

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



17/510 145

### Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
**Master Académique en Mathématiques**  
Option : **Probabilités et Applications**



Par :

KHADRAOUI Fella et SAADANE Samira

### Intitulé

**Les Modèles ARCH et applications**

Dirigé par : **EZZEBSA Abdellali**

Devant le jury

**PRESIDENT  
RAPORTEUR  
EXAMINATEUR**

**Dr. REBAI Ghania  
Dr. EZZEBSA.A  
Dr. DEBAR Rabah**

**MAA  
MCB  
MCB**

**Univ- Guelma  
Univ-Guelma  
Univ-Guelma**

Session Juin 2015

## *Remerciement*

*Au nom de Dieu, Clément et Miséricordieux*

*Lis, au nom de ton Seigneur qui a créé tout, Qui a créé  
l'homme se sang coagulé Lis, car ton Seigneur est plus  
généreux, Il t'a appris l'usage de la plume,*

*Il apprend à l'homme, ce que l'homme ne savait pas.*

*Notre profonde reconnaissance à notre encadreur  
du mémoire le*

*Docteur : EZZEBSA ABDELAL*

*qui grâce à sa disponibilité, son soutien, ses conseils et ses  
encouragements nous a permis de mener à bien ce travail.*

*On adresse l'expression de notre gratitude à notre enseignant le*

*Docteur : R. F. B. A. J. G. H. N. J. A*

*Qui nous fait l'honneur de présider ce jury et d'examiner notre  
mémoire. Ainsi qu' au*

*Docteur :, DEBAR RABAH*

*qui a accepté d'examiner notre mémoire et faire partie de ce  
jury.*



## *Dédicace*

*Je remercie dieu le tout puissant de m'avoir donné l'honneur le courage  
pour faire ce travail*

*Je dédie ce mémoire*

*A mon père (Abshak) pour sa éducation qu'il m'a inculquée les  
peines qu'il s'est donnée pour sa réussite.*

*A mon Mère (Malika) qui m'a éclairée mon chemin et qui m'a en  
couragé et soutenue toute long de mes études.*

*A mon cher marie (Yazid) pour son soutien aux moments difficiles  
de mon travail.*

*Mes chers frères: Walid, Zinedine, Fouzi, Yazid*

*Ma belle sœur: Hanane*

*Mes chères tantes: Leïssa, Nora*

*A mon binome dans cet travaille: Fessa*

*A tout mes amies surtout: Aïcha, Selma, Radia, Soumia*

*Et tous la promo de probabilité 2014- 2015*

*Et tous les familles: saadane, bouhdid, djetni*

# Dédicace

*Je dédie ce fruit de fin d'étude à la science*

*À mes très chères parents*

*À toi maman, la fleur de ma vie et le symbole de tendresse.*

*Et je le dit à papa j'espère qui sera au paradis in shah Allah.*

*À ma chère marie Mohamed, pour son soutien aux moments difficiles de mon travail.*

*À mes frères: Soufik, Kamel*

*À mon seul Sœur: Hayette*

*À mon binôme dans cet travailé Samira*

*À mes charmantes Amis: Selma, aicha, Radia, Soumia, Nawal, Lamia, Hasna*

*À tout ma famille grande et petite.*

*Et toutes les promos de probabilité 2014-2015*

# Table des matières

Résumé	iii
Introduction	iv
<b>1 Notions de bases</b>	<b>1</b>
1.1 La kurtosis	1
1.2 Séries chronologiques(temporelles)	2
1.3 Méthode graphique	2
1.4 Propriétés des séries financières	4
1.4.1 La volatilité	5
1.4.2 La stationnarité	5
1.4.3 Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation	6
1.5 Le processus bruit blanc (white noise process).	8
1.6 Le processus d'innovation	9
1.7 Modèle linéaire	9
1.8 Opérateur de retard B	10
1.9 Modèles ARMA.	10
1.9.1 Modèle <i>AR</i>	11
1.9.2 Le Modèle <i>MA</i>	12
1.9.3 Modèle mixte	14
1.10 Hétéroscédasticité	15
<b>2 Modèles ARCH-GARCH</b>	<b>16</b>
2.1 Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques ARCH(1)	16
2.2 Représentation ARCH	19
2.2.1 Propriétés des processus ARCH	20
2.3 Modèle ARCH(p)	23

2.4	Les modèles <i>ARCH</i> généralisées : <i>GARCH</i> . . . . .	24
2.4.1	Modèle <i>GARCH</i> ( $p, q$ ) . . . . .	24
2.5	Propriétés des processus <i>GARCH</i> . . . . .	25
2.5.1	Modèle <i>GARCH</i> (1,1) . . . . .	26
2.6	Modèles <i>ARMA-GARCH</i> . . . . .	28
2.7	Modèle <i>ARCH - GARCH</i> asymétrique . . . . .	28
2.7.1	Modèle <i>EGARCH</i> . . . . .	28
2.8	Modèles avec erreurs <i>ARCH</i> . . . . .	30
2.8.1	Erreurs <i>ARCH</i> (1) . . . . .	30
2.8.2	Erreurs <i>ARCH</i> ( $p$ ) . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Estimation</b> . . . . .	<b>32</b>
3.1	La méthode de maximum de vraisemblance . . . . .	32
3.1.1	Estimation des paramètres du modèle <i>ARCH</i> . . . . .	33
3.1.2	Estimation des paramètres du modèle <i>GARCH</i> . . . . .	33
3.2	Prévision . . . . .	34
3.2.1	Modèle avec erreur <i>ARCH</i> . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Application</b> . . . . .	<b>38</b>
4.1	Un exemple pour la modélisation <i>ARCH</i> et <i>GARCH</i> . . . . .	38
4.1.1	Présentation des données et traitement des valeurs manquantes . . . . .	38
4.1.2	Evolution de la série . . . . .	38
4.1.3	Taux de croissance du BEL 20 . . . . .	39
4.1.4	Etude des moments et de la leptokurticité du taux de croissance du BEL 20 . . . . .	40
4.1.5	Etude du processus du taux générateur de la série . . . . .	41
4.2	Annexe A . . . . .	42
4.2.1	Présentation du logiciel R . . . . .	42
4.2.2	Quelques commandes . . . . .	43
4.3	Annexe B : . . . . .	43
4.3.1	simulation d'un bruit blanc . . . . .	43
4.3.2	simulation des processus . . . . .	44
4.3.3	Les fonction d'auto-corrélation (ACF) est fonctions d'auto- corrélations partiels (PACF) . . . . .	46

## Résumé

Les prévisions sont encore et toujours vitales pour le monde des entreprises désireuses d'anticiper leurs activités, leurs besoins et les moyens à mettre en œuvre pour satisfaire la demande des clients. L'approche *ARCH – GARCH* est introduit pour éviter la lacune majeur des modèles *ARMA*. Cette approche est un outil puissant pour traiter les phénomènes non linéaires et les mouvements imprévisibles ou volatils du marché financier. Plus précisément, elles permettent de présenter et modéliser les séries financières. **Engle** inventé la généralisation du «**Modèle *ARCH***» pour résoudre des problèmes de prévision statistique dans le domaine de la finance.

