République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
**Master Académique en Mathématiques**
Option : **Probabilités et Applications.**

Par :

**M[elle] Benzaid Aicha et M[elle] Hamlaoui Selma.**

## Intitulé

# *Formule d'Itô et applications*

**Dirigé par : Dr. Benchaabane Abess.**

**Devant le jury**

| | | | |
|---|---|---|---|
| PRESIDENT | Dr. Kerboua.M | MAA | Univ-Guelma |
| RAPPORTEUR | Dr. Benchaabane.A | MCB | Univ-Guelma |
| EXAMINATEUR | Dr. Bouhadjar.S | MCB | Univ-Guelma |

**Session Juin 2015**

# Remerciement

Au nom de Dieu, Clément et Miséricordieux

Lis, au nom de ton Seigneur qui a créé tout, Qui a créé l'homme se sang coagulé Lis, car ton Seigneur est plus généreux, Il t'a appris l'usage de la plume,

Il apprit à l'homme, ce que l'homme ne savait pas.

Notre profonde reconnaissance à notre encadreur du mémoire le

Docteur : BENCHAABANE ABBES

Qui grâce à sa responsabilité, son soutien, ses conseils et ses encouragements nous a permis de mener à bien ce travail.

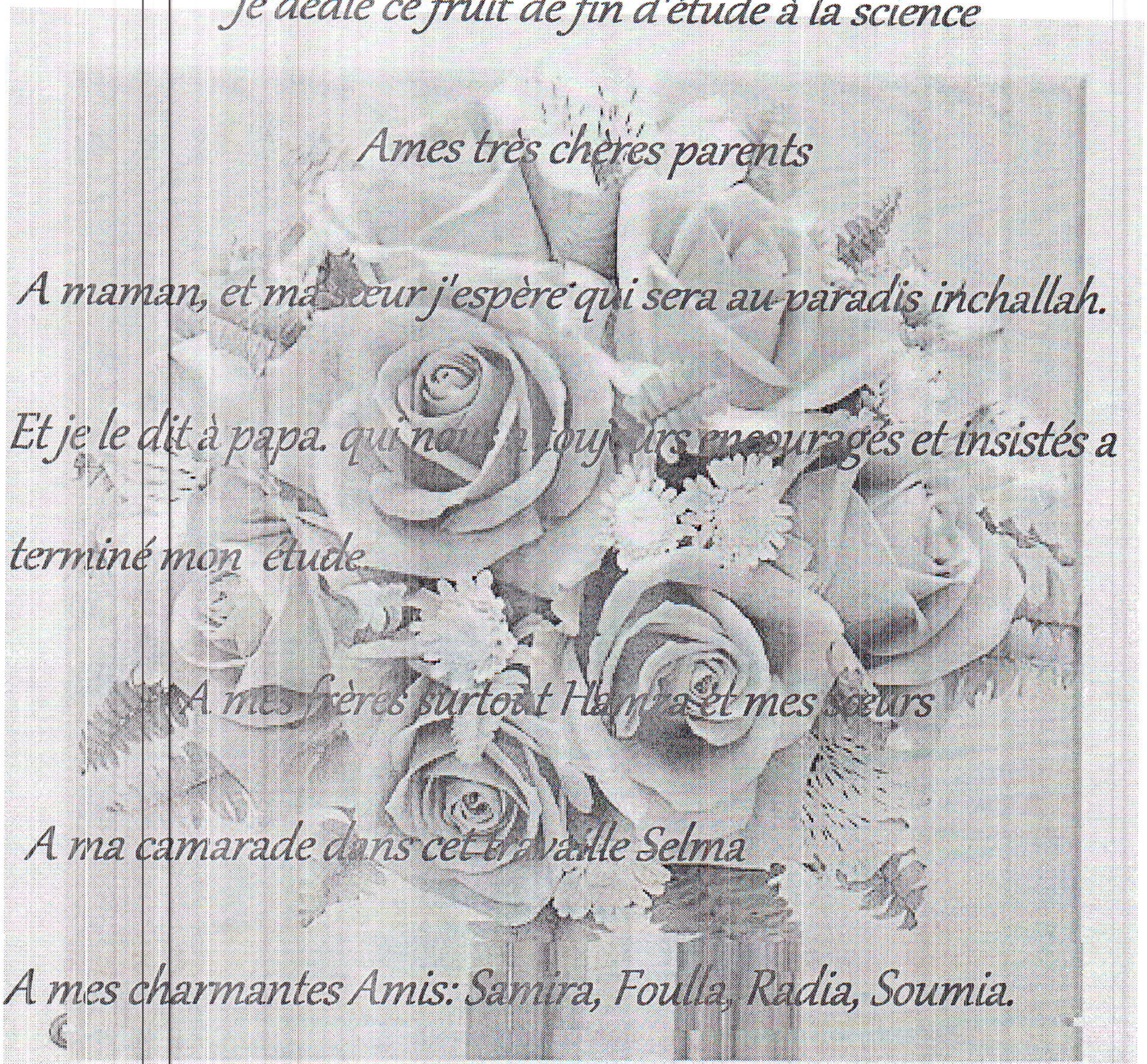
On adresse l'expression de notre gratitude à notre enseignant le

Docteur : KERBOUA MOURAD,

Qui nous fait l'honneur de présider ce jury et d'examiner notre mémoire. Ainsi qu'au

Docteur : BOUHADJER SLIMENE , qui a accepté d'examiner notre mémoire et faire partie de ce jury.

# Dédicace



*Je dédie ce fruit de fin d'étude à la science*

*Ames très chères parents*

*A maman, et ma sœur j'espère qui sera au paradis inchallah.*

*Et je le dit à papa. qui nous a toujours encouragés et insistés a terminé mon étude.*

*A mes frères surtout Hamza et mes sœurs*

*A ma camarade dans cet travaille Selma*

*A mes charmantes Amis: Samira, Foulla, Radia, Soumia.*

*A tout ma famille grande et petite.*

*Et toutes les promos de probabilité 2014-2015*

- *BENZAID.AICHA*

# Dédicace

Je dédie ce fruit de fin d'étude à la science

A mes très chers parents :

A toi **maman**, la fleur de ma vie et le symbole de tendresse.

A toi **papa**, qui nous a toujours encouragés et insistés a terminé mon étude.

