République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Mathématiques Appliqués**

Par :

M^{lle}. Batah Fatiha

Intitulé

Méthode de Newton pour résolution des systèmes non linéaires

Dirigé par : Dr. Boussetila Nadjib

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Benarioua Khadir	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Boussetila Nadjib	Prof	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Guebbai Hamza	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2015

Remerciements

Louange à Dieu qui humblement toute sa grandeur,

Louange à Dieu, qui se sont rendus à la capacité de tout

Louange à Dieu, qui l'humiliation à la gloire tout

Louange à Dieu, qui a subi son tout

On remercie dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire. Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Mr professeur Boussetila Najib, on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire. Et je eu le soutien dans cette note espérant Dieu pour l'aider à la meilleure choses.

Nos remerciement s'adresse à Mr Docteur Guebbai Hamza et docteur Benarioua Khadir pour ses aides pratiques et son soutien moral et ses encouragements. Nous sommes conscientes de l'honneur que nous a fait en étant président du jury d'avoir accepté d'examiner ce travail. Nos remerciement s'adresse également à tout nos professeurs pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles. Nos profonds remerciements vont également à toutes les

personnes qui nous ont aidés et soutenue de prés ou de loin principalement à tous

l'effectif du promotion 2014 /2015.

Dédicaces

Louange à Dieu, qui nous a guidés et nous aider

à dédier ce travail.

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à toi mon père.

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur ; maman que j'adore.

Pour l'âme de la bien-aimée de mon cœur, qui a laissé un grand impact avec son départ , que dieu te garde dans son vaste paradis , cher petit frère " Mohammed " Hamdi " Dieu ait son âme.

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour, les soutenir de mon père et les foies de ma mère. Grand frère " Samir" et sa femme Naima , à tous mes sœurs (Ismahane , Linda , Nadjete , Assia Et Hadjira),

Les beaux frères qui ont entrés à ma famille : Badri, Halim, Kamel Et Sofiane

Mes fleurs nièces : Tamer ,Yara, Haroune, Rahma,Isra, Yahia , Chaima et Cheaib

et le petit Abdelali ,

À mes beaux parents et à toute ma famille , À tous mes amis à son nom et collègues À tous les étudiants de la promotion. Je dédie ce travail dont le grand plaisir leurs revient en premier lieu pour leurs conseils, aides, et encouragements. Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, et qui m'ont

accompagnaient durant mon chemin d'études supérieures, mes aimables

amis, collègues d'étude, et frères de cœur .

Table des matières

1

Méthode méthode de Newton-Raphson dans $\mathbb{R}$

1. Position du problème

Considérons l'équation :

$$f(x) = 0, \quad x \in I \subseteq \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

La méthode de Newton est une méthode de résolution de l'équation $f(x) = 0$, qui permet de résoudre numériquement $f(x) = x$.
Si $x^{(0)}$ est proche de la racine r on peut faire un développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction f en $x^{(0)}$:

$$f(x) = f(x^{(0)}) + (x - x^{(0)})f'(x^{(0)}) + O((x - x^{(0)})^2)$$

Pour trouver une valeur approchée de r, on ne garde que la partie linéaire du développement, on résout :

$$f(r) = 0 \approx f(x^{(0)}) + (r - x^{(0)})f'(x^{(0)})$$

donc (si $f'(x^{(0)}) \neq 0$) :

$$r \approx x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}$$

Graphiquement, cela revient à tracer la tangente à la courbe représentative de f et à chercher où elle coupe l'axe des x. On considère donc la suite récurrente définie par une valeur $x^(0)$ proche de la racine et par la relation :

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})} \tag{1.2}$$

Il y a deux théorèmes importants, l'un d'eux prouve que si $x^{(0)}$ est "assez proche" de r alors la suite $(x^{(n)})$ converge vers r, malheureusement il est difficile de savoir en pratique si on est "assez proche" de $x^{(0)}$ pour que ce théorème s'applique. Le second théorème donne un critère pratique facile à vérifier qui assure la convergence, il utilise les propriétés de convexité de la fonction.

2. Convergence Locale

THÉORÈME 2.1. *Soient $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ et $\bar{x} \in [a,b]$ une solution de (1.1) telle que $f'(\bar{x})$ soit non nul. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]$ la suite $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ donnée par (1.2) est bien définie et converge vers $\bar{x} \in [a,b]$. En outre, il existe une constante $C > 0$ telle que $|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq C|x^{(k)} - \bar{x}|^2$. Nous disons que la méthode de Newton-Raphson est au moins d'ordre deux.*

Preuve.

Comme f est de classe $C^2([a,b],\mathbb{R})$ et $f'(\bar{x})$ est différent de zéro, il existe $\delta > 0, L > 0$ et $M > 0$ tels que pour tout $x \in [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]$, les valeurs de $f'(x)$ sont différentes de zéro et

$$\frac{1}{|f'(x)|} \leq \frac{1}{L}, \qquad |f''(x)| \leq M.$$

En effet, en utilisant la continuité de f' au point $\bar{x}$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $x \in [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]$, $|f'(x) - f'(\bar{x})| \leq \epsilon$, alors en notant $\alpha = f'(\bar{x})$ que nous supposons par exemple strictement positif et en prenant $\epsilon = \frac{\alpha}{2}$, nous obtenons $\frac{\alpha}{2} \leq f'(x) \leq \frac{3\alpha}{2}$. Donc, en prenant $L =$
$fraca2$, nous avons pour tout $x \in [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]$, il existe $M > 0$ tel que $|f''(x)| \leq M$.
Ainsi, en prenant au besoin une valeur de $\delta > 0$ plus petite encore, nous pouvons choisir $\delta > 0$ qui vérifie $\frac{M\delta}{2L} < 1$. En prenant $x^{(0)} \in [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]$ et en effectuant un développement de Taylor au voisinage du point $x^{(0)}$, nous obtenons

$$f(\bar{x}) = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(\bar{x} - x^{(0)}) + \frac{1}{2}f''(\eta^{(0)})(\bar{x} - x^{(0)})^2.$$

où : $\eta^{(0)} \in [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]$. Puis, en écrivant

