République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Probabiités et Applications**

Par :

M^me Betéhi Besma et M^elle Khalfallah Hayette

Intitulé

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES DIRIGÉES PAR UN MBF ET LEURS APPLICATIONS EN FINANCE

Dirigé par : Mr. Kerboua Mourad

Devant le jury

PRESIDENT	Mme. Rebai Ghania	MAB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Mr. Kerboua Mourad	MAA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Mr. Benchaabane Abbes	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2015

Remerciement

Nous remercions d'abord le bon dieu, pour le courage qu'il nous ' a donné pour surmonter toutes les difficultés durant nos années d'étude.

Nous remercions nos parents pour leurs contributions, leurs contributions, leurs soutiens et leurs patiences.

Nous faillirons à la tradition si nous n'exprimons pas ici notre, gratitude envers tous ceux qui ont collaborés de prés ou de loin à l'exécution de ce mémoire :

Nous remercions très vivement notre encadreur :

Mourad Karboua

Pour nos avoir conseillés, guidés et dirigés notre travail qu'elle retrouve ici l'expression et notre profonde gratitude pour votre aide précieuse, assistance et claire lors de l'élaboration de ce travail.

*Nous exprimons également nos chaleureux remerciements au **Mr A. Ben chaabane** et **Mme.Rebai Ghania** au ,pour l'honneur qu'ils nous ont fait d'avoir accepté de faire partie de ce jury.*

Nous adressons également nos remerciements, à tous nos enseignants

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles jouent un rôle trés important dans les applications des mathématiques aux sciences physiques et de l'ingénieur. Cependant, les équations différentielles qui gouvernent les processus réels contiennent souvent certains éléments, par exemple les coefficients ou la partie non homogène, qui caractérisent le futur du phénomène étudié et qui sont déterminés expérimentalement. A cause des erreurs dans les mesures et le hasard propre aux phénomènes, ces éléments ne peuvent être dans la plupart des cas exprimés par une fonction bien déterminée $f(t)$ qui doit être remplacée par une fonction aléatoire $f(t, \omega)$, où ω est interprété comme un évènement élémentaire lié au hasard. Les équations qu'on obtient par l'introduction du hasard dans les coefficients sont appelées des équations différentielles stochastiques (EDS).

Les travaux de **Hurst (1880-1978)** sur le niveau du Nil ont mis en evidence un phénomène non stationnaire.

Hurst introduit la notion de dépendance à long terme et développe des technique de caractérisation. **Mandelbrot** et ses travaux en finance met, lui aussi, en évidence la dépendance à long terme. Il propose en **1968** un modèle Gaussien à accroissements à dépendance à long terme : le *mouvement b rownien fractionnaire* (déja défini dans les années **40** par **Kolmogorov**), et donna les principales propriétés. Dès lors, de plus en plus de domaines, désireux de s'affranchir de la propriété de Markov et de l'indépendance des accroissements développent des modèles browniens fractionnaires. Les trajectoires du mouvement brownien fractionnaire présentent aussi beaucoup d'intérêt en imagerie de synthèse et en imagerie médicale par leur caractère auto-similaire.

Le but de notre travail porte deux aspects :

- En premier aspect nous nous s'intéressons à l'équation différentielle stochastique de la forme :

$$dX_t = b(t, X_t)\, dt + dB_t^H \qquad (*)$$

où b est une fonction donnée et B^H est une mouvement brownien fractionnaire caractérisé par $B_t^H = \int_0^t K_H(t, \tau)\, dW_\tau$.

Dans le cas où le paramètre de Hurst H est égale à $\frac{1}{2}$, B^H est une mouvement brownien et si $H \neq \frac{1}{2}$, le processus B^H n'est pas une semi-martingale et nous ne pouvons pas appliquer le calcul stochastique de Itô par rapport à B^H. Nous présentons le calcul stochastique par rapport au brownien fractionnaire B^H et nous donnons quelques théorèmes d'existence et d'unicité d'une solution faible pour l'équation (*) inspirés des travaux de **D. Nualart** [9, 10, 11, 12, 13] et de ses collaborateurs.

- En deuxième aspect nous nous citons les applications du mouvement brownien fractionnaire en finance, notamment les travaux de **Stephan Rostek** [18] qui donne une formule fermée pour les options, de type européen, d'achat et de vente en marché fractionnaire (Modèle Black & Schole fractionnaire)

Notre mémoire est composé de quatre chapitres :

Dans **le chapitre 1**, nous rappellons les notions de base du calcul stochastique. Ensuite nous étudions les principales propriétés du mouvement brownien fractionnaire.

Dans **le chapitre 2**, nous présentons les différents méthodes utilisées pour construire le calcul stochastique par rapport à un MBF B^H qui se porte sur le calcul fractionnaire, le calcul de Malliavin, l'intégrale stochastique par rapport au MBF et la version fractionnaire du formule de Itô.

Dans **le chapitre 3**, nous énonçons le théorème d'existence et d'unicité pour la solution faible de l'EDS (*), et nous nous étudions les conditions suffisantes pour lesquelles la solution de (*) existe et est unique.

Dans **le chapitre 4**, nous citons des applications des EDS fractionnaires en finance. Nous nous pouvons également évoquer les travaux de **Stephan Rostek** [18] qui a établi une généralisation de la célèbre formule de Black & Scholes en cas d'un marché fractionnaire.

Chapitre 1

Mouvement Brownien Fractionnaire

Ce premier chapitre recense, après avoir défini, les propriétés de base du Mouvement Brownien Fractionnaire : propriétés des trajectoires (auto-similarité, continuité, nondifférentiabilité,...), propriétés plus fondamentales du point de vue probabiliste (propriétés des accroissements, absence de propriété de Markov, de martingales)

1.1 Rappel sur le Calcul Stochastique

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité complet.

1.1.1 Généralités sur les processus stochastiques

1. Soit T un ensemble, on appelle processus stochastique indexé par T est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ une famille $(X_t)_{t\in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$: pourtout $t \in T$, X_t est une variable aléatoire.
2. Soient X et Y deux processus, X est une modification (version) de Y si, pour tout $t \geq 0$, les variables aléatoires X_t et Y_t sont égales $\mathbb{P}-p.s.$: $\forall t \geq 0,\ \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$. X et Y sont indistinguables si, $\mathbb{P}-p.s.$, les trajectoires de X et de Y sont les mêmes c'est à dire $\mathbb{P}(X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0) = 1$.

3. La filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ de $(\Omega, \mathcal{F})$ est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$ i.e. pour $s \leq t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.
4. On dit qu'une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est continue à droite si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^-}$ pour tout t, où $\mathcal{F}_{t^-} = \cap_{\epsilon>0}\mathcal{F}_{t+\epsilon}$.
5. Un processus X est adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si, pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable.