Je vous souhaite une belle vie plein d'amour et de santé.

A **mes** frères et **mes** sœurs

A mon marie HOUSSEM EL EDDINE

A tous les enseignements des mathématiques.

A mes charmants amis : Fella, **Samira**, Radia, **Soumia**

A mon camarade dans ce travail AICHA

A toute ma famille grande et pétite.

A tous ceux qui j'aime et qui m'aiment

- **HAMLAOUI.SELMA**

# Table des matières

# Introduction

A présent, nous allons énoncer et démontrer l'un des résultats les plus importants de la théorie du calcul stochastique, la formule d'**Itô**. Ces travaux ont été publiés entre 1942 et 1950 et sont dus au mathématicien japonais récemment décédé, **Kiyoshi Itô**. Le mathématicien **Wolfgang Doeblin** avait de son côté ébauché une théorie similaire avant de se suicider à la défaite de son bataillon en juin 1940. Ses travaux furent envoyés dans un pli cacheté à l'Académie des sciences qui ne fut ouvert qu'en 2000.

Dans ce mémoire on s'intéresse à la formule d'**Itô** et ces applications, elle montre qu'une fonction de classe $C^2$ de semimartingale continue est encore une semimartingale continue.

Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sa filtration naturelle i.e. $\mathcal{F}_t = \sigma(B_u, u \leq t)$. Le mouvement brownien n'étant pas à variation bornée, on ne peut pas s'appuyer sur la théorie de l'intégration classique de **Riemann-Stieljes** afin de donner un sens à la quantité

$$\int_0^t H_s dB_s,$$

où H est un processus stochastique continu. C'est pour cette raison qu'on construit une nouvelle intégrale, applée l'intégrale d'**Itô**.

Ce document est structuré de trois chapitres.

**Le premier chapitre** est consacré aux rappels des résultats importants en calcul stochastique que concernant les processus stochastiques ( processsus adapté et progressivement mesurable, processus à variation finie , martingale locales continues). On donnerons les définitions : d'un espace probabilisé filtré, filtration, et temps d'arrêt. Ainsi que celle la fonction convexe et la formule de **Taylor**. On aborderons enfin la notion d'intégrale de **Riemann-Stieltjes**.

Dans **le deuxième chapitre** nous introduisons l'intégrale stochastique et la formule d'**Itô**. Nous commençons par l'intégrale stochastique par rapport à une martingale locale et par rapport à une semimartingale, puis on donnerons les propriétés de l'intégrale stochastique. On citerons ensuite l'un des théorèmes les plus importants en calcul stochastique "théorème d'**Itô**" avec la démonstration. On finirons ce chapitre par la formule d'intégration par parties.

**Le dernier chapitre,** nous intéressons par quelques applications de la formule d'**Itô**, nous commençons par le théorème de l'exponentielle de Doléans, on donnerons ensuite trois théorèmes ; Théorème de représentation des martingales, théorème de **Girsanov**, et le théorème de **Burkholder** et nous terminerons ce chapitre par la formule de **Tanaka**.

# Chapitre 1

# Notion de base

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats de calcul stochastique utilisés le long de ce mémoire.

## 1.1 Espace probabilisé filtré

On appelle espace probabilisé filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, \mathbb{P}\right)$ tout espace Probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$. La tribu $\mathcal{F}_t$ est appelée tribu des événements antérieurs au temps $t$.

**Définition 1** *1. Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une suite croissante (au sens large) de sous-tribus de $\mathcal{F}$ (i.e. $s < t, \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$).*

*2. Un temps d'arrêt $T$ par rapport à $(\mathcal{F}_t)$ est une v.a. $T$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que*

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in \mathbb{R}_+$$

*On définit :*

$$\mathcal{F}_t = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in \mathbb{R}_+\}$$

## 1.2 Processus stochastique

Soit $I$ un ensemble d'indice non vide. On appelle processus stochastique une famille du variable aléatoire $\{X_t, t \in I\}$ indexe par $I$. Soient $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ une filtration et $X = (X_t)_{t \in T}$ un processus sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

**Définition 2** *1. On dira que $X$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ − adapté (ou non anticipant) si $\forall t \in T$*

$$X_t \text{ est } \mathcal{F}_t \text{ mesurable.}$$

*2. Soit une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}+}$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ supposée complète pour $\mathbb{P}$ et $(A_t)_{t\in\mathbb{R}+}$ un processus adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}+}$. Le processus $A$ est à variation finie si $\mathbb{P}$-presque toutes les trajectoires $t \to A_t(w)$ sont à variation finie.*

*3. Un processus $(X_t)_{t \geqslant 0}$ est dit progressif ( ou progressivement mesurable) si pour tout $t \geqslant 0, (s, w) \to X_s(w)$ est mesurable sur $[0, t] \times \Omega$ muni de $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.*

**Définition 3 (Martingale locales continues)** *Soit $M$ un processus défini sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}+}, \mathbb{P}\right)$ à valeurs réelles, continu. On dit que $M$ est une martingale locale continue si*

i) $M_0$ est intégrable.

ii) Il existe une suite de temps d'arrêt $(T_n)_n$ telle que $T_n \to +\infty$ *p.s.* et telle que $M^{T_n}$ soit une martingale uniformément intégrable.

**Proposition 4 (Inégalité de Doob)** *Soit $(M_t)$ une martingale (par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)$) continue, de carré intégrable et telle que $M_0 = 0$ p.s. Alors*

$$\begin{aligned} a)\ \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t}|M_s|\geq\lambda\right) &\leq \frac{\mathbb{E}(|M_t|)}{\lambda},\ \forall t>0,\ \lambda>0, \\ b)\qquad \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq t}|M_s|^2\right) &\leq 4\mathbb{E}\left(|M_t|^2\right),\quad \forall t>0 \end{aligned}$$

## 1.3 Mouvement Brownien

**Définition 5** *On appelle mouvement Brownien un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ à valeurs réelles qu' est un processus à acroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues ce qui signifier que :*

1. *Continuité p.p.s. La fonction : $s \to X_s(w)$ est une fonction continue*
2. *L'indépendance des accroissements si : $s \leq t$ : $X_t - X_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s = \sigma(X_u : u \leq s)$*
3. *Stationnarité des accroissements si : $s \leq t$ $X_t - X_s$ est identique à celle de $X_{t-s} - X_0$*

**Remarque 6** *un MB est standard si*

$$X_0 = 0\ p.s, \quad \mathbb{E}(X_t) = 0 \qquad et \quad \mathbb{E}\left(X_t^2\right) = t$$

## 1.4 Fonction convexe

**Définition 7** *une fonction $f$ d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est dite convexe lorsque, pour tous $x_1$ et $x_2$ de $I$ et tout $t$ dans $[0, 1]$ on a :*

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

- $f$ une fonction de $I$ dans $E$ qui soit dérivable en $a$ jusqu' à l'ordre $n$ ( un entier naturel).

