République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Probabilités et Applications**

Par :

Melle Soumia Zerdoudi et Melle Radia Cheriet

Intitulé

PROCESSUS DE POISSON ET FIABILITÉ

Dirigé par : Dr. Slimane Bouhadjar

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Ezzebsa Abdelalli	MCB.	Univ. Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Bouhadjar Slimane	MCB.	Univ. Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Debbar Rabah	MCB.	Univ. Guelma

Session Juin 2015

Remerciements

En premier lieu et avant tout nous tenons à exprimer nos remerciements au bon « Dieu » qui nous a entouré de sa bienveuillance et nous a renforcé avec le courage et la force pour

Avoir enfin mené à bien ce travail.

Ensuite, nous exprimons notre profonde gratitude à notre encadreur **Mr Bouhadjar Slimane** pour avoir accepter de nous suivre, et nos plus vifs remerciements pour son soutien, ses patiences, ses conseils judicieux, pertinents, et sa sympathie dont il nous a fait preuve tout au long de l'élaboration de ce travail.

Nous adressons également nos remerciements, à tous nos enseignants, qui nous ont donnée les bases de la science, les membres de **jury: Dr. Ezzebsa abdelalli & Dr. Debbar Rabah,** pour nous avoir fait l'honneur d'évaluer notre travail

Nos pensées se tournent maintenant vers nos parents qui nous ont entourés par la tendresse et l'amour d'évoé depuis notre enfance. Merci de votre soutien de tous les jours et nous espérons que vous soyez aussi fiers de nous que nous le sommes de vous

Et finalement à tous ceux qui nous aidés de prés ou de loin à accomplir ce travail nous disons Merci.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travaille :

A mes très chères parents qui ont toujours été pour moi, et qui m'ont donné un magnifique modèle de la valeur et de persévérance. A ceux qui n'ont jamais cessé de m'apporter l'affection, l'amour, le courage et le bon sens. J'espère qu'ils trouveront dans ce travail toute ma reconnaissance et tout mon amour.

A ma chère mère ;

En témoignage de ma profonde gratitude et de mon incontestable reconnaissance, pour tous les sacrifices qu'elle me contente, toute la confiance qu'elle m'accorde et tout l'amour dont elle m'entoure. La plus belle mère du monde.

A mon cher père ;

Qui est le meilleur père dans le monde, grâce à son encouragement, sa confiance et son soutien moral et matériel et pour son amour infini en exprimant mes gratitudes, mon profond amour et ma passion

A mes chères sœurs Wahiba, Meryem et son mari Adel, Warda et son mari Ali, et mes frères Mohamed-Elarbi et son épouse Loubna, Billel.

A mes neveux Mohamed-Houcine, Alla, et ma nièce Ritej.

A ma binôme Soumia et je l'espère plus de succès dans sa vie.

A tous mes amies Soumia, Majda, Mounira, Aicha, Selma, Fella, Samira, loubna et la section math 2015 et tous ceux qui me sont chers. Que Dieu vous garde.

RADIA

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi, et qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. A ceux qui n'ont jamais cessé de m'apporter l'affection, l'amour, le courage et le bon sens. J'espère qu'ils trouveront dans ce travail toute ma reconnaissance et tout mon amour.

A ma chère mère

En témoignage de ma profonde gratitude et de mon incontestable reconnaissance, pour tout les sacrifices qu'elle me contente, toute la confiance qu'elle m'accorde et tout l'amour dont elle m'entoure. La plus belle mère du monde.

A mon cher père

Qui est le meilleur père dans ce monde, grâce à son encouragement, sa confiance et son soutien moral et matériel et pour son amour infini en exprimant mes gratitudes, mon profond amour et ma passion.

A mes chers frères et sœurs mes bonnes sœurs **Sara** et **Malek** mes meilleurs petits frères **Islem** et **Hamed**.

En leurs espérant le plein succès dans leur vie.

A mon binôme **Radia** et je l'espère plus de succès dans sa vie.

A toute ma famille et tous mes amis surtout, **Radia**, **Rima**, **Nassima**, **Zeineb**, **Wafa**, **Hanan**, **Loubna**, **Fulla**, **Samira**, **Selma**, **Aicha**, Ilhem et la section math 2015 et tous ceux qui me sont chers. Qui Dieu vous garde !

SOUMIA

Processus de poisson et fiabilité

Zerdoudi soumia & Cheriet radia
Mémoire de master en mathématiques
Université de Guelma

23 juin 2015

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

Afin d'estimer et tester le taux de panne d'un système, qui est le but du chapitre 3 de cette mémoire, on suppose que le nombre des instants successifs de sa défaillance suit une loi de Poisson. Plus précisement on suppose que les instants successifs de défaillance d'un matériel (système) de taux de défaillance $\lambda(t)$ se modélisent par un processus de Poisson (de paramètre $\lambda(t)$). Alors pour estimer le taux de défaillance du système et tester l'hypothèse « le taux de panne est constant », il suffit d'estimer le paramètre du processus de Poisson obtenu par cette modélisation, et tester l'homogénéité de ce dernier. Pour arriver au ce but, on a besoin de notions de base sur la fiabilité et quelques propriétés importantes de processus de Poisson qu'on va les présenter dans les deux premiers chapitres.

INTRODUCTION

La fiabilité est un concept qui intéresse de nombreux domaines de l'activité humaine : économique, scientifique, technique et industriel,... Elle est étroitement liée à des notions de sécurité de fonctionnement, de qualité, d'efficacité ou de performance. L'étude de fiabilité est nécessaire à différents niveaux de la vie du système (ou équipement) : au niveaux de la conception ou de la fabrication, afin de pouvoir élever le degré de fiabilité selon les normes spécifiées ; au niveau de l'exploitation, afin d'estimer les incidences du support logistique sur ses conditions d'utilisation ; au niveau des services de maintenance, dans le but de prévoir les dates de prophylaxie et d'arrêts préventifs ; au niveau des gestionnaires des pièces de recharge, afin d'estimer le volume des stocks de sécurité et assurer par là même la disponibilité de la pièce, en évitant les stocks morts etc. ...
Donc la théorie de la fiabilité a développé l'étude des méthodes probabilistes

et statistiques permettant d'améliorer les prévisions de panne ou le contrôle de qualité nécessaire à la sortie d'une chaîne de production.
Plus les caractéristiques d'un produit ou d'un système, ne sont appréhendées tôt dans son cycle de vie, moins les risques financiers ou reliés à la sûreté des installations dus à la non réalisation des performances attendues sont élevés. Dans un contexte d'exigences de systèmes de plus en plus fiables et sûrs, et de durées de garanties croissantes, il est impératif de vérifier le plus tôt possible que les performances des systèmes sont conformes au cahier des charges.
L'idéal, pour identifier la fiabilité du produit ou système avant même sa fabrication en série, est de procéder de façon classique à des séries d'essais sur des prototypes quand ils existent. Le problème est l'investissement en temps et en quantité de matériel important demandé car les matériels étant de plus en plus fiables, l'observation de défaillances est de moins en moins probable. Les industriels ne peuvent plus se permettre de tels coûts financiers. A l'extrême, certains systèmes se fabriquent à l'unité, ce qui rend les politiques d'essai difficiles.
Ainsi, cette problématique a été la source, pour la communauté scientifique, de nombreuses voies de recherche. Celles-ci sont basées principalement sur la modélisation stochastique des apparitions des défaillances au cours du temps et sur l'estimation statistique des paramètres des modèles à partir des résultats d'essai.
Notre objectif, dans ce mémoire, est d'estimer le taux de défaillance d'un système et donc sa fiabilité (car ses deux caractéristiques sont liées) en utilisant la modélisation par un processus de Poisson. Plus précisément on suppose