# Introduction

La question de la prévisibilité des séries financières a toujours été un problème majeur dans le monde de la finance. Face à l'échec de l'utilisation des processus *ARMA* pour la modélisation de certaines séries notamment elles dont la variance évolue dans le temps en fonction des valeurs passées (en particulier les séries financières), les modèles *ARCH* introduits par **Engle (1982)** et *GARCH* (introduits par **Bollerslev** en 1986) connaissent un succès. Le travail suivant s'inscrit dans cette logique, celle de la modélisation d'une série financière, en ayant recourt aux modèles de type *ARCH -- GARCH*.

Le but de notre travail est de fournir une introduction aux modèles *ARCH -- GARCH* le plus souvent utilisés dans la modélisation en temps continu des marchés financiers. On s'intéressera plus particulièrement à l'estimation et à sa modélisation au logiciel **R**. Notre mémoire est composé de quatre chapitres :

Dans le chapitre 1, nous présenterons un rappel des principales définitions, propriétés des séries financiers, des processus ainsi que quelques notions utiles dans notre travail.

Dans le chapitre 2, nous présentons la formulation de ces modèles, ainsi que leurs propriétés. Puis brièvement, nous énumérons les différentes extensions de ces modèles.

Dans le chapitre 3, nous abordons l'estimation des modèles *ARCH* par la méthode du maximum de vraisemblance et la prévision de ces modèles.

Dans le chapitre 4, nous présentons un petit exemple pour le modélisation *ARCH* et *GARCH* on va terminé avec annexe sur quelques commandes et quelques exemples simulés avec le logiciel statistique "**R**".



# Chapitre 01

# Chapitre 1

## Notions de bases

Nous faisons un petit rappel de quelques notions de bases :

### 1.1 La kurtosis

Soit  $\mu_k$  le moment empirique centré d'ordre  $k$  du processus  $X_t, t = 1 \dots T$

$$\begin{cases} \mu_k = \mathbb{E} (X_t - \mathbb{E} (X_t))^k \\ = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^k \end{cases} \quad (1.1)$$

**Définition 1.1.1** *La kurtosis ou le coefficient d'aplatissement pour un échantillon de taille  $T$  s'écrit :*

$$k_\mu = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad (1.2)$$

**Remarque 1.1.1** *La kurtosis mesure le caractère pointu ou plat de la distribution de la série. La kurtosis de la distribution normale est 3. Si la kurtosis est supérieur à 3 (queues épaisses), la distribution est plutôt pointue (distribution leptokurtique), si la kurtosis est inférieur à 3, la distribution est plutôt plate (distribution est dit elplatikurtique).*

## 1.2 Séries chronologiques(temporelles)

Une séries temporelle est une collection de données obtenue de manière séquentielle au cours du temps. Il y a donc typiquement deux variables associées :

- une variable quantitative dont les données sont dépendantes
- une variable "temps"

### Exemples

- données météorologiques
- données financières
- phénomènes ondulatoires (son, signal neuronique, etc...)
- suivi de populations
- .....

## 1.3 Méthode graphique

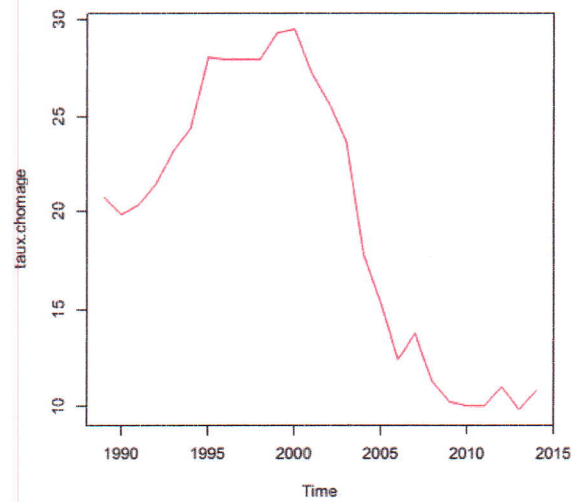
La représentation graphique de la chronique permet de détecter la présence d'une tendance, d'un cycle, d'une saisonnalité ou d'une modification de structure (rupture). Aussi, l'étude de la fonction d'autocorrélation (corrélogramme) qui consiste à analyser le corrélogramme simple permet de détecter si :

► Des pics marquants apparaissent aux retards  $S$ ,  $2S$ ,  $3S$ ..., ce qui fait penser de la présence d'une saisonnalité de période  $S$ .

► La fonction d'autocorrélation ne décroît pas d'une manière rapide vers zéro, ce qui fait croire à la présence d'une tendance.

### 1.3. MÉTHODE GRAPHIQUE

**exemple 1.3.1** *Taux de chômage d'algerie de 1989 à 2015 (Figure 1)*



*Figure 1*

**exemple 1.3.2** *un jour sur 2 au cour du mois de mars 2009 pour calculer*

la différence temporelle (Figure 2)

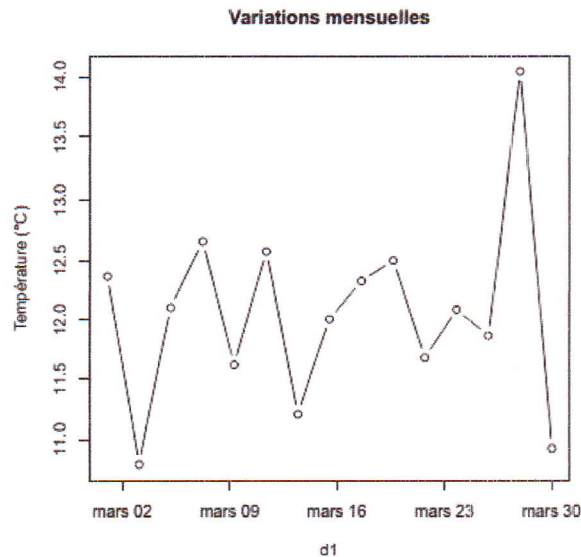


Figure 2

## 1.4 Propriétés des séries financières

Les séries de prix d'actif et de rendements présentent généralement un certain nombre de propriétés similaires suivant leur périodicité.

Soit  $p_t$  le prix d'un actif à la date  $t$  et  $r_t$  le logarithme du rendement correspond :

$$r_t = \log(p_t) - \log(p_{t-1}) = \log(1 + R_t) \quad (1.3)$$

où  $R_t = \frac{(p_t - p_{t-1})}{p_{t-1}}$  désigne la variation relative des prix

- 1) Non stationnarité des prix  $p_t$ .
- 2) Possibilité de stationnarité des rendements.

$$r_t = \log\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) \approx \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}$$

- 3) Regroupement des extrêmes (volatility clustering).

- 4) Non corrélation des rendements mais autocorrélation des carrés.
- 5) Asymétrie. Les baisses du cours génèrent plus de volatilité que les hausses de même amplitude.
- 6) Saisonnalités

### 1.4.1 La volatilité

La volatilité est une mesure de l'instabilité du cours d'un actif financier. Elle mesure l'amplitude des variations d'une action, d'un produit dérivé ou d'un marché. Il s'agit d'un paramètre de quantification du risque de rendement et de prix, les séries monétaires et financiers sont caractérisées par le clustering de volatilité, à savoir les périodes de forte volatilité alternent avec les périodes de volatilité. Ce phénomène, que nous appelons aussi l'hétéroscédasticité conditionnelle, est particulièrement fréquent dans les données boursières, les taux de changes ou d'autres prix déterminés sur les marchés financiers.