Alors pour tout $x$ dans $I$ on a

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

ou son équivalent

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$

## 1.7 La convergence presque sûre et en probabilité :

Soient $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de v.a. et $X$ une autre v.a., toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Il y a plusieurs façons de définir la convergence de la suite $(X_n)$ vers $X$, car $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction.

### 1.7.1 Convergence en probabilité

$$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} X \quad si\ \forall\varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\{w \in \Omega : |X_n(w) - X(w)| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

### 1.7.2 Convergence presque sûre

$$X_n \underset{n\to\infty}{\to} X\ p.s. \quad \text{si}\ \mathbb{P}\left(\left\{w \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)\right\}\right) = 1.$$

**Remarque 9** *La convergence p.s. implique la convergence en probabilité.*

si $H$ satisfait

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 ds\right] < \infty.$$

Si $M$ est une martingale locale continue, on note $L^2_{loc}(M)$ l'ensemble des processus $H$ progressivement mesurables tels que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{T_n} H_s^2 d < M, M >_s\right] < \infty$$

où $T_n$ est une suite de temps d'arrêt $\to +\infty$ p.s.

**Proposition 10** *Pour tout $H \in L^2_{loc}(M)$, il existe une unique martingale locale continue, nulle en 0, notée $H.M$, telle que pour toute martingale locale continue $N$,*

$$< H.M, N >= H. < M, N > .$$

**Démonstration.** On peut costruire une suite de temps d'arrêt $(T_n)_n \to +\infty$ tels que $M^{T_n} \in H^2$ et $H^{T_n} \in L^2\left(M^{T_n}\right)$. Donc, pour tout $n$, on peut définir l'intégrale stochastique,

$$X^{(n)} = H^{T_n}.M^{T_n} \in H^2.$$

Si on arrête $X^{(n+1)}$ en $T_n$, on obtient

$$\begin{aligned} \left(X^{(n+1)}\right)^{T_n} &= \left(H^{T_{n+1}}.M^{T_{n+1}}\right)^{T_n} \\ &= H^{T_{n+1}}\mathbf{1}_{[0,T_n]}.M^{T_{n+1}} \\ &= H\mathbf{1}_{[0,T_n]}.M^{T_n} \end{aligned}$$

On peut donc définir $H.M$ en posant

$$(H.M)_t = X_t^{(n)} \text{sur } [0, T_n].$$

$(H.M)_t$ est une martingale locale continue car $(H.M)^{T_n} = X^{(n)} \in H^2$.

On a clairement

$$< H.M, N >= H. < M, N >$$

puisque

$$< H.M, N >^{T_n} = (H. < M, N >)^{T_n} \quad \text{où} \quad (T_n)_n \to +\infty$$

$H.M$ l'intégrale stochatique de $H$ par rapport à $M$ est notée

$$\int_0^{\cdot} H_s dM_s$$

Un processus progressivement mesurable $H$ est dit localement borné si il existe une suite de temps d'arrêt $(T_n)_n \to +\infty$ et des constantes $C_n$ tels que

$$|H^{T_n}| \lneqq C_n.$$

Un processus $H$ adapté et continu est localement borné : il suffit de choisir les temps d'arrêt

$$T_n = \inf \{t; |H_t| \geq n\}.$$

L'intérêt de cette définition est que si $H$ est progressivement mesurable et localement borné, alors pour toute martingale locale continue $M$, on a $H \in L^2_{loc}(M)$ ∎

### 2.1.2 Intégrale stochastique par rapport à une semi-martingale continue

**Définition 11 (Semi-martingale continue)** *Un processus d'Itô est un processus $(X_t)$ pouvant se décomposer comme $(X_t = M_t + V_t)$, où :*

*i) $(M_t)$ est une martingale continue de carré intégrable (p.r. à une filtration $(\mathcal{F}_t)$),*

*ii) $(V_t)$ est un processus continu à variation bornée, adapté à $(\mathcal{F}_t)$ et tel que $V_0 = 0$.*

***Remarque 12*** *Le nom "semi-martingale" vient simplement du fait que le processus $(X_t)$ est composé pour moitié d'une martingale.*

**Définition 13** *pour $t \geq 0$, la variation quadratique du processus d'Itô $(X_t = M_t + V_t)$ est définie par*

$$< X >_t \;=\; < M >_t$$

*et pour deux processus d'Itô $(X_t = M_t + V_t)$ et $(Y_t = N_t + U_t)$, on pose*

$$< X, Y >_t = \;< M, N >_t .$$

**Définition 14** *Soit $(X_t = M_t + V_t)$ un processus d'Itô et $(H_t)$ un processus continu, adapté à $(\mathcal{F}_t)$ et tel que*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 d < X >_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s^2 d < M >_s\right) < \infty.$$

*On pose*

$$(H.X)_t = \int_0^t H_s dX_s = \int_0^t H_s dM_s + \int_0^t H_s dV_s.$$

*Remarquer qu'une intégrale stochastique par rapport à un processus d'Itô $(X_t)$ est la somme d'une intégrale stochastique "pure" et d'une intégrale de **Riemann-Stieltjes**.*

### 2.1.3 Propriétés de l'intégrale stochastique :

1. L'application $(H, X) \to H.X$ est bilinéaire.
2. Si $H$ et $K$ sont localement bornés, alors $H.(K.X) = (HK).X$.
3. Pour tout temps d'arrêt $T$, $(H.X)^T = H\mathbf{1}_{[0,T]}.X = H.X^T$.

4. Si $X$ est une martingale locale (resp. un processus à variation finie), alors $H.X$ est une martingale locale (resp. un processus à variation finie).