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= x^{(0)} - \left[f'(x^{(0)})\right]^{-1}\left(f(x^{(0)}) - f(\bar{x})\right) \\ &= x^{(0)} + (\bar{x} - x^{(0)}) - \frac{1}{2}\frac{f''(\eta^{(0)})}{f'(x^{(0)})}(\bar{x} - x^{(0)})^2 \\ &= \bar{x} - \frac{1}{2}\frac{f''(\eta^{(0)})}{f'(x^{(0)})}(\bar{x} - x^{(0)})^2. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant une majoration de $|f''|$ et une minoration de $|f'|$, nous avons finalement

$$|x^{(1)} - \bar{x}| \leq \frac{M}{2L}|x^{(0)} - \bar{x}|^2 \leq \frac{M}{2L}\delta^2 \leq \delta.$$

Nous procédons ensuite par récurrence. Supposons que $|x^{(k)} - \bar{x}| \leq \delta$, par un calcul analogue au précédent, il vient

$$|x^{(k+1)} - \bar{x}| \leq \frac{M}{2L}|x^{(k)} - \bar{x}|^2 \leq \delta. \tag{2.1}$$

Ainsi, en posant

$$e^{(k)} = \frac{M}{2L}|x^{(k)} - \bar{x}|,$$

nous obtenons en utilisant (2.1) que

$$e^{(k)} \leq \left[e^{(k-1)}\right]^2 \leq \left[e^{(k-2)}\right]^{2^2} \leq .... \leq \left[e^{(0)}\right]^{2^k}.$$

Or, en ayant choisi au préalable $x^{(0)}$ tel que $e^{(0)} = |x^{(0)} - \bar{x}| \leq \frac{M\delta}{2L} < 1$, nous montrons que la méthode de Newton-Raphson est localement convergente.

Remarque 2.1. Observons que cette méthode donne la convergence locale de la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ vers la solution $\bar{x} \in [a,b]$. Il faut donc partir d'un point $x^{(0)}$ suffisamment proche de $\bar{x}$, cela nécessite la connaissance *a priori* de la solution $\bar{x}$, ce qui n'est pas toujours possible.

Nous venons de voir que sous certaines hypothèses, la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution $\bar{x} \in [a,b]$. Néanmoins dans la pratique un critère d'arrêt est nécessaire pour stopper les itérations. Par exemple, le critère d'arrêt peut être $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \epsilon$, où $\epsilon > 0$ est un petit paramètre fixé. Toutefois cela n'assure pas à chaque fois la convergence vers la solution $\bar{x}$. En effet, considérons par exemple la suite $x^k = \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l}$ nous avons

$$\lim |x^{(k+1)} - x^{(k)}| \longrightarrow 0, \text{lorsque} k \to +\infty$$

mais x^k tend vers l'infini. Remarquons qu'un autre choix possible est le critère $|f(x^{(k)})| < \epsilon$.

3. Convergence globale

Passons maintenant à un critère très utile en pratique :

Définition 3.1. (convexité)
Une fonction f continûment dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite convexe si son graphe est au-dessus de la tangente en tout point de I.

Il existe un critère simple permettant de savoir si une fonction de classe C^2 est convexe :

Théorème 3.1. *Si f est C^2 et $f'' \geq 0$ sur I alors f est convexe.*

THÉORÈME 3.2. *Si $f(\bar{x}) = 0, f'(\bar{x}) > 0$ et si $f'' \geq 0$ sur $[\bar{x}, b]$ alors pour tout $x^{(0)} \in [\bar{x}, b]$ la suite de la méthode de Newton*

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})},$$

est définie, décroissante, minorée par $\bar{x}$ et converge vers $\bar{x}$. De plus

$$0 \leq x^{(n)} - \bar{x} \leq \frac{f(x^{(n)})}{f'(\bar{x})}$$

(On prendra garde dans cette estimation aux erreurs en calcul approché, le calcul de la valeur de $f(x^n)$, proche de 0, va typiquement faire intervenir la différence de deux termes très proches, d'où perte de précision sur la mantisse)

Preuve. On a $f'' \geq 0$ donc si $f'(\bar{x}) > 0$ alors $f' > 0$ sur $[\bar{x}, b]$, f est donc strictement croissante sur $[\bar{x}, b]$ on en déduit que $f > 0$ sur $]\bar{x}, b]$ donc $x^{(n+1)} \leq x^{(n)}$. Comme la courbe représentative de f est au-dessus de la tangente, on a $x^{(n+1)} \geq r$ (car $x^{(n+1)}$ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente avec l'axe des x).
La suite (x^n) est donc décroissante minorée par $\bar{x}$, donc convergente vers une limite $l \geq \bar{x}$.
À la limite, on a

$$l = l - \frac{f(l)}{f'(l)} \Rightarrow f(l) = 0$$

donc $l = \bar{x}$ car $f > 0$ sur $]\bar{x}, b]$.
Comme $(x^{(n)})$ est décroissante, on a bien $0 \leq x^{(n)} - \bar{x}$, pour montrer l'autre inégalité, on applique le théorème des accroissements finis, il existe $\theta \in [\bar{x}, x^n]$ tel que

$$f(x^{(n)}) - f(\bar{x}) = (x^{(n)} - \bar{x}) f'(\theta)$$

comme $f(\bar{x}) = 0$, on a

$$x^{(n)} - \bar{x} = \frac{f(x^{(n)})}{f'(\theta)}$$

et la deuxième inégalité du théorème en découle parce que f' est croissante.

Variantes :
Il existe des variantes, par exemple si $f'(\bar{x}) < 0$ et $f'' \geq 0$ sur $[a, \bar{x}]$. Si $f'' \leq 0$, on considère $g = -f$.

4. Méthode méthode de Newton-Raphson dans $\mathbb{R}^n$

Rappels de calcul différentiel

Considérons deux $\mathbb{R}$-espaces de Banach E et F. Notons $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F, muni de la norme de convergence uniforme

$$\|A\| = \sup_{0\neq x\in E} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|\leq 1} \|Au\|, \quad u \in \mathcal{L}(E,F).$$

Supposons que U est un ouvert (non vide) de E et considérons une fonction $f : U \longrightarrow F$.

Définition 4.1. On dit que la fonction f est différentiable en un point $x \in U$ s'il existe une application linéaire continue $L(x) \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que

$$\lim_{\|h\|\longrightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - L(x)h\|}{\|h\|} = 0. \tag{4.1}$$

- L'application $L(x)$ dépend de x, on la note $Df(x)$ ou $\nabla f(x)$, de sorte que (4.1) se réécrit

$$\lim_{\|h\|\longrightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - \nabla f(x)h\|}{\|h\|} = 0. \tag{4.2}$$

- L'application $\nabla f(x)$ est appelée **différentielle** de f au point x.