Nous allons présenter quelques méthodes pour mesurer la volatilité. Elles sont groupées selon leurs caractéristiques : mesurer la volatilité en utilisant les formules statistique.

#### Mesure statistique

Sur le marché financier, la volatilité est mesurée comme l'écart type de la rentabilité. Cette statistique mesure la dispersion de la rentabilité :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2}{T - 1}} \quad (1.4)$$

Où  $\bar{R}$  est la rentabilité moyenne de l'échantillon. L'écart type est une mesure simple mais utile de la volatilité. Quand l'écart type est grand, la chance d'avoir une rentabilité élevée est grande. Plusieurs études ont utilisé la modification de l'écart type pour mesurer la volatilité.

### 1.4.2 La stationnarité

Rappelons au passage quelques propriétés comme la stationnarité forte et de la stationnarité faible (ou stationnarité du second ordre).

**Définition 1.4.1** : Soit un processus temporel aléatoire  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ . Le processus  $X_t$  est dit strictement ou fortement stationnaire si quelque soit

$n$ -uplet du temps  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , tel que  $t_i \in \mathbb{Z}$  et pour tout temps  $h \in \mathbb{Z}$  avec  $t_i + h \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall i, i = 1, 2, \dots, n$ , la suite  $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$  à la même loi de probabilité que la suite  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ . Dans la pratique, on se limite généralement à la stationnarité du second ordre (ou stationnarité faible) du processus étudié.

**Définition 1.4.2** Un processus  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  est dit stationnaire au second ordre, ou stationnaire au sens faible, ou stationnaire d'ordre deux si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} i) \mathbb{E}(X_t^2) < \infty \forall t \in \mathbb{Z} \\ ii) \mathbb{E}(X_t) = m, \text{ indépendant de } t, \forall t \in \mathbb{Z}^2. \\ iii) \text{cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}[(X_{t+h} - m)(X_t - m)] = \gamma(h), \text{ indépendant de } t, \forall (t, h) \in \mathbb{Z}^2 \end{cases} \quad (1.5)$$

En résumé, un processus est stationnaire au second ordre si l'ensemble de ses moments sont indépendants du temps. Par conséquent, il convient de noter que la stationnarité implique que la variance  $\gamma(0)$  du processus  $X_t$  est constante au cours du temps. Les processus  $P_t$  associés aux prix d'actif sont généralement non stationnaires au sens de la stationnarité du second ordre, tandis que les processus associés aux rendements sont compatibles avec la propriété de stationnarité au second ordre.

### 1.4.3 Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation

**Définition 1.4.3** Soit  $(X_t)$  une série stationnaire. La fonction d'autocovariance de  $(X_t)$  est définie par :

$$\gamma_{X(h)} = \text{cov}(X_t, X_{t+h}), h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.6)$$

La fonction d'autocorrélation de  $(X_t)$  est définie par :

$$\rho_{X(h)} = \frac{\gamma_{X(h)}}{\gamma_{X(0)}} \quad (1.7)$$

**exemple 1.4.1** On étudie les variations mensuelles du nombre de passagers d'une compagnie aérienne. On s'aperçoit qu'il y a des pics annuels (Figure

## 1.4. PROPRIÉTÉS DES SÉRIES FINANCIÈRES

3)

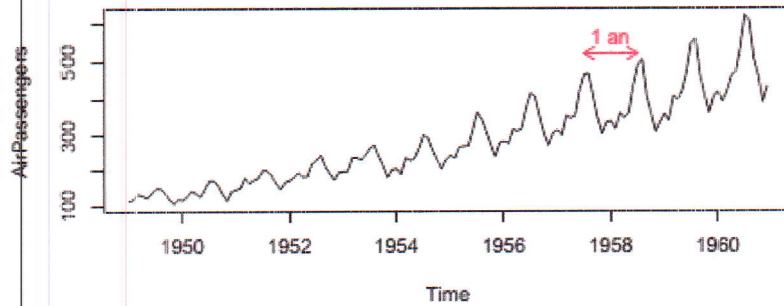


Figure 3

On retrouve cette périodicité (rouge) sur l'autocorrélation avec en plus un pic mensuel (vert) (Figure 4)

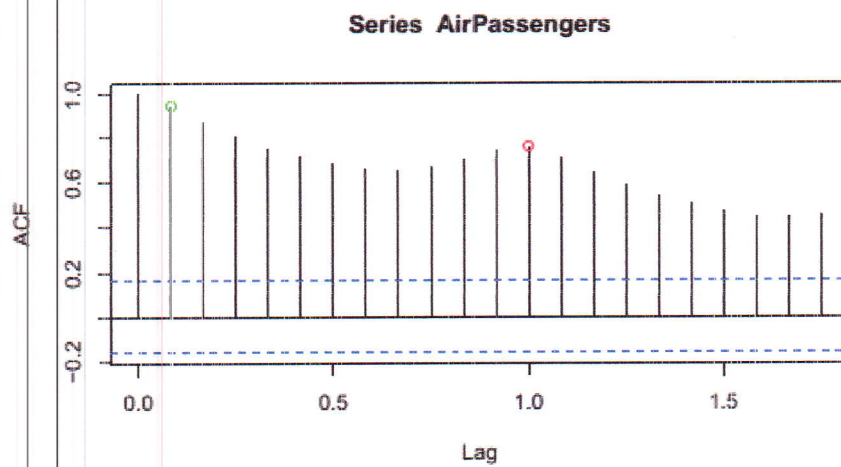


Figure 4



## 1.5 Le processus bruit blanc (white noise process).

Plus simple processus stationnaire en analyse des séries temporelles est appelé processus bruit blanc  $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$  qui est une séquence de variables aléatoires non corrélées de moyenne nulle et de variance constante  $\sigma^2$

**Définition 1.5.1**  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un **bruit blanc fort** si :

$(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées (*i.i.d.*).

$$\forall t \in \mathbb{Z} : \mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0 \text{ et } \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2.$$

**Définition 1.5.2**  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un **bruit blanc faible** si :

$(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est une suite de variables aléatoires réelles identiquement distribuées,

$$\forall (t, s) \in \mathbb{Z}^2, t \neq s : \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0,$$

$$\forall t \in \mathbb{Z} : \mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0 \text{ et } \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2.$$

**exemple 1.5.1** Simulation d'un processus bruit blanc (Figure 5)

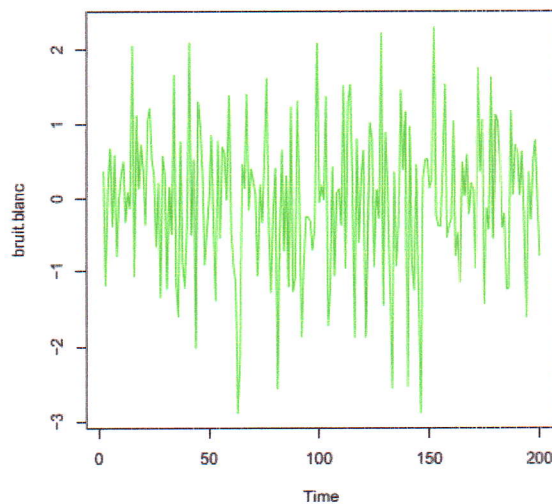


Figure 5

**Remarque 1.5.1** La série  $r_t^2$  associée aux carrés des rendements présente généralement de fortes auto-corrélations tandis que les auto-corrélations de la série  $r_t$  sont souvent très faibles

**Remarque 1.5.2** Un processus  $(X_t)$  est une différence de martingale homoscedastique si et seulement si :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X_t | X_{t-1}, \dots, X_0) = 0 \\ V(X_t) = \sigma^2 \forall t \end{cases}$$

## 1.6 Le processus d'innovation

Nous introduisons un concept d'innovation.

