2 \right\|_\infty .
\end{aligned}
$$

Donc, on a démontré que F est continu, alors :

$$
\begin{aligned}
\left\| Fx_1 - Fx_2 \right\|_\infty \leq & \left[L_f(\rho) + M^* L_g(\rho) \right] \\
& \times \frac{2 M_\alpha q T(2-\alpha)}{T(1+q(1-\alpha))} \frac{1}{q(1-\alpha)} T^{q(1-\alpha)} \left\| x_1 - x_2 \right\|_\infty ,
\end{aligned}
$$

2/F est compact ?

En appliquant le théorème d'*Arzila-Ascoli.*

- L'idée de la démonstration est :

Soit B un sous-ensemble borné de C_α.

-Il existe un constante μ_1 tel que $\|x\|_\infty \leq \mu_1$ pour tout $x \in B$.

-Il existe un constante μ_2 tel que $\|x\|_\infty \leq \mu_2$ pour tout $x \in B$.

-Il existe un constante l^* tel que $\|h\|_\infty \leq l^*$ pour tout $x \in B$.

Et d'après $[HFG]$ (3) :
-Il existe un constante N_1 tel que $\|f(t, x(t))\| \leq a_f(1+\mu_1) = N_1$,
-Il existe un constante N_2 tel que $\|g(t, x(t))\| \leq a_g(1+\mu_2) = N_2$,
alors, FB un sous-ensemble borné de C_α.
2.1) FB un sous-ensemble borné de C_α?

1. Soit $x \in B$, et compte tenu du lemme (2.1.1.4), on obtient :

$$\begin{aligned}
\|(Fx)(t)\|_\alpha &\leq \|\phi(t)(x_0 + h(x(t))\|_\alpha \\
&+ \int_0^t (t-s)^{q-1} \|\psi(t-s)\| \left[\|f(s, x(s))\|_\alpha\right] ds \\
&+ \int_0^t (t-s)^{q-1} \|\psi(t-s)\| T^* \|g(\eta, x(\eta))\|_\alpha ds \\
&\leq M\left[\|x_0\|_\alpha + \|h\|_\alpha\right] \\
&+ \frac{M_\alpha q T(2-\alpha)}{T(1+q(1-\alpha))}\left[N_1 + T^* N_2\right] \int_0^t (t-s)^{q-1-\alpha q} ds \\
&\leq M\left[\|x_0\|_\alpha + \|h\|_\alpha\right] \\
&+ \frac{M_\alpha q T(2-\alpha)}{T(1+q(1-\alpha))}\left[N_1 + T^* N_2\right] \frac{1}{q(1-\alpha)} t^{q(1-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Ainsi que :

$$\|Fx\|_\infty \leq M(\mu_1 + l^*) + \frac{M_\alpha q T(2-\alpha)}{T(1+q(1-\alpha))} \frac{(N_1 + T^* N_2) T^{q(1-\alpha)}}{q(1-\alpha)}.$$

Implique que FB et borné.
2.2) $Fx(t)$ est relativement compact ?

1. L'idée de la démonstration est :

On définit $\pi = FB$ et $\pi(t) = \{(Fx)(t) \mid x \in B\}$ pour tout $t \in J$. Il clair, $\pi(0) = \{(Fx)(0) \mid x \in B\} = \{x_0\}$ est compact, il nécessaire de considérait $t > 0$.
Pour tout $h \in (0, t)$, $t \in (0, T)$, et pour l'arbitraire $\delta > 0$,on définit :

$$\pi_{h,\delta}(t) = \{(F_{h,\delta} x)(t) \mid x \in B\}$$

où

$$
\begin{aligned}
(F_{h,\delta}x)(t) &= T(h^q\delta)\int_\delta^\infty \xi_q(\theta)\,T(t^q\theta-h^q\delta)\left[x_0+h(x(t))\right]d\theta \\
&\quad +T(h^q\delta)\int_0^{t-h}(t-s)^{q-1}\left(q\int_\delta^\infty \theta\xi_q(\theta)\,T\left((t-s)^q\theta-h^q\delta\right)d\theta\right) \\
&\quad \times\left[f(s,x(s))+\int_0^s g(\eta,x(\eta))\,d\eta\right]ds \\
&= \int_\delta^\infty \xi_q(\theta)\,T(t^q\theta)\left[x_0+h(x(t))\right]d\theta \\
&\quad +q\int_0^{t-h}\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{q-1}\xi_q(\theta)\,T\left((t-s)^q\theta\right)\left[f(s,x(s))\right]d\theta \\
&\quad +q\int_0^{t-h}\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{q-1}\xi_q(\theta)\,T\left((t-s)^q\theta\right)\left[\int_0^s g(\eta,x(\eta))\,d\eta\right]d\theta.
\end{aligned}
$$

Alors, l'ensemble $\{(F_{h,\delta}x)(t)\mid x\in B\}$ est relativement compact sur X_α.
Comme l'opérateur $T(h^q\delta)\,,h^q\delta>0$ est un compact sur X_α, on à les inégalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\left\|Fx(t)-\left(F_{h,\delta}x\right)(t)\right\|_\alpha \le \left\|\int_0^\delta \xi_q(\theta)\,T(t^q\theta)\left[(x_0+h(x(t)))\right]d\theta\right\|_\alpha \\
&+q\left\|\int_0^t\int_0^\delta \theta(t-s)^{q-1}\xi_q(\theta)\,T\left((t-s)^q\theta\right)\left[(f(s,x(s))\right]d\theta ds\right\|_\alpha \\
&+q\left\|\int_0^t\int_0^\delta \theta(t-s)^{q-1}\xi_q(\theta)\,T\left((t-s)^q\theta\right)\left[\int_0^s g(\eta,x(\eta))\,d\eta\right]d\theta ds\right\|_\alpha \\
&+q\left\|\int_0^t\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{q-1}\xi_q(\theta)\,T\left((t-s)^q\theta\right)\left[f(s,x(s))\right]d\theta ds\right\|_\alpha \\
&+q\left\|\int_0^t\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{q-1}\xi_q(\theta)\,T\left((t-s)^q\theta\right)\left[\int_0^s g(\eta,x(\eta))\,d\eta\right]d\theta ds\right\|_\alpha \\
&-q\left\|\int_0^{t-h}\int_\delta^\infty \theta(t-s)^{q-1}\xi_q(\theta)\,T\left((t-s)^q\theta\right)\left[f(s,x(s))\right]d\theta ds\right\|_\alpha
\end{aligned}
$$

$$-q\left\|\int_0^{t-h}\int_\delta^\infty \theta\,(t-s)^{q-1}\,\xi_q(\theta)\,T\left((t-s)^q\theta\right)\left[\int_0^s g(\eta,x(\eta))\,d\eta\right]d\theta ds\right\|_\alpha$$

$$\leq \int_0^\delta \xi_q(\theta)\,\|T(t^q\theta)\,(x_0+h(x(t)))\|\,d\theta$$

$$+q\int_0^t\int_0^\delta \theta\,(t-s)^{q-1}\,\xi_q(\theta)\,\|A^\alpha T\left((t-s)^q\theta\right)\|\,\|f(s,x(s))\|\,d\theta ds$$

