République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Probabilités et Applications**

Par :

Mr.BENRAZEK Imed eddin **Mr.KAIZOURI Youcef**

Intitulé

Systèmes Distribués à Données Manquantes

Dirigé par :

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.BENCHAABANE.A	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.BERAHAIL Amel	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.REBAI Ghania	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2015

Systèmes distribués a données manquante

Benrazek imed eddine et kaizouri youcef
Mémoire de master de mathématiques
Université 8 Mai 1945 Guelma

20 Juin 2015

Table des matières

RESUME

Les problèmes d'identification consistent à retrouver les causes d'un phénomène à partir d'une observation de celui-ci, la résolution de ce type de problème se fait à l'aide d'une mesure expérimentale. Nous proposons - dans ce travail- d'étudier une classe de problème distribuées avec des données incomplètes. Pour cet objectif nous utilisons deux méthodes, la première est la moindres carré, la deuxième est celle de la sentinelles introduits par J. L. Lions qui soit la stratégie la plus répondus consiste à obtenir des informations sur les causes à partir d'une moyenne pondérée de l'observation. Alors nous prouvons l'existence de la fonction de sentinelle en résolvant un problème de la nulle-contrôlabilité avec des contraintes sur le contrôle.

Mots clés : Contrôlabilité à zéro, méthode de moindres carrée, méthode des Sentinelles, terme manquant, terme de pollution.

REMERCIEMENTS

Nos remerciements s'adressent d'abord à ALLAH le tout puissant et à son prophète MAHOMED (paix et salut sur lui) pour les chances qui nous sont offertes pour réaliser ce travail.

Au *Dr Berhail Amel* Directeur de mémoire, pour nous accorder votre confiance en acceptant de diriger ce mémoire, malgré la distance et les multiples occupations qui sont les vôtres. Votre ouverture d'esprit et surtout l'intérêt que vous portez à la science font de vous une source intarissable à laquelle tout étudiant devrait s'abreuver. Trouver ici le témoignage de notre profonde gratitude et de notre sincères remerciements.

A Mr. Le Chef Département, nous apprécions votre qualité professionnelle et intellectuelle, permettez-nous de vous témoigner notre profonde gratitude. Au corps professoral de notre département. A toute la promotion du Probabilité et Mathématiques Appliquées 2014- 2015, Au président de jury de notre mémoire, Aux membres du jury, A tous ceux qui de près ou de loin ont apporté leur contribution à la réalisation de ce travail, nous vous prions de trouver l'expression de notre profonde reconnaissance.

Benrazek Imed eddine et, kaizouri Youcef

INTRODUCTION

Il est bien connu que l'air et l'eau constituent de véritables sources de la vie de la flore, de la faune et de l'homme. Ainsi, dés lors que leurs natures sont corrompues par des attaques environnements, ils deviennent des dangers pour les êtres vivants. Il peut s'agir notamment de troubles végétatifs pour la flore et d'intoxication voire des cas de maladies pour l'homme. Les scientifiques s'activent à déterminer les meilleurs palliatifs pour la protection et l'assainissement des dites ressources naturelles. Ils ne sauraient, en conséquence, réussir leur pari sans une coopération interdisciplinaire. Des données observées par les naturalistes aux modèles d'équations conçus par les mathématiciens, en passant par l'expertise des ingénieurs informatiques, la simulation numérique joue un rôle très important dans la médiation entre les disciplines scientifiques.

La modélisation de ces problèmes conduit à des systèmes mathématiques à données incomplètes. Par données, nous entendons les conditions initiales, le second membre et éventuellement les conditions aux limites. Dans presque tous les problèmes de la météologie ou d'océanographie, on connait jamais les données initiales, on a une grande variété de possibilités quand au choix de l'instant initiale. Même chose pour les problèmes des pollutions dans un lac, une rivière, un estuaire,...

Les conditions aux limites peuvent aussi être inconnues ou seulement partiellement connues sur une partie de la frontière qui peut par exemple être inaccessible aux mesures qu'il s'agisse des situations biomédicales ou des situations correspondantes à des accidents. Il en va de même pour les termes sources qui peuvent être d'accès difficiles, même chose pour la structure du domaine qui peut aussi être imparfaitement connue, comme par exemple dans la gestion de puits de pétrole où une partie de la frontière du domaine est inconnue.

Naturellement ces problèmes sont classiques et l'idée la plus habituelle est celle de "moindres carrée", cette méthode revient à considérer les inconnues comme des variables de contrôles où on cherche à minimiser la fonction de coût qui est l'écart entre l'état mesuré sur une partie du domaine et l'état calculé par la résolution du système considéré. Cela conduit à des problèmes de contrôle optimal pour des systèmes distribués. Dans ce type de méthode les inconnues jouent le même rôle en cherchant à déterminer les uns et les autres, cependant, il y a la possibilité de ne pas pouvoir séparer ces rôles.

Sans négliger cette méthode fondamentale, qui demeure de loin la plus importante pour ce type de problèmes, il peut être utile de tenter celle dite " La méthode des sentinelles". Les sentinelles ont été introduites par J. L .Lions dans des notes aux CRAS. Il a par la suite, publié un livre sur ce sujet [8]. De nombreux types de systèmes sont abordés et l'auteur étudie l'existence des sentinelles insensibles aux perturbations sans contraintes de sensibilité aux données intéressantes. L'étude de leur existence conduit à la résolution du problème de contrôlabilité de systèmes distribués. Supposons par exemple que l'équation du système décrive la cinétique d'un polluant dans une rivière ou un lac et que la source soit des pollueurs éventuels, ce qui est intéressant dans ce cas est évidement de connaitre ce que les pollueurs ont déversé dans la rivière et non l'état du lac à l'instant initial.

La méthode des sentinelles nous permettra donc de reconstituer un paramètre ou une approximation de ce dernier indépendamment des autres données qu'on ne veut pas identifier, les sentinelles sont donc "une méthode d'identification de paramètres".

L'objectif de notre travail est l'étude des systèmes distribuées à données incomplètes où on cherche à identifier le terme de pollution. Alors, ce travail est organisé de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, nous donnons quelques définitions et propriétés du système contrôlable qui soit la base de la théorie des sentinelles. Dans **le chapitre 2,** on va introduit les problémes des systèmes distribués à données manquantes. Nous commençons par un exemple sur la détection de pollution dans un milieu fluide puis on va étudier l'identification du terme de pollution par la méthode de moindres carrée. Elle fût introduite en 1795 par Gauss et Legendre pour la résolution de problèmes inverses. Dés 1805, Legendre présenta son article " *nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes"* basé sur la méthode des moindres carrés. Elle revient à chercher des paramètres tels que les sorties du problème, calculées avec ces paramètres, se rapprochent le plus possible des sorties mesurées. **Le troisième chapitre** est basé sur l'application de la méthode des sentinelles pour la problématique des systèmes distribués à données manquantes et la mise sous forme de problème de contrôlabilité à zéro. Nous rappelons le principe de la méthode des sentinelles ; puis on va étudier l'existence et la construction de la sentinelle et on parle des différents type de la sentinelle : régionale, discrète et faible et discriminnante.

Chapitre 1

Contrôlabilité et Observabilité

La théorie du contrôle (ou commande) analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Dans ce chapitre, on va donner quelques notions liée a la théorie du contrôle des systèmes linéaires : la contrôlabilité, l'observabilité, la stabilité,... Pour expliquer et motiver cette théorie, nous allons commencé par quelques exemples.

1.1 Quelques exemples

Dans cette section, nous donnons quelques exemples typiques de la théorie du contrôle d'importance pratiques ou théoriques.

1- Contrôle d'un four électrique

Soit le problème du four électrique, donnée comme suit :

$$\begin{cases} c_1 T_1'(t) = -a_1 r_1 (T_1 - T_2)(t) - a_2 r_2 (T_2 - T_0)(t) + u(t), \\ c_2 T_2'(t) = a_1 r_1 (T_1 - T_2)(t), \end{cases}$$

où

T_0 = la température extérieure,

T_1 = la température dans la "jacket" du four,

T_2 = la température de l'intérieur du four,

u = l'intensité de la chaleur produite par la bobine,

a_i = les surfaces,

c_i = les capacités de chaleur,

r_i = les coefficients de radiation.

Le problème du four : Peut-on "s'aranger" pour que quelque soit la température du four à l'instant initial "$t = 0$", la température intérieure du four soit égale, à l'instant $t = t_0$ donné, à une valeur désirée $T_2 = \overline{T}_0$?

Le problème mathématique : Peut-on trouver, pour toutes les valeurs de $(T_1(0), T_2(0))$, u pour que la solution du système d'équations différentielles ci-dessus satisfasse $T_2 = \overline{T}_0$?

2- Chauffer un barreau métallique

Soit un barreau métallique rectiligne de longueur L que l'on chauffe par une source de chaleur localisée sur une portion du barreau. On désigne par $\theta(t,x)$ la température du barreau à l'instant t et au point x (on fixe un repére dont l'axe des abscisses est porté par le barreau et on fixe l'origine à une de ses extrémités, l'autre étant le point de coordonnées $(L, 0)$).