Définition 4.2. On dit que la fonction f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point $x \in U$. Dans ce cas, on appelle différentielle de f la fonction :

$$\nabla f : U \longrightarrow \mathcal{L}(E,F),\ x \longmapsto \nabla f(x). \tag{4.3}$$

Si de plus ∇f est continue par rapport à x, on dit alors que f est continûment différentiable, où de façon équivalente que f est de classe $\mathcal{C}^1(E,F)$

Cas particulier : $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^q$.
Pour tout $x \in U$, $x = (x_1, \ldots, x_p)^T$ et pour tout $i \in \{1,...,p\}$, l'ensemble

$$V_i(x) = \{t \in \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_{i-1}, tx_i, \ldots, x_p) \in U\}$$

est un voisinage ouvert de x_i.
Supposons que $f : U \longrightarrow F$ est différentiable. Alors l'application partielle :

$$g_i : V_i(x) \longrightarrow F,\ t \longmapsto f(x + (t - x_i)e_i) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_p), \tag{4.4}$$

est différentiable en x_i et $g'(x_i) = \nabla f(x)e_i$, c'est en fait la dérivée partielle de f dans la direction e_i au point x. Dans la suite, on note cette dérivée partielle par $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \longrightarrow F,\ x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \quad i = 1,...,p. \tag{4.5}$$

Par linéarité de ∇f, on a pour tout $h = (h_1, \ldots, h_p)^T \in \mathbb{R}^p$

$$\nabla f(x)h = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i \tag{4.6}$$

Théorème 4.1. *Une application $f : U \longrightarrow F$ est continûment différentiable ssi ses p dérivées partielles existent et sont continues sur U.*

Si une fonction $f : U \longrightarrow F$, de composante $(f_1, \ldots, f_q)$ est différentiable au point x, on définit sa matrice jacobienne au point x comme la matrice de l'application linéaire $\nabla f(x)$ dans les bases canoniques de E et F. Elle est donnée par :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R}).$$

Théorème 4.2. **[fonction lipschitzienne]***Soient E, F deux espaces de Banach, et Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$ une fonction différentiable sur un ouvert convexe U. On suppose que sa différentielle est bornée, c'est-à-dire il existe $k > 0$ telle que $\|\nabla f(x)\| \leq k$, pour tout $u \in U$. Alors la fonction f est k-lipschitzienne, c'est-à-dire que $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$, pour tout $(x, y) \in U \times U$*

Définition 4.3. Une fonction f définie sur un ouvert (non vide) U d'un $\mathbb{R}$-espace de Banach E et à valeur dans un $\mathbb{R}$-espace de Banach F est dite deux fois différentiable en $\in U$ si elle est différentiable dans un voisinage ouvert U_x de x et si sa différentielle $\nabla f : U_x \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ est différentiable en x. On dit que f est deux fois différentiable dans U si elle deux fois différentiable en tout point de U.
Par définition, la différentielle de ∇f en x, $\nabla^2 f(x) = \nabla(\nabla f)(x)$ est une application linéaire continue de E dans $\mathcal{L}(E, F)$. De même, on définit de manière récursive les espaces de fonctions p-fois différentiables, notés $C^p(E, F)$ et la différentielle d'ordre p d'une fonction f, notée $\nabla^p f$.

Théorème 4.3. **[Développement de Taylor avec reste intégral]***Soient E, F deux espaces de Banach, U un ouvert de U et $f : U \longrightarrow F$ une fonction de classe C^{n+1}. Alors pour tout $(x, h) \in U \times E$ tel que le segment $[x, x + h]$ soit inclus dans U, on a*

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} \nabla^p f(x) h^{[p]} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \nabla^{n+1} f(x + th) h^{[n+1]} dt.$$

$h^{[j]}$ *désigne* $\underbrace{(h,\ldots,h)}_{j \text{ fois}}$.

THÉORÈME 4.4. *Soient E, F deux espaces de Banach, U un ouvert de U et* $f : U \longrightarrow F$ *une fonction n-fois différentiable en x. Alors*

$$\|f(x+h) - f(x) - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} \nabla^p f(x) h^{[p]}\| = o(\|h\|^n),$$

où $o(\|h\|^n)$ *signifie qu'il existe une fonction* $\varepsilon(h)$ *telle que* $\varepsilon(h)/\|h\|^n \longrightarrow 0$ *lorsque* $h \longrightarrow 0$.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n)$. Supposons dans cette partie qu'il existe $\overline{x} \in U$ solution de $f(\overline{x}) = 0$. Nous souhaitons mettre au point une méthode numérique pour approcher cette solution. Pour cela, nous procédons de manière analogue à ce que nous avons fait pour des fonctions à valeurs réelles.
Tout d'abord, nous choisissons une première approximation $x_(0) \in U$ de $\bar{x}$ et remplaçons ensuite la fonction f par son développement de Taylor à l'ordre un au point $x_(0)$, puis en itérant ce procédé nous obtenons une suite $(x_k)_k \in \mathbb{N}$ donnée par

$$x_{(0)} = x_0 \in U, \quad f(x_{(k)}) + \nabla f(x_{(k)})(x_{(k+1)} - x_{(k)}) = 0, \; k \geq 0. \tag{4.7}$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, nous devons donc résoudre le problème (4.7). Il nous faut donc :

- calculer la matrice jacobienne $A = \nabla f(x_k)$,
- s'assurer que cette matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est bien inversible,
- résoudre le système $Ax_{(k+1)} = -f(x_{(k)}) + Ax_{(k)} \in \mathbb{R}$,
- s'assurer que l'itéré suivant $x_{(k+1)}$ appartient bien à U pour pouvoir continue les interactions suivantes.

Lorsque $n = 1$, nous avons facilement montré que la méthode de Newton-Raphson est convergente et l'ordre deux. Nous allons voir que ce résultat est toujours vrai en dimension $n \geq 1$.

THÉORÈME 4.5. *[Convergence local de la méthode de Newton-Raphson dans* $\mathbb{R}^n$*] Considérons* $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction deux fois différentiable et dont la différentielle d'ordre deux est continue, c'est-à-dire que f est de classe* $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}^n)$.
Soit $\bar{x} \in U$ *tel que* $f(\bar{x}) = 0$ *et la matrice* $\nabla f(\bar{x})$ *est inversible. Alors :*

- *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $x_0 \in \mathcal{B}(\bar{x}, \delta)$, *la suite* $(x_{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ *donnée par est bien définie et* $x_{(k)} \in \mathcal{B}(\bar{x}, \delta)$, *pour tout* $k \in \mathbb{N}$;

— *la suite* $(x_{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *donnée par* (4.7) *converge vers la solution* $\overline{x} \in U$;

— *il existe une constante* $C > 0$ *telle que* $\|x_{(k+1)} - \overline{x}\| \leq C\|x_{(k)} - \overline{x}\|^2$.