$$+qT^*\int_0^t\int_0^\delta \theta\,(t-s)^{q-1}\,\xi_q(\theta)\,\|A^\alpha T\left((t-s)^q\theta\right)\|\,\|g(\eta,x(\eta))\|\,d\theta ds$$

$$+q\int_{t-h}^t\int_\delta^\infty \theta\,(t-s)^{q-1}\,\xi_q(\theta)\,\|A^\alpha T\left((t-s)^q\theta\right)\|\,\|f(s,x(s))\|\,d\theta ds$$

$$+qT^*\int_{t-h}^t\int_\delta^\infty \theta\,(t-s)^{q-1}\,\xi_q(\theta)\,\|A^\alpha T\left((t-s)^q\theta\right)\|\,\|g(\eta,x(\eta))\|\,d\theta ds$$

$$\leq M\left[\|x_0\|_\alpha+\|h\|_\alpha\right]\int_0^\delta \xi_q(\theta)\,d\theta$$

$$+M_\alpha q\left[N_1+T^*N_2\right]\int_0^t\int_0^\delta \theta\,(t-s)^{q-1}\,\xi_q(\theta)\left((t-s)^q\theta\right)^{-\alpha}d\theta ds$$

$$+M_\alpha q\left[N_1+T^*N_2\right]\int_{t-h}^t\int_\delta^\infty \theta\,(t-s)^{q-1}\,\xi_q(\theta)\left((t-s)^q\theta\right)^{-\alpha}d\theta ds$$

$$\leq M\left[\|x_0\|_\alpha+\|h\|_\alpha\right]\int_0^\delta \xi_q(\theta)\,d\theta$$

$$+M_\alpha q\left[N_1+T^*N_2\right]\int_0^t\int_0^\delta \theta^{1-\alpha}\,(t-s)^{q-q\alpha-1}\,\xi_q(\theta)\,d\theta ds$$

$$+M_\alpha q\left[N_1+T^*N_2\right]\int_{t-h}^t\int_\delta^\infty \theta^{1-\alpha}\,(t-s)^{q-q\alpha-1}\,\xi_q(\theta)\,d\theta ds$$

$$\leq M\left[\|x_0\|_\alpha+\|h\|_\alpha\right]\int_0^\delta \xi_q(\theta)\,d\theta+M_\alpha q\left[N_1+T^*N_2\right]$$

$$\times\left(\int_0^t (t-s)^{q-q\alpha-1}\,ds\right)\int_0^\delta \theta^{1-\alpha}\xi_q(\theta)\,d\theta$$

$$+M_\alpha q\left[N_1+T^*N_2\right]\left(\int_{t-h}^t (t-s)^{q-q\alpha-1}\,ds\right)\int_0^\infty \theta^{1-\alpha}\xi_q(\theta)\,d\theta$$

$$\leq M\left[\|x_0\|_\alpha+\|h\|_\alpha\right]+\int_0^\delta \xi_q(\theta)\,d\theta$$

$$+M_\alpha q\left[N_1+T^*N_2\right]\left(\int_0^t (t-s)^{q-q\alpha-1}\,ds\right)\int_0^\delta \theta^{1-\alpha}\xi_q(\theta)\,d\theta$$

$+M_\alpha q\left[N_1+T^*N_2\right]\frac{T(2-\alpha)}{T(1+q(1-\alpha))}\left(\int\limits_{t-h}^{t}(t-s)^{q-q\alpha-1}\,ds\right)$

on à

$\int\limits_0^t (t-s)^{q-q\alpha-1}\,ds \le \frac{1}{q(1-\alpha)}t^{q(1-\alpha)}$, $\int\limits_{t-h}^{t}(t-s)^{q-q\alpha-1}\,ds \le \frac{1}{q(1-\alpha)}h^{q(1-\alpha)}$,

alors

$\left\|(Fx)(t)-\left(F_{h,\delta}x\right)(t)\right\|_\alpha \le M\left[\|x_0\|_\alpha+\|h\|_\alpha\right]\int\limits_0^\delta \xi_q(\theta)\,d\theta$

$+\frac{M_\alpha[N_1+T^*N_2]q}{q(1-\alpha)}T^{q(1-\alpha)}\int\limits_0^\delta \theta^{1-\alpha}\xi_q(\theta)\,d\theta$

$+\frac{M_\alpha q[N_1+T^*N_2]T(2-\alpha)}{T(1+q(1-\alpha))}\frac{1}{q(1-\alpha)}h^{q(1-\alpha)}$.

Donc $\pi(t)=\{(Fx)(t)\,|x\in B\}$ est relativement compact dans X_α pour tout $t\in(0,T]$ et comme, X_α compact à $t=0$, on à la relativement compact sur X_α pour tout $t\in j$.

2.3) Maintenant, $\pi=FB$ et equicontinue ?

Pour $T>h\ge 0$, on a :

$$\begin{aligned}\|(Fx)(h)-(Fx)(0)\|_\alpha &\le \|\phi_\alpha(h)-I\|_\alpha\left[\|x_0\|_\alpha+\|h\|_\alpha\right]\\ &\quad+\frac{M_\alpha qT(2-\alpha)}{T(1+q(1-\alpha))}\left[N_1+T^*N_2\right]\frac{1}{q(1-\alpha)}h^{q(1-\alpha)}.\end{aligned}$$

et pour $0<s<t_1<t_2\le T$.

$$\|(Fx)(t_1)-(Fx)(t_2)\|_\alpha \le I_1+I_2+I_3+I_4,$$

où

$I_1=\|\phi_\alpha(t_1)-\phi_\alpha(t_2)\|_\alpha\|x_0+h(x(t))\|_\alpha$

et

$I_2=(N_1+T^*N_2)\sqrt{\frac{1}{2q-1}}t_1^{q-\frac{1}{2}}\frac{qM_{\alpha+1}T(2-\alpha)}{\alpha T(1+q(1-\alpha))}$

$\times\left(\int\limits_0^T\left|(t_1-s)^{-q\alpha}-(t_2-s)^{-q\alpha}\right|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}$,

et

$I_3=(N_1+T^*N_2)\frac{M_\alpha qT(2-\alpha)}{T(1+q(1-\alpha))}\left(\int\limits_0^T\left|(t_1-s)^{q-1}-(t_2-s)^{q-1}\right|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{1-2\alpha q}}$

$\times\left(t_2^{1-2\alpha q}-(t_2-t_1)^{1-2\alpha q}\right)^{\frac{1}{2}}$,

et

$I_4=(N_1+T^*N_2)\frac{M_\alpha qT(2-\alpha)}{T(1+q(1-\alpha))}\frac{1}{q(1-\alpha)}(t_2-t_1)^{q(1-\alpha)}$.