1.1.2 Processus Gaussien

1. **Variable Gaussienne** : Une variable Gaussienne de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si elle a pour densité
$$\mathcal{N}(m, \sigma^2)\,(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}$$
2. **Vecteur Gaussien** : Un vecteur $X = (X_1, X_2, ..., X_n)^T$ est Gaussien si toute combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$ est une variable Gaussienne à valeurs réelles.
On caractérise la loi de X par son vecteur espérance est sa matrice de covariance :
$$\Gamma = [\sigma_{i,j}]_{i=1,n}^{j=1,n}$$
où $\sigma_{i,j} = \mathbb{E}(X_iX_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)$. La loi de X admet une densité si la matrice est inversible.
3. Un processus X est Gaussien si toute combinaison linéaire finie de $(X_t)_{t\geq 0}$ est une variable aléatoire Gaussienne, i.e.
$$\forall n,\ \forall t_i,\ 1 \leq i \leq n,\ \forall a_i,\ \sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i} \quad \text{est une v.a.r. Gaussienne.}$$

1.2 Définition et Existence

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

1.2.1 Définition du Mouvement Brownien Fractionnaire

Définition 1.2.1 *Un mouvement brownien fractionnaire de paramètre $H \in (0, 1)$ est un processus gaussien réel centré noté $\left(B_t^H\right)_{t\in\mathbb{R}}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et vérifiant :*

(*i*) $B_0^H = 0, \quad \mathbb{P}-p.s.$

(*ii*) $\mathbb{E}\left[\left(B_t^H\right)^2\right] = |t|^{2H}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$

(*iii*) B^H *a des accroissements stationnaires.*

REMARQUE 1.2.1 *Le processus $B^{\frac{1}{2}}$ est un mouvement brownien standard.*

DÉFINITION 1.2.2 *Le paramètre H est appelé le paramètre de Hurst.*

PROPOSITION 1.2.1 *Le mouvement brownien fractionnaire admet la fonction R_H de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$R_H(t,s) = Cov\left(B_t^H, B_s^H\right) = \frac{1}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H})$$

comme fonction de covariance.

Démonstration

On a :

$$\mathbb{E}\left[\left(B_t^H - B_s^H\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(B_t^H\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(B_s^H\right)^2\right] - 2\mathbb{E}\left[B_t^H B_s^H\right]$$

Et comme

$$B_t^H - B_s^H \stackrel{\mathcal{L}}{=} B_{t-s}^H$$

Finalement on a :

$$\mathbb{E}\left[B_t^H B_s^H\right] = \frac{1}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

1.2.2 Existence du Mouvement Brownien Fractionnaire

DÉFINITION 1.2.3 *Une fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est dite semi-définie positive si pour tout : $(s_1, s_2, ..., s_m) \in \mathbb{R}^m$ et tout $(u_1, u_2, ..., u_m) \in \mathbb{R}^m$ on a :*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \varphi\left(s_i, s_j\right) u_i u_j \geq 0 \tag{1.1}$$

(Pour les détails concernant le théorème suivant, on renvoit le lecteur à l'ouvrage : **A. Shiryayev** [20]).

THÉORÈME 1.2.1 – *Soit $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ symétrique et semi-définie positive, alors il existe un processus gaussien réel unique à une équivalence près de moyenne m et de fonction de covariance φ.*

- *Deux processus gaussiens réels de même moyenne et de même fonction de covariance sont équivalents.*
- *Deux processus gaussiens réels de même moyenne et de même fonction de covariance à trajectoire $\mathbb{P}-p.s$ continue à droite sont indistingables.*

PROPOSITION 1.2.2 *La fonction R_H est symétrique, semi-définie positive et continue.*

Démonstration :

La continuité et la symétrie sont immédiates à démontrer.

Soient $(s_1, s_2, ..., s_m) \in \mathbb{R}^m$ et $(u_1, u_2, ..., u_m) \in \mathbb{R}^m$. Il síagit de montrer (1.1). Pour cela on utilisera le fait que la fonction $s \to \varphi(s) = \exp(-c\,|s|^{2H})$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire S gaussien. De ce fait $\varphi(s-t)$ est une fonction semi-définie positive qui signifie que :

$$\forall (u_i, u_j, s_i, s_j) \in \mathbb{R}^4, \ \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} \varphi\left(s_i - s_j\right) u_i u_j \geq 0 \tag{1.2}$$

Pour cela on considère une masse à l'origine (s_0) égale à $u_0 = -\sum_{i=1}^{m} u_i$, l'expression (1.1) devient :

$$-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} |s_i - s_j|^{2H} u_i u_j \tag{1.3}$$

En effet on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} |s_i|^{2H} u_i u_j &= \sum_{i=1}^{m} |s_i|^{2H} u_i \sum_{j=1}^{m} u_j \\
&= -\sum_{i=1}^{m} |s_i|^{2H} u_i u_0 \\
&= -\sum_{i=0}^{m} |s_i - s_0|^{2H} u_i u_0
\end{aligned}$$

De même on a :

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}|s_j|^{2H}u_iu_j=-\sum_{j=0}^{m}|s_j-s_0|^{2H}u_ju_0$$

Ce qui montre (1.3). Considérons $c>0$ suffisament petit, comme $\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m}u_iu_j=0$, alors on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m}\exp\left(-c|s_i-s_j|^{2H}\right)u_iu_j &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m}\left(\exp\left(-c|s_i-s_j|^{2H}\right)-1\right)u_iu_j\\ &= -c\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m}|s_i-s_j|^{2H}u_iu_j+\underset{c\to 0}{o}(c)\end{aligned}$$

et on conclut en utilisant (1.2).

1.3 Principales propriétés des trajectoires du MBF

1.3.1 Auto-similarité

DÉFINITION 1.3.1 *Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est dit auto-similaire d'ordre $\beta>0$, si pour tout $\alpha>0$, les processus :*

$$(X_{\alpha t})_{t\in\mathbb{R}} \text{ et } (\alpha^{\beta}X_t)_{t\in\mathbb{R}}$$

ont même loi.