5. Si $H \in \varepsilon$ s'écrit $H_s(w) = \sum_{i=0}^{p-1} H^{(i)}(w) \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}$ avec $H^{(i)}$ $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable et bornée, alors

$$(H.X)_t = \sum_{i=0}^{p-1} H^{(i)} \left( X_{t\wedge t_{i+1}} - X_{t\wedge t_i} \right).$$

## 2.2 La formule d'Itô

Rappelons que dans le cadre de l'intégration au sens de Stieltjes, un des théorèmes fondamentaux de cette théorie est le suivant : étant donné $A$ un processus continu à variation bornée et une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$, on a

$$f(A_t) - f(A_0) = \int_0^t f'(A_s)\, dA_s, \qquad t \geq 0.$$

De même, si $B$ est un autre processus continu à variation bornée, la formule d'intégration par parties est vérifiée :

$$A_t B_t - A_0 B_0 = \int_0^t A_s dB_s + \int_0^t B_s dA_s, \qquad t \geq 0.$$

Evidemment, ces formules ne sont plus valables dès que l'on sort du cadre des processus à variation bornée. Cependant, en reprenant le même type de démonstration via la formule de Taylor et en contrôlant de manière adéquate le reste quadratique (qui est négligeable dans le cas précédent), on est en mesure d'obtenir la fameuse formule d'Itô, faisant donc apparaître un terme supplémentaire : la variation quadratique.

**Théorème 15** *Soit $X^1$ ,..., $X^d$ des semimartingales continues et soit $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$ . Alors pour tout $t \geq 0$,*

$$\begin{aligned} f(X_t^1, ...., X_t^d) &= f(X_0^1, ...., X_0^d) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_s^1, ..., X_s^d) dX_s^i \qquad (2.1) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(X_s^1, ..., X_s^d) d < X^i, X^j >_s \end{aligned}$$

**Démonstration.** Traitons seulement le cas $d = 1$, la généralisation au cas multidimensionnel étant immédiate (les termes faisant apparaître les crochets $< X^i, X^j >$ se traitent de la même façon que celui pour le crochet $< X, X >$ qui va suivre), et notons $X = X^1$. Considérons pour tout $t \geq 0$ une suite $0 = t_0^n < ... < t_{p_n}^n = t$ de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ de pas tendant vers 0 lorsque $n \to \infty$. Alors par la formule de **Taylor**,

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \sum_{i=1}^{p_n} (f(X_{t_i^n}) - f(X_{t_{i-1}^n})) \\ &= f(X_0) + \sum_{i=1}^{p_n} (f'(X_{t_{i-1}^n})(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}) + \frac{f_{n,i}}{2}(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2), \end{aligned}$$

où $f_{n,i}$ est une variable aléatoire satisfaisant

$$\inf_{\theta \in [0,1]} f''(X_{t_{i-1}^n} + \theta(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})) \leq f_{n,i} \leq \sup_{\theta \in [0,1]} f''(X_{t_{i-1}^n} + \theta(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})).$$

on a la convergence en probabilité suivante :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{p_n} f'(X_{t_{i-1}^n})(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}) = \int_0^t f'(X_s) dX_s.$$

Montrons alors qu'en probabilité,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{p_n} f_{n,i}(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 = \int_0^t f''(X_s) d < X, X >_s .$$

Tout d'abord, commençons par observer que pour $m < n$,

$$\sum_{i=1}^{p_n} f_{n,i}(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 = \sum_{j=1}^{p_m} \sum_{\substack{i \in \{1,....,p_n\} \\ t_{j-1}^m \leq t_{i-1}^n < t_j^m}} f_{n,i}(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2,$$

ce qui entraîne l'inégalité suivante :

$$\left| \sum_{i=1}^{p_n} f_{n,i}(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 - \sum_{j=1}^{p_m} f_{m,j} \sum_{\substack{i \in \{1,....,p_n\} \\ t_{j-1}^m \leq t_{i-1}^n < t_j^m}} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 \right| \leq Z_{m,n} \sum_{i=1}^{p_n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2,$$

où la variable aléatoire $Z_{m,n}$ est donnée par

$$Z_{m,n} = \sup_{j \in \{1,...,p_m\}} \sup_{\substack{i \in \{1,....,p_n\} \\ t_{j-1}^m \leq t_{i-1}^n < t_j^m}} |f_{n,i} - f_{m,j}|.$$

Grâce à la continuité de $f''$, on vérifie que $Z_{m,n} \to 0$ p.s. quand $n$ puis $m \to \infty$. $\sum_{i=1}^{p_n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2$ tend vers $< X, X >_t$en probabilité, il en résulte que $Z_{m,n} \sum_{i=1}^{p_n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2$ tend vers 0 en probabilité quand $n$ puis $m \to \infty$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir $m$ assez grand de sorte que pour tout $n > m$,

$$\mathbb{P}\left( Z_{m,n} \sum_{i=1}^{p_n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 > \varepsilon/3 \right) < \varepsilon/3$$

Ensuite, pour cette valeur fixée de $m$, la convergence suivante en probabilité est vérifiée :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{p_m} f_{m,j} \sum_{\substack{i\in\{1,....,p_n\}\\ t_{j-1}^m \le t_{i-1}^n < t_j^m}} (X_{t_i^n}-X_{t_{i-1}^n})^2 = \sum_{j=1}^{p_m} f_{m,j}\left(<X,X>_{t_j^m} - <X,X>_{t_{j-1}^m}\right)$$

$$= \int_0^t h_m(s)\, d<X,X>_s$$

où $h_m(s) = \sum_{j=1}^{p_m} f_{m,j}\mathbf{1}_{[t_{j-1}^m, t_j^m]}(s)$, qui tend clairement vers $f''(X_s)$ $p.s.$ lorsque $m\to\infty$.

Ainsi, quitte à prendre $m$ encore plus grand, on peut supposer que

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_0^t h_m(s)\, d<X,X>_s - \int_0^t f''(X_s)\, d<X,X>_s\right| > \varepsilon/3\right) < \varepsilon/3.$$

Enfin, en combinant ce qui précède, on obtient pour $n>m$ assez grand,

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{p_n} f_{n,i}(X_{t_i^n}-X_{t_{i-1}^n})^2 - \int_0^t f''(X_s)\, d<X,X>_s\right| > \varepsilon\right) < \varepsilon,$$

d'où la convergence en probabilité désirée. Enfin, on achève la démonstration de la formule d'Itô de la manière suivante. La convergence en probabilité entraînant la convergence p.s. d'une sous-suite, (2.1) est vérifiée en tant qu'égalité p.s. pour chaque $t\ge 0$ fixé, puis pour tout $t\in[0,\infty[\cap\mathbb{Q}, p.s.$, et enfin, les deux membres de l'égalité étant continus, pour tout $t\ge 0$ p.s., ce qui termine la preuve.