Maintenant, nous besoin de vérifier que I_1, I_2, I_3, I_4 tends vers zéro indépendamment de $x \in b$ où $t_2 \to t_1$;

autre part, soit $x \in b$, d'après (3) et (6) de lemme (2.1.1) on déduire que $\lim\limits_{t_2 \to t_1} I_1 = 0$ et $\lim\limits_{t_2 \to t_1} I_2 = 0$. De plus, on utilise ;

une part $\left|(t_1 - s)^{q-1} q - (t_2 - s)^{q-1}\right| \to 0$ quand $t_2 \to t_1$ et d'autre part lemme (2.1.2), on déduire que :

$$\left(\int_0^T \left|(t_1 - s)^{q-1} - (t_2 - s)^{q-1}\right|^2 ds\right) \to 0 \text{ quand } t_2 \to t_1.$$

Ainsi que

$\lim\limits_{t_2 \to t_1} I_3 = 0$ pour $\alpha q < \frac{1}{2}$;et

$\lim\limits_{t_2 \to t_1} I_4 = 0$ est évident.

On conclut que :

- FB est bornée.
- FB est relativement compact.
- Pour tout $t \in j, \pi = \{Fx | x \in \beta\}$ est une famille de fonction équiqontinue.

D'après théorème d'*Arzela-Ascoli,* F est compact.

3) $F_x \in C_\alpha$?

Il suffit de démontrer que l'ensemble $\sum = \{x \in C_\alpha | x = \sigma F x, \sigma \in [0, 1]\}$ est un sous-ensemble borné de C_α.

Autre part, soit $x \in \sum$, on a

$$\begin{aligned}
\|x(t)\|_\alpha &= \|\sigma(Fx)(t)\|_\alpha, \\
&\leq \|\phi(t)[x_0 + h(t(x(t)))]\|_\alpha \\
&\quad + \int_0^t (t-s)^{q-1} \psi(t-s) \left\| f(s, x(s)) + \int_0^s g(\eta, x(\eta))\, d\eta \right\|_\alpha ds \\
&\leq M\left[\|x_0\|_\alpha + \|h\|_\alpha\right] \\
&\quad + \int_0^t (t-s)^{q-1} \|A^\alpha \psi(t-s)\| \left[\|f(s, x(s))\|_\alpha + T^* \|g(\eta, x(\eta))\|_\alpha\right] ds \\
&\leq M\left[\|x_0\|_\alpha + \|h\|_\alpha\right] \\
&\quad + \frac{[(a_f + T^* a_g)] M_\alpha q T (2-\alpha)}{T(1 + q(1-\alpha))} \\
&\quad \times \int_0^t (t-s)^{q-\alpha q-1} \left[(1 + \|x(s)\|_\alpha) + (1 + \|x(\eta)\|_\alpha)\right] ds \\
&\leq M\left[\|x_0\|_\alpha + \|h\|_\alpha\right] \\
&\quad + \frac{[(a_f + T^* a_g)] M_\alpha q T (2-\alpha)}{T(1 + q(1-\alpha))} \frac{T^{q(1-\alpha)}}{q(1-\alpha)} \\
&\quad + \frac{[(a_f + T^* a_g)] M_\alpha q T (2-\alpha)}{T(1 + q(1-\alpha))} \\
&\quad \times \int_0^t (t-s)^{q-\alpha q-1} \left[\|x(s)\|_\alpha + \|x(\eta)\|_\alpha\right] ds;
\end{aligned}$$

alors, $\sum$ et un sous-ensemble borné de C_α.

D'après le théorème de point fixe de *Leray- Schoulder* il existe un point fixe F de C_α, par conséquence, le système (2.1) admet une solution α−mild de x sur J.

4) $x(.)$ est unique ?

En utilise l'inversion de *Gronwall*, pour déduire l'unicité. C'est-à-dire, Il est suffit de montrer qu'il existe un constante $M^* > 0$ tel que :

$$\|x\|_\alpha \leq M^*.$$

Preuve. Soit $y(.)$ une autre solution $\alpha-$mild de système (2.1) avec valeur initial y_0, Il n'est pas difficile de vérifier qu'il existe un constante $\rho > 0$, tels que $\|x\|_\alpha \leq \rho, \|y\|_\alpha \leq \rho$. ■

On a :

$$\begin{aligned}\|x(t) - y(t)\|_\alpha &\leq \|\phi(t)[x_0 + h(x(t))] - [y_0 + h(y(t))]\|_\alpha \\ &+ \int_0^t (t-s)^{q-1} \left\| \psi(t-s) \left[f(s, x(s)) + \int_0^s g(\eta, x(\eta))\, d\eta \right] \right\|_\alpha \\ &- \left\| \psi(t-s) \left[f(s, y(s)) + \int_0^s g(\eta, y(\eta))\, d\eta \right] \right\|_\alpha ds.\end{aligned}$$

D'où il résulte :

$$\begin{aligned}\|x(t) - y(t)\|_\alpha &\leq M\left[\|\phi(t)(x_0 - y_0)\|_\alpha + \|h\|_\alpha\right] \\ &+ \frac{[(l_f(\rho) + K^* l_g(\rho))] M_\alpha q T (2-\alpha)}{T(1 + q(1-\alpha))} \\ &\times \int_0^t (t-s)^{q-\alpha q-1} \left[\|x(s) - y(s)\|_\alpha + \|x(\eta) - y(\eta)\|_\alpha\right] ds;\end{aligned}$$

d'après inégalité de *Gronwall*, il existe un constante $M^* > 0$ tel que :

$$\|x(t) - y(t)\|_\alpha \leq M^* M \left[\|(x_0 - y_0)\|_\alpha + \|h\|_\alpha\right].$$

Finalement, on a démontré $x(.)$ est unique.

2.3 Existence de contrôle fractionnaire optimal

On supposant que Y un autre espace de Banach réflexive, séparable, u prend sons valeur de Y. $W_{f,g}(Y)$ une classe de sous-ensemble convexe, fermée, non vide de Y.

La fonction multiple $\omega : J \to w_{f,g}(Y)$ est mesurable et $\omega(.) \subset E$ ou E est un ensemble borné de Y.

Si l'ensemble de contrôle admissible est défini par :

$$U_{ad} = S_{\omega}^{p} = \left\{ u \in L^{P}(E) \mid u(t) \in \omega(t) \right\}, 1 < P < \infty,$$

alors $U_{ad} \neq \emptyset$.

On concédère le système de contrôle suivant :

$$\begin{cases} D^{q}x(t) = Ax(t) + \left[f(t, x(t)) + \int\limits_{0}^{t} g(s, x(s))\, ds \right] \\ \qquad + \left[c(t)\, u(t) + \int\limits_{0}^{t} c(s)\, u(s)\, ds \right], \\ x(0) = x_0 + h(x(t)); \\ t \in j, q \in (0,1), u \in U_{ad}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Hypothèse $[HC] : C \in l_{\infty}(J, L(Y, X_{\alpha}))$.
Il est simple que avoir $Cu \in L^{p}(J, X_{\alpha})$ pour tout $u \in U_{ad}$.
D'après le théorème (2.2.1), on à les résultats suivantes.