**Définition 1.6.1** L'innovation d'un processus stochastique  $X_t$  est définie comme :

1-Les erreurs représentent comme différence entre la valeur prévue et réalisée

$$\varepsilon_t = X_t - \mathbb{E}(X_t / X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) \quad (1.8)$$

2-Le carré des erreurs représentent comme différence entre la valeur réalisée et la variance conditionnelle

$$\varepsilon_t^2 = X_t^2 - V(X_t / I_{t-1}) \quad (1.9)$$

3-Le carré des erreurs normalisées est défini

$$\varepsilon_t^2 = \frac{X_t - \mathbb{E}(X_t / I_{t-1})}{\sqrt{V(X_t / I_{t-1})}} \quad (1.10)$$

## 1.7 Modèle linéaire

**Définition 1.7.1** Un processus  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  est un processus linéaire (resp linéaire générale) de moyenne  $\mu$  s'il s'écrit sous la forme :

$$X_t = \mu + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varepsilon_{t-k} \quad (1.11)$$

où  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un bruit blanc fort (resp faible) avec variance  $\sigma^2$  et où la suite des coefficients  $\alpha_k$  est supposée telle que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^2 < \infty \quad (1.12)$$

## 1.8 Opérateur de retard B

**Définition 1.8.1** L'opérateur retard est un opérateur linéaire noté  $B$ , il décale le processus d'une unité de temps vers le passé.

$$BX_t = X_{t-1} \quad (1.13)$$

### Propriétés

- 1)  $B^j X_t = X_{t-j}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  en particulier on a  $B^0 X_t = X_t$
- 2) Si  $X_t = C$ ;  $\forall t \in \mathbb{Z}$ , avec  $C \in \mathbb{R}$  :  $B^j X_t = B^j C = C \forall j \in \mathbb{Z}$
- 3)  $B^i (B^j X_t) = B^{i+j} X_t = X_{t-i-j}$ ,  $\forall i, j \in \mathbb{Z}$
- 3)  $B^{-i} X_t = X_{t+i} \forall t, i \in \mathbb{Z}$
- 4)  $(B^i + B^j) X_t = X_{t-i} + X_{t-j}$ ,  $\forall i, j \in \mathbb{Z}$
- 5) Si on applique  $h$  fois cet opérateur, on décale le processus de  $h$  unité de temps :

$$B(B(\dots BX_t \dots)) = B^h X_t = X_{t-h} \quad (1.14)$$

## 1.9 Modèles ARMA.

Les modèles *ARMA* s'appuient principalement sur deux principes mis en évidence par **yule** et **Slutsky**, le principe autorégressif (**Auto Regressive**) et moyenne mobile (**Moving Average**). Puis en 1970, leur application à l'analyse et à la prédiction des séries temporelles fut généralisée par **Box** et **Jenkins** en combinant les deux principes *ARMA*, ils montrent que ce processus pouvait s'appliquer à de nombreux domaines et était facile à implémenter.

### 1.9.1 Modèle AR

Le modèle que présente le processus auto-régressif, construits à partir de l'idée que l'observation au temps  $t$  s'explique linéairement par les observations précédents.

**Définition 1.9.1** On dit que  $(X_t)$  est un processus autorégressif d'ordre  $p$  s'il s'écrit :

$$X_t = \delta + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (1.15)$$

où :

$\delta$  le coefficient d'accroissement

$\alpha_i$  les coefficients d'autorégressifs

$\varepsilon_t$  un bruit blanc indépendant.

**exemple 1.9.1** Le processus  $Z_t = 0,1X_{t-1} + 0,8X_{t-4}$  et un processus AR(4) la réalisation de taille  $T = 200$  de cette serie à la (Figure 6)

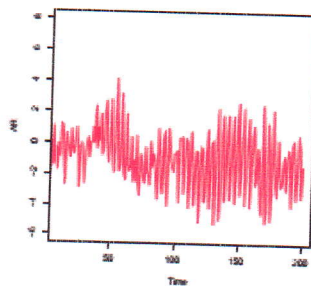


Figure 6

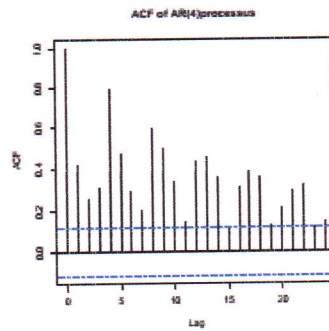


Figure 7

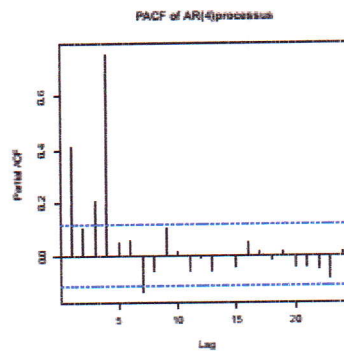


Figure 8

### 1.9.2 Le Modèle $MA$

Ces processus forment une classe flexible de modèles pour de nombreux phénomènes observés. Ils sont construits à partir de l'idée que l'observation au temps  $t$  s'explique linéairement par les observation d'un bruit blanc.

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t \quad (1.16)$$

où

$\beta_i$  les coefficients de moyenne mobile.

$\varepsilon_{t-i}$  bruit blanc.

**exemple 1.9.2** *Le processus  $Z_t = 6 + \varepsilon_{t-1} + 0,7\varepsilon_{t-4}$  et un processus MA(4) de moyenne  $\mu = 6$  réalisation de taille  $T = 200$  de cette série à la (figure 9)*

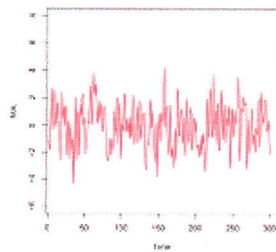


Figure 9

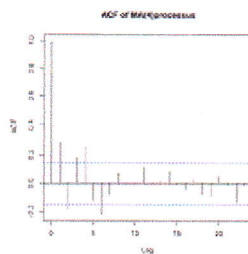


Figure 10

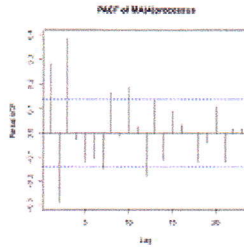


Figure 11

### 1.9.3 Modèle mixte

Le modèle linéaire le plus courant est le modèle *ARMA* qui combine simplement les deux principes *AR* et *MA*.