THÉORÈME 1.3.1 *Le mouvement brownien fractionnaire $\left(B_t^H\right)_{t\in\mathbb{R}}$ de paramètre H est auto-similaire d'ordre H.*

Démonstration :

Fixons $\alpha>0$. Il est évident que $\left(B_{\alpha t}^H\right)_{t\in\mathbb{R}}$ et $\left(\alpha^H B_t^H\right)_{t\in\mathbb{R}}$ sont deux processus gaussiens centrés. Il suffit donc de montrer qu'ils ont même fonction de covariance.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[B_{\alpha t}^H B_{\alpha s}^H\right] &= \frac{1}{2}(|\alpha s|^{2H}+|\alpha t|^{2H}-|\alpha t-\alpha s|^{2H})\\ &= \frac{1}{2}\alpha^{2H}(|s|^{2H}+|t|^{2H}-|t-s|^{2H})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\alpha^H B_t^H \alpha^H B_s^H\right] &= \alpha^{2H}\mathbb{E}\left[B_t^H B_s^H\right] \\ &= \frac{1}{2}\alpha^{2H}(|s|^{2H}+|t|^{2H}-|t-s|^{2H})\end{aligned}$$

La propriété suivante montre que parmi les processus gaussiens, les caractères accroissement stationnaire et auto-similarité sont caractéristique du MBF. Elle fournit également la déscription des "cas limite" $H=0$ et $H=1$.

Proposition 1.3.1 *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un processus non-dégénéré auto-similaire d'ordre H, à accroissements stationnaires et à variation finie. Alors :*

- $X_0 = 0 \quad \mathbb{P}-p.s.$
- *Pour tout $t\in\mathbb{R}$ et $s\in\mathbb{R}$,*
$$Cov\left(X_t, X_s\right) = \frac{Var\left(X_1\right)}{2}\left\{|t|^{2H}+|s|^{2H}-|t-s|^{2H}\right\}$$
- $0 < H \leq 1$
- *Pour tout $t\in\mathbb{R}$ et pour tout $0<H<1$, $\mathbb{E}(X_t)=0$.*
- *Pour tout $t\in\mathbb{R}$, pour $H=1$, $X_t = tX_1 \quad \mathbb{P}-p.s.$*
- *Si de plus X est gaussien alors il est indistinguable d'un mouvement brownien fractionnaire.*

Démonstration :

- Pour tout $\alpha > 0$ on a :
$$X_0 = X_{\alpha:0} \overset{\mathcal{L}}{=} \alpha^H X_0$$
$$\left(\alpha^H - 1\right)X_0 \overset{\mathcal{L}}{=} 0$$
Donc $X_0 = 0 \quad \mathbb{P}-p.s.$
- Par stationnarité, on a pour tout $s>0$ et tout $t>s$:
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_t X_s\right] &= \frac{1}{2}\left[\mathbb{E}\left[X_t^2\right]+\mathbb{E}\left[X_s^2\right]-\mathbb{E}\left[(X_t-X_s)^2\right]\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathbb{E}\left[X_t^2\right]+\mathbb{E}\left[X_s^2\right]-\mathbb{E}\left[X_{t-s}^2\right]\right]\end{aligned}$$
Par auto-similarité on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_t X_s\right] &= \frac{1}{2}\left[t^{2H}\mathbb{E}\left[X_1^2\right]+s^{2H}\mathbb{E}\left[X_1^2\right]-(t-s)^{2H}\mathbb{E}\left[X_1^2\right]\right] \\ &= R_H(t,s)\mathbb{E}\left[X_1^2\right].\end{aligned}$$

– Soient $s > 0,\ t_1 > 0,\ t_2 > 0$. Par l'inégalité de Minkowski on a :

$$\begin{array}{lcl}
\mathbb{E}\left[(X_{s+t_1+t_2} - X_s)^2\right]^{\frac{1}{2}} & \leq & \mathbb{E}\left[(X_{s+t_1+t_2} - X_{s+t_1})^2\right]^{\frac{1}{2}} + \mathbb{E}\left[(X_{s+t_1} - X_s)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
\mathbb{E}\left[X^2_{t_1+t_2}\right]^{\frac{1}{2}} & \leq & \mathbb{E}\left[X^2_{t_1}\right]^{\frac{1}{2}} + \mathbb{E}\left[X^2_{t_2}\right]^{\frac{1}{2}} \\
\frac{\mathbb{E}[X_1^2]}{2}\left[t_2 + t_1\right]^{2H} & \leq & \frac{\mathbb{E}[X_1^2]}{2}\left[t_2^{2H} + t_1^{2H}\right]
\end{array}$$

Par conséquent on a $H \leq 1$. De plus la variance finie implique $H > 0$.

– Soit $0 < H < 1$,

$$\mathbb{E}\left[X_1\right] = \mathbb{E}\left[X_2 - X_1\right] = \left(2^H - 1\right)\mathbb{E}\left[X_1\right]$$

on a , $\mathbb{E}[X_1] = 0$ par auto-similarité il en est de même pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{E}[X_t] = t^H\mathbb{E}[X_1] = 0$$

Soient $t > 0$ et $s > 0$ comme $H = 1$, on a :

$$\mathbb{E}\left[X_t X_s\right] = ts\mathbb{E}[X_1^2]$$

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}\left[X_t - tX_1\right]^{2} & = & \mathbb{E}[X_t^2] - 2t\mathbb{E}\left[X_t X_1\right] + t^2\mathbb{E}[X_1^2] \\
 & = & \left(t^2 - 2t^2 + t^2\right)\mathbb{E}[X_1^2] \\
 & = & 0
\end{array}$$

Donc $X_t = tX_1 \quad \mathbb{P} - p.s.$

On applique le théorème (1.2.1), ce sont deux processus (X_t) et le MBF gaussien centrés ayant la même fonction de covariance, ils sont donc indistinguables.

1.3.2 Continuité de Hölder, Non Différentiabilité

Rappellons que si (X_t) un processus tel que :

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^\alpha\right] \leq C\left|t - s\right|^{1+\beta} \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0,\ C > 0)$$

Alors il existe une version (où modification) $(\tilde{X}_t)$ de (X_t) lipschitizienne, et on a :

$$\forall\, 0 < \gamma < \frac{\alpha}{1+\beta},\ \forall T > 0,\ \exists C_T,\ \forall t \in T : \left|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s\right| \leq C_T\left|t - s\right|.$$

THÉORÈME 1.3.2 *Tout mouvement brownien fractionnaire admet une modification dont les trajectoires ont une continuité de hölder d'ordre $\gamma < H$ sur tout intervalle $[0, p]$ avec $p > 0$.*

Démonstration :

Il suffit de montrer que, pour tout $\alpha > 0$ il existe une constante C_α telle que, pour tout $(s, t) \in [0, p]^2$:

$$\mathbb{E}\left[\left|B_t^H - B_s^H\right|^\alpha\right] \leq C_\alpha \left|t - s\right|^{\alpha H} \tag{1.4}$$

En effet, la condition (1.4) par la théorème de regularité de kolmogorov (**Revuz &Yor** [17]) que $\left(B_t^H\right)_{t\in[0,p]}$ admet une modification dont les trajectoires sont hölder continues d'ordre $\gamma \in \left[0, \frac{\alpha H-1}{\alpha}\right]$ pour tout $\alpha > 0$. La condition (1.4) découle de la stationnarité des accroissements et de l'auto-similarité :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|B_t^H - B_s^H\right|^\alpha\right] &= \mathbb{E}\left[\left|B_{t-s}^H\right|^\alpha\right] \\ &= \left|t - s\right|^{\alpha H} \mathbb{E}\left[\left|B_1^H\right|^\alpha\right] \end{aligned}$$

Il suffit de poser alors : $C_\alpha = \mathbb{E}\left[\left|B_1^H\right|^\alpha\right] < +\infty$.