que les instants successifs de défaillance d'un matériel (système) de taux de défaillance $\lambda(t)$ se modélisent par un processus de Poisson (de paramètre $\lambda(t)$). Puis on utilise des méthodes probabilistes et statistiques pour obtenir une bonne estimation du taux de défaillance. Enfin pour tester l'hypothèse « le taux de panne d'un système est constant » il suffit de tester l'homogénéité du processus de Poisson obtenu par cette modélisation.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Chapitre 1 « Notions générales sur la fiabilité » : on présente en bref les notions de base sur la théorie de la fiabilité.

Chapitre 2 « processus de Poisson » : on présente la construction et les propriétés importantes de processus de Poisson.

Chapitre 3 « processus de Poisson et fiabilité » qui est le font de ce travail, dans ce chapitre on va utiliser la modélisation par processus de Poisson pour estimer et tester le taux de panne d'un système.

CHAPITRE

1

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LA FIABILITÉ

Dans ce chapitre, on donne les notions de base de la fiabilité et les définitions de ses caractéristiques qu'on utilisera par la suite, et on rappelle brièvement quelques résultats sur les systèmes en série et les systèmes en parallèle.

1.1 Définitions

La fiabilité est l'aptitude d'un système à accomplir une fonction (ou mission) donnée durant une période déterminée dans des conditions spécifiées d'exploitation.

1.1.1 Durée de vie d'un système

Le terme de système au sens large, il peut n'avoir qu'un composant. Ce système est mis en marche à la date $t = 0$ et il s'agit d'evaluer la date de première défaillance que nous noterons, dans la suite, "T". C'est une variable aléatoire positive de fonction de répartition F.
La variable T est appelée la durée de vie (life time) du système (le temps de défaillance du système), et on a :

$$F(t) = \mathbb{P}(T \leq t)$$

1.1.2 Fiabilité d'un système

La fiabilité (reliability) d'un système est notée "R". C'est la probabilité de la durée de vie de bon fonctionnement du système.

$$\begin{aligned} R(t) &:= \mathbb{P}(T > t) \\ &:= 1 - F(t) \end{aligned}$$

Remarque 1. La fonction de fiabilité R est une fonction décroissante continue à droite en tout point de $\mathbb{R}_+$. De plus on a :

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} R(x) = 0.$$

1.1.3 Durée de survie

Lorsqu'un système a bien fonctionné jusqu'à la date t, le temps d'attente de la panne est appelée la durée de survie du système au temps t (ou encors durée de vie résiduelle). La durée de survie représente la variable aléatoire

$T - t$ conditionnée par l'événement $T > t$, nous la notons "T_t".
La distribution de T_t est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_t > x) &= \mathbb{P}(T - t > x/T > t)\\ &= \frac{R(t+x)}{R(t)}, \quad \text{pour } x \geq 0.\end{aligned}$$

C'est à partir de cette notion que nous allons introduire les principales autres caractéristiques de fiabilité. Commençons par examiner le comportement de la fonction de répartition de T_t lorsque la variable tend vers zéro.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_t \leq x) &= \frac{R(t) - R(t+x)}{R(t)}\\ &= x\frac{f(t)}{R(t)} + 0(x).\end{aligned}$$

C'est une fonction de x, presque linéaire, dont le coéfficient proportionnalité est $\frac{f(t)}{R(t)}$.

1.1.4 Taux de défaillance

Le coéfficient $\frac{f(t)}{R(t)}$ est appelé taux de défaillance (ou hasard rate) et on le note h ou $h(t)$, il est donc défini par :

$$\begin{aligned}h(t) &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{R(t) - R(t+x)}{x.R(t)}\\ &= -[logR(t)]'.\end{aligned}$$

Le terme "taux de défaillance" sous-entend une grandeur permettant de mesurer la vitesse d'apparition des pannes. Il est possible, en effet, d'interpréter $h(t)$ comme le pourcentage moyen de panne par unité de temps, qui apparaissent à la date t. Ceci apparait clairement à l'occasion d'un test de production. À la date $t = 0$, un groupe de N éléments indépendants et identiques sont mis en fonctionnement. Ces éléments tombent en panne, les uns aprés les autre. la date t, un contrôle est effectué pour constater les dégats. Il reste N_t élément en bon état. La loi de $N(t)$ est binomiale (N essais avec probabilité $R(t)$ de réussite de chaque essai),

$$\mathbb{P}(N(t) = K) = \frac{N!}{(N-K)!K!}(R(t))^k(1 - R(t))^{N-K}.$$

Le nombre moyen d'éléments en fonctionnement à la date t est donc :

$$\mathbb{E}(N(t)) = NR(t).$$

Le taux de défaillance d'un élément peut donc être traduit en termes d'espérances :

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{N.R(t) - N.R(t+x)}{x.N.R(t)} \\ &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(N(t)) - \mathbb{E}(N(t+x))}{x.\mathbb{E}(N(t))}. \end{aligned}$$

C'est le rapport entre le nombre moyen de pannes par unité de temps et le nombre moyen d'élément en bon fonctionnement. Il traduit une vitesse de dégradation.

La notion de "taux de défaillance"est, pour le fiabiliste, une caractéristique importante. Sa connaissance suffit à déterminer la fiabilité grace à la relation suivante :

$$R(t) = exp\left(-\int_0^t h(u)du\right).$$

La primitive H de h s'annulant en 0 est appelée la fonction de risque (ou hasard fonction). Elle est donc définie par :

$$H(t) = log\left(\frac{1}{R(t)}\right).$$

Dans les applications concrètes, il est trés fréquent de supposer le taux de défaillance constant. Il faut dire que les calculs s'en trouvent grandement simplifiés. Dans ce cas, la fonction H est linéaire et la distribution est exponentielle.