**Définition 1.9.2** *Le processus  $(X_t, t \in \mathbb{N}$  (ou  $\mathbb{Z}$ )) admet l'équation générale suivante qui définit un modèle *ARMA*  $(p, q)$*

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} - \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i} \quad (1.17)$$

où  $p$  est l'ordre de processus autorégressif et  $q$  l'ordre de processus moyenne mobile.

**exemple 1.9.3** *Le processus  $Z_t = 0.5Z_{t-1} + 0.2Z_{t-3} + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}$  est un processus *ARMA*(3,1) est sa réalisation présenté dans la (Figure 13)*

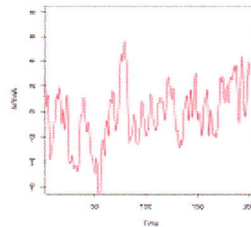


Figure 12

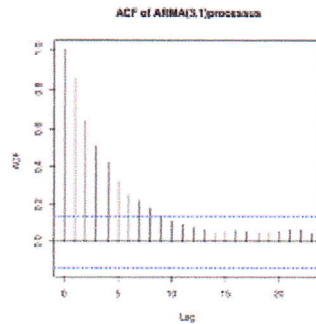


Figure 13

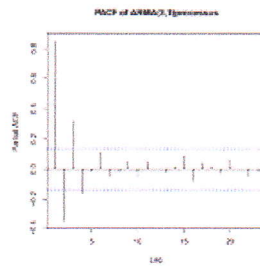


Figure 14

## 1.10 Hétéroscédasticité

**Définition 1.10.1** *En statistique, on parle d'hétéroscédasticité lorsque les variances des variables examinées sont différentes. La notion d'hétéroscédasticité s'oppose à celle d'homoscédasticité, qui correspond au cas où la variance de l'erreur des variables est constante. Tandis que dans le cas d'homoscédasticité, nous avons  $\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 \forall i$ , nous avons désormais  $\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma_i^2$ , où  $\sigma_i^2$  peut être différent de  $\sigma_j^2$ , pour  $i \neq j$*



# Chapitre 02

## Chapitre 2

# Modèles ARCH-GARCH

### 2.1 Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques ARCH(1)

Dans le but de pallier aux insuffisances des représentations  $ARMA(p, q)$  pour les problèmes monétaires et financiers, **Engle** (1982) propose une nouvelle classe de modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques ( $ARCH$ ) apte à capter le comportement de la volatilité dans le temps. Le modèle est formé de deux équations. La première met en relation le rendement et certaines variables qui l'expliquent et la seconde modélise la variance conditionnelle des résidus. Le principe proposé par **Engle** consiste à introduire une dynamique dans la détermination de la volatilité en supposant que la variance est conditionnelle aux informations dont nous disposons. Il avance une spécification  $ARCH(p)$  où le carré des innovations, c'est-à-dire la variance du terme d'erreur au temps  $t$ , dépend de l'importance des termes d'erreur au carré des  $p$  périodes passées. Le modèle  $ARCH(p)$  permet de générer des épisodes de volatilité importante suivis d'épisodes de volatilité plus faibles.

$$\begin{cases} Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t \\ \text{où } \varepsilon_t |_{t-1} \sim N(0, h_t) \end{cases} \quad (2.1)$$

où le terme  $Y_t$  correspond aux variables expliquant les rendements, il peut être un modèle  $ARMA(p, q)$ . L'expression  $I_{t-1} = \sigma(X_{t-s})_{s \leq 1}$  désigne la tribu engendrée les  $X_{t-s}$   $s \leq 1$ . Dans la modélisation  $ARCH$  le processus  $\varepsilon_t$  peut

## 2.1. MODÈLES AUTORÉGRESSIFS CONDITIONNELLEMENT HÉTÉROSCÉDASTIQUES ARCH(1)

s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \eta_t h_t \\ \text{avec } h_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2} \\ \text{où } \eta_t \sim N(0, 1) \end{cases} \quad (2.2)$$

**Définition 2.1.1** *Un processus  $\varepsilon_t$  satisfait une représentation ARCH (1) si*

$$\varepsilon_t = \eta_t h_t \quad (2.3)$$

avec

$$h_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2} \quad (2.4)$$

où  $\eta_t$  est un bruit blanc faible, tel que  $\mathbb{E}(\eta_t) = 0$  et  $\mathbb{V}(\eta_t) = 1$ , et  $\alpha_0 > 0$ ,  $0 < \alpha_1 < 1$ , la composante  $h_t$  désigne une variable qui, conditionnellement à l'ensemble d'information des valeurs passées de  $\varepsilon_t$ , i.e. à  $I_{t-1} = \sigma\{\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-j}, \dots\}$ , est déterministe et positive. Dans ce cas, le processus  $\varepsilon_t$  est caractérisé par des auto corrélations nulles  $\mathbb{E}\{\varepsilon_t \varepsilon_s\} = 0$  pour  $t \neq s$  ce qui signifie que les  $\varepsilon_t$  sont non corrélés dans le temps, en effet  $\varepsilon_t$  reste un bruit blanc mais dit faible.

**Remarque 2.1.1** *Un bruit blanc faible implique que les résidus ont une moyenne nulle et ils sont corrélés dans le temps. Ainsi, la variance conditionnelle varie dans le temps, mais  $\varepsilon_t$  est non conditionnellement homoscedastique, c'est-à-dire qu'il y a l'existence d'une variance inconditionnelle finie.*

**Remarque 2.1.2** *On peut établir des résultats intéressants en considérant le processus autorégressif sur  $\varepsilon_t^2$ , nous pouvons écrire le modèle ARCH sous deux autres formes. Prenons un modèle ARCH (1) pour les illustrer.*

1. Forme d'équilibre :

$$h_t^2 = \sigma^2 + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma^2) \quad (2.5)$$

Sachant que  $\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$ , nous retrouvons la forme habituelle du modèle ARCH (1) ainsi :

$$\begin{aligned}
 h_t^2 &= \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} + \alpha_1 \left( \varepsilon_{t-1}^2 - \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \right) \\
 &= \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 - \frac{\alpha_1 \alpha_0}{1 - \alpha_1} \\
 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

2- Les carrés des erreurs sont autorégressives :

$$\varepsilon_t^2 = h_t^2 + v_t \tag{2.7}$$

où  $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t^2$ .

$$h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \Leftrightarrow \varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + v_t \tag{2.8}$$

Et en ayant les informations disponibles jusqu'au temps  $t - 1$  :

$$\mathbb{E}(v_t | I_{t-1}) = 0 \tag{2.9}$$

avec  $I_{t-1}$  c'est l'ensemble de l'information jusqu'à  $t - 1$ , en effet

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(v_t | I_{t-1}) &= \mathbb{E}(\varepsilon_t^2 | I_{t-1}) - \mathbb{E}(h_t^2 | I_{t-1}) \\
 &= \mathbb{V}(\varepsilon_t | I_{t-1}) - \mathbb{E}(h_t^2 | I_{t-1})
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

et par la propriété<sup>(\*)</sup> des modèle ARCH pour  $s = 1$  on a

$$\mathbb{V}(\varepsilon_t | I_{t-1}) = h_t^2 \tag{2.11}$$

par suite

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(v_t | I_{t-1}) &= h_t^2 - h_t^2 \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$v_t$  est processus d'innovation pour  $\varepsilon_t^2$ . Ainsi cette écriture précédente correspondant à celle d'un processus AR(1) sur le carré  $\varepsilon_t^2$