REMARQUE 1.3.1 *Dans la suite, on ne considera que des versions continues du MBF.*

THÉORÈME 1.3.3 *Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Les trajectoires du mouvement brownien fractionnaire sont $\mathbb{P}-p.s.$ non-différentiable en t_0.*

Démonstration :

On veut montrer que $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\left[\limsup_{t\to t_0}\left|\frac{B_t^H - B_{t_0}^H}{t-t_0}\right| = +\infty\right] = 1$. En fait, il suffit de considérer le cas $t_0 = 0$, grâce à la stationnarité, ce qui revient à étudier la comportement de $\left|\frac{B_t^H}{t}\right|$ quand $t \to t_0$.

En fait on va démontrer la non-différentiabilité à droite de 0.

On pose : $A(t) = \left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\frac{B_t^H}{t}\right| \geq M\right]$ avec $M > 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[A(t)\right] &\geq \mathbb{P}\left[\left|\frac{B_t^H}{t}\right| \geq M\right] \\ &\geq \mathbb{P}\left[\frac{t^H}{t}\left|B_1^H\right| \geq M\right] \qquad \text{par auto-similarité} \\ &\geq \mathbb{P}\left[\left|B_1^H\right| \geq Mt^{1-H}\right] \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left[\left|B_1^H\right| \geq 0\right] \end{aligned}$$

Ainsi on a $\forall M, \mathbb{P}\left[A\left(t\right)\right] \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 1.$

$$\overline{\lim_{t\to 0^+}} \left|\frac{B_t^H}{t}\right| = +\infty \quad \mathbb{P}-p.s.$$

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \left|\frac{B_t^H}{t}\right| = +\infty \quad \mathbb{P}-p.s.$$

D'où le théorème.

Rappellons qu'un processus (X_t) est dit ergodique s'il existe une variable aléatoire Y telle que $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(Y)$ et

$$\frac{1}{t}\int_0^t X_s ds \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} Y \quad \mathbb{P}-p.s.$$

1.3.3 La variation d'ordre p

THÉORÈME 1.3.4 *Considérons la variation d'ordre $p \in \mathbb{R}_+$ du mouvement brownien fractionnaire définie par : $V_p = \mathbb{P} - \lim_{n\to+\infty} V_{n,p}$ avec :*

$$V_{n,p} = \sum_{k=1}^{2^n} \left|B_{k2^{-n}}^H - B_{(k-1)2^{-n}}^H\right|^p$$

Alors on a :

$$V_p = \begin{cases} 0 & si \quad pH > 1, \\ +\infty & si \quad pH < 1, \\ \mathbb{E}\left[|B_1^H|^p\right] = C_{p,H} & si \quad pH = 1. \end{cases}$$

Démonstration :

Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$, considérons les suites des variables aléatoires suivantes :

$$Y_{n,p} = \left\{ \left[2^{-n}\right]^{pH-1} \sum_{k=1}^{2^n} \left|B_{k2^{-n}}^H - B_{(k-1)2^{-n}}^H\right|^p \,:\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

et

$$\hat{Y}_{n,p} = \left\{ 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^n} \left|B_k^H - B_{(k-1)}^H\right|^p \,:\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

L'auto-similarité assure que $B^H_{k2^{-n}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} 2^{-nH} B^H_k$. Par conséquent, il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_{n,p} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \hat{Y}_{n,p}$. Il suffit de remarquer que la suite $\left\{ B^H_k - B^H_{(k-1)} : \ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \mathbb{N} \right\}$ est stationnaire et ergodique [16]. Comme on a (grâce à la stationnarité) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\hat{Y}_{n,p}\right] &= 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^n} \mathbb{E}\left[\left|B^H_k - B^H_{(k-1)}\right|^p\right] \\ &= 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^n} \mathbb{E}\left[\left|B^H_1\right|^p\right] \\ &= 2^{-n}.2^n \mathbb{E}\left[\left|B^H_1\right|^p\right] \end{aligned} \tag{1.5}$$

Le théorème ergodique nous dit que l'on a :

$$\hat{Y}_{n,p} \stackrel{\mathbb{L}^1}{=} C_{p,H} \quad \text{et} \quad \hat{Y}_{n,p} \stackrel{p.s}{=} C_{p,H} \quad \text{donc } \hat{Y}_{n,p} \stackrel{\mathcal{L}}{=} C_{p,H} \tag{1.6}$$

Compte tenu de (1.6) et du fait que $Y_{n,p} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \hat{Y}_{n,p}$ on a donc $Y_{n,p} \stackrel{\mathcal{L}}{=} C_{p,H}$ comme $C_{p,H}$ est une constante déterministe, alors $Y_{n,p} \stackrel{\mathbb{P}}{=} C_{p,H}$. Il s'en suit que : $[2^{-n}]^{pH-1} V_{n,p} \stackrel{\mathbb{P}}{=} C_{p,H}$, ce qui démontre le resultat.

Corollaire 1.3.1 *Le mouvement brownien fractionnaire est $\mathbb{P}$–p.s. à variation non bornées sur tout compact de $\mathbb{R}$.*

Démonstration :

Il suffit de considérer le compact $[0,1]$. En considérons la subdivision particulière de $[0,1] : \{0, 2^{-n}, ..., k2^{-n}, ..., 1\}$, pour avoir la propriété de variation bornée (par b), il faut que $V_{n,1} \to b$ $\mathbb{P}$–$p.s$ avec $b < \infty$. Or ceci n'est pas possible car le théorème (1.3.4) signifie que $V_{n,1} = +\infty$ ($p = 1, H < 1$).