Proposition 1. *La seule distribution de durée de vie vérifiant $R(0) = 1$, et dont le taux de défaillance est constant, égale à a, est la loi exponentielle de paramètre a, avec :*

$$F(x) = 1 - e^{-ax}.$$

Démonstration. Supposons que la durée de vie T a une densité de la forme :

$$f(x) = ae^{-ax}$$

La fiabilité s'écrit alors :

$$R(t) = \exp(-at)$$

Le taux de défaillance est donc :

$$\begin{aligned} h(t) &= -[\log(R(t))]' \\ &= \frac{f(t)}{R(t)} \\ &= a. \end{aligned}$$

Réciproquement, suppposons que $h(t)$ est constant et vaut a. Alors :

$$\begin{aligned} R(t) &= exp\left(-\int_0^t h(x)dx\right) \\ &= exp\left(-\int_0^t a.dx\right), \end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$R(t) = exp(-at),$$

c'est-à-dire :

$$F(t) = 1 - exp(-at).$$

Donc la loi est exponentielle. □

1.1.5 Temps moyens

L'espérence de la durée de vie T joue un grand rôle en fiabilité ; c'est le "**temps moyen de panne**" ou M.T.T.F. (mean time to failure). Nous le notons "m" :

$$\begin{aligned} m &= MTTF \\ &= \mathbb{E}(T). \end{aligned}$$

C'est une mesure importante de la qualité d'un système. Pour la calculer, il est préférable d'utiliser la formule d'intégration suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \int_0^{+\infty} (1 - F(u))du \\ &= \int_0^{+\infty} R(u)du. \end{aligned}$$

L'espérence de survie à la date t est appelée" **durée moyenne de vie résiduelle de panne**" (M.R.T.F. Mean Residual Time to Failure). Elle est notée "$m(t)$".

Proposition 2. *La formule de la durée de vie résiduelle est donnée par :*

$$m(t) = \frac{1}{R(t)} \int_t^{+\infty} R(u)du.$$

1.1.6 Fonction de structure

Considérons maintenant un système de n élément (composants), en supposant que tous les composants sont indépendants. On précise qu'un composant ne possède que deux états ; il fonctionne où il est en panne. Si X_i est l'état du composant i, on pose :

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ composant fonctionne} \\ 0, & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ composant est en panne.} \end{cases}$$

Cette dichotomie est valable aussi pour le système :

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si le système fonctionne} \\ 0, & \text{si le système est en panne.} \end{cases}$$

La fonction Φ est appelée la fonction de sructure du système. Alors, on déduit que la fiabilité du système peut s'écrire :

$$\begin{aligned} R &= \mathbb{P}(\Phi(x) = 1) \\ &= \mathbb{E}(\Phi(x)). \end{aligned}$$

1.2 Système en série

Un système en série est un système composé de n compossants disposés linéairement. Ce système tombe en panne si au moins un composant est en panne.

La fonction de struture du système est donnée par :

$$\begin{aligned}\Phi &= \min_{1\leq i\leq n} X_i \\ &= \prod_{i=1}^{n} X_i,\end{aligned}$$

où $X_1, X_2, ..., X_n$ sont les états respectifs des composants $1, 2, ..., n$.

Le temps de panne (la durée de vie) du système est donnée par :

$$T = \min_{1\leq i\leq n} T_i,$$

où T_i est le temps de panne du composant $i, i = 1, 2, ..., n$.

La fiabilité R est le produit des fiabilités :

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$$

où $R_i(t)$ est la fiabilité du composant $i, i = 1, 2, ..., n$.

En effet, on a :

$$\begin{aligned}R(t) &= \mathbb{P}(T > t) \\ &= \mathbb{P}(\min_{1\leq i\leq n} T_i > t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_i > t),\end{aligned}$$

puisque on a supposée que les composants sont indépendants.

Donc,

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$$

1.3 Système en parallèle

Un système en parallèle est composé de n éléments (composants) disposés en parallèle, tels que le système tombe en panne, si seulement si tous les composants sont en panne.

La fonction de structure du système est donnée par :

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \max_{1\leq i\leq n} X_i \\ &= 1-\prod_{i=1}^{n}(1-X_i).\end{aligned}$$

Le temps de panne du système est donné par :

$$T = \max_{1\leq i\leq n} T_i$$

La fiabilité est donnée par :

$$R(t) = 1-\prod_{i=1}^{n}(1-R_i(t)),$$

où $R_i(t)$ est la fiabilité du composant i, $i=1,2,...,n$.

En effet, on a :

$$\begin{aligned}R(t) &= \mathbb{P}(T>t) \\ &= 1-\mathbb{P}(T\leq t) \\ &= 1-\mathbb{P}(\max_{1\leq i\leq n} T_i\leq t) \\ &= 1-\prod_{i=1}^{n}\left[1-\mathbb{P}(T_i>t)\right].\end{aligned}$$

Donc,

$$R(t) = 1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-R_i(t)\right).$$

CHAPITRE

2

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LE PROCESSUS DE POISSON

Le processus de Poisson sur la droite est un processus à temps continu et a valeur entières positives. On dit encore que c'est un processus de comptage, que l'on note $\{N_t : t \geq 0\}$. Il s'agit d'étudier le nombre aléatoire N_t de certains évènement qui se produisent dans un intervalle de temps $[0, t]$ donné.

2.1 Processus ponctuels

Un processus ponctuels sur $\mathbb{R}_+$ se décrit par la donnée d'une suite croissante de points aléatoires

$$0 < T_1 < T_2 \ldots < T_N \ldots \text{dans } \mathbb{R}_+,$$

qui sont des v.a. définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $T_n \longrightarrow \infty$, quand n tend vers l'infini,
on posera :

$$\begin{aligned} S_1 &= T_1 \\ S_2 &= T_2 - T_1 \\ &\vdots \\ S_n &= T_n - T_{n-1} \end{aligned}$$

les v.a. T_n sont les instants où se produisent un événement, les S_n sont les délais ou les temps d'attente entre deux événements successifs.
On définit, $\{N_t, t \geq 0\}$ du processus ponctuel $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} N_t &= \sup\{n; T_n \leq t\} \\ &= \sum_{j \geq 1} 1_{\{T_j \leq t\}} \end{aligned}$$

N_t est le nombre d'événement qui se sont produits avant l'instant t.
Notons que $N_0 = 0$, puisque $T_1 \geq 0$ et tout $t > 0$, $N_t < \infty$ puisque $T_n \longrightarrow \infty$, quand n tend vers l'infini.

Notons que la donnée de $\{N_t, t \geq 0\}$ est équivalente à celle de la suite $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$, et que l'on a les relations :

$$\begin{aligned}\{N_t \geq n\} &= \{T_n \leq t\} \\ \{N_t = n\} &= \{T_n \leq t < T_{n+1}\} \\ \{N_s < n \leq N_t\} &= \{s < T_n \leq t\}.\end{aligned}$$

Le processus ponctuel est dit simple si les variables aléatoires T_n sont presque-sûrement deux à deux distinctes sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire si pour tout n et pour presque tout ω :

$$T_n(\omega) < +\infty \Longrightarrow T_{n-1}(\omega) < T_n(\omega),$$

autrement dit si, pour presque tout ω, la suite des $T_n(\omega)$ est stictement croissante tant que les $T_n(\omega)$ sont finis.