Ici $B(\bar{x}, \delta)$ *représente la boule de* $\mathbb{R}^n$ *de centre* $\bar{x}$ *et de rayon* δ.

Avant d'aborder la preuve de ce théorème, présentons trois lemmes intermédiaires : le premier est simplement un résultat technique sur les matrices, le deuxième fournit un résultat de stabilité de la fonction f au voisinage de point $\overline{x} \in U$ tel que $f(\overline{x}) = 0$ et enfin le troisième lemme assure l'existence d'une solution à chaque étape de l'algorithme de Newton-Raphson. D'abord, proposons un rappel sur les matrices et les normes matricielles.

Lemme 4.1 *Soit* $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ *une matrice dans un corps* $\mathbb{K}$ *telle que* $\|B\| < 1$, *pour une norme matricielle subordonnée* $\|.\|$. *Alors la matrice* $(I_n - B)$ *est inversible et*

$$(I_n - B)^{-1} = \sum_{k\geq 0} B^k, \quad \|(I_n - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}.$$

Preuve. Remarquons tout d'abord que la condition $\|B\| < 1$ assure la convergence de la série puisque

$$\|\sum_{k=0}^{+\infty} B^k\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|B\|^k < +\infty.$$

En outre, pour tout $p \geq 1$, on a

$$(I_n - B)\sum_{k=0}^{p} B^k = \sum_{k=0}^{p}(I_n - B)B^k = I_n - B^{p+1}$$

puisque $\|B\| < 1$, nous obtenons en passant à la limite $p \longrightarrow +\infty$

$$(I_n - B)\sum_{k\geq 0} B^k = I_n.$$

Donc $(I_n - B)^{-1} = \sum_{k\geq 0} B^k$. Enfin,

$$\|(I_n - B)^{-1}\| = \|\sum_{kgeq0} B^k\| < \sum_{k\geq 0} \|B\|^k < \frac{1}{1 - \|B\|}.$$

Ensuite, mettons en évidence un résultat de régularité de la fonction f au voisinage du point $\overline{x} \in U$ vérifiant $f(\overline{x}) = 0$. ∎

Lemme 4.2. *Soient* $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une fonction de classe* $C^2(U, \mathbb{R}^n)$ *et* $\overline{x} \in U$ *tel que* $f(\overline{x}) = 0$ *et* $\nabla f(\overline{x})$ *est inversible. Alors il existe* $L > 0, M > 0$ *et un paramètre* $\delta > 0$ *vérifiant* $\dfrac{M\delta}{L} < 1$, *tels que pour tout* $x \in B(\overline{x}, \delta)$, $\|[\nabla f(x)]^{-1}\| \leq \dfrac{1}{L}$ *et de plus* $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq M\|x - y\|$

Preuve. Puisque $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}^n)$, pour tout $x \in U$ le terme $\|\nabla^2 f(x)\|$ est borné sur tout sous-ensemble borné de U et d'après le théorème 4.2, pour un rayon $r > 0$ fixé, il existe $M(r) > 0$ tel que pour tout $x, y \in B(\overline{x}, r) \in U$,

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq M(r)\|x - y\|.$$

Remarquons bien que r fixé et quelconque ; il reste donc à montrer qu'il existe $\delta > 0$ et $L > 0$ tels que pour tout $x \in B(\bar{x}, \delta)$, la matrice $\nabla f(x)$ est inversible et vérifie

$$\|\nabla f(x)^{-1}\| \leq \frac{1}{L}.$$

Pour cela, nous écrivons

$$\nabla f(x) = \nabla f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) + \nabla f(x) = \nabla f(\bar{x})[I_n - [\nabla f(\bar{x})]^{-1}(\nabla f(\bar{x}) - \nabla f(x))]$$

et posons

$$B = [\nabla f(\bar{x})]^{-1}(\nabla f(\bar{x}) - \nabla f(x)).$$

Ce qui s'écrit alors

$$\nabla f(x) = \nabla f(\overline{x})[I_n - B].$$

Ainsi, puisque $\nabla f(\bar{x})$ est inversible, la matrice $\nabla f(x)$ est inversible dés que $[I_n - B]$ est elle même inversible. En vue d'appliquer le lemme 4.1, il nous suffit de montrer qu'il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $x \in B(\overline{x}, \delta_0)$, nous avons $\|B\| < 1$. Or d'après ce qui précède nous avons

$$\|B\| < \|[\nabla f(\overline{x})]^{-1}\|\|\nabla f(x) - \nabla f(\bar{x})\| < \|[\nabla f(\overline{x})]^{-1}\|M(r)\|x - \bar{x}\|$$

et en prenant $\delta_0 > 0$ suffisamment petit tel que $M(r)\|[\nabla f(\overline{x})]^{-1}\|\delta_0 < 1$, nous avons pour tout $x \in B(\overline{x}, \delta_0), \|B\| < 1$, ce qui signifie que pour tout $x \in B(\overline{x}, \delta_0)$, la matrice $\nabla f(x)$ est inversible et

$$\|[\nabla f(x)]^{-1}\| \leq \|[\nabla f(\bar{x})]^{-1}\|\|(I_n - B)\|, \leq [\nabla f(\bar{x})]^{-1}\frac{1}{1 - \|B\|} =: \frac{1}{L}.$$

Nous choisissons finalement $M := M(r)$ et $\delta \in]0, \delta_0[$ tel que $\dfrac{M(r)\delta}{L} < 1$,ce qui conclut la démonstration. ∎

Enfin, le troisième lemme assure l'existence de la suite $(x_(k))_{k \in \mathbb{N}}$ obtenue à l'aide de la méthode de Newton-Raphson.