On effectue le bilan d'énergie sur la portion du barreau située entre les points d'abscisse x et $x+\delta x$ et les instants de temps t et $t+\delta t$. La variation de la température est à peu prés égale à $\delta x(\theta(t+\delta t, x) - \theta(t,x))$ et elle doit étre égale à la variation du flux de chaleur dans cette portion du barreau :

$\delta t(q(t, x+\delta x) - q(t,x) + \delta x f(t,x))$, où f est la source de chaleur localisée, de la forme $f(t,x) = b(x)u(t,x)$. Par la loi de Fourier, le comportement du flux de chaleur est proportionnel à la variation de la températeure, il est donné par

$$q(u)(x) = k(x)\partial_x \theta,$$

où k est le coeffcient de conductivité de la chaleur. On en déduit donc

$$\partial_t \theta(t,x) = \partial_x(k(x)\partial_x\theta(t,x)) + b(x)u(t,x)),$$

on maintient les extrémités du barreau à une température constante, et on suppose connue la température initiale. Ceci qui conduit à :

$$\begin{cases} \partial_t \theta(t,x) = \partial_x(k(x)\partial_x\theta(t,x)) + b(x)u(t,x)), t \geq 0, x \in (0,L) \\ \theta(t,0) = \alpha, \theta(t,L) = \beta, t \geq 0 \\ \theta(0,x) = \theta_0(x), x \in (0,L) \end{cases}$$

1.2 Système contrôlé

Du point de vue mathématique, un système du contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle, habituellement soumis à des contraintes. Un système contrôlé est un système différentiel de la forme :

$$\dot{y}(t) = f(y(t), u(t), y(t) \in M, \qquad u(\cdot) \in \mathcal{U} \tag{1.1}$$

En général, le vecteur des états $y(t)$ appartient à une variété différentielle M de dimension n (on supposera ici que M est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$), et les contrôles $u(\cdot)$ appartiennent à un ensemble de contrôles admissibles

$\mathcal{U}_{ad}$, qui est un ensemble de fonctions localement intégrables définies sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans U de $\mathbb{R}^m$. On suppose le champ de vecteur f suffisament régulier, de sorte que pour toute condition initiale $y_0 \in M$ et tout contrôle admissible $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}$, le système (1.1) admet une unique solution $y(t)$ telle que $y(0) = y_0$, et que cette solution soit définie sur $[0, +\infty[$. On notera cette solution par $y_f(t, y_0, u(\cdot))$. Le système (1.1) est dit en boucle ouverte et est représenté par le diagramme suivant

$$u(input) \rightarrow \boxed{\dot{y} = f(y, u)} \rightarrow y(output)$$

Parmi les objectifs principaux de la théorie du contrôle qui seront abordés dans ce travail, les notions de la contôlabilité et l'observabilité. On se propose de définir ces notions et de rappeler les principaux résultats.
Soit le système linéaire, en dimension finie, suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \\ \qquad y(0) = y_0 \end{array} \right. \tag{1.2}$$

où A est une matrice carré $n \times n$ appelée matrice d'état et B une matrice $n \times m$ appelée matrice de commande ou du contrôle, $y(t)$ est l'état du système et y_0 la condition initiale. La solution de (1.2) est données par :

$$y(t, y_0, u(\cdot)) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds. \tag{1.3}$$

Dans le cas des systèmes linéaires en dimension infinie le système (1.2) est définit comme suit

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. Pour $T > 0$ fixé, on défini $Q = \Omega \times [0,T]$, $\sum = \partial\Omega \times]0,T[$. On considère le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,t) = Ay(x,t) + Bu(t) & Q, \\ y(\zeta, t) = 0 & \sum, \\ y(x,0) = y_0(x) & \Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

où A et B sont des opérateurs de $L(\mathbb{R}^n, X = H^1(\Omega))$ et la fonction u dite "*contrôle*" appartient à l'espace $U = L^2(0,T,\mathbb{R}^n)$. Alors la solution de ce système est donnée par

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds.$$

tel que S est une application, dite " Semi groupe", définit de $[0,+\infty[$ dans L(X) satisfait les propriétés suivantes :

(i) S(0) = Id,

(ii) S(t + s) = S(t)S(s), pour tout (t,s) positives.

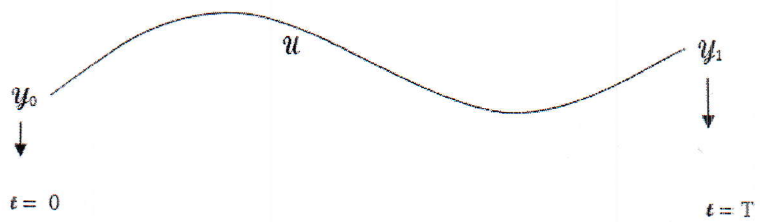
(ii) Pour tout x dans X, l'application $S(.)x$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Il faut noter que certains problèmes pratiques sont mieux modélisés par des équations aux dérivées partielles ou bien par des systémes à événements discrets.

1.3 Contrôlabilité

Un système du contrôle est dit contrôlable si on peut l'amener (en temps fini) d'un état initial arbitraire vers un état final prescrit au moyen d'un contrôle. Plus précisément, on pose la définition suivante :

Définition 1.3.1 *On dit que le systéme (1.1) (resp.(1.2)) est contrôlable si pour tous les états y_0, y_1 dans l'espace d'état, il existe un temps fini* T *et un contrôle admissible* $u(\cdot) : [0, \mathrm{T}] \to U$ *tel que* $y_1 = y(\mathrm{T}, y_0, u(\cdot))$.



Autrement dit, l'application entrée-sortie en temps T associe à un contrôle u le point final de la trajectoire associée à u.

Pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus difficile. On s'interesse dans ce travail aux système linéaire.

Critère de contrôlabilité de Kalman :

Pour les systèmes du contrôle linéaires en dimension finie, il existe une caractérisation très simple de la contrôlabilité, due à Kalman.

Théorème 1.3.1 *Le système linéaire (1.2) est contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité de Kalman*

$$(B, AB, \cdots, A^{n-1}B)$$

est de rang n. On dit alors que la paire (A, B) *est contrôlable.*

Pour la démonstration voir [10,14].

Remarque : le paire (A, B) est contrôlable si et seulement s'il existe $T > 0$ tel que la matrice

$$\mathcal{C}_T = \int_0^T e^{sA} B B' e^{sA'} ds \tag{1.5}$$

soit inversible. Ici A' et B' désignent les matrices transposées des matrices A et B. Le contrôle $u(\cdot)$ qui transfère y_0 en $y_1 = y(T; y_0; u(.))$ est simplement donné par :

$$u(s) = B' e^{(T-s)A'} \mathcal{C}_T^{-1} (y_1 - e^{TA} y_0)$$

comme on peut le vérifier en utilisant la formule (1.3).

1.4 Observabilité

Système commandé-observé :

Un système commandé-observé est un système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y, u), \\ \\ z = h(y) \end{cases} \tag{1.6}$$

où "y" est le vecteur des états du système, le vecteur "u" celui des contrôles (entrées) et le vecteur z celui des variables observées (sorties). Ce système est dit en boucle ouverte et est représenté par le diagramme suivant :

$$u \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \dot{y} = f(y; u) \\ z = h(y) \end{array}} \longrightarrow z$$

Remarque : Dans beaucoup de situations pratiques, une partie seulement de l'état du système, appelée la sortie ou la variable observée, est mesurée.

Critère d'observabilité de Kalman :

Considérons le système linéaire commandé-observé

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \\ z(t) = Cy(t), \end{cases} \tag{1.7}$$

Définition 1.4.1 *On dit que le système linéaire (1.7) est observable si pour tout état $y_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe un temps fini T et un contrôle admissible $u(\cdot) : [0,T] \rightarrow U$ tel que la connaissance de $z(t)$ pour $t \in [0,T]$ permet de déterminer y_0.*

Il existe une caractérisation algébrique de l'observabilité d'un système linéaire due à Kalman.

Théorème 1.4.1 *Le système linéaire (1.7) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité de Kalman*

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang n. On dit alors que la paire (A,C) est observable.

Pour la démonstration voir [10,14]

Remarque 1.4.1 *Le paire* (A, C) *est observable si et seulement s'il existe* $\mathrm{T} > 0$ *tel que la matrice :*

$$\mathcal{O}_{\mathrm{T}} = \int_0^{\mathrm{T}} e^{sA'} C' C e^{sA} ds$$

soit inversible.

1.5 Stabilité

La notion de stabilité est cruciale en automatique. Elle est très liée à la contrôlabilité. Considérons un système dont la dynamique est décrite par l'équation d'état (non contrôlée) suivante :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y), \\ y(0) = y_0; \end{cases} \tag{1.8}$$

une telle équation est dite aussi **autonome** .