1.4 Variation Quadratique du MBF

Définition 1.4.1 *Un processus X est à variation quadratique finie s'il existe un processus noté $\langle X \rangle$ tel que, pour tout t et toute suite de subdivision Δ_n de $[0,t]$ tels que le pas $\Delta_n \longrightarrow 0$, on a :*

$$\mathbb{P} - \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{(t_k, t_{k+1}) \in \Delta_n} \left(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\right)^2 = \langle X \rangle_t$$

THÉORÈME 1.4.1 *Soit $(B_t^H)_{t\in\mathbb{R}}$ un mouvement brownien fractionnaire de paramètre H, alors on a :*

$$\langle B^H\rangle_t = \begin{cases} 0 & si \quad H > \frac{1}{2}, \ \forall t \in \mathbb{R} \\ t & si \quad H = \frac{1}{2}, \ \forall t \in \mathbb{R} \\ +\infty & si \quad H < \frac{1}{2}, \ \forall t \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

Démonstration :

Soit $t \in \mathbb{R}$ que l'on suppose strictement positif pour fixer les idées.

Soit $\{\Delta_n : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ une suite de subdivision de $[0,t]$ dont le pas Δ_n tend vers 0.

Considérons :

$$T_t^{\Delta_n} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(B_{t_{k+1}}^H - B_{t_k}^H\right)^2$$

1 er cas : $H > \frac{1}{2}$

Il suffit de montrer la convergence dans $\mathbb{L}^1$ de $T_t^{\Delta_n}$ vers 0.

Par stationnarité des accroissement on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[T_t^{\Delta_n}\right] &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[\left(B_{t_{k+1}}^H - B_{t_k}^H\right)^2\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}|t_{k+1}-t_k|^{2H} \le \sum_{k=0}^{n-1}|t_{k+1}-t_k| \,.\, |t_{k+1}-t_k|^{2H-1} \\ &\le |\Delta_n|^{2H-1}.t\end{aligned}$$

Comme $2H-1>0$, on a donc $\lim_{n\longrightarrow+\infty}|\Delta_n|^{2H-1}.t = 0$ et le résultat en découle.

2 ème cas : $H < \frac{1}{2}$

Montrons la divergence de $T_t^{\Delta_n}$.

Appelons A l'ensemble des subdivisions de $[0,t]$ dont le pas tend vers 0 et considérons :

$$E = \sup_A \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(B_{t_{k+1}}^H - B_{t_k}^H\right)^2\right]$$

En considérons la subdivision $\tau_i = \frac{it}{2^n}$, $i \in \overline{0, 2^n}$ on a :

$$\begin{aligned}E &\ge \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{2^n}\left(B_{\tau_i}^H - B_{\tau_{i-1}}^H\right)^2\right] \\ &\ge (2^n+1)\left(\frac{t}{2^n}\right)^{2H} \\ &\ge t^{2H}\left(\frac{1}{2^{n(2H-1)}} + \frac{1}{2^{(2nH)}}\right)\end{aligned}$$

Comme on a $2H-1<0$ et $2H>0$, on a donc :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n(2H-1)}} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2^{(2nH)}} = 0$$

D'où le resultat.

La difficulté de définir l'intégrale stochastique par rapport au MBF réside dans le fait qu'il n'est pas une semimartingale. On renvoit le lecteur à l'ouvrage **G. Samorodnitsky et M. Taqqu** [19] pour la démonstration et la discussion sur ce point, qui sera omises dans notre mémoire.

Chapitre 2

Intégration par rapport au MBF

Différentes méthodes ont été utilisées pour construire le calcul stochastique par rapport à un MBF. Citons les contributions suivantes :

- Lin, Dai et Heide ont défini l'intégrale stochastique par rapport à un MBF B^H de paramètre $H > \frac{1}{2}$ en utilisant la méthodes des trajectoires de Riemann-Sttieltjes. Dans ce cas la fonction à intégrer doit être de p-variation finie, où $\frac{1}{p} + H > 1$.
- En utilisant les notions d'intégration et de dérivation fractionnaires, Zähle a défini l'intégrale stochastique trajectorielle pa rapport à un MBF de paramètre $H \in]0, 1[$. Si la fonction à intégrer possède des trajectoires λ-Hölder continues avec $\lambda > 1 - H$, alors cette intégrale peut être interprétée comme une intégrale de Riemann-Stieltjes.
- Decreusefond, Üstünel, Carmona, Coutin, Alòs, Mazet, Nualart, Duncan, Pasik, Hu et Øksendal ont développé le calcul des variations stochastique par rapport à un processus Gaussien B. Ce calcul et un outil puissant qui peut être utilisé pour définir l'intégrale stochastique. Plus précisément, comme dans le cas du processus de Wiener, l'opérateur de divergence par rapport à B peut être interprété comme une intégrale stochastique. L'intégrale construite par cette méthode possède une moyenne nulle et peut être obtenue comme la limite de sommes de Riemann.

2.1 Calcul fractionnaire

Nous rappelons ici les définitions et les propriétés de base du calcul fractionnaire. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $a > b$. Pour $f \in L^1([a,b])$ et $\alpha > 0$, les intégrales fractionnaires gauche et droite de Riemann-Liouville de f d'ordre α sur (a,b) sont données pour presque tout x par :

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)\, dy$$

et :

$$I_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (y-x)^{\alpha-1} f(y)\, dy \tag{2.1}$$

où Γ est la fonction d'Euler. Cette intégrale prolonge les intégrales itérées d'ordre n habituelles de f pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$.

Nous avons la première formule de composition :

$$I_{a+}^{\alpha}\left(I_{a+}^{\beta} f\right) = I_{a+}^{\alpha+\beta} f.$$

La dérivée fractionnaire peut être définie comme l'opération inverse. Supposons que $0 < \alpha < 1$ et $p > 1$, et soient $I_{a+}^{\alpha}(L^p)$ (resp. $I_{b-}^{\alpha}(L^p)$) l'image de $L^p([a,b])$ par l'opérateur I_{a+}^{α} (resp. I_{b-}^{α})

Si $f \in I_{a+}^{\alpha}(L^p)$ (resp. $f \in I_{b-}^{\alpha}(L^p)$), alors la fonction ϕ telle que $f = I_{a+}^{\alpha}\phi$ (resp. $f = I_{b-}^{\alpha}\phi$) est unique dans L^p et coïncideavec la dérivée gauche (resp. droite) de Riemman Liouville de f d'ordre α définie par :

$$D_{a-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha}} + \alpha \int_a^x \frac{f(x)-f(y)}{(x-y)^{\alpha+1}} dy \right) \tag{2.2}$$

et :

$$D_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(x)}{(b-a)^{\alpha}} + \alpha \int_x^b \frac{f(x)-f(y)}{(y-x)^{\alpha+1}} dy \right)$$

où la convergence des intégrales pour la singularité $x \equiv y$ est satisfaite au sens de L^p.

Quand $\alpha p > 1$ toute fonction dans $I_{a+}^{\alpha}(L^p)$ est Hölder continue d'ordre $\left(\alpha - \frac{1}{p}\right)$.