Théorème 2.3.1 *En plus d'hypothèse du théorème (2.2.1), On suppose Hypothèse $[HC]$ vérifier pour tout $u \in U_{ad}$ et $pq(1-\alpha) > 1$, le système (2.2) admit $\alpha-$mild solution correspondre de U donnée par :*

$$\begin{aligned} X^{u}(t) &= \phi(t)\left[x_0 + h(x(t))\right] \\ &\quad + \int_{0}^{t} (t-s)^{q-1} \psi(t-s) \left[f(s, x(s)) + \int_{0}^{s} g(\eta, x(\eta))\, d\eta \right] ds \\ &\quad + \int_{0}^{t} (t-s)^{q-1} \psi(t-s) \left[c(s)\, u(s) + \int_{0}^{s} c(\eta)\, u(\eta)\, d\eta \right] ds. \end{aligned}$$

Preuve. On concédère :

$$\Psi(t) = \int_{0}^{t} (t-s)^{q-1} \psi(t-s) \left[c(s)\, u(s) + \int_{0}^{s} c(\eta)\, u(\eta)\, d\eta \right] ds.$$

∎

on utilise lemme (2.1.1) et inégalité de *Holder*, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\Psi(t)\|_{\alpha} &\leq \left\| \int_0^t (t-s)^{q-1} \psi(t-s) \left[c(s) u(s) + \int_0^s c(\eta) u(\eta) d\eta \right] ds \right\|_{\alpha} \\
&\leq \int_0^t (t-s)^{q-1} \|A^{\alpha} \psi(t-s)\| \\
&\quad \times \|c(s) u(s)\| + c^* \|c(\eta) u(\eta)\| ds \\
&\leq \frac{[1+c^*] \|C\|_{\infty} M_{\alpha} q T (2-\alpha)}{T(1+q(1-\alpha))} \\
&\quad \times \int_0^t (t-s)^{q-1-\alpha q} ds \left[\|u(s)\|_Y + \|u(\eta)\|_Y \right] ds \\
&\leq \frac{[1+c^*] \|C\|_{\infty} M_{\alpha} q T (2-\alpha)}{T(1+q(1-\alpha))} \left(\int_0^t (t-s)^{\frac{P-1}{P}(q-1-\alpha q)} ds \right)^{\frac{P-1}{P}} \\
&\quad \times \left(\int_0^t \|u(s)\|_Y^P ds \right)^{\frac{1}{P}} \left(\int_0^t \|u(\eta)\|_Y^P d\eta \right)^{\frac{1}{P}} \\
&\leq \frac{2[1+c^*] \|C\|_{\infty} M_{\alpha} q T (2-\alpha)}{T(1+q(1-\alpha))} \left(\frac{P-1}{pq(1-\alpha)-1} \right)^{\frac{P-1}{P}} \\
&\quad \times T^{\frac{pq(1-\alpha)-1}{P-1}} \|u\|_{L_{P(J,Y)}},
\end{aligned}$$

ou $\|C\|_{\infty}$ et la norme de opérateur C dans espace de *Banach* $L_{\infty}(J, L(Y, X_{\alpha}))$.

- Ainsi, $\left\| (t-s)^{q-1} \psi(t-s) \left[c(s) u(s) + \int_0^s c(\eta) u(\eta) d\eta \right] \right\|_{\alpha}$ est l'intégrale *Lebesgue*, pour tout $s \in [0,t]$, $\eta \in [0,t]$ pour tout $t \in J$.
- D'après lemme (2.1.1), en résulte que :

$$(t-s)^{q-1} \psi(t-s) \left[c(s) u(s) + \int_0^s c(\eta) u(\eta) d\eta \right] ds;$$

est l'intégrale de *Bochner* avec $s \in [0,t]$ $\eta \in [0,t]$ pour tout $t \in J$.

Comme $\Psi(.) \in C_\alpha$, la preuve avec le théorème (2.2.1) est évidente.
Hypothèse $[HL]$:

1. la fonctionnelle $\{\mathcal{L} : J \times X_\alpha \times Y \cup \{\infty\}\}$ mesure de *Borel.*
2. $\mathcal{L}(t,\cdot,\cdot)$ suite semi-continue inférieure dans $X_\alpha \times Y$ presque pour tout $t \in J$.
3. $\mathcal{L}(t,x,\cdot)$ est convexe dans Y pour chaque $x \in X_\alpha$ presque pour tout $t \in J$.
4. ils existent des constantes $d \geq 0, e > 0, \varphi$ non négatives et $\varphi \in L^1(J,R)$ tels que :
$$\mathcal{L}(t,x,u) \geq \varphi(t) + d\|x\|_\alpha + e\|x\|_Y^p.$$

Notons x^u la solution $\alpha-$mild de système (2.2) correspondant le contrôle $u \in U_{ad}$.

Problème (1) **de** ***Lagrange***(P) : Trouve $(x^0,u^0) \in C(J,X_\alpha) \times U_{ad}$ tel que :
$J(x^0,u^0) \leq J(x^u,u)$, pour tout $u \in U_{ad}$
où
$J(x^u,u) = \int_0^T \mathcal{L}(t,x^u(t),u(t))\,dt + \int_0^T \mathcal{L}(\eta,x^u(\eta),u(\eta))\,d\eta$

- À l'ordre d'obtenir l'existence de contrôle optimal fractionnel nous besoin les lemmes importants suivants :

Lemme 2.3.1 *opérateur* $\zeta : L^p(J,Y) \to C_\alpha$ *pour quelque* $pq(1-\alpha) > 1$, *donné par :*
$$(\zeta u)(.) = \int_0^{.} \psi(.-s)\,c(s)\,u(s)\,ds$$
est continu fortement.

Preuve. On supposant que $\{u^n\} \subseteq L^p(J,Y)$ est bornée, on définit $\Theta_n(t) = (\zeta u^n)(t), t \in J$.

la preuve de même manière du théorème (2.3.1), pour tout point fixe $t \in J$, et $pq(1-\alpha) > 1$, $\|\Theta_n(t)\|_\alpha$ est borné. ■

Il n'est pas difficile de vérifier que $\Theta_n(t)$ un compact dans X_α et aussi equicontinu.

D'après le théorème d'*Ascoli-Arzela*, $\{\Theta_n(t)\}$ est relativement compact dans C_α. Évidemment, ζ linéaire et continu. D'où ζ opérateur fortement continu.

– Maintenant nous donnons quelques résultats de l'existence de contrôle optimal fractionnaire pour le problème (P).

Théorème 2.3.2 *Si en prend Hypothèse $[HL]$ et Hypothèse de théorème (2.3.1) est vérifiée, alors le problème (P) admet un optimal pair.*

Preuve.

1. Si $\inf \{J(x^u, u) \,|u \in U_{ad} = +\infty\}$, aucune preuve existe.
2. Si $\{\inf J(x^u, u) \,|u \in U_{ad}\} = \varepsilon < +\infty$. On utilise l'Hypothèse $[HL]$, on a : $\varepsilon > -\infty$.