- On appelle $\overline{y}$ le point d'équilibre de ce système (s'il existe) si $f(t, \overline{y}) = 0$ pour tout t, donc, un système se trouve dans un état d'équilibre si cet état n'est pas modifié lorsque le système est abandonné à lui-même.

On peut énocer deux types de la stabilité :

1- **Stabilité au sens de Lyapounov**

Le système (1.8) est stable au sens de Lyapounov si :

$$\forall t_0, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \ \ telque \ ||y(t_0 - \overline{y}|| \leq \eta \Longrightarrow \forall t \geq t_0 \qquad ||y(t) - \overline{y}|| \leq \epsilon,$$

où $\overline{y}$ est l'état d'équilibre du système.

Cela revient à dire qu'une petite perturbation de l'état d'équilibre, à chaque instant t_0 n'affecte pas l'évolution vers cet état d'équilibre.

2-Stabilité asymptotique

Le système (1.8) est asymptotiquement stable si :

- Il est stable au sens de Lyapounov, de plus
- $\exists \alpha > 0$ tel que :

$$||y(t_0) - \overline{y}|| < \alpha \Longrightarrow \lim_{t \to \infty} ||y(t) - \overline{y}|| = 0$$

Un grand problème en automatique consiste à déterminer une loi de commande, c'est-à-dire une loi donnant le contrôle en fonction de l'état (réel ou observé), qui permette de stabiliser le système.

1.6 Contrôle Optimal

Un problème de contrôle optimal se décompose en deux parties : pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut d'abord savoir si cette cible est atteignable. C'est le problème de contrôlabilité. Ensuite, une fois ce problème résolu, il faut chercher parmi toutes ces trajectoires possibles celles qui le font en coût minimal. On se donne à présent un système dont l'état est décrit par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = f(t, (t), u(t)) & t \in [0, \mathrm{T}] \\ y(0) = y_0. \\ u \in U_{ad} \end{cases} \tag{1.9}$$

Le système (1.9) a une solution supposée unique. Désormais on fixe y_0. On se donne alors une fonctionnelle **coût** J (ou **objectif**), et on cherche une fonction de contrôle qui rend minimale cette fonctionnelle. On choisit J de la forme :

$$J(y, u) = \int_0^T \Phi(y(t), u(t))dt,$$

et on cherche à résoudre le problème

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \min J(y,u) & \\ y = y(u, y_0)(.) & \text{Equation d'état} \\ u \in \mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U} & \text{Contraintes sur le contrôle.} \end{cases}$$

Deux questions se posent alors :

- Prouver l'existence d'un contrôle optimal.
- Trouver un moyen de le calculer. Pour cela, on va écrire des conditions d'optimalité.

Pour résoudre ce problème, on va utiliser la méthode de la pénalisation. C'est l'une des méthodes, les plus anciennes, utilisé pour la résolution du problème d'optimisation avec contraintes.

1.7 Méthode de pénalisation

Cette méthode est très souvent utilisées en pratique, grâce à leur facilité de mise en œuvre, leur principe est de remplacer le problème d'optimisation avec contraintes :

$$(P)\{minJ(u), u \in U \in \mathbb{R}^p\},$$

par un problème d'optimisation sans contraintes :

$$(P_r)\{min(J(u) + r\alpha(u)), u \in \mathbb{R}^n\},$$

où $\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de pénalisation et $r > 0$. Le but est de trouver des fonctions α telles que les problèmes (P) et (P_r) soient équivalents c-à-d qu'ils aient les mêmes solutions. Dans ce cas on dit que la pénalisation est exacte. En général on effectue une pénalisation inexacte c-à-d tel que le problème (P) a des solutions qui ne sont pas des solutions de (P_r).

L'ensemble des solution de (P_r) ne couvre pas tout l'ensemble des solutions de (P). En ravanche, on peut trouver des fonctions α qui sont dérivable ce qui permet d'utiliser les résultats de minimisation sans contraintes. On prend $\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) α est continue sur$\mathbb{R}^n$

(ii) $\forall u \in \mathbb{R}^p, \alpha(u) \geq 0$

(iii) $\alpha(u) = 0 \leftrightarrow u \in U$

Nous donnons un exemple de fonction de pénalisation α pour différentes contraintes :

$$\begin{cases} \textit{Contrainte :} & \text{x} \leq 0 & g(x) = 0 & h(x) \leq 0 \\ \textit{Fonction} & \alpha : \| x^+ \|^2 & \| g(x) \|^2 & \| h(x)^+ \|^2 \end{cases}$$

où $\| \cdot \|$ désigne toujours la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et $x^+ = (x_1^+, \cdots, x_n^+)$.

Théorème 1.7.1 *Supposons que J soit continue et cœrcive et U un ensemble fermé non vide. On suppose que α vérifie les conditions de pénalisation, alors on a :*

- *$\forall r > 0, (P_r)$ a au moins une solution u_r,*
- *La famille $(u_r)_{r \geq 0}$ est bornée.*
- *Toute sous-suite convergente extraire de $(u_r)_{r \geq 0}$ converge vers la solution u du problème (P) si $r \to +\infty$.*

Pour la démonstration voir [7].

Chapitre 2

Moindres carrés pour l'identification du terme de pollution

Les systèmes distribués considérés dans ce travail sont des systèmes décrits par des équations d'évolution à données manquantes. Le modèle dont on dispose est incomplet, dans le sens où l'on connait mal les données initiales et le terme source. Dans ce chapitre, on va identifier les données incomplet par la méthode de moindre carrée.

2.1 Problème de détection de pollution

Nous nous intéressons dans cette section à la détection de pollution en milieu fluide (Lac, Rivière). Nous supposerons que la pollution est due à la présence de composés chimiques (Nitrate, Plomb,...) provenant des décharges externes ou sédimentaires. Les sources de pollution diffusent au cours du temps des déjections toxiques dans l'eau et le domaine d'étude comportent des obstacles (ilots de terre, arbres,...).

La modélisation mathématique de transport d'une substance chimique de concentration $y(x,t)$ conduit à la considération des termes suivants :

- Un terme de diffusion

$$k\mathrm{div}(a(x)\nabla y(x,t)),$$

où k est la constante de diffusion. C'est une propriété fondamentale des fluides qui consiste à disperser les molécules de manière aléatoire dans tout le domaine. C'est cette capacité qui permet à l'eau d'uniformiser une coloration dans une bassine et à l'air de maintenir une odeur dans une salle close. Le terme $a(x)$ désigne la transmissivité dans le milieu (dans un milieu homogène (l'eau, l'air,..) $a(x)$ est une constante). Dans le cas d'un Lac, la diffusion est donnée par :

$$K.\nabla y(x,t).$$

- Un terme de transport $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{\nabla} y(x,t)$, où $\overrightarrow{u}$ désigne le champ de vitesse du fluide.
- Un terme de réaction R qui traduit les interactions chimiques et biochimiques dans le liquide, est donné par

$$R_i = -k_i y_i(x,t),$$

où k_i est une constante cinétique.
- La source de pollution est décrite par une fonction $f(x,t)$, elle donne naissance aux substances polluantes déversées dans le fluide. A ce niveau, deux considérations sur les sources de pollution méritent d'être faites : il s'agit des termes sources distribués que nous noterons par $\xi(x,t)$ et les termes sources

ponctuels au point i de cordonnée x_i que nous désignerons par $\lambda_i \widehat{\xi}_i(t).\delta(x-P_i)$ où $\delta(x-P_i)$ est la fonction de Dirac associée au point P_i. le terme source peut être exprimé sous la forme

$$f_i(x,t) = \xi(x,t) + \sum_j \lambda_j \widehat{\xi}_i(t).\delta(x-P_i),$$

où j est le nombre de sources internes de pollution (détritus, métaux et autres déposés au fond des rivières et des Lacs), λ_j est le taux de pollution de la j ième source, $\widehat{\xi}_i(t)$ est la densité partielle des espèces i pour la j ième source, $\delta(x-P_i)$ désigne la mesure de Dirac au point P_i : On se ramène alors à la résolution d'un système d'équation de la forme :

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial t} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{\nabla} y_i(x,t) - K.\triangle y_i(x,t) = -k_i y_i(x,t) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \widehat{\xi}_i(t).\delta(x-P_i), i = 1,2,3,\ldots$$