Si $M$ est une martingale locale, alors pour toute fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $C^2$,

$$f(M_t) = f(M_0) + \underbrace{\int_0^t f'(M_s)dM_s}_{martingale\ locale} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^t f''(M_s)\, d<M,M>_s}_{continue\ \grave{a}\ variation\ born\acute{e}e},\ t\ge 0.$$

En particulier, si $f'(M)\in\mathcal{H}^2(M)$, alors la martingale locale est une vraie martingale. Par exemple, la formule d'Itô appliquée à la fonction $f(x)=x^2$ entraîne que

$$M_t^2 - <M,M>_t = M_0^2 + 2\int_0^t M_s dM_s,\ t\ge 0.$$

Ainsi, non seulement on retrouve le fait que la processus $M^2- < M, M >$ est une martingale, mais de plus on donne sa valeur sous forme d'intégrale stochastique. Une autre application intéressante de la formule d'Itô est la formule d'intégration par parties, généralisant celle vue ci-dessus dans le cadre des processus à variation bornée. ∎

**Corollaire 16** *Si $X$ et $Y$ sont deux semimartingales continues, alors*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t X_s dY_s + < X, Y >_t, \ t \geq 0.$$

A présent, regardons plus en détail le cas brownien. En appliquant la formule d'Itô bidimensionnelle au mouvement brownien $B$ ainsi qu'à la semimartingale déterministe $X_t = t$, on obtient pour toute fonction $f : (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to f(t, x) \in \mathbb{R}$ de classe $C^2$ en $x$ et $C^1$ en $t$,

$$f(t, B_t) = f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)\, dB_s + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\right)(s, B_s)\, ds, \ t \geq 0.$$

En effet, vu que $B$ est une martingale et $X$ un processus continu à variation bornée, la définition du crochet entraîne pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} < B, X >_t &= \frac{1}{2}(< B+X, B+X >_t - < B, B >_t - < X, X >_t) \\ &= \frac{1}{2}(< B, B >_t - < B, B >_t - 0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

et en reprenant la démonstration de la formule d'Itô dans ce cadre"dégénéré", il suffit de prendre $f$ seulement $C^1$ en $t$. On remarque alors que le processus $f(B, X)$ est une martingale locale si et seulement si l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$$

est satisfaite. Ceci se généralise à la dimension supérieure. On appelle mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ un vecteur d-dimensionnel $\tilde{B} = \left(B^1, ..., B^d\right)$ de mouvements browniens indépendants et tel que $\tilde{B}$ soit adapté et à accroissements indépendants pour cette filtration. Remarquons que lorsque $i \neq j$, on a pour tout $t \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
< B^i, B^j >_t &= \frac{1}{2}\left(< B^i + B^j, B^i + B^j >_t - < B^i, B^i >_t - < B^j, B^j >_t\right) \\
&= \frac{1}{2}(2t - t - t) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

car la somme de deux mouvements browniens indépendants est "presque" un mouvement brownien (processus gaussien continu centré mais de fonction de covariance $K(s,t) = 2s \wedge t$). Ainsi, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^d$ et $C^1$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$
f\left(t, \tilde{B}_t\right) = f(0,0) + \int_0^t < \Delta f\left(s, \tilde{B}_s\right), d\tilde{B}_s > + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta f\right)\left(s, \tilde{B}_s\right) ds, \ t \geq 0,
$$

où l'on a utilisé la notation vectorielle. De même que précédemment, $f\left(\tilde{B}, X\right)$ est une martingale locale si et seulement si l'EDP suivante est vérifiée :

$$
\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta f = 0,
$$

propriété illustrant le lien étroit entre la théorie des probabilités et les EDP.

**Proposition 17** *On a les égalités suivantes :*

$$
\mathbb{E}((H.B)_T) = 0 \quad et \quad \mathbb{E}\left((H.B)_T^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right).
$$

*La seconde égalité ci-dessus est appelée* ***<u>l'isométrie</u> d'Itô.***

# Chapitre 3

# Application de la formule d'Itô

La formule d'Itô a eu de nombreuses applications, on en présente quelques unes ici.

## 3.1 Sur le Brownien multidimensionnel

Soit $B$ le Brownien dans $\mathbb{R}^d$ partant de 0 et $W_t = B_t + x_0$, le mouvement brownien partant de $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Pour tout temps d'arrêt , $\tau$, par Itô, si $U$ est un ouvert tel que $W_{t\wedge\tau} \in U$ pour tout $t \geq 0$, pour tout fonction $C^2(U)$

$$f(W_{t\wedge\tau}) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^{t\wedge\tau} \frac{\partial f}{\partial x_i}(W_s)\, dW_s^i + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau} \Delta f(W_s)\, ds$$

où $\Delta$ est le laplacien $\Delta f = \sum\limits_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. Considérons pour $U = \mathbb{R}^d - \{0\}$ la fonction $f : U \to \mathbb{R}$ égale à :

$$f(x) = \log \|x\|, \text{ si } d = 2 \text{ et } f(x) = \frac{1}{\|x\|^{d-2}}, \text{ si } d \geq 3$$

En dehors de 0, $\Delta f = 0$ (on dit que $f$ est harmonique).

## 3.2 Exponentielle de Doléans d'une martingale locale continue

On définit maintenant l'exponentielle stochastique $\varepsilon(X)$ d'une martingale locale $X$ quelconque. La formule d'Itô justifie qu'il s'agit d'une martingale locale et explique la terminologie, on dit qu'un processus à valeurs dans $\mathbb{C}$ est une martingale locale si ses parties réelle et imaginaire en sont.