■

Par définition de l'inf il existe une suite minemment faible et pair :

$$\{(x^m, u^m)\} \subset U_{ad} \equiv \left\{ \begin{array}{c} (x, u)\,|x \text{ est solution } \alpha - \text{mild de système} \\ (2.2) \text{ correspondant à } u \in U_{ad} \end{array} \right\},$$

telle que : $J(x^m, u^m) \to \varepsilon$ quand $m \to +\infty$, Comme $\{u^m\} \subseteq U_{ad}, m = 1, 2, \ldots, \{u^m\}$ est bornée sur $L^p(J, Y)$, il existe une sous-suite $\{u^m\}$, et $u_0 \in L^p(J, Y)$ tel que :

$$u^m \to u^0 \text{ sur } L^p(J, Y).$$

Comme U_{ad} est un fermer et convexe, et $u^0 \in U$, on suppose $x^m(x^0)$ la solution $\alpha-$mild de système (2.2) correspondre à $u^m(u^0)$. x^m et x^0, satisfait respectivement les équations de l'intégrale suivantes :

$$\begin{aligned} x^m(t) &= \phi(t)\left[x_0 + h(x(t))\right] \\ &+ \int_0^t (t-s)^{q-1} \psi(t-s) \left[f(s, x^m(s)) + \int_0^s g(\eta, x^m(\eta))\, d\eta \right] ds \\ &+ \int_0^t (t-s)^{q-1} \psi(t-s) \left[c(s)\, u^m(s) + \int_0^s c(\eta)\, u^m(\eta)\, d\eta \right] ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^0(t) &= \phi(t)\left[x_0 + h(x(t))\right] \\
&+ \int_0^t (t-s)^{q-1}\psi(t-s)\left[f\left(s, x^0(s)\right) + \int_0^s g\left(\eta, x^0(\eta)\right) d\eta\right] ds \\
&+ \int_0^t (t-s)^{q-1}\psi(t-s)\left[c(s)\, u^0(s) + \int_0^s c(\eta)\, u^0(\eta)\, d\eta\right] ds.
\end{aligned}$$

Comme $\{u^m\}, (\{u_0\})$ sont bornée et avec le théorème 2.2.1, en peut vérifier que il existe un nombre positive ρ tels que :

$$\|x^m\|_\infty \leq \rho, \left\|x^0\right\|_\infty \leq \rho.$$

Pour tout $t \in J$, on obtient :

$$\left\|x^m(t) - x^0((t))\right\|_\alpha \leq \left\|\eta_m^{(1)}(t)\right\|_\alpha + \left\|\eta_m^{(2)}(t)\right\|_\alpha$$

Où

$$\begin{aligned}
\eta_m^{(1)}(t) &= \int_0^t (t-s)^{q-1}\psi(t-s)\left[f(s, x^m(s)) + \int_0^s g\left(\eta, x^m(\eta)\right) d\eta\right] ds \\
&- \int_0^t (t-s)^{q-1}\psi(t-s)\left[f\left(s, x^0(s)\right) + \int_0^s g\left(\eta, x^0(\eta)\right) d\eta\right] ds. \\
\eta_m^{(2)}(t) &= \int_0^t (t-s)^{q-1}\psi(t-s) \\
&\times \left(\left[C(s) + c^* C(\eta)\right]\left[\left(u^m(s) - u^0(s)\right) + \left(u^m(\eta) - u^0(\eta)\right)\right]\right) ds.
\end{aligned}$$

D'après lemme (2.1.1.4) et $[HFG]\,(4)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\|\eta_m^{(1)}(t)\right\|_\alpha &\leq \frac{\left[L_f(\rho) + c^* L_g(\rho)\right] M_\alpha q T (2-\alpha)}{T(1 + q(1-\alpha))} \\
&\times \int_0^t (t-s)^{q-\alpha q-1}\left[\|x_1(s) - x_2(s)\|_\alpha + \|x_1(\eta) - x_2(\eta)\|\right]_\alpha ds.
\end{aligned}$$

On utilise lemme 2.3.1, on obtient :
$\eta_m^{(2)}(t) \xrightarrow{s} 0$ dans X_α quand $m \to \infty$.
Ainsi que,

$$\begin{aligned} \left\|x^m(t) - x^0((t))\right\|_\alpha &\leq \left\|\eta_m^{(2)}(t)\right\|_\alpha + \frac{[L_f(\rho) + c^* L_g(\rho)] M_\alpha q T (2-\alpha)}{T(1+q(1-\alpha))} \\ &\times \int_0^t (t-s)^{q-\alpha q-1} [\|x_1(s) - x_2(s)\|]_\alpha ds. \\ &+ \int_0^t (t-s)^{q-\alpha q-1} [\|x_1(\eta) - x_2(\eta)\|]_\alpha ds. \end{aligned}$$

D'après l'inversion de *Gronwall,* il existe un constante $\hat{M}^* > 0$ tel que

$$\left\|x^m(t) - x^0((t))\right\|_\alpha \leq \hat{M}^* \left\|\eta_m^{(2)}(t)\right\|_\alpha$$

par passage a la limite
$x^m \to x^0$ dans $C(J, X_\alpha)$ quand $m \to \infty$.
comme $C(J, X_\alpha) \hookrightarrow L^1(J, X_\alpha)$, d'après Hypothèse $[HL]$ et avec le théorème de *Balder,* nous avons :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \lim_{m\to\infty} \int_0^T \mathcal{L}(t, x^m(t), u^m(t))\, dt + \lim_{m\to\infty} \int_0^T \mathcal{L}(\eta, x^m(\eta), u^m(\eta))\, d\eta \\ &\geq \int_0^T \mathcal{L}(t, x^0(t), u^0(t))\, dt + \int_0^T \mathcal{L}(\eta, x^0(\eta), u^0(\eta))\, d\eta = J(x^0, u^0) \geq \epsilon. \end{aligned}$$

Donc, on a démontrer que j est le éminemment de $u^0 \in U_{ad}$.

Exemple 2.3.1 *On Considère le problème* (2) *suivant :*

$$\begin{cases} D_t^q x(t,y) - \Delta x(t,y) = x(t,y) + 2u(t,y), y \in \Omega, t \in [0,1], q = \frac{25}{26} \\ x(t,y) \setminus_{y \in \partial\Omega} = 0, t > 0, \\ x(0,y) = 0. \end{cases}$$

Où $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine borné, $\partial\Omega \in C^3$.
On définit : $X = Y = L^2(\Omega)$, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,
et $Ax = -\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial y_3^2}\right)$ et pour $x \in D(A)$.
$U_{ad}\{u \in Y\} = \left\{u \in Y \mid \|u\|_{L^2([0,1],Y)} \leq 1\right\}$ L'ensemble de commande recevable.

Par théorème d'intégral de *Sobolev*, nous pouvons choisir $\alpha = \frac{11}{24}$ alors $X_{\frac{11}{24}} \hookrightarrow c^1(\overline{\Omega})$.