Dans l'analyse de la concentration y, on est confronté à deux types de conditions au bord. Pour illustrer ces conditions, subdivisons le bord du domaine d'étude en deux parties disjointes, $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ tel que :

$$y|_{\Gamma_1} = g(x,t),$$

$$\frac{\partial y}{\partial n}|_{\Gamma_2} = h(x,t),$$

le bord Γ_1 est supposé diffuser de manière continue une décharge de pollution dans le fluide, c'est le cas d'une usine qui déverse ses résidus dans un Lac situé aux alentours par le biais d'un canal d'ouverture Γ_1. Le bord Γ_1 peut à son tour se subdiviser en plusieurs parties selon le nombre de source de pollution externe. La condition de Neumann caractérise l'échange de concentration entre le fluide et l'extérieur. Cette condition est liée à la porosité de la terre. Dans l'étude d'eau de surface (Lac, rivière) on peut supposer comme approximation, dans ce cas, pour $h = 0$, cela sous-entend qu'aucune concentration ne traverse le bord Γ_2, la terre est à ce niveau imperméable. On a besoin d'un condition initiale

$$y(x, 0) = y_0(x),$$

Cette condition évalue la quantité de concentration présente au début de l'expérience. Elle est importante dans la résolution des problèmes de type évolutifs. Nous résumons la dispersion d'une substance polluante dans un fluide par une équation parabolique de la forme :

$$(P)\begin{cases} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + k\text{div}(a(x)\nabla y(x,t)) = f(x,t) & (\text{x,t}) \in \Omega \text{ x }]0,\text{T}], \\ y|_{\Gamma_1} = g(x,t) & (\text{x,t}) \in \Gamma_1 \text{ x }]0,\text{T}], \\ \frac{\partial y}{\partial n}|_{\Gamma_2} = h(x,t) & (\text{x,t}) \in \Gamma_2 \text{ x }]0,\text{T}], \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{x} \in \Omega \end{cases}$$

où

- $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3 représente le domaine d'étude,
- $]0, \text{T}[$ est l'intervalle de temps d'étude $\text{T} > 0$,

Nous nous plaçons ici dans le cas des systèmes à données incomplètes, c'est-à-dire que l'une des informations suivantes :

- le coefficient k de diffusion,
- la fonction source $f(t, x)$,
- la condition initiale $y_0(x)$,
- les conditions aux bords $g(t)$ et $h(t)$,

est inconnue ou contient dans sa structure des paramètres inconnus.

La recherche de ces informations nous conduit naturellement à un problème de type inverse. Dans la résolution de ces problèmes, il est nécessaire de disposer des données mesurées de l'état y. Nous noterons dans la suite y_{obs} ces données expérimentales et ensuite évaluerons l'état y en fonction des paramètres recherchés.

2.2 Espace des observations

Nous supposerons que les mesures prélevées y_{obs} sont opérées dans un intervalle de temps $[0, \mathrm{T}]$, tout comme les calculs de l'état $y(\lambda, \tau)$ est dans un domaine d'observation $O \subset \Omega$. Une formulation habituelle est de considérer connue l'action sur l'état $y(x, t)$ d'un opérateur linéaire à valeurs dans un espace convenable F c'est-à-dire définit un opérateur d'observation B permettant d'associer les paramètres recherchés aux mesures observées. Alors on observe l'état sur un domaine supposé O appelé observatoire, et dans un intervalle de temps $(0, T)$: L'observatoire O peut être interne distribué $(O \subset \Omega)$, ou soit un observatoire frontière $(O \subset \Omega)$.

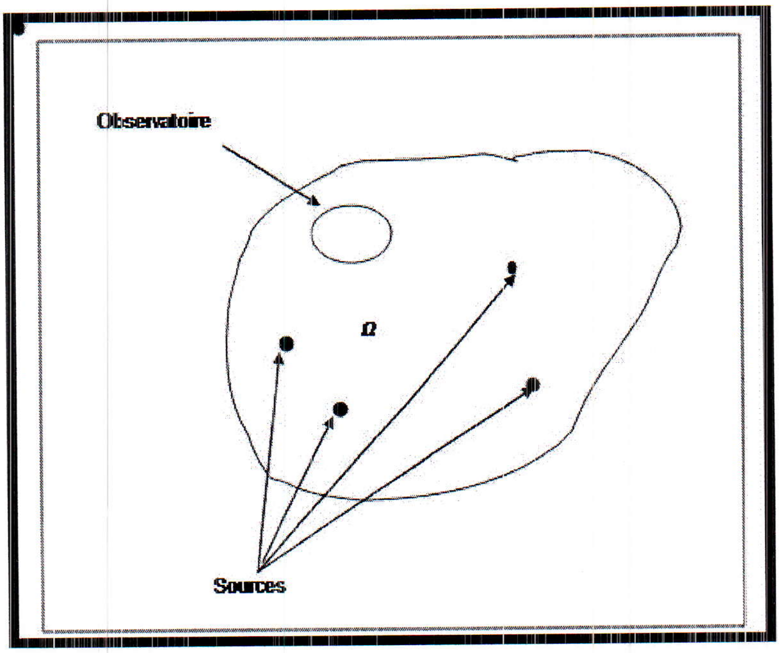


Figure 1 : Domaine Ω, observatoire et sources

Une fois les données observées obtenues, le problème auquel nous nous intéressons dans ce travail est le suivant :

A partir des mesures expérimentales de l'état y du système précédent est il possible d'identifier la fonction source et(ou) la fonction initiale avec prise en compte des erreurs sur les mesures ?

Nous allons commencer de répondre à cette question dans le cas général.

2.3 Position du problème

Pour illustrer notre approche, nous supposons que l'état du système est décrit par y. La structure générale du problème étudié est supposée connue sous la forme :

$$(S)\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay = \textit{terme source} & \Omega \times]0,T[, \\ y(t=0) = y^0 & \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

Pour que l'état y du système considéré puisse être entièrement défini, il faut connaitre :

- les termes sources,
- la condition initiale,
- les conditions aux limites, et
- le domaine d'étude Ω.

Ce qui n'est généralement pas le cas.

Si l'une au moins des informations ci-dessus est inconnues ou partiellement connue on dit que le système (S) est *à données incomplètes*. On rencontre ce type de problèmes dans de nombreuses situations, en sciences biomédicales, en météorologie, enocéanographie, ...

2.4 Termes manquants et termes de pollutions

On suppose que la première équation du système (S) s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = \zeta + \lambda\widehat{\zeta} \qquad \Omega \times]0,T[, \tag{2.2}$$

avec ζ est donné dans un espace convenable Y et $\widehat{\zeta}$ demeure dans la boule unité de Y et λ est un petit paramètre réel avec $\lambda\widehat{\zeta}$ n'est pas connu. On suppose que l'ouvert Ω est connus mais les données initiales sont incomplètes. Si l'on désigne par $y(0)$ la condition initiale s'exprime sous la forme

$$y(0) = y^0 + \tau \widehat{y}^0, \tag{2.3}$$

où y^0 est donné et $\widehat{y}^0$ demeure dans la boule unit é avec τ réel petit, et on suppose que les conditions aux limites sont connues.

Notre objectif est de donner une méthode permettant d'obtenir des informations sur $\lambda\widehat{\zeta}$ qui ne soient pas affectées par les variations de la donnée initiale autour de y^0. On établit ainsi une distinction entre le terme $\lambda\widehat{\zeta}$ qui est dit "*de pollution*" et le terme $\tau\widehat{y}^0$ qui est dit "*manquant*" que l'on ne cherche pas à identifier. Pour espérer pouvoir obtenir quelques informations, il faut observer y. Donc, le problème consiste à observer l'état y sur une partie accessible du domaine et de disposer des mesures expérimentales pour estimer les données manquantes.

2.5 Observation du système

Dans un système à données partiellement connues tel que celui qu'on considère en (S), il est naturel de vouloir reconstituer le tout ou une partie des données inconnues, cela est bien évidemment impossible si on observe rien du système étudie. Soit H l'espace de données observées, nous citons deux types d'observations :

1/ L'ouvert O peut consister en plusieurs composantes donc les observations se font aux points O_i, $i = 1, 2, 3, ...$, et les sources de pollution sont générées aux points S_i (figure 2), un tel cas a été étudié dans [5].

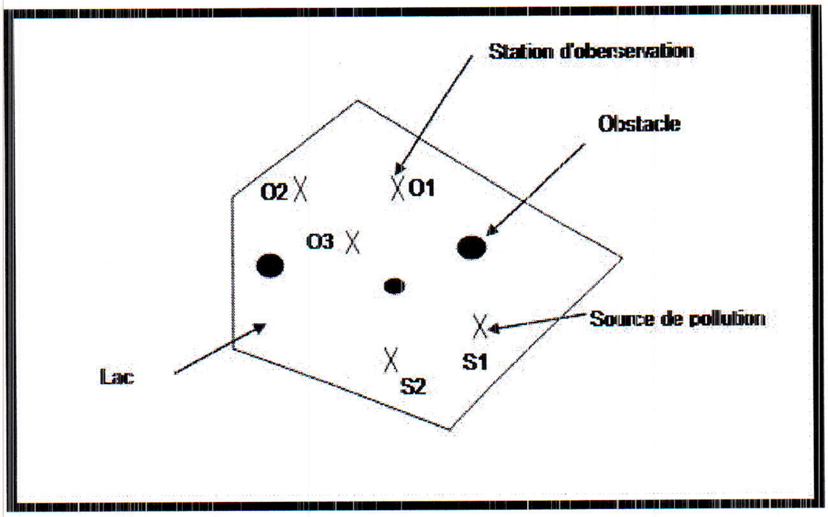


Figure 2 : Modèle d'un fluide soumis à deux sources de pollution $\{S1, S2\}$ *dont l'observation est faite au points* $\{O_1, O_2, O_3\}$.