Lemme 4.3. *Soient W un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : W \mapsto \mathbb{R}^n$ une fonction telle que $f \in \mathcal{C}^1(W, \mathbb{R}^n)$, $\nabla f(x)$ est inversible pour tout $x \in W$ et il existe $L > 0$ et $M > 0$ vérifiant*

$$\|[\nabla f(\bar{x})]^{-1}\| \leq \frac{1}{L}, \quad \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq M\|x - y\|, \tag{4.8}$$

et pour $k \geq 1$, $x_{(k-1)} \in W$. Alors le terme $x_{(k)}$ donné par la méthode de Newton-Raphson est bien défini et tel que

$$\|x_{(k)} - x_{(k-1)}\| \leq \frac{1}{L}\|f(x_{(k-1)})\|, \tag{4.9}$$

et

$$\|f(x_{(k)})\| \leq M\|x_{(k)} - x_{(k-1)}\|^2. \tag{4.10}$$

Preuve. D'une part, puisque $x_{(k-1)} \in W$, la matrice jacobienne $\nabla f(x_{(k-1)})$ est inversible, nous pouvons construire

$$x_{(k)} = x_{(k-1)} - [\nabla f(x_{(k-1)})]^{-1} f(x_{(k-1)}),$$

d'où nous déduisons, grâce à l'hypothèse (4.8), que

$$\|x_{(k)} - x_{(k-1)}\| = \|[\nabla f(x_{(k-1)})]^{-1} f(x_{(k-1)})\| \leq C\|f(x_{(k-1)})\|.$$

D'autre part, à l'aide de la formule de Taylor-Young avec reste intégral, nous avons aussi

$$f(x_{(k)}) = f(x_{(k-1)}) + \int_0^1 \nabla f(x_{(k-1)} + t(x_{(k)} - x_{(k-1)}))(x_{(k)} - x_{(k-1)})dt.$$

Puis, en utilisant la méthode de Newton-Raphson à l'étape $k-1$,

$$f(x_{(k-1)}) + \nabla f(x(k-1))(x_{(k)} - x_{(k-1)}) = 0,$$

nous avons

$$f(x_{(k)}) = \int_0^1 [\nabla f(x(k-1) + t(x_{(k)} - x_{(k-1)})) - \nabla f(x(k-1))](x_{(k)} - x_{(k-1)})dt.$$

D'où,

$$\begin{aligned}\|f(x_{(k)})\| &\leq \sup_{t\in]0,1[} (\|\nabla f(x(k-1) + t(x_{(k)} - x_{(k-1)})) - \nabla f(x(k-1))\|)\|x_{(k)} - x_{(k-1)}\| \\ &\leq \sup_{t\in]0,1[} (Mt\|x_{(k)} - x_{(k-1)}\|)\|x_{(k)} - x_{(k-1)}\|,\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\|f(x_{(k)})\| \leq \|x_{(k)} - x_{(k-1)}\|^2$. ■

Nous sommes dorénavant en mesure de démontrer le théorème 4.5.

Preuve. D'abord, en appliquant le lemme 4.2, puisque la matrice $\nabla f(\bar{x})$ est inversible et $f \in C^2(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$, il existe $L > 0$, M et $\delta > 0$ vérifiant $\dfrac{M\delta}{L} < 1$, tels que pour tout $x \in B(\bar{x}, \delta)$, la matrice $\nabla f(x)$ est inversible et

$$\|[\nabla f(x)]^{-1}\| \leq \frac{1}{L}.$$

De plus, pour tout $x, y \in\in B(\bar{x}, \delta)$, $\quad \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq M\|x - y\|$.

Dans un premier temps, nous souhaitons démontrer que chaque terme $x_{(k)}$ est bien défini pour tout $k \in \mathbb{N}$ et ensuite que la suite $(f(x_{(k)}))_{k\geq 0}$ tend vers zéro lorsque k tend vers l'infini. Pour cela, nous raisonnons par récurrence.

Soit $x_0 \in B(\bar{x}, \delta)$. Montrons que si le terme $x_{(k)} \in B(\bar{x}, \delta)$ pour $k \geq 0$, alors nous avons aussi $x_{(k+1)} \in B(\bar{x}, \delta)$. Tout d'abord en appliquant le lemme 4.3, la valeur $x_{(k+1)}$ est bien défini. Ensuite à l'aide d'un développement de Taylor-Young à l'ordre deux de la fonction f et en rappelant que $f(\bar{x}) = 0$, il vient

$$\|f(x_{(k)}) + \nabla f(x_{(k)})(\bar{x} - x_{(k)})\| \leq M\|\bar{x} - x_{(k)}\|^2.$$

Aussi, en utilisant la définition de $x_{(k+1)}$, nous avons

$$\|\nabla f(x_{(k)})(x_{(k+1)} - \bar{x})\| \leq M\|\bar{x}_{(k)} - x_{(k)}\|^2.$$

Puis,

$$\begin{aligned} \|x_{(k+1)} - \bar{x}\| &= \|\nabla f(x_{(k)})^{-1} \nabla f(x_{(k)})(x_{(k+1)} - \bar{x})\| \\ &\leq \|\nabla f(x_{(k)})^{-1}\| \|\nabla f(x_{(k)})(x_{(k+1)} - \bar{x})\| \\ &\leq \frac{M}{L}\|\bar{x}_{(k)} - x_{(k)}\|^2. \end{aligned} \tag{4.11}$$

et donc par définition de δ, nous avons $\|x_{(k+1)} - \bar{x}\| \leq \dfrac{M\delta^2}{L} \leq \delta$, ce qui montre bien que $x_{(k+1)} \in B(\bar{x}, \delta)$ et donc le premier point du théorème 4.5.

Notons que nous avons par la même occasion démontré l'existence d'une constante $C = \dfrac{M}{L} > 0$ telle que $\|x_{(k+1)} - \bar{x}\| \leq C\|\bar{x}_{(k)} - x_{(k)}\|^2$, ce qui prouve la dernière assertion du théorème 4.5.

Intéressons-nous alors au deuxième point, c'est-à-dire à la convergence de la suite $(x_{(k)})_{k\geq 0}$. Pour cela posons $e^{(k)} := \dfrac{M\|x_{(k)} - \bar{x}\|}{L}$, il vient alors en multipliant (4.11) par $\dfrac{M}{L}$,

$$e^{(k+1)} \leq [e^{(k)}]^2 \leq [e^{(k-1)}]^{2^2} \leq \ldots \leq [e^{(0)}]^{2^{k+1}}.$$

Or, en ayant choisi au préalable $x_{(0)}$ tel que $\exp^{(0)} = \frac{M\|x_{(0)} - \bar{x}\|}{L} \leq \frac{M\delta}{L} < 1$, nous montrons que la méthode de Newton-Raphson est bien localement convergente.