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + v_t \tag{2.13}$$

on sait que ce processus  $\varepsilon_t^2$  est stationnaire au seconde ordre si et seulement si  $|\alpha_1| < 1$ ,

## 2.2 Représentation ARCH

**Théorème 2.2.1** *Si un processus  $\varepsilon_t$  satisfait une représentation ARCH (1), alors  $\varepsilon_t^2$  satisfait une représentation AR(1) telle que :*

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + v_t \quad (2.14)$$

où  $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t^2$  vérifiant  $\mathbb{E}(v_t | I_{t-1}) = 0$  est un processus d'innovation pour  $\varepsilon_t^2$

**exemple 2.2.1** *Les graphiques ci-dessous permettent de comparer un processus AR(1) et un processus ARCH(1) (Figure 15)*

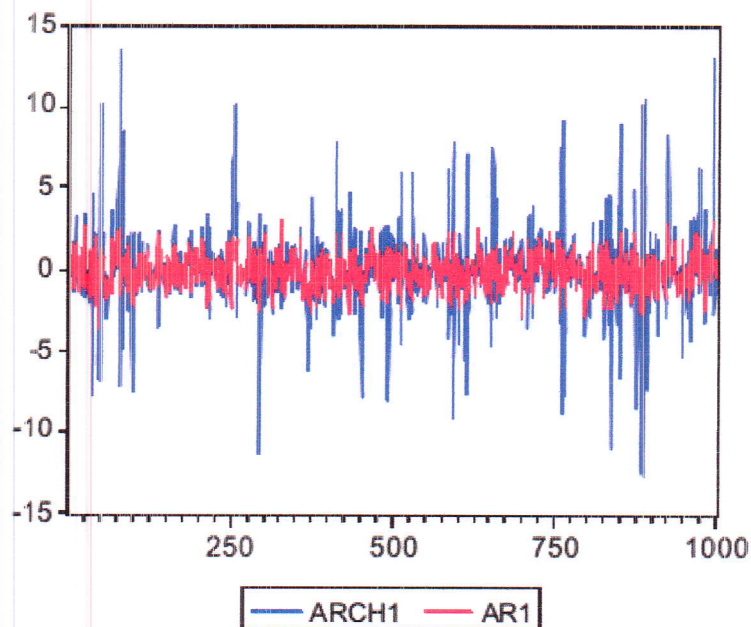


Figure 15

Pour la prévision de 3 périodes, nous avons

$$\begin{aligned}\hat{h}_T(3) &= \alpha_0 + (\beta_1 + \alpha_1)h_{T+2}^2 & (3.26) \\ &= \alpha_0 + (\beta_1 + \alpha_1)(\alpha_0 + (\beta_1 + \alpha_1)(\alpha_0 + (\beta_1 + \alpha_1)h_T^2 + \alpha_1h_T^2(\eta_T^2 - 1)))\end{aligned}$$

Ainsi, en répétant les substitutions, pour la prévision de  $h$  périodes, nous avons

$$\hat{h}_T(h) = \frac{\alpha_0(1 - (\beta_1 + \alpha_1)^{h-1})}{1 - (\beta_1 + \alpha_1)} + (\beta_1 + \alpha_1)^{h-1}h_T^2(1) \quad (3.27)$$

Et quand  $h \rightarrow \infty$  la variance conditionnelle tend vers la valeur d'équilibre

$$\frac{\alpha_0}{1 - (\beta_1 + \alpha_1)} \quad (3.28)$$

# Chapitre 04

# Chapitre 4

## Application

### 4.1 Un exemple pour la modélisation *ARCH* et *GARCH*

**BEL 20** : L'indice de référence du marché belge. Cet indice est établi à partir des actions des 20 entreprises ayant un poids considérable dans l'économie belge.

#### 4.1.1 Présentation des données et traitement des valeurs manquantes

Les données utilisées sont celles des cours journaliers d'ouverture de l'indice **BEL 20** sur la période allant du 10 juin 1992 au 13 mars 2009. On note la présence des données manquantes dans la série relativement aux jours de fêtes et aux jours fériés. Ces données seront remplacées en utilisant la moyenne arithmétique des valeurs prises par la série dans leurs voisinages.

#### 4.1.2 Evolution de la série

La figure présente l'évolution du **BEL 20** sur la période précédemment indiquée. De façon générale, on observe une tendance à la hausse sur la période Juin 1992 allant de juillet 1998 ainsi que sur la période allant de mars 2003 à avril 2007. On observe par contre une baisse du cours du **BEL 20** entre 1999 et 2003. Cette tendance à la baisse est encore plus marquée sur la période. Cette chute peut probablement s'expliquer par la crise financière



#### 4.1. UN EXEMPLE POUR LA MODÉLISATION ARCH ET GARCH

qui sévit depuis l'année 2007 d'autant plus que, plusieurs des sociétés pris en compte pour le calcul de cet indice sont des banques.

L'observation de la **figure 1**, nous laisse penser à priori que la série étudiée n'est pas stationnaire. En effet, on note de façon générale, que la série ne semble pas osciller autour d'une moyenne constante. Ce qui laisse présager que le moment du processus générateur dépend du temps. Les patterns croissance (sur les périodes de 1992 à 1998 et 2003 à 2007) et de décroissance (mi 2007 au début de l'année 2009 particulièrement) laissent soupçonner la présence d'une tendance. Par conséquent, nous postulons pour la non stationnarité du processus générateur de la série.