2/ On peut considérer d'un observatoire $O \subset \Omega$ où les données observées sont continues par rapport au temps et à l'espace. De telles observations peuvent être faites au moyen d'un navire, c'est par exemple le cas d'un bateau observatoire et Ω étant un océan ou un lac,....En outre, on peut avoir des observations discontinues en temps.

On observe l'état du système "y" sur O pendant l'intervalle de temps $[0, T]$, donc théoriquement, on va disposer de

$$y(x,t) = y_{obs} \qquad \text{sur } O \times (0,T), \tag{2.4}$$

où y_{obs} est une mesure connue.

Donc, on s'interesse à un problème d'identification de paramètres qui interviennent linéairement dans un système partiellement observé tels que reste des données sont mal connues, Ces inconnues supplémentaires sont les termes manquants et ne sont pas destinées à être identifiées. Nous désirons que l'estimation du terme de pollution soit correcte malgré la néconnaissance des termes manquants.

Pour résoudre ce problème d'identification, une technique trés répondue est la méthode de " moindres carrés".

2.6 Méthode de moindres carrés

Cette méthode est restée la plus populaire des techniques d'identification de paramètres aussi bien pour les équations différentielles ordinaires (EDO) que pour les équations aux dérivées partielles (EDP).

Supposons que v représente le vecteur des paramètres recherchés. La technique des moindres carrés consiste à minimiser la distance au carré entre les valeurs observées y_{obs} et les valeurs calculées $y(v)$ pour les v (représente les termes inconnus) parcourant l'espace des paramètres U. Ainsi, le problème d'identification revient à la résolution du problème d'optimisation

$$\min_{v \in U} \|y(v) - y_{obs}\|^2 , \tag{2.5}$$

où $y(v)$ est la solution du système (S).

2.6.1 Problème d'identification

Soit $B : E \to F$ où E l'èspace des donnèes et F l'èspace des mesures et y_{obs}=Cy l'óbservation, alors : B est identifiable à partire des mesures y_{obs}

si B est injective. La mesure expérimentale y_{obs} et la solution du problème, dépond de "λ" mais aussi des termes manquants "τ", nous considérons alors le vecteur complet des inconnus $v(\lambda, \tau)$. Nous pouvons chercher le vecteur $v \in E$ tel que $y(v)$ est le plus proche au sens des moindre carrés (au sens de la norme $L^2(O)$).

Le problème est donc formulé de la manière suivante :

$$(P) \text{ Trouver } v \in E \text{ minimisant } \|y(v) - y_{obs}\|^2_{L^2(O)} \text{ sur } \mathbb{R}^2 .$$

Seule la partie intéressante de v est conservé, i.e : λ.

Donc, la méthode de moindre carré permet de comparer les donnée expérimentale généralement entachées d'érreur de mesure d'un modèle mathématique censsé d'écrire ces données.

On s'interesse au problème où les systèmes sont linéaires i.e l'équation d'état est linéaire par rapport à "v" donc, il existe un opérateur linéaire qui associe $y(v)$ à v. Nous noterons cet opérateur B, il est définit comme suit :

$$B : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & L^2(O), \\ v & \longmapsto & Bv = \chi_{\vartheta} y(v). \end{array} \right.$$

2.6.2 Résolution du problème d'optimisation

Soit le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$\text{(P) } \{min J(v), v \ dans \ \mathbb{R}^2\}$$

tel que J est la fonction objective donnée par :

$$\begin{aligned}
J(v) &= \|B(v) - y_{obs}\|^2, \\
&= (B(v) - y_{obs}, B(v) - y_{obs}), \\
&= (Bv, Bv) - (Bv, y_{obs}) - (y_{obs}, Bv) + (y_{obs}, y_{obs}), \\
&= (B^*Bv, v) - 2(B^*y_{obs}, v) + \|y_{obs}\|^2,
\end{aligned}$$

avec B^* est l'adjoint de B (dans le cas finie, B^* est la matrice transposé de B).

$$B^* : \left| \begin{array}{ccc} L^2(O) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2, \\ \omega & \longmapsto & B^*\omega. \end{array} \right.$$

Possons : $B^*B = A$, $B^*y_{obs} = C$ et $\|y_{obs}\|^2 = M$ tels que $M > 0$.

Alors : $J(v)$ devient :

$$J(v) = (Av, v) - 2(C, v) + M,$$

qui est une forme quadratique et la question maintenant est :

Le problème (P) admet-il une solution unique ?

1. **Existence et l'unicité :**

   Pour que notre problème a une seule solution, il faut que la fonction J soit continue, coercive et strictement convexe.

   - On a J une fonction quadratique donc il est continue. - De plus, parmi les proprietées des foctions quatratiques

   $$J \text{ est quadratique} \Longrightarrow (Av, v) \geq \lambda_{min}\|v\|^2,$$

   avec λ_{min} est la plus petite valeurs propres de A, et comme B injective, donc A est inversible c-à-d elle est définit positive. On conclut que, les valeurs propres de A sont stritement positive. On obtient ;

$$\lim_{\|v\|\to+\infty} J(v) = +\infty \Longrightarrow J \text{ est coercive.}$$

- J est strictement convexe car $H = A$ est définie positive tels que H est la matrice hissiene

2. **Conditions d'optimalité :**

   Si le problème (P) admet une unique solution, elle est caractérise par l'équation d'Euler :

$$\nabla J(v) = 0.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \nabla J(v) &= 0 \Rightarrow 2Av - 2C = 0, \\ &\Rightarrow 2B^*Bv - 2B^*y_{obs} = 0, \\ &\Rightarrow B^*Bv = B^*y_{obs}. \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$v = (B^*B)^{-1}B^*y_{obs}. \qquad (2.6)$$

Remarque 2.6.1 .

1- Une condition nécessaire (mais non suffisante) de l'existence d'un unique vecteur "v" de (2.6) est l'injectivité de B.

2- La condition suffisante pour garantir l'existence de l'optimum v est que l'image de B soit fermée. En effet, la résolution de (P) revient à rechercher la projection orthogonale de y_{obs} sur l'image de B, ce qui n'est possible que si $Im\ B = \overline{ImB}$. Cependant, même si $Im\ B \neq \overline{ImB}$, il est possible d'y remédier en cherchant des solution approchées.

2.6.3 Les inconvients de la méthode MC

Dans la méthode de moindres carrés :

1- tous les paramètres inconnus jouent le même rôle. On ne fait pas de différence entre les paramètres (aux termes sources et aux termes initiaux). Il y a donc des risques de ne pas pouvoir séparer nettement les rôles des uns et des autres.

2- De plus, les données disponibles y_{obs} peuvent être insuffisantes par rapport au nombre des paramètres recherchés, ce qui conduit à une infinité de solutions possibles. On a, dans ce cas, un problème d'unicité de la solution.

3- Aussi pour un jeu de données prélevées dans le même domaine, la résolution peut conduire à une forte perturbation de la solution, il s'agit d'un problème de stabilité.

Face à toutes ces éventualités, on dit de manière générale que notre problème est mal posé.

Sans négliger cette méthode fondamentale, qui demeure de loin la plus importante pour ce type de problèmes, il peut être utile de tenter celle dite " La méthode des sentinelles".

Chapitre 3

Méthode des sentinelles

Dans ce chapitre, on va présenter la sentinelle qui est une forme linéaire agissant sur les observations qui doit vérifier des conditions de sensibilité à certains paramètres du système et d'insensibilité à d'autres. Donc l'idée des sentinelles semble un peu différente de la méthode de moindres carée. On imagine alors qu'avec un ensemble convenable de sentinelle on pourra identifier les inconnues intéressantes et s'affranchir les autres.

3.1 Position du problème

On considère un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$, ($n = 1, 2, 3$ dans les applications), borné de frontière $\partial\Omega = \Gamma$ assez régulière (de classe C^2 afin de ne pas rencontrer de problème de régularité). Pour $T > 0$ fixé, on définit :
$Q = \Omega \times [0, T]$ et $\sum = \Gamma \times]0, T[$, on considère la solution $y(x, t)$ du système :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay = \zeta + \lambda\widehat{\zeta} & dans \ \ Q, \\ y(0) = y^0 + \tau\widehat{y}^0 & dans \ \ \Omega, \\ y = 0 & sur \ \ \sum. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Ce système est à données incomplète où

- Les fonctions ζ et y^0 sont données respectivement dans $L^2(Q)$ et $L^2(\Omega)$.
- Le terme de pollution $\lambda\widehat{\zeta}$ et le terme manquant $\tau\widehat{y}^0$ sont inconnues respectivement dans $L^2(Q)$ et $L^2(\Omega)$.
- Les réels λ et τ sont arbitrairement petits.
- L'équation (3.1) admet une unique solution dans $L^2(Q)$ que l'on note

$$y(x,t,\lambda,\tau) = y(\lambda,\tau).$$

La question qui se pose est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Comment peut-on calculer le terme de pollution } \lambda\widehat{\zeta} \textit{ (ou d'obtenir des informations)} \\ \qquad \textit{qui soit indépendant des variations de la donnée initiales auteur de } y_0? \end{array} \right.$$

Donc, nous nous intéressons à l'estimation du terme de pollution sans toutefois manifester un intérêt pour le terme manquant.