Définition 1. *Désignons par $N_t(t \geq 0)$ le nombre de tops se produisant dans l'intervalle de temps $[0, t]$ est supposons que $N_0 = 0$. Le processus $\{N_t : t \geq 0\}$ est appellé processus de comptage.*

Tout processus de comptage vérifie les propriétés suivantes :

1. *Pour tout $t \geq 0$ le nombre N_t est a valeurs entières positives.*
2. *La fonction $t \longmapsto N(t)$ est croissante.*
3. *Pour tout couple (a, b) $(0 < a < b)$, la différence $N_b - N_a$ représente le nombre de tops se produisant dans l'intervalle de temps $[a, b]$.*

Soit $I_1, \ldots, I_k$ des intervalles sur l'axe des temps, disjoints ou non ; soient $N_1, \ldots, N_k$ le nombre de tops se produisant dans ces intervalles. Le k-uple $(N_1, \ldots, N_k)$ est un point aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^k$, admettant une loi de probabilité $\mathcal{L}$. Faisons subir à tous les intervalles $I_1, \ldots, I_k$, simultanément, une même translation sur l'axe des temps. Soient $I'_1, \ldots, I'_k$ les intervalles translatés et $N'_1, \ldots, N'_k$ le nombre de tops se produisant dans ces intervalles. Le k-uple $(N'_1, \ldots, N'_k)$ est un point aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}^k$ admettant la loi de probabilité $\mathcal{L}'$.

Définition 2. *Le processus de comptage $\{N_t : t \geq 0\}$ est dit à accroissements stationnaires, si quel que soit k, quel que soit la suite $I_1, \ldots, I_k$ et quelle que soit la translation, les lois $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ coïncident.*

Définition 3. *Un processus de comptage est dit à accroissements indépendants, si les nombres de tops se produisant dans des intervalles de temps disjoints, sont indépendants.*

Définition 4. *Un proseccus de comptage est dit localement continu en probabilité, si pour tout $t \geq 0$, on a :*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \mathbb{P}\{N_{t+h} - N_t \geq 1\} = 0.$$

Parmi les processus de comptage, ce sont les processus de Poisson, définis ci-aprés, qui jouent un rôle prépondérant.

Définition 5. ***(Processus de Poisson)*** *Un processus de comptage $\{N_t : t \geq 0\}$ est appelé processus de Poisson, de densité $\lambda \geq 0$, s'il vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $N_0 = 0$;

(ii) *le processus est à accroissements indépendants ;*

(iii) *le nombre de tops se produisant dans un intervalle de temps de longeur $t \geq 0$ suit la loi de Poisson de paramètre λt, c'est-à-dire, pour tout $s \geq 0$ et tout $t \geq 0$, on a :*

$$\mathbb{P}\{N_{s+t} - N_s = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad (n \geq 0).$$

Voici quelques propriétés que vérifie un processus de Poisson.

Propriété 1. *Un processus de Poisson est à accroissements stationnaires.*

Démonstration. Faisons la démonstration pour deux intervalles :

$I_1 =]a, c[$, $I_2 =]b, d[$, avec $a < b \leq c < d$. Donc :

$\mathbb{P}(\text{nombre de tops dans } I_1 = k, \text{ nombre de tops dans } I_2 = l)$

$= \mathbb{P}(N(c) - N(a) = k, N(d) - N(b) = l)$

$$= \sum_{\substack{i_1+i_2=k \\ i_2+i_3=l}} \mathbb{P}(N(b) - N(a)) = i_1, (N(c) - N(b)) = i_2, (N(d) - N(c)) = i_3$$

$$= \sum_{\substack{i_1+i_2=k \\ i_2+i_3=l}} \mathbb{P}(N(b) - N(a) = i_1).\mathbb{P}(N(c) - N(b) = i_2).\mathbb{P}(N(d) - N(c) = i_3),$$

car les intervalles sont disjoints et le processus de Poisson est à accroissements indépendants. Donc :

$\mathbb{P}(N(c) - N(a) = k, N(d) - N(b) = l)$

$$= \sum_{\substack{i_1+i_2=k \\ i_2+i_3=l}} e^{-\lambda(b-a)} \frac{(\lambda(b-a))^{i_1}}{i_1!}.e^{-\lambda(c-b)} \frac{(\lambda(c-b))^{i_2}}{i_2!}.e^{-\lambda(d-c)} \frac{(\lambda(d-c))^{i_3}}{i_3!}.$$

Faisons à I_1et I_2 une translation de longeur h et soit I_1' et I_2' les deux intervalles translatés, donc :

$\mathbb{P}(\text{nombre de tops dans } I_1' = k, \text{ nombre de tops dans } I_2' = l)$

$= \mathbb{P}(N(c') - N(a') = k, N(d') - N(b') = l),$

$$= \sum_{\substack{i_1+i_2=k \\ i_2+i_3=l}} \mathbb{P}(N(b') - N(a')) = i_1, (N(c') - N(b')) = i_2, (N(d') - N(c')) = i_3$$

$$= \sum_{\substack{i_1+i_2=k \\ i_2+i_3=l}} \mathbb{P}(N(b') - N(a') = i_1).\mathbb{P}(N(c') - N(b') = i_2).\mathbb{P}(N(d') - N(c') = i_3),$$

car les intervalles sont disjoints et le processus de Poisson est à accroissements indépendants.

$$\mathbb{P}(N(c') - N(a') = k, N(d') - N(b') = l)$$
$$= \sum_{\substack{i_1+i_2=k \\ i_2+i_3=l}} e^{-\lambda(b'-a')} \frac{(\lambda(b'-a'))^{i_1}}{i_1!} . e^{-\lambda(c'-b')} \frac{(\lambda(c'-b'))^{i_2}}{i_2!} . e^{-\lambda(d'-c')} \frac{(\lambda(d'-c'))^{i_3}}{i_3!}$$

Comme $[a', c']$ et $[b', d']$ sont les intervalles translatés (la translation est de longeur h), on déduit que :

$a' = a + h$, $b' = b + h$, $c' = c + h$, $d' = d + h$, ce qui donne :

$b' - a' = (b + h) - (a + h) = b - a$, de même $c' - b' = c - b$ et $d' - c' = d - c$.

Donc :

$$\mathbb{P}(N(c') - N(a') = k, N(d') - N(b') = l)$$
$$= \sum_{\substack{i_1+i_2=k \\ i_2+i_3=l}} e^{-\lambda(b-a)} \frac{(\lambda(b-a))^{i_1}}{i_1!} . e^{-\lambda(c-b)} \frac{(\lambda(c-b))^{i_2}}{i_2!} . e^{-\lambda(d-c)} \frac{(\lambda(d-c))^{i_3}}{i_3!},$$

c'est à dire :

$\mathbb{P}$(nombre de tops dans $I_1 = k$, nombre de tops dans $I_2 = l$)=

$\mathbb{P}$(nombre de tops dans $I'_1 = k$, nombre de tops dans $I'_2 = l$).