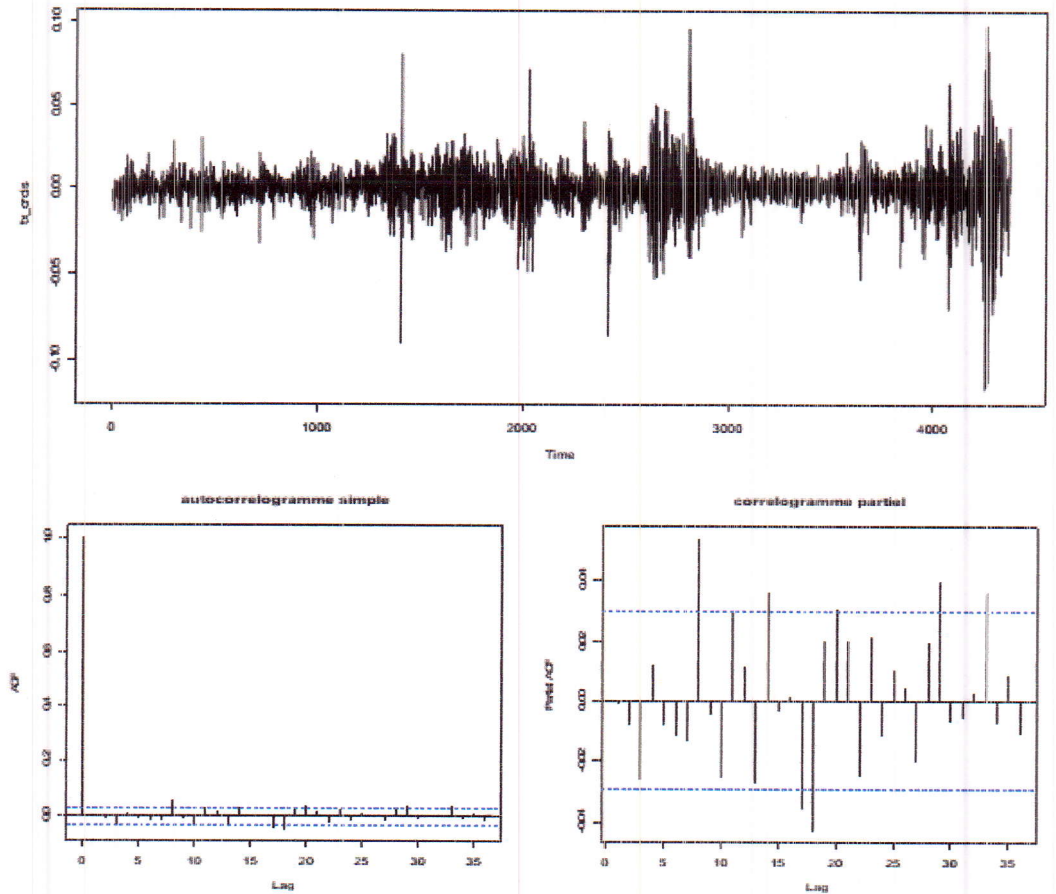


#### 4.1.3 Taux de croissance du BEL 20

##### Etude de la stationnarité

La série décrivant le taux de croissance du **BEL 20** journalier sur période allant de 1992 à mars 2009 nous est présenté à travers la **figure 2**. On constate à la lumière du graphique, que la série fluctue autour d'une moyenne nulle. Aussi, on remarque que les périodes de fortes volatilités et de faibles volatilités se succèdent à tour de rôle. Ainsi, la variance conditionnelle de la série serait dépendante du temps (ce qui est caractéristique des processus *ARCH* et *GARCH*). Par ailleurs, on constate que le correlogramme simple de la série ne présente aucune forme particulière. Au vue, de tout ceci l'hypothèse de la stationnarité du processus ayant généré la série (de rentabilité du **BEL 20**) semble vraisemblable.

Figure 2 : Série du taux de croissance du BEL 20 et corrélogram



#### 4.1.4 Etude des moments et de la leptokurticité du taux de croissance du BEL 20

La moyenne de la série est donnée dans le tableau. On remarque en effet, que conformément aux résultats attendus, que cette moyenne est quasiment nulle. Aussi, comme nous l'avons souligné précédemment, le graphique nous fait observer que la variance conditionnel dépend du temps. le coefficient d'aplatissement (**kurtosis**) est de l'ordre de  $16 > 3$ , cette distribution est donc leptokurtique. Le coefficient d'asymétrie est proche de 0 ce qui laisse

#### 4.1. UN EXEMPLE POUR LA MODÉLISATION ARCH ET GARCH

entrevoir une distribution assez symétrique. Son signe négatif traduit une plus grande sensibilité aux chocs négatifs. De façon générale, les moments empiriques calculés sont assez proches des prévisions.

Moyenne	7,55E-05
variance	0,000153745
kurtosis	16,94841

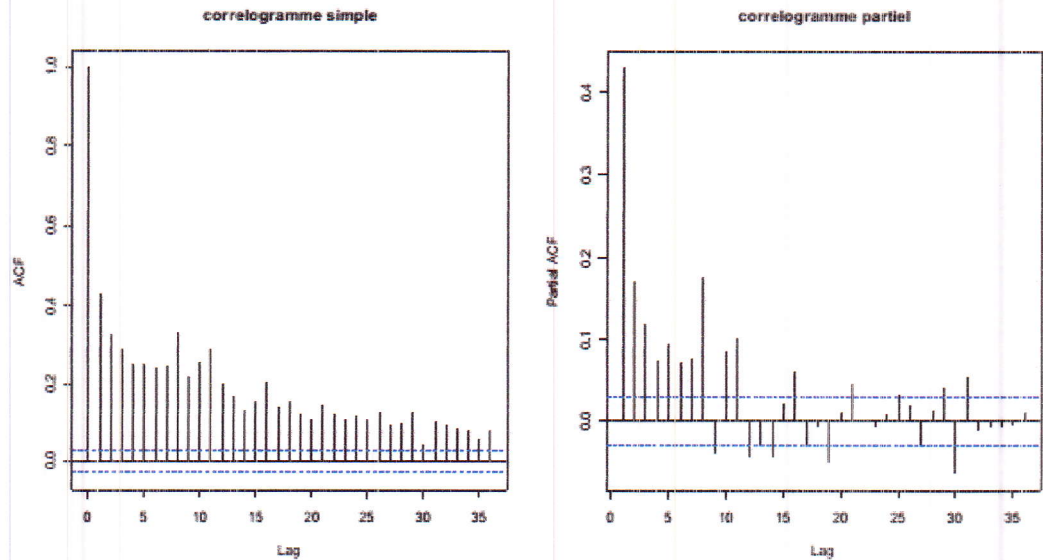
Tableau 1 : Propriété statistique de la série

#### 4.1.5 Etude du processus du taux générateur de la série

Dans l'optique de vérifier si la série a été générée par un processus *GARCH*, nous allons étudier les corrélogrammes simple et partiel de la série élevée au carré, afin de voir si cette dernière est issue d'un processus *AR* ou *ARMA*. En effet les processus de type *GARCH* élevés au carré correspondent à des processus *ARMA*. Il faut noter au regard des corrélogrammes simple et partiel, qu'il nous est difficile de pouvoir détecter l'ordre  $(p, q)$  du processus *ARMA*. De ce fait, nous allons utiliser un algorithme permettant de minimiser le critère AIC sur le logiciel R. On remarque une décroissance exponentielle au niveau du corrélogramme simple amortie après 4 retards ce qui nous amène à penser que  $q \leq 4$ . De même au niveau du corrélogramme partiel on note une décroissance exponentiel amortie après le 4<sup>ème</sup> retard. D'où il est probable que  $p \leq 4$ .

Figure 3 Corrélogrammes simple et partiel de la série des taux de crois-

sance au carré



Le modèle minimisant le critère d'information est un processus de type  $GARCH(1, 2)$ . Les résultats de l'estimation des différents coefficients  $t$  sont présentés ci-dessous

**Estimation des paramètres du processus  $GARCH(1, 2)$**

Le modèle estimé est donc donné par :

$$\begin{cases} \alpha_0 = 3.379e - 06 \\ \alpha_1 = 2.452e - 01 \\ \beta_1 = 3.761e - 01 \\ \beta_2 = 3.768e - 01 \end{cases}$$

Telle que :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \eta_t h_t \\ h_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}^2 + \beta_2 h_{t-2}^2} \end{cases} \text{ avec } \eta_t \sim N(0, 1)$$

## 4.2 Annexe A

### 4.2.1 Présentation du logiciel R

Le logiciel *R* est un logiciel de statistique créé par **Ross Ihaka & Robert Gentleman**. Il est à la fois un langage informatique et un environnement de travail : les commandes sont exécutées grâce à des instructions codées

dans un langage relativement simple, les résultats sont affichés sous forme de texte et les graphiques sont visualisés directement dans une fenêtre qui leur est propre. C'est un clone du logiciel *S - plus* qui est fondé sur le langage de programmation orienté objet S, développé par **AT&T Bell Laboratories** en 1988. Ce logiciel sert à manipuler des données, à tracer des graphiques et à faire des analyses statistiques sur ces données.