D'un autre côté, toute fonction continue de Hölder d'ordre $\beta > \alpha$ admet une dérivée fractionnaire d'ordre α, c'est-à-dire $C^{\beta}([a,b]) \subset I_{a+}^{\alpha}(L^p)$ pour tout $p > 1$.

Pour $f \in I_{a+}^{\alpha}(L^p)$, on a $I_{a+}^{\alpha}\left(D_{a+}^{\alpha} f\right) = f$ et pour $f \in L^1([a,b])$, on a $D_{a+}^{\alpha}\left(I_{a+}^{\alpha} f\right) = f$. On a des formules d'inversion analogues pour les opérateurs I_{b-}^{α} et D_{b-}^{α}.
Si $f \in I_{a+}^{\alpha+\beta}(L^1)$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $\alpha+\beta \leq 1$, ona la deuxième formule de composition

$$D_{a+}^{\alpha}\left(D_{a+}^{\beta} f\right) = D_{a+}^{\alpha+\beta} f$$

On a la formule de l'intégration par parties :

$$\int_a^b \left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(s)\, g(s)\, ds = \int_a^b f(s) \left(D_{a+}^{\alpha} g\right)(s)\, ds \tag{2.3}$$

pour tout $f \in I_{a+}^{\alpha}(L^p)$, $g \in I_{b-}^{\beta}(L^q)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
Si $W = (W)_{t\in[0,T]}$ est un processus de Wienner unidimensionnel pour $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, on a :

$$\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\, dW_s = \frac{W_t}{t^{\alpha}} + \alpha \int_0^t \frac{W_t - W_s}{(t-s)^{\alpha+1}} ds = \Gamma(1-\alpha)\, D_{0+}^{\alpha} W_t. \tag{2.4}$$

i.e le processus $\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\, dW_s$ coïncide avec la dérivée fractionnaire gauche du processus de Wiener avec le facteur du temps $\Gamma(1-\alpha)$.

2.2 Représentation du MBF

Soit $B^H = \left\{B_t^H,\ t \in [0,T]\right\}$ un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in]0,1]$ défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour tout $t \in [0,T]$, notons par $\mathcal{F}_t^{B^H}$ la σ-algèbre générées par les variables aléatoires $\left\{B_s^H,\ s \in [0,t]\right\}$ et les ensembles de probabilité nulle.
Notons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions étagées sur $[0,T]$ et soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert défini comme la fermeture de $\mathcal{E}$ relativement au produit scalaire définie initialement par :

$$\left\langle \mathbf{1}_{[0,t]}, \mathbf{1}_{[0,s]} \right\rangle_{\mathcal{H}} = R_H(t,s)$$

L'application $\mathbf{1}_{[0,t]} \longrightarrow B_t^H$ peut être prolongée à une isométrie entre $\mathcal{H}$ et l'espace Gaussien $H_1\left(B^H\right)$ notée B^H. Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, on peut interpréter $B^H(\varphi)$ comme l'intégrale de Wiener de φ par rapport à B^H et écrire $B^H(\varphi) = \int_0^T \varphi dB^H$.

(i) Cas $H > \frac{1}{2}$.

Le noyau de covariance $R_H(t,s)$ peut être écrit sous la forme :

$$R_H(t,s) = \alpha_H \int_0^t \int_0^s |\tau - u|^{2H-2} \, dud\tau, \tag{2.5}$$

où $\alpha_H = H(2H-1)$ et la formule (2.5) implique que pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{E}$:

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}} = \alpha_H \int_0^T \int_0^T |\tau - u|^{2H-2} \varphi_\tau \varphi_u dud\tau.$$

Considérons le noyau de carré intégrable donné par :

$$K_H(t,s) = c_H s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t |u-s|^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} du, \tag{2.6}$$

où $c_H = \left[\frac{H(2H-1)}{\beta\left(2-2H, H-\frac{1}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$ et $t > s$.
Ce noyau vérifie l'égalité suivante :

$$\int_0^{t\wedge s} K_H(t,u) K_H(s,u) \, du = R_H(t,s) \tag{2.7}$$

qui implique que le noyau R_H est défini non négatif et fournit une représentation explicite pour sa racine carrée en en tant qu'opérateur.
A partir de (2.6), on obtient :

$$\frac{\partial K_H}{\partial t}(t,s) = c_H \left(\frac{t}{s}\right)^{H-\frac{1}{2}} (t-s)^{H-\frac{3}{2}}, \tag{2.8}$$

Considérons l'opérateur linéaire K_H^* défini de $\mathcal{E}$ dans $L^2([0,T])$ par :

$$(K_H^* \phi)(s) = \int_s^T \phi(t) \frac{\partial K_H}{\partial t}(t,s) \, dt, \tag{2.9}$$

Notons que :

$$\left(K_H^* \mathbf{1}_{[0,t]}\right)(s) = K_H(t,s) \mathbf{1}_{[0,t]}(s). \tag{2.10}$$

L'opérateur K_H^* est une isométrie entre $\mathcal{E}$ et $L^2([0,T])$ et peut donc être prolongé à l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.
En effet, à partir de (2.5) et (2.7), on a pour tout $s, t \in [0,T]$:

$$\left\langle K_H^* \mathbf{1}_{[0,t]}, K_H^* \mathbf{1}_{[0,s]} \right\rangle_{L^2([0,T])} = \left\langle \mathbf{1}_{[0,t]}, \mathbf{1}_{[0,s]} \right\rangle_{\mathcal{H}}$$

En utilisant (2.8), (2.9) et (2.1), on peut représenter l'opérateur K_H^* à l'aide de l'intégrale fractionnaire par :

$$(K_H^*\phi)(s) = c_H\Gamma\left(H-\frac{1}{2}\right)s^{\frac{1}{2}-H}\left(I_{T^-}^{H-\frac{1}{2}}u^{H-\frac{1}{2}}\varphi(u)\right)(s).$$

Pour tout $c \in [0,T]$, la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{[0,c]}$ appartient à l'image de K_H^* et en appliquant les règles du calcul fractionnaire, on obtient :

$$(K_H^*)^{-1}\left(\mathbf{1}_{[0,c]}\right)(s) = \frac{1}{c_H\Gamma\left(H-\frac{1}{2}\right)}s^{\frac{1}{2}-H}\left(D_{c^-}^{H-\frac{1}{2}}u^{H-\frac{1}{2}}\right)(s)\,\mathbf{1}_{[0,c]}(s).$$