**Théorème 18** *Soit $X$ une martingale locale continue, $\lambda$ un nombre complexe, alors l'équation suivante ( en $Z$ )*

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s \, d(\lambda X_s) \tag{3.1}$$

*admet une unique solution qui est la martingale locale continue :*

$$Z_t = \exp\left[\lambda(X_t - X_0) - \frac{\lambda^2}{2} < X, \ X >_t\right].$$

*Le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ est appelée exponentielle de* **Doléans** *de $\lambda X$ et notée*

$$Z = \varepsilon(\lambda X).$$

**Démonstration.** a) Existence : *On suppose que* $X_0 = 0$. On applique la formule d' Itô avec la fonction $F(X) = e^x$ et $Y_s = \lambda X_s - \frac{\lambda^2}{2} < X, X >_s$

$$F(Y_t) = F(Y_0) + \int_0^t e^{Y_s} dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t e^{Y_s} d < Y, Y >_s$$

soit encore

$$e^{\lambda X_t - \frac{\lambda^2}{2} <X, \ X>_t} = 1 + \int_0^t e^{\lambda X_s - \frac{\lambda^2}{2} <X, \ X>_s} \, d(\lambda X_s)$$

en remarquant que

$$< Y,\ Y >_t = \ < \lambda X,\ \lambda X >_t = \lambda^2 < X,\ X >_t .$$

b) *Unicité :* Soit $Y$ une autre solution de (3.1). On applique la formule de Itô avec la fonction $F(u,v) = \frac{u}{v}$ et $u = Y_s$, $v = \varepsilon(\lambda X)$

$$\begin{aligned} \frac{Y_t}{\varepsilon(\lambda X)_t} &= 1 + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon(\lambda X)_s} dY_s - \int_0^t \frac{Y_s}{(\varepsilon(\lambda X)_s)^2} d\varepsilon(\lambda X)_s \\ &- \int_0^t \frac{1}{(\varepsilon(\lambda X)_s)^2} d < Y,\ \varepsilon(\lambda X) >_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{2Y_s}{(\varepsilon(\lambda X)_s)^3} d < \varepsilon(\lambda X), \varepsilon(\lambda X) >_s \end{aligned}$$

Comme $Y$ et $\varepsilon(\lambda X)$ sont solutions de (3.1), on en déduit que $d\varepsilon(\lambda X) = \varepsilon(\lambda X)\, d(\lambda X)$ et $dY_s = Y_s d(\lambda X_s)$.

$$< Y,\ \varepsilon(\lambda X) >_s = \ < \int Y d(\lambda X), \int \varepsilon(\lambda X)\, d(\lambda X) > \ = (Y\varepsilon(\lambda X)) . < \lambda X,\ \lambda X >$$

donc

$$d \ < \ Y, \varepsilon(\lambda X) >_s = Y\varepsilon(\lambda X)\, d < \lambda X,\ \lambda X > .$$

$$d \ < \ \varepsilon(\lambda X),\ \varepsilon(\lambda X) >_s = \varepsilon(\lambda X)_s^2\, d < \lambda X,\ \lambda X >_s$$

On en déduit après quelques calculs que $Y_t = \varepsilon(\lambda X)_t$ pour tout $t$ ∎

## 3.3 Théorème de représentation des martingales

**Théorème 19** *Si $M_t$ est une $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \le s \le t)$ -martingale locale (sous entendu continue), il existe un processus $K \in L^{(0)}(B)$ tel que*

$$M_t = M_0 + \int_0^t K_s dB_s.$$

**Démonstration.** On peut supposer que $M_0 = 0$. Soit $\tau_n = \inf\{t \geq 0; |M_t| \geq n\}$. Puisque $M_T^{\tau_n}$ est borné, il existe par le théorème précédent un unique processus $K^n \in L_T^2(B)$ tel que

$$M_T^{\tau_n} = \int_0^T K_s^n dB_s$$

Alors, pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$M_t^{\tau_n} = \mathbb{E}\left(M_T^{\tau_n} \backslash \mathcal{F}_t\right) = \int_0^t K_s^n dB_s$$

Si $m \geq n$

$$M_t^{\tau_m} = \int_0^t K_s^m dB_s$$

donc puisque $\tau_n \leq \tau_m$,

$$M_t^{\tau_n} = \int_0^{t\wedge\tau_n} K_s^m dB_s = \int_0^t K_s^m \mathbf{1}_{\{s\leq\tau_n\}} dB_s$$

Par unicité

$$K_s^m \mathbf{1}_{\{s\leq\tau_n\}} = K_s^n$$

On peut donc poser sans ambiguité, pour $s \leq \tau_n$

$$K_s = K_s^n$$

Alors on aura, pour tout $n$

$$M_t^{\tau_n} = \int_0^t K_s dB_s$$

donc, puisque $\tau_n \to +\infty$

$$M_t^{\tau_n} = \int_0^t K_s dB_s$$

■

## 3.4 Théorème de Girsanov

Soit $(\Omega, \ \mathcal{F}, \ (\mathcal{F}_t)_t, \ \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. Le but de ce paragraphe est d'étudier comment se transforme la notion de martingale locale lorsque la probabilité $\mathbb{P}$ est remplacée par une probabilité $\mathbb{Q}$ absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$. Nous commençons par rappeler le théorème d'existence de la densité de **Radon – Nikodym**.

**Théorème 20** *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \ (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. Soit $\mathbb{Q}$ une mesure absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ : $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$ (i.e. pour tout $A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0)$. Alors, il existe une variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable, positive telle que pour tout $A \in \mathcal{F}$,*

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A Z \ d\mathbb{P}.$$

*Alors,*

$$Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$$

*est appelée la densité de* **Randon – Nikodym**.

On pose, pour tout $t \geq 0$,

$$Z_t = \mathbb{E}(Z \backslash \mathcal{F}_t).$$

Alors, $(Z_t)_t$ est une martingale continue à droite uniformément intégrable.