1. Trouvez le control $u(t,y)$ qui minimise l'indice de performance

$$J(x,u) = \int_0^1 \int_\Omega |x(t,y)|^2 \, dydt + \int_0^1 \int_\Omega |u(t,y)|^2 \, dydt.$$

Définir problème(3).
$x(t)(y) = x(t,y)$,
$c(t)u(t)(y) = 2u(t,y)$,
$f(t,x(t))(y) = x(t)(y)$.

$$\begin{cases} D_t^q x(t) = -Ax(t) + f(t,x(t)) + C(t)u(t), t \in [0,1], q \in (0,1), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

en peut écrite le problème (3) avec la fonction de coûsal :

$$J(u) = \int_0^1 \left(\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|_Y^2\right) dt.$$

Il est pas difficile de vérifier que $q\alpha = \frac{25}{26} \times \frac{4}{5} = \frac{275}{624} < \frac{1}{2}$ et $pq(1-\alpha) = 2 \times \frac{25}{26} \times \frac{13}{24} > \frac{25}{24} > 1$.
Ensuite, il remplit toutes les hypothèses données dans le théorème 4.3.
Par conséquent, le problème (3) comporte au moins une paire optimale.

Chapitre 3

Contrôlabilité, l'accessibilité et le contrôle de l'énergie minimal de système linéaire fractionnaire du type de Sobolev avec retard.

Contrôlabilité et observabilité sont deux contrôles majeurs concepts la théorie moderne introduite par *R.kalman*. Ces concepts jouent un rôle crucial dans des nombreux problèmes de contrôle, tels que stabulation par rétroaction, la réalisation ou optimale.

3.1 Préliminaires et formulations du problème

On considère le système linéaire de temps discret du type de *Sobolev* avec retard décrite par l'équation d'état :

$$\Delta^{\alpha}\left[L_0 x_{i+1}\right] = M_0 x_i + \sum_{k=1}^{h} M_k x_{i-k} + Bu_i, \tag{3.1}$$

avec des conditions initiales :

$$x_{-k} \in \mathbb{R}^n, k = 0, 1, ..., h, \tag{3.2}$$

Où h est un nombre positif, $x_i \in \mathbb{R}^n, u_i \in \mathbb{R}^m$, sont les vecteurs d'état et d'entrée respectivement, $M_K \in \mathbb{R}^{n\times n}\,(k = 0, 1, ..., h)\,, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$,

$$\Delta^\alpha[L_0 x_i] = \sum_{k=0}^{i}(-1)^k \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} x_{i-k}, \tag{3.3}$$

où Δ^α est le différence fractionnaire de l'ordre $0 < \alpha < 1$ de la fonction x_i à temps discret,

et

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{k!\,(\alpha-k)!}; \tag{3.4}$$

on substitue de (3.3) pour $(i+1)$ sur (3.1) on obtient l'équation :

$$x_{i+1} = F_0 x_i + \sum_{k=1}^{h} M_k L_k^{-1} x_{i-k} + \sum_{k=1}^{i} c_k\,(\alpha)\, L_k^{-1} x_{i-k} + L_0^{-1} B u_i. \tag{3.5}$$

L'équation (3.5) décrit le système linéaire discret avec temps retards par les nombres croissants.

Où

$$F_0 = M_0 L_0^{-1} + I_n \alpha, \tag{3.6}$$

I_n est matrice d'identité de $[n \times n]$,

et

$$c_k\,(\alpha) = (-1)^k \begin{pmatrix} \alpha \\ k+1 \end{pmatrix}, k = 1, 2, \ldots \tag{3.7}$$

Les coefficients (3.7) peuvent être calculés par l'algorithme ci-dessous [3.21]

$$c_{k+1}\,(\alpha) = c_k\,(\alpha)\,\frac{k+1-\alpha}{k+2},$$

$k = 1, 2, \ldots$ avec $c_1\,(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha\,(1-\alpha)$.

Définition 3.1.1 *Le système fractionnaire (3.1) avec des retards est appelé contrôlable en N étapes si pour chaque état finale $x_f \in \mathbb{R}^n$ donnée, et toutes* *les conditions initiales (3.2) données, il existe une suite d'entrées $u_i \in \mathbb{R}^m, i = 0, 1, ..., N-1$, qui transfère le système (3.1) à partir de condition initiale (3.2) à l'état de x_f.*

Définition 3.1.2 *Le système fractionnaire (3.1) avec des retards est appelé accessible en N étapes, si pour chaque état final $x_f \in \mathbb{R}^n$ donné, il existe une suite d'entrée $u_i \in \mathbb{R}^m, i = 0, 1, ..., N-1$, transfère le système (3.1) à partir de condition initiale nulle ($x_{-k} = 0$ pour $k = 0, 1, ..., h$) à l'état de x_f.*

Le problème de contrôlabilité de système dynamique, standard et fractionnaire, a été récemment pris en compte dans des nombreux articles. Un vé sur la solution de la théorie de contrôlabilité des systèmes dynamiques.

Dans ce chapitre, nous donnons la condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité et l'accessibilité du système fractionnaire (3.1) et les méthodes pour calculer les séquences de contrôle qui transfèrent le système (3.1) de la condition initiale prescrite (3.2) (zéro et non-zéro) pour l'état final donné. Nous considérons le problème du calcul des séquences de contrôle avec des amplitudes non bornés et délimitées. Les séquences de régulation avec des amplitudes bornées satisfont à l'hypothèse

$$u_i \in U \subset \mathbb{R}^m \text{ pour } i = 0, 1, \ldots, N-1; \tag{3.9}$$

l'ensemble U définit par :

$$U = \{u_i \in \mathbb{R}^m : |u_{ij}| \leq M, \forall j = 1, 2, \ldots, m\}, \tag{3.10}$$

où M est un nombre positif.

En outre, nous donnons la solution du problème de maîtrise l'énergie minimale (avec des entrés illimitées et bornées), formulé comme suit.

Trouver un nom de séquence de contrôle, qui transfère le système (3.1) de état initial zéro à l'état final désiré et minimises l'indice de performance :

$$I(u) = \sum_{i=0}^{N-1} u_i^T Q u_i. \tag{3.11}$$

Où Q est une matrice de pondération symétrique définie positive.

Le problème de l'énergie minimale pour les systèmes standards a été introduit par le professeur *J.KLAMKA*.

Récemment, le problème du contrôle d'énergie minimal avec des entrées bornés a été formulé et résolu, pour le système linéaire fractionnaire à temps positif continu, et pour le système fractionnaire positif - linéaire à temps discret sans retard a été introduit par le professeur *T.Kaczrek.*
Le travail est organisé comme suit.

- Dans sec [3] la forme générale de la solution du système fractionnaire (3.1) avec l'état initial (3.2) et condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité et l'accessibilité sont établies.
- Dans sec [4] nous donnons La solution du problème de l'énergie minimale.