Donc, le proessus de Poisson est à accroissements stationnaires. □

Propriété 2. *Un processus de Poisson est localement continu en probabilité.*

Démonstration. Montrons que le processus de poisson et localement continu en probabilité, c'est à dire, on démontre que :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \mathbb{P}\{N_{t+h} - N_t \geq 1\} = 0,$$

on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{N_{t+h} - N_t \geq 1\} &= 1 - \mathbb{P}\{N_{t+h} - N_t < 1\} \\ &= 1 - \mathbb{P}\{N_{t+h} - N_t = 0\}.\end{aligned}$$

On sait que $N_{t+h} - N_t$ est le nombre de tops dans l'intervalle $[t, t+h]$, et que N_h est le nombre de tops dans l'intervalle $[0, h]$.
Puisque le processus de Poisson est à accroissements stationnaires, on déduit que $N_{t+h} - N_t$ est N_h ont la même loi de probabilité,
donc :

$$\begin{aligned}\lim_{h \longrightarrow 0} 1 - \mathbb{P}\{N_{t+h} - N_t = 0\} &= \lim_{h \longrightarrow 0} 1 - \mathbb{P}\{N_h = 0\} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0} 1 - e^{-\lambda h} \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Propriété 3. *Soit $\{N_t : t \geq 0\}$ un processus de Poisson de densité $\lambda \geq 0$. Alors, lorsque h tend vers 0,*

(i) $\mathbb{P}\{N_h = 1\} = \lambda h + 0(h)$

(ii) $\mathbb{P}\{N_h \geq 1\} = (\lambda h)^2 + 0(h)$.

Démonstration. En effet, $\mathbb{P}\{N_h = 1 = e^{-\lambda h}\lambda h\} = \lambda h + 0(h)$; puis

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{N_h \geq 2\} &= \sum_{k=2}^{+\infty} e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda h}(\lambda h)^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\lambda h)^{k-2}}{(k)!} \\
&= e^{-\lambda h}(\lambda h)^2 \sum_{k'=0}^{+\infty} \frac{(\lambda h)^{k'}}{(k'+2)!} \\
&\leq e^{-\lambda h}(\lambda h)^2 \sum_{k'=0}^{+\infty} \frac{(\lambda h)^{k'}}{k'!} \\
&\leq (\lambda h)^2
\end{aligned}$$

d'où (ii). □

Propriété 4. *Pour tout $t \geq 0$ la probabilité pour qu'il se produise une infinité de tops dans $[0, t]$ est nulle. De façon équivalente : avec probabilité 1, la suite $\tau_1, \tau_2 \ldots$ des instants où se produisent les tops n'admet pas de valeur d'adhérence à distance finie.*

Démonstration. Pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{N_t < +\infty\} &= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}\{N_t = k\} \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{k\geq 0} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

Comme N_t est une variable de Poisson de paramètre λt, on a $\dfrac{\mathbb{E}[N_t]}{t} = \lambda$. Ainsi λ est l'espérance mathématique du nombre de tops se produisant par unité de temps. C'est la fréquence moyenne des tops. Comme la variance vaut aussi λt, on en déduit la propriété suivante.

Propriété 5. *Dans un processus de Poisson $\{N_t : t \geq 0\}$, de densité λ, on a :*

$$\frac{\sigma(N_t)}{\mathbb{E}[N_t]} = \frac{1}{\sqrt{\lambda t}},$$

qui tend vers $+\infty$ lorsque $t \longrightarrow 0$.

Par conséquent, pour $t > 0$ petit, les fluctuations autour de la moyenne sont grandes par rapport à la moyenne.

Propriété 6. *On a :*

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow{p.s} \lambda,$$

lorsque t tend vers l'infini. Ainsi λ est la densité temporelle d'occurenes des tops.

Démonstration. Notons $X_1, X_2, \ldots X_{[t]}$ le nombre d'occurrences des tops dans les intervalles $[0,1],]1,2], \ldots,][t]-1, [t]](t > 1)$. Les X_k sont des variables aléatoires, indépendantes, identiquement distribuées, d'espérance mathématique

λ. D'aprés la loi forte des grands nombres, on a donc :

$$\frac{N_{[t]}}{[t]} = \frac{X_1 + \cdots + X_{[t]}}{[t]} \xrightarrow{p.s} \mathbb{E}[X_1] = \lambda;$$

et de même,

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow{p.s} \lambda,$$

lorsque t tend vers l'infini.

$\square$

Remarque 2. Ce paramètre λ est appelé l'intensité d'un processus de Poisson $\{N_t : t \geq 0\}$. Il est égal au nombre moyen d'évènements qui se produisent pendant un intervalle de temps de longeur unité, i.e

$$\mathbb{E}[N_{t+1} - N_t] = \lambda.$$

2.2 Processus de Poisson homogène sur $\mathbb{R}_+$

2.2.1 Définitions et propriétés

Définition 6. *Posons, par convention, $T_0 = 0$. Soit λ un réel strictement positif. Le processus $(T_n)_{n\geq 1}$ est un processus de Poisson homogène de paramètre λ si les variables aléatoires $(T_n - T_{n-1})_{n\geq 1}$ sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramèter λ.*

Proposition 3. *Soit $(T_n)_{n\geq 1}$, un processus de Poisson homogène de paramètre λ, et de fonction de comptage N. Alors :*

1. *Pour tout $n \geq 1$, la loi du vecteur $(T_1, \dots, T_n)$ a pour densité*
$$\lambda^n e^{-\lambda t_n} 1_{\{0<t_1<\ldots<t_n\}}$$
par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$,
2. *Pour tout $t > 0$, la variable aléatoire N_t est de loi de Poisson de paramètre λt,*
3. *Pour tout $n > 0$, la loi conditionnelle de $(T_1, \dots, T_n)$ sachant l'événement $\{N_t = n\}$ a pour densité*
$$\frac{n!}{t_n} 1_{\{0<t_1<\ldots<t_n\}}$$
par rapport à la mesure de Lebesgue.

C'est donc la loi de la statistique d'ordre de n variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, t]$

2.3 Processus de Poisson non homogène sur $\mathbb{R}_+$

Il existe des formes plus complexes de processus de Poisson. Il s'agit des processus de Poisson dit non homogènes, et dont le paramètre peut varier au cours du temps. Ces processus sont également trés prisés en modélisation puisqu'ils permettent de modéliser le fait qu'un phénomène peut évoluer au cours du temps, tout en gardant les deux propriétés fondamentales que sont l'indépendance des réalisations des événements sur deux intervalles de temps disjoints, et la propriété des événements rares.

Définition 7. *Le processus ponctuel* $\{T_n, n = 1, 2, \ldots\}$ *est un processus de Poisson (non homogène) d'intensité* $\lambda(t)$ *si et seulement si le processus de comptage associé* $\{N = N_t, t \geq 0\}$ *vérifie :*

1. $N_0 = 0$ *presque-sûrement,*
2. N *est à accroissements indépendants,*
3. *pour tout* $t \geq 0$*, la loi de la variable aléatoire* $N_{t+s} - N_t$ *est une loi de Poisson de paramètre* $\Lambda(t+s) - \Lambda(t)$ *avec*

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds, t \geq 0.$$

Proposition 4. *Soit* $t \longrightarrow \lambda(t)$ *une fonction positive de* t*. Le processus ponctuel* $\{T_n, n = 1, 2, \ldots\}$ *est un processus de Poisson (non homogène) d'intensité* $\lambda(t)$ *si le processus de comptage* $N_t, t \geq 0$ *associé vérifie :*

1. $N_0 = 0$ *presque-sûrement,*
2. N *est à accroissements indépendantes,*
3. $\mathbb{P}[N_{t+h} - N_t = 1] = \lambda(t)h + 0(h)$,

4. $\mathbb{P}[N_{t+h} - N_t \geq 2] = 0(h)$.