Considérons maintenant le processus $W = (W)_{t\in[0,T]}$ défini par :

$$W_t = B^H\left((K_H^*)^{-1}\left(\mathbf{1}_{[0,t]}\right)\right) \tag{2.11}$$

alors W est un processus de Wiener et le processus B^H admet une représentation intégrale et unique de la forme :

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t,s)\,dW_s. \tag{2.12}$$

En effet, pour tout $s,t \in [0,T]$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_tW_s) &= \mathbb{E}\left(B^H\left((K_H^*)^{-1}\left(\mathbf{1}_{[0,t]}\right)\right)B^H\left((K_H^*)^{-1}\left(\mathbf{1}_{[0,s]}\right)\right)\right)\\ &= \left\langle (K_H^*)^{-1}\left(\mathbf{1}_{[0,t]}\right),(K_H^*)^{-1}\left(\mathbf{1}_{[0,s]}\right)\right\rangle_{\mathcal{H}}\\ &= \left\langle \mathbf{1}_{[0,t]},\mathbf{1}_{[0,s]}\right\rangle_{L^2([0,T])} = t\wedge s.\end{aligned}$$

De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$, on a :

$$B_t^H(\varphi) = \int_0^T (K_H^*\phi)(t)\,dW_t.$$

On peut montrer que les deux processus génèrent la même filtration et en déduire que le processus de Wiener garantissant la représentation (2.12) est unique.
Les éléments de $\mathcal{H}$ peuvent ne pas être des fonctions mais des distributions d'ordre négatif. En fait $\mathcal{H}$ coïncide avec l'espace de distributions f tel que $s^{\frac{1}{2}-H}\left(I_{0^+}^{H-\frac{1}{2}}f(u)\,u^{H-\frac{1}{2}}\right)(s)$ est une fonction de carrée intégrable.
Nous pouvons trouvez un sous-espace vectoriel de fonction de $\mathcal{H}$ de la manière suivante.

Soit $|\mathcal{H}|$ le sous-espace des fonctions mesurables sur $[0,T]$, tels que :

$$\|\varphi\|_{|\mathcal{H}|}^2 = \int_0^T \left(\int_s^T |\varphi_\tau| \frac{\partial K_H}{\partial \tau}(\tau,s)\,d\tau\right)^2 ds = \alpha_H \int_0^T \int_0^T |\varphi_\tau|\,|\varphi_u|\,|\tau-u|^{2H-2}\,d\tau du < \infty.$$

On a $\left(|\mathcal{H}|, \|\cdot\|_{|\mathcal{H}|}\right)$ est un espace de Banach et $\mathcal{E}$ est dense dans $|\mathcal{H}|$.
D'autre part, $|\mathcal{H}|$ muni du produit scalaire $\langle\varphi,\psi\rangle_{\mathcal{H}}$ n'est pas complet et il est isométrique à un sous-espace de $\mathcal{H}$ et on a l'estimation :

$$\|\varphi\|_{|\mathcal{H}|} \leq b_H \|\varphi\|_{L^{\frac{1}{H}}([0,T])} \tag{2.13}$$

pour une certaine constante $b_H > 0$.
Cette estimation implique que $L^2([0,T]) \subset L^{\frac{1}{H}}([0,T]) \subset |\mathcal{H}| \subset \mathcal{H}$.
Ceci signifie que l'intégrale de type Wiener $\int_0^T \varphi(t)\,dB_t^H$ (qui égale à $B^H(\varphi)$, par définition) peut être défini pour les fonctions $\varphi \in |\mathcal{H}|$ et

$$\int_0^T \varphi(t)\,dB_t^H = \int_0^T (K_H^*\phi)(t)\,dW_t.$$

(ii) Cas $H < \frac{1}{2}$
Dans ce cas, le noyau K_H défini par :

$$K_H(t,s) = c'_H\left[\left(\frac{t}{s}\right)^{H-\frac{1}{2}} - \left(H-\frac{1}{2}\right)s^{\frac{1}{2}-H}\int_s^t u^{H-\frac{3}{2}}(u-s)^{H-\frac{1}{2}}\right].$$

où $c'_H = \left[\frac{2H}{(1-2H)\beta\left(1-2H,H+\frac{1}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$, $t > s$, satisfait :

$$R_H(t,s) = \int_0^{t\wedge s} K_H(t,u)\,K_H(s,u)\,du. \tag{2.14}$$

En utilisant (2.14), on montre que :

$$\frac{\partial K_H}{\partial t}(t,s) = c'_H\left(H-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{t}{s}\right)^{H-\frac{1}{2}}(t-s)^{H-\frac{3}{2}}. \tag{2.15}$$

Le noyau K_H peut être exprimé par l'intermidiaire de la dérivée fractionnaire par :

$$K_H(t,s) = c'_H\Gamma\left(H+\frac{1}{2}\right)s^{\frac{1}{2}-H}\left(D_{t-}^{H-\frac{1}{2}}u^{H-\frac{1}{2}}\right)(s)$$

Considérons l'opérateur linéaire K_H^* de $\mathcal{E}$ dans $L^2([0,T])$ défini par :

$$(K_H^*\phi)(s) = K_H(T,s)\,\phi(s) + \int_s^T (\phi(\tau)-\phi(s))\frac{\partial K_H}{\partial \tau}(\tau,s)\,d\tau.$$

On a :

$$\left(K_H^*\mathbf{1}_{[0,t]}\right)(s) = K_H(t,s)\,\mathbf{1}_{[0,t]}(s)\,. \tag{2.16}$$

A partir de (2.14) et (2.16), on déduit, comme dans le cas $H > \frac{1}{2}$, que l'opérateur K_H^* est une isométrie entre $\mathcal{E}$ et $L^2([0,T])$ et peut donc être prolongé à l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

L'opérateur K_H^* peut être exprimé par l'intermédiaire de la dérivée fractionnaire :

$$\left(K_H^*\phi\right)(s) = c'_H\Gamma\left(H+\frac{1}{2}\right)s^{\frac{1}{2}-H}\left(D_{T^-}^{\frac{1}{2}-H}u^{H-\frac{1}{2}}\varphi(u)\right)(s) \tag{2.17}$$

$\mathcal{H}$ coïncide avec l'espace $I_{T^-}^{\frac{1}{2}-H}(L^2)$ et on a $C^\gamma([0,T]) \subset \mathcal{H}$ si $\gamma > \frac{1}{2}-H$.