3.2 Présentation de la méthode des sentinelles

Plaçons nous dans le cas où les données observées y_{obs} ne sont pas bruitées. L'idée fondamentale pour répondre à la question précédente est de prendre une valeur moyenne, pour savoir si quelques chose se passe. Soit donc h une fonction donnée sur $(0,T)\times O$. On considère alors la moyenne

$$\mathfrak{M}(\lambda,\tau) = \int_0^T \int_O h.y(x,t,\lambda,\tau)dxdt,$$

et on cherche à déterminer le terme de pollution indépendamment du terme en τ, au premier ordre par exemple. Mais, il n'y a en général aucune raison pour que, au premier ordre, $\mathfrak{M}(\lambda,\tau)$ soit indépendante de τ. Autrement dit, il n'y a aucune raison pour que

$$\frac{\partial\mathfrak{M}(\lambda,\tau)}{\partial\tau}(0,0) = \int_0^T \int_O h.\frac{\partial y}{\partial\tau}(0,0)dxdt = 0.$$

On introduit une fonction w, et on donne la définition d'une fonctionnelle dite "*sentinelle*" qui soit la moyenne de l'état y sur un petit domaine, donnée par l'expression suivante :

$$S(\lambda,\tau)=\int_0^T\int_O (h+w).y(x,t,\lambda,\tau)dxdt, \tag{3.2}$$

pour les fonctions h et $w\in L^2(]0,T[\times O)$.

Définition 3.2.1 : *On dit que S est une sentinelle de Lions définie par h, s'il existe un contrôle w tel que le couple (w,S) vérifie :*

$$\frac{\partial S}{\partial\tau}(\lambda,\tau)\bigg|_{\lambda=\tau=0}=0,\quad \forall\widehat{y}^0\in L^2(\Omega), \tag{3.3}$$

et

$$\|\omega\|_{L^2_{(]0,T[\times O)}}=\min. \tag{3.4}$$

Remarque 3.2.1 : *La condition (3.3) exprime l'insensibilité de la sentinelle par rapport au terme manquant au premier ordre et la condition (3.4) exprime que l'on s'éloigne le moins possible de la moyenne, elle sélectionne une unique sentinelle.*

Remarque 3.2.2 *Le choix $w=-h$ donne lieu à (3.3). Par conséquent, sous des hypothèses très générales, le problème (3.3) et (3.4) admet une solution unique. Mais il faudra s'assurer que sous des conditions convenables, $w\neq -h$, la fonctionnelle $S(\lambda,\tau)=0$ n'étant pas susceptible de nous apporter beaucoup d'informations.*

3.2.1 Informations fournies par les sentinelles

La fonction sentinelle, une fois construite, la détermination du terme de pollution se déduit par le développement de Taylor à l'ordre 1 de S et en considèrent (3.2) (3.3) on a :

$$\begin{aligned} S(\lambda,\tau) &= S(0,0)+\lambda\frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0)+\tau\frac{\partial S}{\partial \tau}(0,0)+o(\|(\lambda,\tau)\|) \\ &= S(0,0)+\lambda\frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0)+o(\|(\lambda,\tau)\|), \end{aligned} \tag{3.5}$$

puisque par définition $\left.\frac{\partial S}{\partial \tau}(\lambda,\tau)\right|_{\lambda=\tau=0}=0$, on peut déduire

$$\lambda \approx \frac{1}{\beta}\times(S(\lambda,\tau)-S(0,0)),\quad \beta=\frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0), \tag{3.6}$$

en remplaçant $S(\lambda,\tau)$ par S_{obs} la solution observée

$$S_{obs}=\int_{O}\int_{0}^{T}(h+w).y_{obs}\,dxdt. \tag{3.7}$$

On a l'estimation

$$\lambda\times\beta\approx(S_{obs}-s(0,0)). \tag{3.8}$$

On va maintenant montrer comment, avec h donné, on peut construire l'unique fonction w telle que l'on ait (3.3) (3.4).

3.2.2 Méthode variationnelle

La condition "d'insensibilité" de la sentinelle par rapport aux termes manquants est équivalente à

$$\int_{0}^{T}\int_{O}(h+w).y_{\tau}\,dxdt=0, \tag{3.9}$$

où

$$y_{\tau}=\frac{\partial y}{\partial \tau}(0,0)=\lim_{\tau\to 0}\left(\frac{y(0,\tau)-y(0,0)}{\tau}\right),$$

alors y_τ la solution du système d'équation

$$\left\{\begin{array}{rl} \dfrac{\partial y_{\tau}}{\partial t}+Ay_{\tau}=0 & dans\ \ Q, \\ y_{\tau}(0)=\widehat{y}^{0} & dans\ \ \Omega, \\ y_{\tau}=0 & sur\ \ \Sigma, \end{array}\right. \tag{3.10}$$

En effet, $y(0,\tau)$ est solution du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial y(0,\tau)}{\partial t} + Ay(0,\tau) = \zeta & \textit{dans} & Q, \\ y_\tau(0,\tau)(0) = y_0 + \tau\widehat{y}^0 & \textit{dans} & \Omega, \\ y_\tau(0,\tau) = 0 & \textit{sur} & \Sigma, \end{array}\right. \tag{3.11}$$

et y_0 est solution du système

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial y_0}{\partial t} + Ay_0 = 0 & \textit{dans} & Q, \\ y_0(0) = y^0 & \textit{dans} & \Omega, \\ y_0 = 0 & \textit{sur} & \Sigma, \end{array}\right. \tag{3.12}$$

En retranchant (3.12) de (3.11) et en multipliant par $\dfrac{1}{\tau}$, on trouve :

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\frac{y(0,\tau)-y_0}{\tau}\right) + A\left(\frac{y(0,\tau)-y_0}{\tau}\right) = 0 & \textit{dans} & Q, \\ \dfrac{y(0,\tau)(0) - y_0(0)}{\tau} = \widehat{y}^0 & \textit{dans} & \Omega, \\ \left(\frac{y(0,\tau)-y_0}{\tau}\right) = 0 & \textit{sur} & \Sigma. \end{array}\right. \tag{3.13}$$

Par passage a la limite quand $\tau \to 0$ dans (3.13), on obtient (3.10).

3.2.3 Equivalence à un problème de contrôlabilité

Soit maintenant $q = q(x,t)$ l'état adjoint qui est la solution du problème rétrograde suivant :

$$\left\{\begin{array}{lll} -\dfrac{\partial q}{\partial t} + A^* q = (h+w)\chi_O & \textit{dans} & Q, \\ q(T) = 0 & \textit{dans} & \Omega, \\ q = 0 & \textit{sur} & \sum. \end{array}\right. \tag{3.14}$$

Lemme 3.2.1 *On suppose que q est solution du problème (3.14). Alors le problème d'existence d'une sentinelle insensible aux termes manquants est équivalent à un problème de contrôlabilité à zéro, c'est-à-dire $q(0) = 0$.*

Démonstration 1 *Si on multiplie la première équation du système (3.14) par y_τ tels que $y_\tau = \dfrac{\partial y}{\partial \tau}$, on obtient*

$$\begin{aligned}(-q' + A^*q, y_\tau) &= (h + w, y_\tau),\\ (-q', y_\tau) + (A^*q, y_\tau) &= (h + w, y_\tau).\end{aligned}$$

On intègre ensuite par partie :

$$-\int_0^T q' y_\tau = -([q.y_\tau]_0^T - \int_0^T q.y_\tau').$$

Donc :

$$\begin{aligned}-(q(T), y_\tau(T)) + (q(0), y_\tau(0)) + (q, y_\tau') + (q, Ay_\tau) &= (h + w, y_\tau),\\ (q, y_\tau' + Ay_\tau) + (q(0), \hat{y_0}) &= (h + w, y_\tau),\\ (q(0), \hat{y_0}) &= (h + w, y_\tau).\end{aligned}$$

On a $(h + w, y_\tau) = 0$, donc $(q(0), \hat{y_0}) = 0$. Par conséquent, la condition (3.9) équivaut à

$$q(0) = 0. \tag{3.15}$$

Ceci est un problème de contrôlabilité à zéro. Donc, le problème de trouver une sentinelle S telle que (3.14) ait lieu, est équivalent au problème de contrôlabilité à zéro suivant :

$\{$*Trouver* $w \in L^2(]0, T[\times O)$*tel que l'on ait* (3.14) *et* (3.15)

En résumé, le problème d'existence d'une unique sentinelle revient à résoudre le problème d'optimisation suivant

$$(P)\ \begin{cases} \min \|w\|^2_{L^2(]0,T[\times O)} \\ (w, q) \in A \end{cases}$$

$J(w,q) = \int \phi(w, q(\cdot))$

$J(w,q) = \int |w(t)|^2 dt$

où

$$A = \left\{ (w,q) \text{ tel que } \left| \begin{array}{ll} -\dfrac{\partial q}{\partial t} + A^* q = (h+w)\chi_O & \textit{dans } Q, \\ q(T) = q(0) = 0 & \textit{dans } \Omega, \\ q = 0 & \textit{sur } \sum, \end{array} \right. \right\}$$

Le domaine des contraintes du problème (P) est non vide car $w = -h$ donne $q \equiv 0$, par conséquent le problème (P) admet toujours une solution et une seule que l'on note $\widehat{w}$ car la fonction $\|\widehat{w}\|^2$ est continue, coercive et stristement convexe. Il reste donc deux problèmes à résoudre

1- Calculer $\widehat{w}$,

2- S'assurer que $\widehat{w} \neq h$.