Le processus de Poisson non homogène se caractérise également par un processus de comptage associé dont les accroissements suivent des loi de Poisson indépendants.

Proposition 5. *Si N est la fonction de comptage d'un processus de Poisson d'intensité $d\Lambda$, alors :*

1. *pour tout borélien borné A de $\mathbb{R}_+$, la variable N_A est finie presque-sûrement,*
2. *la variable aléatoire $N_{\mathbb{R}_+} = \sum_{n\geq 1} 1_{\{T_n<+\infty\}}$ est finie presque-sûrement si et seulement si $\Lambda_{\mathbb{R}_+} = \lim_{t\longrightarrow\infty} \Lambda(t)$ est finie.*

En particulier pour $s < t$ la variable aléatoire $N_t - N_s$ est de la loi de Poisson de paramètre $\Lambda(t) - \Lambda(s)$.

Proposition 6. *Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ un processus de Poisson d'intensité $d\Lambda$ diffuse, alors pour tout $n > 0$, la loi de $(T_1, \ldots, T_n)$ est la probabilité :*

$$e^{-\Lambda(t_n)} 1_{\{0<t_1,\ldots<t_n\}} d\Lambda(t_1) \ldots d\Lambda(t_n).$$

En particulier si $d\Lambda(s) = \lambda(s)ds$, le vecteur aléatoire $(T_1, \dots, T_n)$ a pour densité :

$$(t_1, \dots, t_n) \longrightarrow e^{-\int_0^{t_n} \lambda(u)du} \prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i) 1_{\{0<t_1,\dots<t_n\}}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue.

Proposition 7. *Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ un processus de Poisson d'intensité $d\Lambda$ diffuse, posons $\Lambda(t) = \int_{[0,t]} d\Lambda$. Alors, pour tout $t > 0$, la loi conditionnelle de $(T_1, \dots, T_n)$ sachant $\{N_t = n\}$ est la probabilité :*

$$\frac{n!}{\Lambda(t)^n} 1_{\{0<t_1,\dots<t_n<t\}} d\Lambda(t_1) \dots d\Lambda(t_n).$$

En particulier, si $d\Lambda(s) = \lambda(s)ds$ la loi conditionnelle de $(T_1, \dots, T_n)$ sachant $\{N_t = n\}$ a pour densité

$$\frac{n!}{\left(\int_0^t d\Lambda\right)^n} \prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i) 1_{\{0<t_1,\dots,<t_n<t\}}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. C'est donc la loi de la statistique d'ordre de n variables aléatoires indépendantes de même loi de densité $\frac{1}{\Lambda(t)}\lambda(s)1_{\{0\leq s\leq t\}}$.
La vraisemblance de $(N_t, T_1, \dots T_{N_t})$, c'est-à-dire de l'observation sur $[0, t]$, est donc :

$$(n, t_1, \dots, t_n) \longrightarrow e^{-\int_0^t \lambda(u)du} \prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i).$$

CHAPITRE

3

PROCESSUS DE POISSON ET FIABILITÉ

Supposons que l'on observe les instants successifs de défaillance d'un matériel (système) de taux de défaillance $\lambda(t)$, ce matériel étant neuf à l'instant initial. Lorsqu'une défaillance survient le matériel est réparé instantanément et nous supposons que la réparation effectuée est petite, appelée réparation minimale, cela signifie que le matériel est remis en état de marche, mais que son taux de défaillance n'a pas été modifié. On peut modéliser les instants successifs de défaillance du matériel par un processus de Poisson de paramètre $\lambda(t)$ (cette étude n'est pas abordée ici). Notre but dans ce chapitre est d'estimer et tester le taux de défaillance d'un système (matériel) en utilisant cette modélisation.

3.1 Observation sur $[0.t]$

Nous nous intéressons aux plans d'essais de type 1, c'est-à-dire aux essais dont la durée t est fixée a priori. On prend les réparations effectuées sont de type "petites réparations".
Nous observons donc un processus de Poisson sur $[0.t]$ et notons N_t le nombre de défaillances observées sur cet intervalle.

3.1.1 Cas d'un processus de Poisson homogène

En utilisant la proposition 3 , nous voyons que la vraisemblance du paramètre pour l'observation N_t, est :

$$\lambda^{N_t} e^{-\lambda t}$$

Maintenant, on cherche une estimation pour le paramètre λ, en utilisant le maximum de vraisemblance, d'où le résultat suivant :

Proposition 8. *L'orsqu'on observe un processus de Poisson homogène de paramètre λ sur $[0.t]$, la variable aléatoire $\frac{N_t}{t}$ est un estimateur du maximum de vraisemblence de λ.*

Démonstration. Montrons que $\frac{N_t}{t}$ est un estimateur du maximum de vraisemblance, on a :
d'aprés la proposition 3 , la fonction de vraisemblance s'écrit sous la forme

suivante : $L(t_1, \ldots, t_n; \lambda) = \lambda^{N_t}.e^{-\lambda t}$,
calculons log vraisemblance :

$$\log f(t_1, \ldots, t_n) = N_t \log \lambda - \lambda t,$$

si on dérive par rapport a λ, on trouve :

$$\frac{\partial \log L}{\partial \lambda} = N_t.\frac{1}{\lambda} - t,$$

en annulant la dérivé de log vraisemblance : $\dfrac{N_t}{\lambda} - t = 0$,
alors : $\dfrac{N_t}{\lambda} = t$, ce qui donne :

$$\lambda = \frac{N_t}{t}.$$

Donc ; $\dfrac{N_t}{t}$ est un estimateur du maximum de vraisemblance. □

Proposition 9. *La variable aléatoire* $\dfrac{N_t}{t}$ *est un estimateur de* λ *qui possède les propriétés suivantes :*

1. *c'est un estimateur exhaustif,*
2. *c'est un estimateur sans biais, efficace donc de variance minimum,*
3. *c'est un estimateur consistant et asymptotiquement gaussien.*

Démonstration. **1.** Montrons que $\frac{N_t}{t}$ est un estimateur exhaustif de λ, on a :
$\mathbb{P}\left((T_1,\ldots,T_n)/\frac{N_t}{t}=t'\right)=\mathbb{P}\left((T_1,\ldots,T_n)/N_t=[t.t']\right)$,
si on pose $[t.t']=n'$, alors :

$$\mathbb{P}\left((T_1,\ldots,T_n)/N_t=n'\right)=\frac{t^n}{n!}1_{\{0<t_1<\ldots<t_n\leq t\}},$$

c'est une quantité ne dépend pas de λ. Donc ; $\frac{N_t}{t}$ est un estimateur exhaustif de λ.