Soit $T$ un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$. On pose $\mathbb{Q}_T = \mathbb{Q}_{|\mathcal{F}_T}$, $\mathbb{P}_T = \mathbb{P}_{|\mathcal{F}_T}$ les mesures $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{P}$ restreintes à la tribu $\mathcal{F}_T$ des événements antérieurs à $T$. Alors, on montre facilement que

$$Z_T = \frac{d\mathbb{Q}_T}{d\mathbb{P}_T}.$$

**Lemme 21** *$(Z_t)_t$ est $\mathbb{Q}$-p.s. strictement positive. On suppose que $t \to Z_t$ est continue.*

**Lemme 22** *Soit $X$ continu, adapté. Si le processus $XZ$ est une $\mathbb{P}$-martingale locale, alors $X$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale.*

**Théorème 23 (Girsanov)** *Soit $Q$ une mesure absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_\infty$. On suppose que $(Z_t)_t$ est continue. Alors,*

*i) chaque $\mathbb{P}-$semi-martingale est $\mathbb{Q}-$semi-martingale.*

*ii) si $M$ est une $\mathbb{P}-$martingale locale continue et si*

$$M' = M - \frac{1}{Z} < M,\ Z >,$$

*alors $M'$ est bien définie sur $(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{Q})$ et $\left(M_t'\right)_t$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale. De plus,*

$$< M',\ M' > \ = \ < M,\ M >,\ \mathbb{Q} - p.s.$$

**Démonstration.** Supposons que $ii)$ soit prouvée. Si $X$ est une $\mathbb{P}-$semi-martingale s'écrivant $X = M + A$ (pour $\mathbb{P}$), alors

$$X = M' + \frac{1}{Z} < \ M,\ Z \ > + A$$

est une $\mathbb{Q}-$semi-martingale.

On montre maintenant $ii)$. Tout d'abord, $M'$ est bien définie (pour $\mathbb{Q}$) car $\frac{1}{Z}$ est $\mathbb{Q}$-localement borné (d'après le lemme 21). Montrons que $M'Z$ est une $\mathbb{P}$-martingale locale. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} M_t'Z_t &= M_0'Z_0 + \int_0^t M_s'dZ_s + \int_0^t Z_s dM_s' + \ < M', Z >_t \\ &= M_0'Z_0 + \int_0^t M_s'dZ_s + \int_0^t Z_s dM_s. \end{aligned}$$

On utilise (le lemme 22) pour conclure. ■

**Corollaire 24** *Soit* $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *un* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$*-mouvement Brownien standard sur* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+},\ \mathbb{P})$ *Pour tout* $t\in\mathbb{R}^+$, *on définit*

$$\tilde{B}_t = B_t - \frac{1}{Z} < B,\ Z >_t .$$

*Alors,* $(\tilde{B}_t)_{\ t\in\mathbb{R}^+}$ *est un mouvement Brownien sur* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)_t,\ \mathbb{Q})$.

**Corollaire 25** *Soit* $L$ *une martingale locale continue sur* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)_t,\ \mathbb{P})$ *telle que* $L_0 = 0$. *On suppose que*

$$\mathbb{E}\left[\exp(\frac{1}{2} < L,\ L >_\infty)\right] < \infty.$$

*Alors,*

*i)* $\mathcal{E}(L)$ *est une martingale uniformément intégrable.*

*ii) si on définit* $\tilde{B}_t = B_t - < L,\ B >_t$, *alors* $(\tilde{B}_t)_t$ *est un* $\mathbb{Q}$*-mouvement Brownien si* $(B_t)_t$ *est un* $\mathbb{P}$*-mouvement Brownien.*

## 3.5 Inégalité de Burkholder

**Théorème 26** *Soit* $M$ *une martingale continue telle que*

$$\mathbb{E}(< M,\ M >_T^{p/2}) < \infty$$

*où* $T > 0$ *est fixé,* $M_0 = 0$ *et* $p \geq 2$. *Alors,*

*i) il existe une constante* $C_p^{'}$ *(ne dépendant pas de* $M$*) telle que*

$$\forall t \leq T, \mathbb{E}\left(|M_t|^p\right) \leq C_P^{'}\mathbb{E}\left(< M,\ M >_t^{\frac{p}{2}}\right)$$

*ii) il existe une constante $C_p$ (ne dépendant pas de $M$) telle que*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}|M_t|^p\right) \leq C_p\mathbb{E}\left(< M,\ M >_T^{p/2}\right).$$

**Démonstration.** On suppose tout d'abord $M$ bornée. On applique la formule de *Itô* avec $F(x) = |x|^p$, $p \geq 2$ et $x = M$.

$$|M_t|^p = p\int_0^t |M_s|^{p-1}\, sgn(M_s)\, dM_s + \frac{p(p-1)}{2}\int_0^t |M_s|^{p-2}\, d < M, M >_s$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|M_t|^p) &= \frac{p(p-1)}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^t |M_s|^{p-2}\, d < M, M >_s\right] \\
&\leq \frac{P(P-1)}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}|M_s|^{p-2} < M, M >_t\right] \\
&\leq \frac{p(p-1)}{2}\left(\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}|M_s|^p\right]\right)^{(p-2)/p}\left(\mathbb{E}\left[< M, M >_t^{p/2}\right]\right)^{2/p}
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de *Hölder*.

Donc,

$$\mathbb{E}(|M_t|^p)^p \leq \left(\frac{p(p-1)}{2}\right)^p\left(\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}|M_s|^p\right]\right)^{p-2}\left(\mathbb{E}\left[< M,\ M >_t^{p/2}\right]\right)^2$$

D'après l'inégalité de Doob,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}|M_s|^p\right] \leq q^p\mathbb{E}(|M_t|^p)$$

pour $q$ tel que $1/p + 1/q = 1$.

Donc,

$$\mathbb{E}(|M_t|^p)^p \leq (\frac{p(p-1)}{2}q^{p-2})^p\mathbb{E}(|M_t|^p)^{p-2}\left(\mathbb{E}\left[< M, M >_t^{p/2}\right]\right)^2$$

soit encore

$$\mathbb{E}(|M_t|^p) \leq \left(\frac{p(p-1)}{2}q^{p-2}\right)^{p/2}\left(\mathbb{E}\left[< M, M >_t^{p/2}\right]\right).$$

L'extension de la formule à toute martingale continue s'obtient en considérant les temps d'arrêt

$$T_n = \inf \{t; |M_t| \geq n\}.$$

■

## 3.6 Formule de Tanaka

**Théorème 27 (Formule de Tanaka)** *Soit $X$ une semimartingale continue. Il existe $(L_t^a)_{t\geq 0}$, $a \in \mathbb{R}$, processus croissant continu, appelé temps local en $a$ de la semimartingale $X$, tel que*

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t 1_{\{X_s > a\}} dX_s + \tfrac{1}{2} L_t^a$$

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t 1_{\{X_s \leq a\}} dX_s + \tfrac{1}{2} L_t^a$$

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t sgn\,(X_s - a)\, dX_s + L_t^a$$

*où $sgn\,(x) = -1, 1$ selon que $x \leq 0$, $x > 0$. De plus, la mesure (de Stieltjes) $dL_t^a$ associée à $L_t^a$ est portée par $\{t \in \mathbb{R} : X_t = a\}$.*

**Démonstration.** On considère d'abord $\varphi$ une fonction convexe continue. Bien que $\varphi$ ne soit pas $C^2$, on tente d'écrire une « *formule d'Itô* » pour $\varphi(X_t)$.