Comme dans le cas $H > \frac{1}{2}$, nous pouvons montrer que le processus W défini par :

$$W_t = B^H\left(\left(K_H^*\right)^{-1}\left(\mathbf{1}_{[0,t]}\right)\right) \tag{2.18}$$

est un processus de Wiener et le processus B^H admet la représentation intégrale :

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t,s)\,dW_s.$$

Par conséquent, l'intégrale de type Wiener $\int_0^T \varphi(t)\,dB_t^H$ peut être définie pour les fonctions $\varphi \in I_{T^-}^{\frac{1}{2}-H}(L^2)$ et on a :

$$\int_0^T \varphi(t)\,dB_t^H = \int_0^T \left(K_H^*\phi\right)(t)\,dW_t.$$

Définition 2.2.1 (MBF) *Le mouvement brownien fractionnaire $B^H = \left\{B_t^H,\ t\in[0,T]\right\}$ est dit $\mathcal{F}_t$−mouvement brownien fractionnaire si le processus (2.11), $H > \frac{1}{2}$ et (2.18), $H < \frac{1}{2}$ est $\mathcal{F}_t$−processus de Wiener.*

2.3 Calcul de malliavin

Le processus $B^H = \left\{B_t^H,\ t \geq 0\right\}$ est gaussien et on peut donc développer un calcul stochastique des variations (ou calcul de Malliavin).

Rappelons les notions de base de ce calcul.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de variables aléatoires régulières et cylindriques de la forme :

$$F = f\left(B^H(\varphi_1), ..., B^H(\varphi_n)\right) \tag{2.19}$$

où $n \geq 1$, $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ (f et toute ses dérivées partielles sont bornées) et $\varphi_i \in \mathcal{H}$.
L'opérateur de dérivation D d'une variable aléatoire régulière et cylindrique F de la forme (2.19) est définie comme la variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{H}$:

$$DF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(B^H(\varphi_1), ..., B^H(\varphi_n)\right) \varphi_i$$

L'opérateur de dérivation D est un opérateur fermé de $L^p(\Omega)$ dans $L^p(\Omega, \mathcal{H})$ pour tout $p \geq 1$, Pour tout nombre entier $k \geq 1$, notons D^k l'itération de l'opérateur de dérivation et pour tout $p \geq 1$, définissons l'espace de Sobolev $\mathbb{D}^{k,p}$ comme la fermeture de $\mathcal{S}$ par rapport à la norme :

$$\|F\|_{k,p}^p = E(|F|^p) + \sum_{j=1}^{k} \left(\|D^j F\|_{\mathcal{H}^{\otimes j}}^p\right)$$

De la même manière, pour un espace de Hilbert V, notons $\mathbb{D}^{k,p}(V)$ l'espace de Sobolev correspondant des variables aléatoires à valeurs dans V.
L'opérateur de la divergence δ est l'adjoint de l'opérateur D.
On dit que la variable aléatoire u dans $L^2(\Omega, \mathcal{H})$ appartient au domaine de δ (noté par $Dom\ \delta$), s'il existe une constante c vérifiant :

$$|E(\langle DF, u\rangle_{\mathcal{H}})| = \left|E \int_0^T D_t F u_t dt\right| \leq c \|F\|_{L^p(\Omega)}$$

Pour tout $F \in \mathcal{S}$.
Dans ce cas $\delta(u)$ est défini par la relation de dualité :

$$E(F\delta(u)) = E(\langle DF, u\rangle_{\mathcal{H}}) = E \int_0^T D_t F u_t dt,$$

pour tout $F \in \mathbb{D}^{1,2}$.
On a les deux propriétés de base de l'opérateur de divergence :
i) $\mathbb{D}^{1,2}(\mathcal{H}) \subset Dom\ \delta$ et pour tout $u \in \mathbb{D}^{1,2}(\mathcal{H})$:

$$E\left(\delta(u)^2\right) = E\left(\|u\|_{\mathcal{H}}^2\right) + E\left(\langle Du, (Du)^*\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}}\right),$$

où $(Du)^*$ est l'adjoint de (Du) dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.

$$F\left(B_t^H\right) = F(0) + \int_0^t F'\left(B_s^H\right)\delta B_s^H + H\int_0^t F''\left(B_s^H\right)s^{2H-1}ds. \tag{2.24}$$

On donne maintenant la version générale de la formule de Itô.

THÉORÈME 2.4.1 *Soit F est une fonction de la classe $C^2(\mathbb{R})$. On suppose que $u = \{u_t,\ t\in[0,T]\}$ est un processus dans $\mathbb{D}^{2,2}_{loc}(|\mathcal{H}|)$ tel que l'intégrale indéfinie $X_t = \int_0^t u_s\delta B_s^H$ soit continue p.s. et que $\|u\|_2 \in \mathcal{H}$. Alors pour tout $t\in[0,T]$, on a la formule suivante :*

$$\begin{aligned} F(X_t) &= F(0) + \int_0^t F'(X_s)\,u_s\delta B_s^H \\ &\quad + \alpha_H\int_0^t F''(X_s)\,u_s\left(\int_0^T |s-\sigma|^{2H-2}\left(\int_0^s D_\sigma u_\theta\delta B_\theta^H\right)d\sigma\right)ds \\ &\quad + \alpha_H\int_0^t F''(X_s)\,u_s\left(\int_0^s u_\theta(s-\theta)^{2H-2}d\theta\right)ds \end{aligned} \tag{2.25}$$

(ii) Cas $H < \frac{1}{2}$

L'extension des résultats précédents n'est pas trivial dans le cas $H < \frac{1}{2}$.
Rappelons que pour $H < \frac{1}{2}$ l'opérateur K_H^* donné par (2.17) est une isométrie entre l'espace $\mathcal{H}$ et $L^2([0,T])$ et on a : l'estimation :

$$\left|\frac{\partial K_H}{\partial t}(t,s)\right| \le c'_H\left(\frac{1}{2}-H\right)(t-s)^{H-\frac{3}{2}}.$$

Considérons la semi-norme définie sur $\mathcal{E}$ par :

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_K^2 &= \int_0^T \varphi^2(s)\,K(T,s)^2\,ds \\ &\quad + \int_0^T\left(\int_0^T |\varphi(t)-\varphi(s)|\,(t-s)^{H-\frac{3}{2}}dt\right)^2 ds. \end{aligned}$$

On note par $\mathcal{H}_K$ le complété de $\mathcal{E}$ par rapport à cette semi-norme. L'espace $\mathcal{H}_K$ est continûment inclus dans $\mathcal{H}$.

PROPOSITION 2.4.3 *Soit $u = \{u_t,\ t\in[0,T]\}$ un processus stochastique dans l'espace $\mathbb{D}^{1,2}(\mathcal{H}_K)$. Supposons que la trace définie comme la limite en probabilité :*

$$TrDu := \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\epsilon}\int_0^T \left\langle Du_s, 1_{[s-\epsilon,s+\epsilon]}\right\rangle_{\mathcal{H}} ds$$