2. Montrons que $\frac{N_t}{t}$ est un estimateur sans biais de λ. On veut montrer que : $\mathbb{E}\left(\frac{N_t}{t}\right)-\lambda=0$,
comme N_t suit la loi de poisson de paramètre λt, on a $\mathbb{E}(N_t)=\lambda t$,
ce qui donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{N_t}{t}\right)-\lambda &= \lambda-\lambda\\ &= 0.\end{aligned}$$

Alors ; $\frac{N_t}{t}$ est un estimateur sans biais.

□

Puisque N_t est un estimateur exhaustif de λ, nous ne perdons pas d'information si, pour chercher un intervalle de confiance de λ, nous ne regardons que N_t. Or nous savons que N_t est de loi de Poisson de paramètre $\lambda(t)$, nous allons en déduire un intervalle de confiance sur $\lambda(t)$ et par suite sur λ.
A cet effet, soit $\chi^2_\gamma(n)$ le quantile d'ordre γ de la loi du χ^2 à n degrés de liberté, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(X\leq\chi^2_\gamma(n))=\gamma$, où X est une variable aléatoire de loi du χ^2 à n degrés de liberté.

Proposition 10. *Lorsqu'on observe un processus de Poisson homogène de paramètre λ sur $[0,t]$ et que l'observation donne $N_t = n$, les intervalles suivants :*

- $[0, \frac{1}{2t}\chi^2_{\gamma}(2n+2)]$
- $[\frac{1}{2t}\chi^2_{1-\gamma}(2n), +\infty]$
- $[\frac{1}{2t}\chi^2_{(1-\gamma)/2}(2n), \frac{1}{2t}\chi^2_{(1+\gamma)/2}(2n+2)]$,

sont des intervalles de confiances pour λ de niveau γ.

3.1.2 Une estimation de la fiabilité dans le cas général

Nous considérons un processus de Poisson non nécessairement homogène d'intensité λ et d'intensité cumulée :

$$\Lambda(x) = \int_0^x \lambda(s)ds.$$

Supposons que nous cherchions à estimer la fiabilité du matériel à un instant donné t à partir des observations sur $[0,t]$. La fiabilité du matériel à l'instant t est :

$$R(t) = exp(-\Lambda(t)).$$

Nous sommes donc ramenés à l'estimation de $\Lambda(t)$. Or la variable aléatoire N_t est de loi de Poisson de paramètre $\Lambda(t)$, c'est donc un "bon" estimateur de Λ. Nous pouvons en déduire des intervalles de confiance pour Λ, et donc pour $R(t)$, comme nous l'avons fait dans la proposition 9. En particulier :

Proposition 11. *Si l'observation est un processus de Poisson sur $[0,t]$, d'intensité cumulée Λ, et si nous observons $N_t = n$, alors :*

1. $[0, \frac{1}{2}\chi^2_\gamma(2n+2)]$ *est un intervalle de confiance pour $\Lambda(t)$ de niveau γ,*
2. $[exp(-\frac{1}{2}\chi^2_\gamma(2n+2)), 1]$ *est un intervalle de confiance pour $R(t)$ de niveau γ.*

En généralisant au cas non paramétrique la notion d'exhaustivité, on peut voir que N_t est exhaustif dans le cadre d'une estimation non paramétrique de $\Lambda(t)$ à partir de l'observation du procssus de Poisson sur $[0,t]$. En effet, nous pouvons paramétrer la fonction λ sur $[0,t]$ par son intégrale Λ et sa "renormalisée" λ :

$$\widetilde{\lambda}(s) = \frac{\lambda(s)}{\Lambda(t)}.$$

Or la loi de l'observation sachant $\{N_t = n\}$ a pour densité (proposition 7) la fonction :

$$\frac{n!}{\Lambda(t)^n}\lambda(t_1)\dots\lambda(t_n) = n!\widetilde{\lambda}(t_1)\dots\widetilde{\lambda}(t_n),$$

qui ne contient pas le paramètre $\Lambda(t)$.

3.2 Observation des n premiers points

Nous nous intéressons aux plans d'essais de type 2, c'est à dire aux essais pour lesquels le nombre de défaillances observées est fixé a-priori. Nous sommes évidemment toujours dans le cas des petites réparations. Nous observons donc les n premiers points $T_1, ..., T_n$ d'un processus de Poisson.

3.2.1 Cas d'un processus de Poisson homogène

Dans ce cas l'estimateur qui possède des propriétés intéressantes est l'estimateur de $\frac{1}{\lambda}$. Notons que $\frac{1}{\lambda}$ représente le M.T.T.F. du matériel (ou indifféremment le M.T.B.F. puisque les réparations sont supposées instantanées).

Proposition 12. *Lorsqu'on observe les n premiers points $T_1, ..., T_n$ d'un processus de Poisson homogène de paramètre λ, alors $\frac{T_n}{n}$ est un estimateur de $\frac{1}{\lambda}$ qui possède les propriétés suivantes :*

1. *C'est un estimateur exhaustif,*
2. *C'est un estimateur sans biais, efficace donc de variance minimum,*
3. *C'est un estimateur consistant et asymptotiquement gaussien,*
4. *C'est l'estimateur du maximum de vraisemblance.*

La vérification de cette proposition ne présente pas de difficulté. Elle repose sur la proposition 6 et le fait que la variable aléatoire T_n est la loi gamma de paramètres n et $\frac{1}{\lambda}$. La construction des intervalles de confiance se fait à partir de la statistique T_n, en remarquant que $2\lambda T_n$ est de loi du χ^2 à $2n$ degrés de liberté.

Proposition 13. *Lorsqu'on observe les n premiers points d'un processus de Poisson homogène de paramètre λ les intervalles suivants :*

- $[0, \frac{1}{2T_n}\chi^2_\gamma(2n)]$,
- $[\frac{1}{2T_n}\chi^2_{1-\gamma}(2n), +\infty[$,
- $[\frac{1}{2T_n}\chi^2_{(1-\gamma)/2}(2n), \frac{1}{2T_n}\chi^2_{(1+\gamma)/2}(2n)]$,

sont des intervalles de confiance pour λ de niveau γ.

Remarque 3. L'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre λ est $\widehat{\lambda} = \frac{n}{T_n}$. Il n'est pas sans biais car :

$$\mathbb{E}(\widehat{\lambda}) = \frac{n}{n-1}\lambda,$$

il n'est qu'asymptotiquement sans biais.
On peut vérifier que sa variance est $\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\lambda^2$ et qu'il est consistant et asymptotiquement gaussien (ce qui n'est pas surprenant pour l'estimateur du maximum de vraisemblance d'un échantillon). L'estimateur $\frac{n-1}{n}\widehat{\lambda} = \frac{n-1}{T_n}$ est un estimateur sans biais de λ mais il n'est pas efficace.