∎

Notons $N_f(x) = x - Df(x)^{-1}f(x)$ l'opérateur de Newton.

Théorème 4.6. *On suppose que f est de classe C^2. Soientt $r \in U$ tel que $f(r) = 0$, $Df(r)$ est inversible et $c > 0$ tel que $\bar{B}(r,c) \subset U$ on pose $M = \sup_{\|x-r\|\leq c} (\|Df(r)^{-1}D^2f(x)\|)$.*

Si $2Mr \leq 1$, pour tout $x_0 \in \bar{B}(r,c)$, la suite de Newton (x_{k+1}) est définie et converge vers r. De plus

$$\|x_k - r\| \leq (\frac{1}{2})^{2^k-1}\|x_0 - r\|$$

.

Preuve. On suppose que $Df(x)$ est inversible pour tout x tel que $\|x-r\| \leq c$. On applique la formule de Taylor à la fonction $Df(r)^{-1}Df(x)$, on obtient :
$Df(r)^{-1}Df(x) = id_E + \int_0^1 Df(r)^{-1}D^2f(r+t(x-r))(x-r)dt$. d'autre part $\|I - Df(r)^{-1}Df(x)\| \leq \int_0^1 \|Df(r)^{-1}D^2f(r+t(x-r))\|\|(x-r)\|dt \leq cM \leq \frac{1}{2}$ (puisque $2cM \leq 1$) On remarque que $Df(r)^{-1}Df(x)$ est inversible de plus $\|Df(r)^{-1}Df(x)\| \leq 2$. De plus :
$0 = Df(r)^{-1}f(r) = Df(r)^{-1}f(x) + Df(r)^{-1}Df(x)(r-x) + \int_0^1 (1-t)Df(r)^{-1}D^2f(x+t(x-r))(x-r)^2dt.$
donc
$N_f(x) - r = Df(x)^{-1}Df(r)\int_0^1 (1-t)Df(r)^{-1}D^2f(x+t(r-x))(r-x)^2dt$
pat suite :

$$\|N_f(x) - r\| \leq \|Df(x)^{-1}Df(r)\| \times \int_0^1 (1-t)\|Df(r)^{-1}D^2f(x+t(r-x))\|\|(r-x)^2\|dt \leq M\|r-x\|^2.$$

Par récurrence on prouve que $x_k \in \bar{B}(r,c)$ et $\|x_k - r\| \leq (\frac{1}{2})^{2^k-1}\|x_0 - r\|$ ∎

4.1. Ordre de convergence.

Définition 4.4. On dit que $(x_n)_{n\in\mathcal{N}}$ converge vers r avec un ordre $p > 1$ s'il $\exists k_0$ tel que $\forall k > k_0$ on a

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|^p} = \beta < +\infty$$

(1) $p = 1$ et $\beta < 1 \Longrightarrow$convergence linéaire.

(2) $p > 1$ ou $p = 1$ et $\beta = 0 \Longrightarrow$ convergence super linéaire.

(3) $p = 2$ et $\beta < \infty \Longrightarrow$convergence quadratique.

Proposition 4.1.

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|x_{k+1} - r|}{|x_k - r|^2} = C < +\infty$$

l'ordre de convergence égale a 2.

Preuve. On pose $g(x_k) = x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ et comme $g'(x_k) = 0$ .On introduit un développement de Taylor au voisinage de r de la fonction g , d'ordre 2.
en utilisant $e_k = x_k - r \longrightarrow 0$.
$x_{k+1} = g(x_k) = g(e_k + r) = g(r) + e_k g'(x_k) + \dfrac{e_k^2}{2} g''(\xi) = r + \dfrac{e_k^2}{2} g''(\xi)$.
avec $\xi \in]r, e_k + r[=]r, x_k[$.
d'ou $e_{k+1} = x_{k+1} - r = \dfrac{e_k^2}{2} g''(\xi)$
$\lim_{k \to +\infty} |\dfrac{e_{k+1}}{e_k^2}| = |\dfrac{g''(\xi)}{2}|$.
la constante d'erreur et $c = |\dfrac{g''(\xi)}{2}|$ la convergence est quadratique ; c-à-d égale à 2. ∎

***Remarque* 4.1.** Pour assurer la convergence :

(1) $f \in C^2$.

(2) $f'(x_k) \neq 0$ pour tout k.

(3) la suite doit démarrer au voisinage de r.

5. Méthode de Newton-Raphson Modifiée

Interprétation analytique : Soit r la racine de f et x_0 une estimation initiale de r et soit $x_0^* = x_0$, supposons que $f \in C^2$ au voisinage de r. Le développement de Taylor à l'ordre 1 donne :

$$f(r) = f(x_0) + f'(x_0)(r - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(r - x_0)^2, \quad \xi \in]r, x_0[. \tag{5.1}$$

et comme $f(r) = 0$ et $x_0^* = x_0$, alors le développement de Taylor donne :

$$0 = f(x_0) + f'(\frac{1}{2}(x_0 + x_0^*))(r - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(r - x_0)^2. \tag{5.2}$$

Si $(r - x_0)$ est suffisamment petit : $(r - x_0)^2 << (r - x_0)$:

$$0 = f(x_0) + f'(\frac{1}{2}(x_0 + x_0^*))(r - x_0) \Longrightarrow r \simeq x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(\frac{1}{2}(x_0 + x_0^*))} = x_1. \tag{5.3}$$

$$\begin{cases} x_0^* = x_0 \\ x1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(\frac{1}{2}(x_0 + x_0^*))} \end{cases} \tag{5.4}$$

Pour la seconde itération x_2 , le développement de Taylor donne :

$$f(r) = f(x_1) + f'(\frac{1}{2}(x_1 + x_1^*))(r - x_1) + \frac{1}{2} f''(\xi)(r - x_1)^2, \quad \xi \in]r, x_1[\tag{5.5}$$

$$0 = f(x_1) + f'(\frac{1}{2}(x_1 + x_1^*))(r - x_1) + \frac{1}{2} f''(\xi)(r - x_1)^2 \tag{5.6}$$

.