Une méthode classique pour obtenir le système d'optimalité pour le problème (P) est la méthode de pénalisation.

3.2.4 Pénalisation

Soit $\varepsilon > 0$, on introduit la fonction suivante :

$$J_\varepsilon(w,z) = \frac{1}{2}\|w\|^2_{L^2(O\times(0,T))} + \frac{1}{2\varepsilon}\left\| -\frac{\partial z}{\partial t} + A^* z - (h+w)\chi_O \right\|^2_{L^2(Q)},$$

et on considère le problème (P_ε) suivant

$$(P_\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \min \|w_\varepsilon\|^2_{L^2(]0,T[\times O)} \\ (w_\varepsilon, z_\varepsilon) \in A^\varepsilon \end{array} \right. ,$$

avec

$$A^\varepsilon = \left\{ (k,z) \text{ tel que } \left| \begin{array}{ll} -\dfrac{\partial z}{\partial t} + A^* z - (h+w)\chi_O \in L^2(Q), & \\ z(T) = z(0) = 0 & \textit{dans } \Omega, \\ z = 0 & \textit{sur } \sum, \end{array} \right. \right\}$$

le problème (P_ε) admet une solution unique qu'on notera $(w_\varepsilon, z_\varepsilon)$. On pose

$$\rho_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(-z'_\varepsilon + A^* z_\varepsilon - w_\varepsilon \chi_O).$$

Le couple $(w_\varepsilon, z_\varepsilon)$ est caractérisé par

$$\nabla J_\varepsilon(w, z) = 0,$$

donc

$$(w_\varepsilon, w) + (\rho_\varepsilon, -z'_\varepsilon + A^* z_\varepsilon - w_\varepsilon \chi_O) = 0,$$

Pour tout z tel que

$$\begin{cases} L\rho_\varepsilon = 0 & \text{dans } Q, \\ \rho_\varepsilon = 0 & \text{sur } \sum, \end{cases} \tag{3.16}$$

le contrôle optimal est caractérise comme suit :

$$w_\varepsilon = \rho_\varepsilon \chi_O, \tag{3.17}$$

où

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + A,$$

et par passage a la limite on obtient une fonction ρ solution d'un système d'optimalité du problème initial (P). Finalement le contrôle est

$$\overline{w} = \rho \chi_O,$$

Dans ce cas, on doit supposer que h déffirent de ρ pour obtenir une sentinelle non identiquement nulle.

3.3 Différent type de la sentinelle

La notion de sentinelle de Lions où le contrôle et l'observation sont dans le même domaine, devient un cas particulier. On propose pour la définition précédente une généralisation de la notion de sentinelle au cas d'une observation et d'un contrôle ayant leurs supports dans deux ouverts différents.

3.3.1 Sentinelle régionale

On considère ici $h \in L^2((0,T) \times O)$ et ω un ouvert non vide de Ω, tel que $\omega \neq O$. Plus précisément pour une fonction contrôle

$$w \in L^2((0,T) \times \omega).$$

On pose

$$\begin{aligned} S(\lambda,\tau) &= \int_0^T \int_O h.y(x,t,\lambda,\tau)dxdt + \int_0^T \int_\omega w.y(x,t,\lambda,\tau)dxdt \quad (3.18) \\ &= \int_0^T \int_\Omega (h\chi_O + w\chi_\omega).y(x,t,\lambda,\tau)dxdt, \end{aligned}$$

où χ_O et χ_ω sont les fonctions caractéristiques de O et ω respectivement.

Définition 3.3.1 *On dit que S est une sentinelle définie par h, s'il existe un contrôle w tel que le couple (w,S) vérifie :*

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \tau}(\lambda,\tau)\right|_{\lambda=\tau=0} = 0,$$

et

$$\|w\|_{L^2(]0,T[\times\omega)} = \min.$$

Le problème d'existence d'une sentinelle revient à minimiser le contrôle sur un ensemble de contraintes.

L'information fournie par la sentinelle S, d'aprés (3.8), est donnée par

$$\lambda \int_0^T \int_\Omega (h\chi_O + w\chi_\omega).y_\lambda dxdt = \int_0^T \int_\Omega (h\chi_O + w\chi_\omega).(y_{obs} - y_0)dxdt,$$

où $y_\lambda = \dfrac{\partial y}{\partial \lambda}(0,0)$ est solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_\lambda}{\partial t} + Ay_\lambda = \widehat{\zeta} & dans\ Q, \\ y_\lambda(0) = 0 & dans\ \Omega, \\ y_\lambda = 0 & sur \sum, \end{cases} \tag{3.19}$$

En multipliant la première équation par q et en intègrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega qLy_\lambda dxdt &= \int_0^T \int_\Omega y_\lambda L^* q dxdt + \int_\Omega q(T) y_\tau(T) dx \\ &- \int_\Omega q(0) y_\tau(0) dx - \int_0^T \int_\Gamma q.\frac{\partial y_\lambda}{\partial \nu} d\Gamma dt \\ &+ \int_0^T \int_\Gamma y_\lambda.\frac{\partial q}{\partial \nu} d\Gamma dt. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Comme q et y_λ sont solutions de (3.14) et (3.19) respectivement, (3.20) devient

$$\int_0^T \int_\Omega (h\chi_O + w\chi_\omega).y_\lambda dxdt = \int_0^T \int_\Omega q.\widehat{\zeta} dxdt.$$

Finalement, on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega (h\chi_O + w\chi_\omega).(m_0 - y_0)dxdt = \int_0^T \int_\Omega q.\lambda\widehat{\zeta} dxdt. \tag{3.21}$$

Donc, la connaissance du contrôle optimal w fournie des informations sur le terme de pollution $\lambda\widehat{\zeta}$.

3.3.2 Sentinelle discrète

Jean Pierre Kernevez et son équipe ont été les premiers à avoir proposé des résultats numériques sur les sentinelles dans les applications liées a la pollution de l'environnement dans les années 90 [voir 2, 3, 4, 5 ,6]. Ces auteurs s'accordent à définir la source de pollution comme étant une fonction continue par rapport au temps en une position ponctuelle de l'espace. Nous nous plaçons dans le cas de problème (3.1), qui peut s'écrire sous la forme suivante

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay) = \zeta + \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i \widehat{\zeta_i} \delta(x - a_i) & dans \;\; Q, \\ y(0) = y^0 + \sum\limits_{j=1}^{M} \tau_j \widehat{y}_i^0 & dans \;\; \Omega, \\ y = 0 & sur \;\; \sum . \end{array}\right. \tag{3.22}$$

où

- Les a_i sont les points d'observation,
- $\delta(x - a_i)$ est la fonction de Dirac au point a_i.
- Les fonctions sources $\lambda_i \widehat{\zeta_i}$ qu'on suppose dans $L^2(0, T)$.

Maintenant, le problème peut être formulé comme suit :

Trouver (λ_i ,$i = 1, ..., N$)$\in l^2(R)$ représentant au mieux le débit qui a produit la mesure y_{obs}.

On définit une fonction $w_i \in L^2(O)$ spécifique à la $i^{ème}$ composante de λ doit être construite telle que :

$$(w_i, y_{obs})_{L^2(O)} = \lambda_i, \tag{3.23}$$

où y_{obs} est la fonction d'état mesurée. Si une telle fonction w_i existe, son unicité est assurée en choisissant la fonction de norme minimale.