#### 4.2.2 Quelques commandes

**arima( )** : Montage ARIMA-modèles

**acf( )** : Estimation de la fonction d'auto-corrélation

**arima.sim** : Simulation des processus ARIMA

**pacf( )** : Estimation de la fonction d'autocorrélation partiel

**plot( )** : commande graphique

**ts( )** : Création l'objet des séries temporelles

Il y a cinq arguments principaux :

**-data** : les données décrivant la série temporelle

**-start** : le temps de départ

**-end** : le temps de fin

**-frequency** : la fréquence d'échantillonnage ou le nombre d'observations par unité de temps

**-deltat** : la période entre deux observations successives

**c( )** : Commande vectorielle

**type="l"** : Le type de graphe qui sera dessiné, "p" : points, "l" : lignes.

**xlim=, ylim=** : Fixe les limites inférieures et supérieures des axes

**date( )** : Fonction retourne la date du jour sous forme d'une chaîne de caractères

**as.Date( )** : dates

**difftime( )** : Pour calculer une différence temporelle

**list( )** : liste

**data.frame( )** : tableau individus  $\times$  variables

### 4.3 Annexe B :

#### 4.3.1 simulation d'un bruit blanc

```
>bruit.blanc==ts(rnorm(200),frequency=1,start=c(2),end=c(200))
```

```
>plot(bruit.blanc,type="l",col="green") page(8 )
```

### 4.3.2 simulation des processus

**exemple 4.3.1** *taux de chômage : page( 3)*

<i>Période</i>	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
<i>Algérie</i>	20,7	19,8	20,3	21,4	23,2	24,4	28,1	28	28
<i>Période</i>	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
<i>Algérie</i>	28	29,3	29,5	27,3	25,7	23,7	17,7	15,3	12,5
<i>Période</i>	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	
<i>Algérie</i>	13,8	11,3	10,2	10	10	11	9,8	10,8	

```
>y= c(20.7, 19.8, 20.3, 21.4, 23.2, 24.4, 28.1, 28, 28, 28, 29.3, 29.5, 27.3, 25.7, 23.7, 17.7, 15.3,
+12.5, 13.8, 11.3, 10.2, 10, 10, 11, 9.8, 10.8)
>y
[1] 20.7 19.8 20.3 21.4 23.2 24.4 28.1 28 28 28 29.3 29.5 27.3 25.7 23.7 17.7
15.3 12.5 13.8 11.3 10.2 10 10,11 9.8 10.8
>taux.chomage=ts(y,start= c(1989),end= c(2014))
>taux.chomage
TimeSeries :
start= 1989
end= 2014
Frequency= 1
[1] 20.7 19.8 20.3 21.4 23.2 24.4 28.1 28 28 28 29.3 29.5 27.3 25.7 23.7 17.7
15.3 12.5 13.8 11.3 10.2 10 10,11 9.8 10.8
>plot(taux.chomage,col="red").
```

**exemple 4.3.2** *un jour sur 2 au cour du mois de mars 2009 : page(4)*

```
>d1<- seq(from= as.Date("01/03/09", "%d/%m/%y"), to= as.Date("30/03/09"),
+ "%d/%m/%y"), length.out= 15)
>d1
[1]"2009-03-01""2009-03-03""2009-03-05""2009-03-07""2009-
03-09"
[6]"2009-03-11""2009-03-13""2009-03-15""2009-03-17""2009-
03-19"
```

```
[11]"2009-03-21""2009-03-23""2009-03-25""2009-03-27""2009-03-30"
```

```
> r <- rnorm(length(d1), mean = 12)
> plot(x = d1, y = r, type = "b", ylab = "Température (°C)",
+ main = "Variations mensuelles")
```

**exemple 4.3.3** : *On étudie les variations mensuelles du nombre de passagers d'une compagnie aérienne. On s'aperçoit qu'il y a des pics annuels : page(7)*

```
> data(AirPassengers)
> plot(AirPassengers)
> arrows(x0 = 1957.5, y0 = 520, x1 = 1958.5, y1 = 520, col = 2,
+ code = 3, length = 0.1)
> text(x = 1958, y = 560, "1 an", col = 2)
```

On retrouve cette périodicité (rouge) sur l'autocorrélation avec en plus un pic mensuel (vert) : page(7)

```
acf(AirPassengers)
> points(x = 1, y = 0.76, col = 2)
> points(x = 1/12, y = 0.948, col = 3)
```

#### Exemples des processus AR, MA, ARMA

**exemple 4.3.4** *Simulation d'un processus AR(4) page( 11, 12 )*

```
> AR=arima.sim(200, model=list(ar=c(0.1,0,0,0.8)))
> plot(AR, type="l",col="red", ylim=c(-6,8), xlim=c(10,200))
```

**exemple 4.3.5** *Simulation d'un processus MA(4) page(13, 14)*

```
> MA=arima.sim(200, model=list(ma=c(1,0,0,0.7)))
> plot(MA, type="l",col="red", ylim=c(-6,8), xlim=c(10,200))
```

**exemple 4.3.6** *simulation d'un processus ARMA(3,1) page( 14, 15)*

```
> ARMA=arima.sim (200,model=list(ar=c(0.5,0,0.2),ma=c(1,0.5)))
> plot(ARMA,type="l",col="red", ylim=c(-6,8), xlim=c(10,200))
```

### 4.3.3 Les fonction d'auto-corrélation (ACF) est fonctions d'auto-corrélations partiels (PACF)

```
> acf(AR,main="ACF of AR(4)processus")
> pacf(AR,main="PACF of AR(4)processus")
> acf(MA,main="ACF of MA(4)processus")
> pacf(MA,main="PACF of MA(4)processus")
> acf(ARMA,main="ACF of ARMA(3,1)processus")
> pacf(ARMA,main="PACF of ARMA(3,1)processus")
```



# Bibliographie

- [1] Charpentier : Cours de series temporelles
- [2] Christophe Hurlin : Université d'Orléans : Econométrie pour la Finance  
Modèles *ARCH* – *GARCH* Applications à la VaR
- [3] ENGLE B. (1982) "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with  
Estimates of the Variance of U.K.Inflation", *Econometrica*, 987 – 1008
- [4] Gabin Otha-Ndoumba : Université Sherbrooke : Formulation et estimation  
des modèles *ARCH* – *GARCH* avec application à l'annalyses de la  
volatilité des séries
- [5] Algérie- Taux de chômage
- [6] Agn'es Lagnoux : Université Toulouse le Mirail : Renforcement Statistique  
S'eries chronologiques
- [7] Jérôme Sueur : Semin **R** : Introduction à l'analyse de séries temporelles  
sour **R**
- [8] RAINER von SACHS & SEBASTIEN. STAT 2414 Séries chronologiques  
4<sup>e</sup>Edition 26 septembre 2005
- [9] Jean-Michel ZAKOIAN : Modèles *GARCH* et à volatilité stochastique