Si $(r - x_1)$ est suffisamment petite : $(r - x_1)^2 << (r - x_1)$ donne

$$0 = f(x_1) + f'(\frac{1}{2}(x_1 + x_1^*))(r - x_1) \Longrightarrow r \simeq x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(\frac{1}{2}(x_1 + x_1^*))} = x_2 \tag{5.7}$$

. la formule de x_1^* d'après la dernière itération

$$x_1^* = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(\frac{1}{2}(x_0 + x_0^*))}$$

$$\begin{cases} x_1^* = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(\frac{1}{2}(x_0 + x_0^*))} \\ x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(\frac{1}{2}(x_1 + x_1^*))} \end{cases} \tag{5.8}$$

En répétant le procédé on obtient la formule de récurrence $\forall k \geq 1$.

$$\begin{cases} x_k^* = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(\frac{1}{2}(x_{k-1} + x_{k-1}^*))} \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(\frac{1}{2}(x_k + x_k^*))} \end{cases} \tag{5.9}$$

Interprétation géométrique : Soit x_0 une estimation initiale de la racine r.

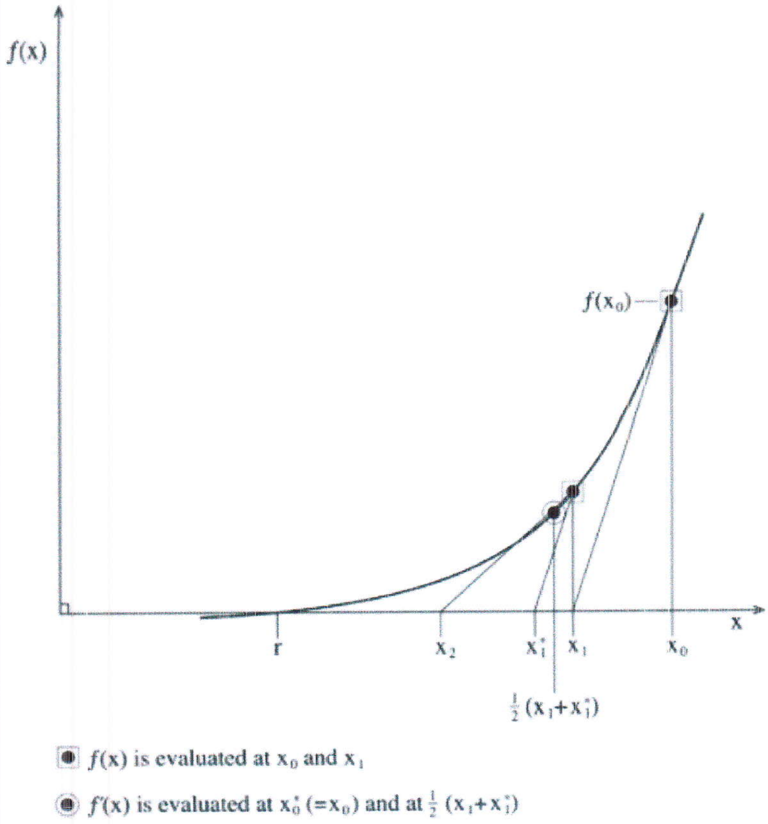

FIGURE 1. Illustration de la méthode de Newton modifiée.

On cherche la valeur de x_1 : x_1 est l'intersection de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ avec l'axe des x. Cette tangente a pour équation

$$y = f'(\frac{1}{2}(x_0 + x_0^*))(r - x_0) + f(x_0). \tag{5.10}$$

En posant $y = 0$ on obtient

$$0 = f'(\frac{1}{2}(x_0 + x_0^*))(r - x_0) + f(x_0). \Longrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(\frac{1}{2}(x_0 + x_0^*))}. \tag{5.11}$$

et comme $x_0^* = x_0$

$$\begin{cases} x_0^* = x_0 \\ x1 = x_0 - \dfrac{f(\frac{1}{2}(x_0 + x_0^*))}{f'(x_0)} \end{cases} \tag{5.12}$$

On cherche la valeur de x_2 : x_2 est l'intersection de la tangente au point $(x_1, f(x_1))$ avec l'axe des x. Cette tangente a pour équation

$$y = f'(\frac{1}{2}(x_1 + x_1^*))(r - x_1) + f(x_1). \tag{5.13}$$

En posant $y = 0$ on obtient

$$0 = f'(x_1)(r - x_1) + f(x_1). \Longrightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(\frac{1}{2}(x_1 + x_1^*))}. \tag{5.14}$$

nous obtenons

$$x_1^* = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(\frac{1}{2}(x_0 + x_0^*))}$$

$$\begin{cases} x_1^* = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(\frac{1}{2}(x_0 + x_0^*))} \\ x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(\frac{1}{2}(x_1 + x_1^*))} \end{cases} \tag{5.15}$$

Et par récurrence, on obtient : pour $k \geq 1$

$$\begin{cases} x_k^* = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(\frac{1}{2}(x_{k-1} + x_{k-1}^*))} \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(\frac{1}{2}(x_k + x_k^*))} \end{cases} \tag{5.16}$$

Définition 5.1. On définit la suite de Newton modifiée : pour $k \geq 1$

$$\begin{cases} x_k^* = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(\frac{1}{2}(x_{k-1} + x_{k-1}^*))} \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(\frac{1}{2}(x_k + x_k^*))} \end{cases} \tag{5.17}$$

Théorème 5.1. *Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 alors la suite (x_k) de newton modifiée converge vers r*

Preuve. Soit

$$\begin{cases} x_k^* = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(\frac{1}{2}(x_{k-1} + x_{k-1}^*))} \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(\frac{1}{2}(x_k + x_k^*))} \end{cases} \tag{5.18}$$

On remarque que la dérivée est très compliquée et pour cela on a approchée la dérivée par la formule

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})}.$$

On substitue dans le système on obtient

$$\begin{cases} x_k^* = x_k - \dfrac{f(x_k)(\frac{1}{2})(x_{k-1} + x_{k-1}^* - x_{k-2} - x_{k-2}^*))}{f(\frac{1}{2}(x_{k-1} + x_{k-1}^*)) - f(\frac{1}{2}(x_{k-2} + x_{k-2}^*))} \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)(\frac{1}{2}(x_k + x_k^* - x_{k-1} - x_{k-1}^*))}{f(\frac{1}{2}(x_k + x_k^*)) - f(\frac{1}{2}(x_{k-1} + x_{k-1}^*))} \end{cases}$$

et comme $x_k = e_k + r$ et $x_k^* = e_k^* + r$.