La fonction w_i désigne la sentinelle permettant de déterminer le paramètre λ_i, donc pour estimer tout les λ_i, nous devons calculer toute la famille de fonctions $(w_i)_{i=1,N}$. On a

$$y(\lambda,\tau)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i y_i+\sum_{j=1}^{M}\tau_j y_{\tau_j}, \tag{3.24}$$

où $(y_i)_{i=1,N}$ et $(y_{\tau_j})_{j=1,M}$ sont respectivement les solutions des équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rl}\dfrac{\partial y_i}{\partial t}+Ay_i=\widehat{\zeta}_i\delta(x-a_i) & dans\;\; Q,\\ y_i(0)=0 & dans\;\; \Omega,\\ y_i=0 & sur\;\; \sum.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl}\dfrac{\partial y_{\tau_j}}{\partial t}+Ay_{\tau_j}=0 & dans\;\; Q,\\ y_{\tau_j}(0)=\;y_{\tau_j} & dans\;\; \Omega,\\ y_{\tau_j}=0 & sur\;\; \sum.\end{array}\right.$$

Alors, le produit scalaire de w_i avec $y(\lambda,\tau)$ devient

$$(w_i,y(\lambda,\tau))_{L^2(O)}=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(w_i,y_i)_{L^2(O)}+\sum_{j=1}^{M}\tau_j(w_i,y_{\tau_j})_{L^2(O)},$$

Par conséquent, la formule (3.23) est équivalente à :

$$\left\{\begin{array}{l}(w_i,y_k)_{L^2(O)}=1 \quad si\ i=k\\ (w_i,y_k)_{L^2(O)}=0\;\; \forall k=1,...,N,\quad k\neq i\\ (w_i,y_{\tau_j})_{L^2(O)}=0.\end{array}\right.$$

Ensuite, nous utilisons l'état adjoint noté q_i et en intégrant par partie en espace et en temps, les égalités précédentes deviennent :

$$\begin{array}{rcll}\displaystyle\int_0^T\widehat{\xi}_i(t)q_i(a_i,t)dt &=& 1, & 1\leq i\leq N,\\ \displaystyle\int_\Omega y_0(x)q_i(x,0)dx &=& 0, &\end{array}$$

Ce résultat est fondamental pour le calcul des sentinelles. En effet, il résume le fait que la sentinelle est sensible à λ_i et insensible à tous les autres paramètres de l'équation (3.22). Il permet aussi d'interpréter les égalités précédentes comme un problème de contrôle optimal.
Cette méthode discrète a été exploitée dans la détermination des pollutions dans un aquifère [3], dans un Lac [6] et dans une rivière [5,4,5].

3.3.3 Sentinelle discriminante

On considère le problème (3.1), les données observées peuvent être affectées d'erreurs sur les mesures ou effet de "bruits", donc

$$y_{obs} = m_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i m_i,$$

où les fonctions $m_0, m_1, ..., m_n$ sont connues dans $L^2(O \times (0,T))$ mais les $\beta_i \neq 0$ ne sont pas connus, on dit que les β_i sont les termes de bruit. Le problème maintenant est :
Peut-on obtenir des informations sur $\lambda\widehat{\zeta}$ qui ne soient pas affectées par les variations de $y(0)$ autour de y^0, et qui ne soient pas affectées par les bruits $\beta_i m_i$, $i = 1, ...n$?
Dans une telle situation, en plus des hypothèses (3.3)-(3.4) il faudrait associer *une condition d'insensibilité* de la sentinelle aux effets des bruits

$$\int_0^T \int_O (h + w).m_i \; dxdt = 0, \; 1 \leq i \leq n. \tag{3.25}$$

Une telle sentinelle est dite *"discriminante" [8, 14].*

Remarque 3.3.1 *:*

1) La sentinelle discriminante n'est pas sensible aux termes manquants (en τ), elle n'est pas non plus sensible aux bruits (en β), elle peut donc différentier ce qui provient des termes en λ de ce qui provient des termes en β (propriétés de discrimination).

2) Si $\omega \neq O \subset \Omega$, la condition (3.25) devient

$$\int_0^T \int_O h.m_i \, dxdt + \int_0^T \int_\omega w.m_i \, dxdt = 0, \; 1 \leq i \leq n. \tag{3.26}$$

Définition 3.3.2 *On dit que S est une sentinelle discriminante (ou sentinelle pour une observation avec bruit) définie par h s'il existe un contrôle w tel que :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \tau}(0,0) = 0, \quad \forall \widehat{y}^0 \in L^2(\Omega), \\ \int_0^T \int_O h.m_i \, dxdt = 0, \; 1 \leq i \leq n. \\ \|w\|_{L^2(\omega \times (0,T))} = \min \end{cases}$$

3.3.4 Sentinelle faible

Dans cette section, on utilise une notion appelée " sentinelle faible" [8,12] pour étudier l'estimation du terme de pollution du systèmes distribués faiblement contrôlable indépendament du terme manquant. Soit le système (3.1) et $\omega = O$. on a la définition suivante :

Définition 3.3.3 *On dit que la fontionnelle S définie par*

$$S(\lambda, \tau) = \int_O \int_0^T (h + w).y(x, t, \lambda, \tau) dxdt,$$

est une sentinelle faible (ou sentinelle approchée) s'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un contrôle w_ε tel que

$$\frac{\partial S}{\partial \tau}(\tau, \lambda)\Big|_{\tau=0,\lambda=0,} \leq \varepsilon, \quad \forall \widehat{y}^0 \in L^2(\Omega), \tag{3.27}$$

et

$$\|w_\varepsilon\|_{L^2(O\times(0,T))} = \min. \tag{3.28}$$

Pour construire la sentinelle faible, on doit déterminer w_ε qui assure les conditions (3.27) et (3.28).

Remarque 3.3.2 *L'approche par la méthode des sentinelles faible est équivaut à un problème de contrôlabilité faible.*

Conclusion

Cette mémoire est consacrée à des problèmes dont les données sans manquantes (inconnues ou partiellement connues), où on a traité l'identification du terme de pollution qui soit indépendant des variations du terme manquant.

Dans la première partie, nous avons présenté la théorie des contrôle où on a parlé des systèmes linéaires contrôlé.

Dans la seconde partie, nous avons présenté la première méthode utilisé pour étudier les problèmes à données manquantes et de donner des informations concernant le terme de pollution, c'est la méthode de moindres carrée.

Dans la troisième partie, nous avons présenté la méthode des sentinelles de J. L. Lions, qui soit la stratégie la plus répondus consiste à obtenir des informations sur les termes manquants à partir d'une moyenne pondérée de l'observation. Enfin, nous citons les différents types de la sentinelle.

Bibliographie

[1] B. E. AINSEBA, J. P. KERNEVEZ, R. LUCE, Application des sentinelles à l'identification de pollution dans les rivières, RAIRO, vol. 28, N 3, pp. 297-312, 1994.

[2] B. E. AINSEBA, J. P. KERNEVEZ, R. LUCE, Identification de paramètre dans des problèmes nonlinéaires à données incomplètes, RAIRO, vol. 28, N 3, pp. 313-328, 1994.

[3] D. ACHELI, J. P. KERNEVEZ, F. OUKASI, The sentinel method used in idendification of the position and trajectory of a source of pollution, Applicable Analysis, vol. 70 (3-4), pp. 303-319, 1999.

[4] O. BODART, Applications de la méthode des sentinelles à l'identification des sources de pollution dans un système distribué. Contrôles insensibilisants, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de compiègne, 1993.

[5] O. BODART, J. P. KERNEVEZ, T. MANNIKKO, Numerical method to compute sentinels for distributed system. In Proccedings of the 16th IFIP, TC7 conference in system modelling and optimisation, Springer Verlag, Paris, 1994.

[6] J. P. KERNEVEZ, The sentinel method and its aplications to environmental pollution problems, Methematical modeling series, CRC. Press, Boca Raton, 1997.

[7] J. L. LIONS, Controllability, penalty and stiffness, Anal, Scie, Nor, Serie 4, Tome 25, N 3-4, pp. 597-610, 1997.

[8] J .L. LIONS, Sentinelle pour les systèmes distribués à données incomplètes. Vol 21, Masson, RMA, Paris, 1992.

[9] J. L. LIONS, Remarks on systems with incompletely given initial data and incompletely given part of boundary, pp. 239-250, 1990.

[10] C. LOBRY, T. SARI, Introduction à la théorie du contrôle, école du CIMPA Tlemsen, 2003.

[11] A. TRAORE, B. MAMPASSI, B. SALEY, A numerical approach of the sentinel method for distributed parameter systems, C. Euro. J. Mathe, Vol 5, N 4, pp. 751-763, 2007.

[12] A. TRAORE, B. MAMPASSI, L. SOME, A least square spectral collocation fomulation for solving PDEs on complex geometry domains, Int. J. Appl. Math. Comp, Vol 2 (4), pp. 9-22, 2011.

[13] A. TRAORE, Contribution à la résolution numérique de problèmes de détection de pollution en milieu fluide à structure géométrique complexe, Thèse Doctorat, Université de Cheikh Anta Diop, Sénégal, 2008.

[14] E. TRELAT, Contrôle optimal : Théorie et applications Note de Cours, Université de Paris-sud, 2000.

[15] J.VELIN, Discriminating distributed sentinel involving a navier stokes problem and parameter identification, Esaim, Proseedings, pp. 143-166, 2007.