3.2 Contrôlabilité

En prenant la transformée en Z des deux côtés de (3.5) à l'état initial (3.2), on obtient :

$$\begin{aligned} zX(z) - z(x_0) = F_0 X(z) + \sum_{k=1}^{h} L_k^{-1} M_k z^{-k} \left[X(z) + \sum_{-r=-k}^{-1} x_r z^{-r} \right] \\ + \sum_{k=1}^{i} c_k L_k^{-1} z^{-k} X(z) + L_0^{-1} B U(z), \end{aligned} \tag{3.12}$$

où
$X(z) = Z\{x_i\}, U(z) = Z\{u_i\}$.
L'équation ci-dessus peut être écrite sous la forme :

$$\Delta(z) X(z) = z x_0 + \sum_{K=1}^{h} M_k L_k^{-1} z^{-k} \sum_{r=-k}^{-1} x_r z^{-r} + L_0^{-1} B U(z), \tag{3.13}$$

où la matrice caractéristique est :

$$\Delta(z) = z I_n - F_0 - \sum_{k=1}^{h} M_k L_k^{-1} z^{-k} - \sum_{k=1}^{i} I_n c_k(\alpha) L_0^{-1} z^{-k}, \tag{3.14}$$

par la résolution de l'équation $X(z)$ de (3.13), on obtient :

$$\begin{aligned} X(z) &= \Delta^{-1}(z)\, z x_0 + \Delta^{-1}(z) \sum_{k=1}^{h} M_k L_k^{-1} z^{-k} \sum_{r=-k}^{-1} x_r z^{-r} \\ &+ \Delta^{-1}(z)\, L_0^{-1} B U(z) = \left[\Delta^{-1}(z)\, z\right] x_0 \\ &+ \left[\Delta^{-1}(z)\, z\right] \sum_{k=1}^{h} L_k^{-1} M_k \sum_{r=0}^{k-1} x_{r-k} z^{-r-1} + \left[\Delta^{-1}(z)\, z\right] B z^{-1} L_0^{-1} U(z). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Si en prenant la transformée en Z de (3.15), alors les équations (3.5) et (3.1) devients sous les formes suivantes :
où

$$x_i = \Phi_i x_0 + \sum_{k=1}^{h} \sum_{r=0}^{k-1} \Phi_{i-r-1} M_k L_k^{-1} x_{r-k} + \sum_{k=0}^{i-1} L_0^{-1} \Phi_{i-1-k} B u_k, \tag{3.16}$$

où

$$\Phi_i = Z^{-1}\left\{z \Delta^{-1}(z)\right\}, \tag{3.17}$$

Φ_i est la matrice de transition pour les équations de déclaration (3.5) et (3.1).

À partir de (3.17) et (3.14) il en résulte que Φ_i la matrice de transition d'état satisfait à l'équation :

$$L_0 \Phi_{i+1} = F_0 \Phi_i + \sum_{k=1}^{h} M_k \Phi_{i-k} + \sum_{k=1}^{i} c_k(\alpha)\, \Phi_{i-k} \tag{3.18}$$

avec des conditions initiales :

$$\Phi_0 = I_n, \Phi_i = 0 \quad \text{pour} \quad i < 0. \tag{3.19}$$

Lemme 3.2.1 *Φ_i la matrice-transition d'état satisfait également l'équation :*

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i F_0 + \sum_{k=1}^{h} L_k^{-1} \Phi_{i-k} M_k + \sum_{k=1}^{i} L_0^{-1} c_k(\alpha)\, \Phi_{i-k}, \tag{3.20}$$

avec la condition initiale (3.19).

Preuve. On considère l'équation

$$y_{i+1} = F_0^T y_i + \sum_{k=1}^{h} M_k^T \left[L_k^{-1}\right]^T y_{i-k} + \sum_{k=1}^{i} c_k(\alpha) \left[L_0^{-1}\right]^T y_{i-k}, \tag{3.21}$$

■

où $y_i \in \mathbb{R}^n$.

La matrice-transition d'état Ψ_i pour l'équation (3.21) peut être calculée à partir de la formule :

$$\Psi_i = Z^{-1}\left\{z\Delta_1^{-1}(z)\right\}, \tag{3.22}$$

où

$$\Delta_1(z) = zI_n - F_0^T - \sum_{k=1}^{h} M_k^T \left[L_k^{-1}\right]^T z^{-k} - \sum_{k=1}^{i} I_n c_k(\alpha) \left[L_0^{-1}\right]^T z^{-k}. \tag{3.23}$$

par conséquent, la matrice de transition d'état (3.22) vérifier l'équation :

$$\Psi_{i+1} = F_0^T \Psi_i + \sum_{k=1}^{h} M_k^T \left[L_k^{-1}\right]^T \Psi_{i-k} + \sum_{k=1}^{i} c_k(\alpha) \left[L_0^{-1}\right]^T \Psi_{i-k} \tag{3.24}$$

avec les conditions initiales : $\Psi_0 = I_n, \Psi_i = 0 \quad$ pour $\quad i < 0$.
A partir de (3.14) et (3.23) il en résulte que $\Delta(z) = \Delta_1^T(z)$.
D'où

$$\begin{aligned} \Phi_i &= Z^{-1}\left\{z\Delta^{-1}(z)\right\} \\ &= Z^{-1}\left\{\left(\Delta_1^{-1}(z)\right)^T z\right\} = \left[Z^{-1}\left\{z\Delta_1^{-1}(z)\, z\right\}\right]^T = \Psi_i^T. \end{aligned} \tag{3.25}$$

et par (3.24) on obtient :

$$\begin{aligned} (\Phi_{i+1})^T &= F_0^T \Phi_i^T + \sum_{k=1}^{h} M_k^T \left[L_k^{-1}\right]^T (\Phi_{i-k})^T \\ &\quad + \sum_{k=1}^{i} c_k(\alpha) \left[L_0^{-1}\right]^T (\Phi_{i-k})^T. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Ce qui montre que Φ_i satisfait l'équation (3.20).
Des considérations qui précèdent, nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 *La solution du système fractionnaire* (3.1) *avec condition initiale* (3.2) *de la forme* (3.16), *où la matrice de transition d'état peut être calculée à partir des formules récursives* (3.18) *ou* (3.20).

Sous forme de solution de l'équation d'état des systèmes linéaires fractionnaires à temps discret avec des retards dans l'état et de contrôle. Cette formule a été obtenue dans des différentes façons que la solution (3.16). En outre, la solution (3.16) a une forme différente de la solution proposée dans (3.17) dans le cas de retards dans les variables d'état seulement.

De (3.16), pour $i = N$, la forme de la solution de l'eq (3.5) et (3.1) comme suit :

$$x_N = S_N + R_N u^N, \tag{3.27}$$

où

$$\mathbb{R}_N = L_0^{-1}\left[B \qquad \Phi_1 \qquad \dots \qquad \Phi_{N-1}B\right], \tag{3.28}$$

Preuve.

$$S_N = \Phi_N x_0 + \sum_{k=1}^{h}\sum_{r=0}^{K-1}\Phi_{N-r-1}M_k L_k^{-1}x_{r-k}, \tag{3.29}$$

■

$$u^N = \begin{bmatrix} u_{N-1} \\ u_{N-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Nm}. \tag{3.30}$$

Théorème 3.2.2 *Le système* (3.1) *est contrôlable en N étapes si et seulement si il existe nombre entier N tel que le rang de la matrice de contrôlabilité* (3.28) *a rang rangée complète, c'est-à-dire le rang $R_N = n$.*

Preuve. L'équation (3.27) peut être écrite sous la forme : ■

$$P_N = R_N u^N, \tag{3.31}$$

où

$$P_N = x_N - S_N. \tag{3.32}$$

Le côté gauche de (3.31) est connu. Pour chaque $x_f = x_n \in \mathbb{R}^n$, le contrôle u^N peut être calculée sous forme (3.31) si et seulement si le rang $R_N = n$. Cette preuve ce termminer.