3.3 Tests

3.3.1 Un test d'homogénéité non paramétrique

Nous supposons observer le processus de Poisson sur $[0, t]$ et nous souhaitons tester l'hypothèse H_0 : "le processus de Poisson observés est homogène".

Divisons l'intervalle $[0,t]$ en d intervalles de même longeur notés $I_1, \ldots, I_d$. Soit $N_k(1 \leq k \leq d)$, le nombre d'observations appartenant au $k^{\text{ème}}$ intervalle :

$$N_k = \sum_{i=1}^{N_t} 1_{\{T_i \in I_k\}}.$$

D'aprés la proposition 3, sous H_0 la loi de $(N_1, \ldots, N_d)$ sachant $\{N_t = n\}$ est la loi de $\left(\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \in I_1\}}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \in I_d\}}\right)$, les variables aléatoires X_i étant indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,t]$. Par conséquent, d'aprés le théorème classique de convergence vers la loi du χ^2, sous H_0 quand n tend vers l'infini la loi, conditionnellement à $\{N_t = n\}$, de la variable aléatoire

$$Z_n = \frac{d}{n} \sum_{k=1}^{d} \left(N_k - \frac{n}{d}\right)^2$$

tend vers la loi du χ^2 à $d-1$ degrés de liberté.
Donc, en pratique, pour construire un test de niveau approximativement égal à γ, si l'on observe $\{N_t = n\}$ avec n grand, on prend comme région critique :

$$D = \{Z_n > \chi^2_{1-\gamma}(d-1)\}$$

(rappelons que $\chi^2_{1-\gamma}(d-1)$ est le quantile d'ordre $1-\gamma$ de la loi du χ^2 à $d-1$ degrés de liberté).

3.3.2 Test de Laplace

On observe un processus de Poisson sur $[0,t]$ et on veut tester son homogénéité, la contre-hypothèse étant que son intensité λ est décroissante (respectivement croissante). Si le processus de Poisson est homogène, les points observés seront répartis de façon relativement homogène sur $[0,t]$, alors que si

λ est décroissante (respectivement croissante) les points seront plus concentrés vers 0 (respectivement vers t). Cela suggère de considèrer le test suivant :

Proposition 14. *On observe un processus de Poisson sur $[0,t]$ d'intensité λ.*

Supposons que :

$$\int_0^{+\infty} \lambda(s)ds = +\infty,$$

et posons :

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_i - nt/2}{t\sqrt{n/12}} \quad sur\ \{N_t = n\}.$$

Pour tester l'hypothèse H_0 "l'intensité est constante" contre l'hypothèse H_1 "l'intensité est décroissante" (respectivement "l'intensité est croissante"), on prend comme région critique :

$$D = \{X < n_\gamma\},$$

(respectivement $D = \{X > n_{1-\gamma}\}$), où n_γ est le quantile d'ordre γ de la loi gaussienne centrée de variance 1. Le niveau de ce test est asymptotiquement γ lorsque t tend vers l'infini, et sa puissance tend vers 1 lorsque t tend vers l'infini.

On utilise la proposition suivante pour nous aider à la démonstration,

Proposition 15. *Soit N la fonction de comptage d'un processus de Poisson d'intensité $d\Lambda$. Supposons que $\lim_{t \longrightarrow \infty} = +\infty$, alors :*

1. *les variables aléatoires $\frac{N_t}{\Lambda(t)}$ converge presque-sûrement vers 1 lorsque t tend vers $+\infty$,*
2. *les variables aléatoires*

$$\sqrt{\Lambda(t)}(\frac{N_t}{\Lambda(t)} - 1) = \frac{N_t - \Lambda(t)}{\sqrt{\Lambda(t)}}$$

converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée de variance 1.

Démonstration. Pour justifier le niveau du test, nous devons montrer que la variable aléatoire $X = X_t$ tend en loi vers une gaussienne centrée de variance 1, lorsque t tend vers l'infini. Posons :

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds.$$

Soit X_i des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, t]$ et posons $Y_i = \frac{X_i}{t}$. D'aprés la proposition 7, la loi de X sachant $\{N_t = n\}$ est la loi de :

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nt/2}{t\sqrt{n/12}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - nt/2}{\sqrt{n/12}},$$

où φ_n désigne la fonction caractéristique. Le théorème de limite centrale entraine que :

$$\varphi_n(u) \longrightarrow_{n \longrightarrow \infty} \varphi(u) = e^{-u^2/2}.$$

Or :

$$\mathbb{E}(e^{iuX_t}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{iuX_t}/N_t)) = \mathbb{E}(\varphi_{N_t}).$$

Puisque $\Lambda(t)$ tend vers l'infini lorsque t tend vers l'infini, la proposition 15 entraine que N_t converge presque-sûrement vers l'infini. Le théorème de convergence dominée montre alors que $\mathbb{E}(e^{iuX_t})$ converge vers $\varphi(u)$, ce qu'on souhaitait établir.

Regardons la puissance du test, c'est-à-dire $\mathbb{P}(D)$ sous H_1. Nous nous plaçons le cas où la fonction λ est décroissante (le cas croissant se traitant de même). Considérons maintenant des variables aléaroires X_i indépendantes, de même loi de densité :

$$s \longrightarrow \frac{1}{\Lambda(t)}\lambda(s)1_{[0,t]}(s).$$

Leur densité est donc décroissante et il en de même de celle des $Y_i = \dfrac{X_i}{t}$. Notons σ leur variance

Ces variables aléatoires Y_i sont stochastiquement inférieures à une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, leur espérance m est donc inférieur à $\dfrac{1}{2}$, et même strictement inférieure car, sous H_1, les Y_i ne sont pas de loi uniforme. Nous en déduisons, en utilisant la proposition 7, que sous H_1 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D/N_t = n) &= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{n/12}} \leq n_\gamma\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i - mn}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{n_\gamma}{\sigma\sqrt{12}} + \frac{(\frac{1}{2}-m)\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\
&= a_n.
\end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini, la quantité

$$\frac{n_\gamma}{\sigma\sqrt{12}} + \frac{(\frac{1}{2}-m)\sqrt{n}}{\sigma}$$

tend vers $+\infty$ et la variable aléatoire

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i - mn}{\sigma\sqrt{n}}$$

converge en loi vers une gaussienne. Il n'est alors pas difficile d'en déduire que a_n tend vers 1 et par suite :

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{E}(a_{N_t})$$

tend vers 1 lorsque t tend vers l'infini (par convergence dominée). $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. BANEGE, Processus stochastiques : processus de Poisson et chaîne de Markov.

[2] R. F. BARLOW AND F. PROSCHAN, Statistical theory of reliability and life testing probability models, Holt Rinbebart and Winston, New York 1975.

[3] JEAN-LOUIS BON, Fiabilité des systèmes,méthodes mathématiques, Masson.

[4] C. COCOZZA, Processus stochastiques et fiabilité des systèmes, France.

[5] D. FOATA, F. AIMÉ, Processus de Poisson, chaîne de Markov et martingales, Dunod, Paris, 2002.

[6] J. LACROIX, Chaîne de Markov et processus de Poisson, 2002.