On développe f au voisinage de r :

$$f(x_k) = f(e_k + r) = f(r) - e_k f'(r) + \frac{e_k^2}{2} f''(\xi) = e_k f'(r) + \frac{e_k^2}{2} f''(\xi). \qquad \xi \in]x_k, r[$$

($f(r) = 0$ puisque r est une racine de f).

$$\begin{cases} e_k^* = e_k - \dfrac{e_k f'(r) - \frac{e_k^2}{2} f''(\xi)}{f'(r) + \frac{1}{4}(e_{k-1} + e_{k-1}^* - e_{k-2} - e_{k-2}^*) f''(\xi)} \\ e_{k+1} = e_k - \dfrac{e_k f'(r) - \frac{e_k^2}{2} f''(\xi)}{f'(r) + \frac{1}{4}(e_k + e_k^* - e_{k-1} - e_{k-1}^*) f''(\xi)} \end{cases} \tag{5.19}$$

Cela implique que

$$\begin{cases} e_k^* = \dfrac{\frac{1}{2}(e_{k-1}e_k + e_{k-1}^* e_k - e_{k-2}e_k - e_{k-1}^* e_k) f''(\xi)}{2f'(r) + \frac{1}{2}(e_{k-1} + e_{k-1}^* - e_{k-2} - e_{k-2}^*) f''(\xi)} \\ e_{k+1} = \dfrac{\frac{1}{2}(e_k^* e_k - e_{k-1}^* e_k - e_{k-1}e_k - e_k^2) f''(\xi)}{2f'(r) + \frac{1}{2}(e_k + e_k^* - e_{k-1} - e_{k-1}^*) f''(\xi)} \end{cases}$$

On néglige quelques termes, on obtient.

$$\begin{cases} e_k^* = \alpha e_k e_{k-1}^* \\ e_{k+1} = \alpha e_k e_k^* \end{cases}$$

avec $\alpha = \dfrac{f''(\xi)}{2f'(r)}$.

pour $k = 0 \Rightarrow e_0^* = e_0$.

pour $k = 1 \Rightarrow e_1 = \alpha e_0^2 \qquad e_1^* = 2\alpha^2 e_0^3$

pour $k = 2 \Rightarrow e_2 = 2\alpha^3 e_0^5 \qquad e_2^* = 2\alpha^5 e_0^7$

$\vdots$

on prend la puissance de ϵ_0 dans l'expression de ϵ_n et on exprime la suite suivante : $2, 5, 12, 29, \ldots$ On pose $u_{n_1} = 2, u_{n_2} = 5, u_{n_3} = 12, \ldots$
$\frac{u_{n_2}}{u_{n_1}} = \frac{5}{2} = 2.5$ même chose pour les autre termes c-à-d. $\frac{u_{n_{k+1}}}{u_{n_k}}$ on remarque que le résultat est plus proche de $R = 1 + \sqrt{2}$.

On reprend le même travail pour l'expression de ϵ_n^* on obtient le même résultat.
En conclusion, la convergence est quadratique et l'ordre de convergence est

$$R = 1 + \sqrt{2}$$

■

2

Tests numériques

1. Critère d'arrêt

Supposons que (x_k) converge vers r la racine de f.
Nous désignerons par ϵ une tolérance fixée, pour le calcul approché de r et par $e_k = r - x_k$ l'erreur absolue .

(1) contrôle du résidu : les itérations s'achèvent dès que $|f(x_k)| < \epsilon$. Il y a trois cas :

(a) Si $|f'(x_k)| \simeq 1$ alors $|e_k| \simeq \epsilon$ le test donne une indication satisfaisante de l'erreur ;

(b) Si $|f'(x_k)| << 1$ le test n 'est pas bien ;

(c) $|f'(x_k)| >> 1$ alors $|e_k| >> \epsilon$ et le test et trop restrictif .

(2) contrôle de l'incrément : les itérations s'achèvent dès que $|x_{k+1} - x_k| < \epsilon$.

Programme Matlab de la méthode de Newton

Function $[y,k] = \text{newton}[x_0, \epsilon]$

$y = x_0$;

$k = 0$;

while $|(f(n)| \geq \epsilon$ do

$k = k + 1$;

$$y = y - \frac{f(y)}{f'(y)};$$

end.

end

Programme Matlab de la méthode de Newton modifiée

```
Function [z,k] = newtonmod[x_0, ε]
    z = x_0 ;
    y = x_0 ;
    k = 0 ;
    while |(f(z))| ≥ ε do
        k = k + 1 ;
        y_k = z_k - f(z_k) / f'((1/2)(z_{k-1} + y_{k-1})) ;
        z_{k+1} = z_k - f(z_k) / f'((1/2)(z_k + y_k)) ;
    end.
end
```

2. Exemples numériques

Soit $\varepsilon = 10^{-4}$, on considère les fonctions suivantes. :

(1) $f(x) = x^2 - \exp(x) - 3x + 2$

(2) $f(x) = \exp(x^2 + 7x - 30) - 1$

(1) $f(x) = x^2 - \exp(x) - 3x + 2$

$f(x) = x^2 - \exp(x) - 3x + 2$			
x_0	k	solu. Newton	solu.Newton modifié
2	1	0.8435	0.2820
	2	0.2542	0.2575
	3	0.2575	0.2575
	4	0.2575	0.2575
	5	0.2575	0.2575
3	1	0.8435	0.2820
	2	0.7873	0.2427
	3	0.2519	0.2575
	4	0.2575	0.2575
	5	0.2575	0.2575

(2) $f(x) = \exp(x^2 + 7x - 30) - 1$

$f(x) = \exp(x^2 + 7x - 30) - 1$			
x_0	k	solu. Newton	solu.Newton modifié
3.25	1	3.1786	3.1340
	2	3.1109	3.0489
	3	3.0529	3.0056
	4	3.0149	3.0000
	5	3.0014	3.0000
	6	3.0000	3.0000
	7	3.0000	3.0000
3.5	1	3.4287	3.3820
	2	3.3567	3.2783
	3	3.2844	3.1767
	4	3.2124	3.0834
	5	3.1424	3.0188
	6	3.0787	3.0005
	7	3.0299	3.0000
	8	3.0052	3.0000
	9	3.0002	3.0000
	10	3.0000	3.0000
	11	3.0000	3.0000

Bibliographie

[1] Trevor J. McDougalla, Simon J. Wotherspoonb, A simple modification of Newton's method to achieve convergence of ordre $1 + \sqrt{2}$, Applied Mathematics Letters 29 (2014) 20-5

[2] F. Filbet, Analyse numérique, Algorithme et étude mathématique, Dunod 2013.