Théorème 3.2.3 *S'il existe N tel que le rang $R_N = n$ puis la suite de contrôle $u_i \in \mathbb{R}^n$, qui transfère le système (3.1) à partir de condition initiale (3.2) à l'état final $x_f = x_n \in \mathbb{R}^n$, peut être calculée à partir de la formule :*

$$u^N = R_N^T \left[R_N R_N^T\right]^{-1} P_N, \tag{3.33}$$

où P_N est définie par (3.32) .

Preuve. Si le rang $R_N = n$, alors det $\left(R_N R_N^T\right) \neq 0$ et matrice $R_N^T \left[R_N R_N^T\right]^{-1}$ est bien définie. Si (3.33) détient alors cette preuve ce terminer. ∎

$$P_N = R_N u^N = R_N R_N^T \left[R_N R_N^T\right]^{-1} P_N = P_N. \tag{3.34}$$

Le contrôle u^N peut être calculé aussi de la formule (3.35) :

$$u^N = R_N^T \left[R_N R_N^T\right]^{-1} P_N + (I_n - R_N^T \left[R_N R_N^T\right]^{-1} R_N)k, \tag{3.35}$$

où $K \in \mathbb{R}^{mN}$ est un vecteur arbitraire.

Pour montrer que le contrôle (3.35) transfére le système (3.1) de condition initiale (3.2) à l'état final x_f, nous substituons (3.35) dans (3.31) et ensuite nous obtenons

$$\begin{aligned} P_N &= R_N u^N + R_N R_N^T \left[R_N R_N^T\right]^{-1} P_N \\ &\quad +(R_N - R_N R_N^T \left[R_N R_N^T\right]^{-1} R_N)k \\ &= P_N. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Il est facile de voir que si $K = 0$ dans (3.35) on obtient (3.33).

Si la condition initiale (3.2) est égale à zéro selon les théorèmes (3.2) et (3.3) nous obtenons les conditions suivantes de l'accessibilité de système fractionnaire (3.1).

Théorème 3.2.4 *Le système (3.1) est accessible en N étapes si et seulement si il existe nombre entier N tel que le rang de la matrice (3.28) contrôlabilité (accessibilité) est égal à n.*

Si cela, alors u^N contrôler le système (3.1) qui transfère une condition initiale à partir de zéro à l'état final désiré $x_f = x_n \in \mathbb{R}^n$, peut être calculée à partir de

$$u^N = R_N^T \left[R_N R_N^T\right]^{-1} x_f. \tag{3.37}$$

Ou

$$u^N = R_N^T \left[R_N R_N^T\right]^{-1} P_N + (I_n - R_N^T \left[R_N R_N^T\right]^{-1} R_N)k, \tag{3.38}$$

où $k \in \mathbb{R}^{mN}$ est un vecteur arbitraire.
ℓ

3.3 L'énergie minimale de contrôle

Si la condition initiale (3.2) est égale à zéro, alors la solution (3.16) prend la forme :

$$x_i = \sum_{k=0}^{i-1} \Phi_{i-1-k} L_0^{-1} B u_k, \tag{3.39}$$

où la matrice de transition d'état Φ_i est calculé sous forme de la formule récursive (3.18) ou (3.20) sachant forme (3.39) de solution du système fractionnaire (3.1), nous résolvons le problème de l'énergie minimale on appliquer l'approche classique, exactement la même que dans le cas fractionnaires de système standard, cette approche a été appliquée pour les systèmes positives fractionnaires linéaires discrets avec retards.

On définit la matrice

$$W = R_N \widehat{Q}_N R_N^T \in R^{n \times n}, \tag{3.40}$$

Où R_N est la matrice accessibilité (contrôlabilité) de la forme (3.28) et

$$\widehat{Q}_N = diag\left[Q^{-1}, ..., Q^{-1}\right] \in R^{N_m \times N_m}, \tag{3.41}$$

Où Q est la matrice de pondération symétrique définie positive de l'index (3.11) de performance.

La matrice (W) est définie par (3.40) est non singulier si et seulement si la matrice R_N a rangée rang plein.

Théorème 3.3.1 *Si le système* (3.1) *est accessible en* N *étapes alors la séquence des entrées* $\widehat{u}_0, \widehat{u}_1, \widehat{u}_{N-1}$ *définies par :*

$$\widehat{u}^N = \begin{bmatrix} \widehat{u}_{N-1} \\ \widehat{u}_{N-2} \\ \vdots \\ \widehat{u}_0 \end{bmatrix} = \widehat{Q}_N R_N^T W^{-1} x_f. \tag{3.42}$$

Transfère le système (1.3) à partir de condition initiale nulle à l'état final $x_f \in \mathbb{R}^n$ et minimise l'indice de performance (3.11). En outre, la valeur minimale (optimale) de cet indice est donné par :

$$I(\widehat{u}) = x_f^T w^{-1} x_f. \tag{3.43}$$

Preuve. La preuve est similaire au preuve du problème d'énergie minimale classique et il est omise ici.

Contrôle optimal de Cinque minimises de l'indice performance (3.11) dépend de la matrice de pondération Q. De la comparaison (3.37) et (3.42), (3.40) il en résulte que la séquence de commande (3.37) minimise l'indice (3.11) de performance avec $Q = I_m$. Cet signifie que u^N est calculé à partir de (3.37) a l'énergie minimale de l'indice (3.11) de performance avec $Q = I_m$

De la même façon que dans (3.30), il peut être montré que, si la matrice de pondération présente la forme $Q = qI_m$ avec $q > 0$, alors la valeur optimale (3.43) de l'indice (3.11) de performance peut être calculée à partir de la formule :

$$I(\widehat{u}) = qx_f^T \left[\mathbb{R}_N R_N^T\right]^{-1} x_f. \tag{3.44}$$

Si le contrôle optimale calculée de la forme (3.42) ne satisfait pas à la condition (3.9), puis (tableaux similaires comme dans le cas de séquences de contrôle

(3.33) et (3.37) augmentent N par un et répéter $(N+1)$ le calcul de la séquence de commande (3.42). Après nombre limité obtenons ces calculs, et nous obtenons séquence entrée (3.42) satisfaisant à la condition (3.9) . ∎

Bibliographie

[1] D. R. Smart, Fixed point theory, Combridge Uni. Press, Combridge 1974.

[2] K. B. Oldam, J. Spanier, The fractional calculus, Academic Press. Inc (1974).

[3] A. PAZY. Semigroupes of linear operators and applications to partial differential equations. Spring-Verlag. New-York. Inc (1983).

[4] K.S. Miller, B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, John Wiley and Sons. Inc (1993).

[5] I. Podlubny; Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, (1999).

[6] A.A. Kilbas, H. M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematical Studies 204, Ed Jan Van Mill Amsterdam, (2006).