Soit $j$ une fonction positive de classe $C^\infty$ à support compact inclus dans $]-\infty,\ 0]$ telle que $\int_{-\infty}^0 j(y)\, dy = 1$. On pose $\varphi_n(x) = n \int_{-\infty}^0 \varphi(x+y)\, j(ny)\, dy$. Comme $\varphi$ convexe est localement bornée, $\varphi_n$ est bien définie. De plus, $\varphi_n$ est $C^\infty$ et converge simplement vers $\varphi$ et $\varphi_n'$ croît vers $\varphi_-'$, dérivée à gauche de $\varphi$.

En appliquant la formule d'Itô à la fonction $\varphi_n$ de classe $C^2$, on a pour chaque $n \geq 1$ :

$$\varphi_n(X_t) = \varphi_n(X_0) + \int_0^t \varphi_n'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} A_t^{\varphi_n} \qquad (3.2)$$

où

$$A_t^{\varphi_n} = \int_0^t \varphi_n^{''}(X_s)\, d < X,\ X >_s .$$

On a $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(X_t) = \varphi(X_t)$ et $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(X_0) = \varphi(X_0)$. En arrêtant $X$, on peut supposer que $X$ et $\varphi_n^{'}(X_s)$ sont bornées (uniformément en $n$ car $\varphi_1^{'} \leq \varphi_n^{'} \leq \varphi_-^{'}$). Par le Théorème ( convergence dominée pour l' intégrale stochastique), on a

$$\int_0^t \varphi_n^{'}(X_s)\, dX_s \xrightarrow{p} \int_0^t \varphi_-^{'}(X_s)\, dX_s$$

uniformément sur les compacts.

Par conséquent, $A^{\varphi_n}$ converge vers un processus $A^{\varphi}$ croissant car limite de processus croissants. En passant à la limite dans (3.2), il vient

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \int_0^t \varphi_-^{'}(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} A_t^{\varphi} \tag{3.3}$$

puis le processus $A^{\varphi}$ peut être choisi continu (car différence de processsus continus).

On applique (3.3) à $\varphi(x) = (x-a)^+$ fonction convexe de dérivée à gauche $\varphi_-^{'} = 1_{]a,\ +\infty[}$ :

il existe un processus croissant $A^+$tel que

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > a\}} dX_s + \frac{1}{2} A_t^+ \tag{3.4}$$

De la même façon avec $\varphi(x) = (x-a)^-$ fonction convexe de dérivée à gauche $\varphi_-^{'} = -\mathbf{1}_{]-\infty,\ a]}$ : il existe un processus croissant $A^-$ tel que :

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s \leq a\}} dX_s + \frac{1}{2} A_t^- \tag{3.5}$$

par différence de (3.4) et (3.5), comme $x = x^+ - x^-$, on a

$$X_t = X_0 + \int_0^t dX_s + \frac{1}{2}\left(A_t^+ - A_t^-\right). \tag{3.6}$$

il vient $A^+ = A^-$ et on pose alors $L_t^a = A_t^+$. En sommant (3.4) et (3.5), comme $|x| = x^+ + x^-$, on a

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t sgn(X_s - a)dX_s + L_t^a.$$

pour la dernière partie, en appliquant la formule d'Itô à la semimartingale $|X_t - a|$ avec $f(x) = x^2$, on a en utilisant aussi (3.6)

$$\begin{aligned} |X_t - a|^2 &= |X_0 - a|^2 + 2\int_0^t |X_s - a|\, d(|X_s - a|)_s + \ <|X - a|, |X - a|>_t \\ &= (X_0 - a)^2 + 2\int_0^t |X_s - a|\, sign\,(X_s - a)\, dX_s + 2\int_0^t |X_s - a|\, dL_s^a + \ <X, X>_t . \end{aligned}$$

En comparant avec la formule d'Itô pour $X$ avec $f(x) = (x - a)^2$,

$$(X_t - a)^2 = (X_0 - a)^2 + 2\int_0^t (X_s - a)\, dX_s + \ <X, X>_t$$

il vient $\int_0^t |X_s - a|\, dL_s^a = 0$ $p.s.$, ce qui est la résultat. ∎

**Remarque 28 (Formule d'Itô-Tanaka)** *Lorsque $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, on peut préciser* (3.2) : *on montre que*

$$A_t^\varphi = 2\int_{-\infty}^{+\infty} L_t^a \varphi''(da)$$

*où $\varphi''(da)$ est la mesure associée à $\varphi''$ à comprendre dans le sens des distributions. On a alors la formule d'Itô − Tanaka pour $\varphi$ convexe :*

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \int_0^t \varphi'_-(X_s)\, dX_s + \int_{-\infty}^{+\infty} L_t^a \varphi''(da) \tag{3.7}$$

*La formule (3.7) se généralise immédiatement à une combinaison linéaire de fonctions convexe*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varphi_i.$$

*Dans ce cas, $\varphi''$ devient une mesure signée.*

# Bibliographie

[1] Nadine Guillotin-Plantard. Introduction au calcul stochastique *Ecole Normale Supérieure de Paris*, 2009.

[2] Aldéric Joulin. Calcul stochastique. *Ecole Normale Supérieure de Paris*, 2011.

[3] Philippe Bougerol. Calcul stochastique des martingales continues. *Ecole Normale Supérieure de Paris*, 2014.

[4] Jean-Christophe Breton. Calcul stochastique. *Ecole Normale Supérieure de Paris*, 2014.

[5] Olivier Lévêque, EPFL. Cours de probabilités et calcul stochastique. *Ecole Normale Supérieure de Paris*, 2005.