République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

M/510.139

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

جامعة 08 ماي 45 قالمة
قسم الرياضيات
كلية الرياضيات، الإعلام الآلي وعلوم المادة

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Probabiités et Applications**

جامعة 08 ماي 45 قالمة
مصلحة الإعارة الخارجية
كلية الرياضيات، الإعلام الآلي وعلوم المادة

Par :

Melle GHERAIBI Wahida et Melle CHOUDER Wissam

Intitulé

LA CLASSE D'UNICITÉ DES MARTINGALES LOCALES CONTINUES

Dirigé par : Mme. Sakrani Samia

Devant le jury

PRESIDENT	Mr.BOUHADJAR Sliman	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Mr. SAKRANI Samia	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Mr. EZZEBSSA A.Ali	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2015

Remerciement

Nous remercions d'abord le bon dieu, pour le courage qu'il nous ' a donné pour surmonter toutes les difficultés durant nos années d'étude.

Nous remercions nos parents pour leurs contributions, leurs contributions, leurs soutiens et leurs patiences.

Nous faillirons à la tradition si nous n'exprimons pas ici notre, gratitude envers tous ceux qui ont collaborés de prés ou de loin à l'exécution de cemémoire :

Nous remercions très vivement notre encadreur : SAKRANI Samia

Pour nos avoir conseillés, guidés et dirigés notre travail qu'elle retrouve ici l'expression et notre profonde gratitude pour votre aide précieuse, assistance et claire lors de l'élaboration de ce travail.

Nous exprimons également nos chaleureux remerciements auIZZABSSA A.Aliet BOUHADIAR Slimanau ,pour l'honneur qu'ils nous ont fait d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Nous terminons avec un remerciment bien particulier à tous qui ont participé de prés ou de loin à contribuer à contribuer à notre réussite.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, on a intrduit la classe d'unicité des lois martingales locales continues M déterminées par la loi $L(\langle M \rangle)$ de leur processus de variation quadratique$\langle M \rangle$ c'est-à-dire : $L(M) \in U$ équivaut à : si M' est une martingale locale continue définie éventuellement sur un autre espace filtré telle que $L(\langle M \rangle) = L(\langle M' \rangle)$ alors $L(M) = L(M')$

Ce document est composé de trois chapitres

Le premier chapitre est consacré aux rappels des résultats importants en calcul stochastique concernant les processus stochastiques, on donnera les principales propriétés du mouvement brownien ainsi que celles des martingales locales. on abordera enfin la notion d'intégrale stochastique ainssi que la formule d'Itô.

Dans le deuxième chapitre : On a généralisé la caractérisation de Lévy (Théorème chap 1) (c'est-à-dire si $\langle M \rangle_t = t$ pour une martingale locale continue M alors M est un M.B). On démontre dans ce chapitre que les seules lois des martingales locales continues déterminées par leur lois de crochets (générralisation de la variance) sont les martingales gaussiennes (M.B est une martingale gaussienne). Ainsi on donnera une définition mathématique d'une martingale locale d'Ocone. On finira ce chapitre par l'énoncé du théorème de caratérisation de la classe U.

Dans le dernier chapitre, on introduit quelques propriétées des martingales d'Ocone. Il s'agit des propriétées du mouvement brownien standard. On terminera ce chapitre en énonçant d'autres classes des martingales continues.

Chapitre 1

Rappels et Compléments

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats de calcul stochastique utilisés le long de ce mémoire.

1.1 Vecteurs gaussiens

Dans tout ce qui suit, (Ω, F, P) désigne un espace de probabilité complet.

Définition 1.1.1 On dit qu'une v.a.r X définie sur (Ω, F, P) est une variable aléatoire gaussiennee de paramètres (m, σ^2), $\left(m \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+^*\right)$ si sa fonction de densité f_X est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right).$$

Dans ce cas, sa loi P_x est donnée par

$$\forall A \in \beta_{\mathbb{R}}, \qquad P_X(A) = \int_A f_X(x)\, dx$$

et on note $X \sim N(m, \sigma^2)$. ($\beta_{\mathbb{R}}$ est la tribu borélienne)

Remarque 1.1.2 Lorsque $\sigma = 0$, X est une variable constante i.e. $X = mP-$p.s.

Définition 1.1.3 $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ est un vecteur aléatoire gaussien si toutes les combinaisons linéaires de ses composantes sont gaussiennes i.e.

$$\forall a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \quad \text{est une v.a.r gaussienne.}$$

Exemple 1.1.4 Si X et Y sont deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes alors (X, Y) et $(X - Y, X + Y)$ sont des vecteurs gaussiens

1.2 Processus stochastiques

Définition 1.2.1 Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ est une suite croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$.
Si $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ alors $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t>0}, P)$ est appelé espace de probabilité filtré.

Définition 1.2.2

- Si $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration alors on définit la filtration suivante

$$\mathcal{F}_{t^+} = \left(\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \right).$$

- On dit qu'une filtration est continue à droite

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}.$$

- Soit N la classe des ensembles de $\mathcal{F}$ qui sont $P-$ négligeables. Si $N \subset \mathcal{F}_0$, on dit que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ est complète.

- On dit qu'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfait les conditions habituelles si elle est à la fois continue à droite et complète.

Définition 1.2.3 Soit T un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- un processus stochastique $(X_t)_{t\in T}$ dans $\mathbb{R}^d (d \geq 1)$ est une famille de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ indexée par T.

- Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \to X_t(\omega)$ est appelée trajectoire.

Définition 1.2.4 Un processus X est progressivement mesurable par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si, pour tout $t \geq 0$, l'application $(s, \omega) \to X_s(\omega)$ de $[0, t] \times \ \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à

$\beta([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\beta\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Définition 1.2.5 Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est mesurable si l'application $(t,\omega) \longrightarrow X_t(\omega)$ de $\mathbb{R} \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport aux tribus $\beta\left(\mathbb{R}_+\right) \otimes \mathcal{F}$ et $\beta\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Définition 1.2.6 Soit (X_t) un processus et $(\mathcal{F}_t)$ une filtration de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si

$$\forall t \geq 0,\ X_t \text{ est } \mathcal{F}_t- \text{ mesurable.}$$

Exemple 1.2.7
Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.
A présent, nous donnons trois critères pour comparer deux processus stochastiques.

Définition 1.2.8 Soit $X = (X_t)_{t\in T}$ un processus stochastique. Les lois de dimension finie du processus X sont les lois des vecteurs du type $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ où $n \geq 1$ et $t_1, ..., t_n \in T$.

On dit que deux processus $(X_t)_{t\in T}$ et $(Y_t)_{t\in T}$ ont même loi s'ils ont les mêmes lois de dimension finie.

Définition 1.2.9 Soient $X = (X_t)_{t\in T}$, $Y = (Y_t)_{t\in T}$ deux processus stochastiques.

1. On dit que Y est une modification de X si

$$\forall t \in T, \quad P(X_t = Y_t) = 1.$$

2. On dit que les processus X et Y sont indistinguables si

$$P(\forall t \in T, X_t = Y_t) = 1, \quad \text{on note } X \equiv Y.$$

Proposition 1.2.10 Soient T un intervalle de $\mathbb{R}$, $X = (X_t)_{t\geq 0}$et $Y = (Y_t)_{t\in T}$ deux processus stochastiques continus alors :

$$X \text{ et } Y \text{ sont indistinguables} \Longleftrightarrow X \text{ est une modification de } Y.$$

Définition 1.2.11 Un processus $X = (X_t)_{t\in T}$ est un processus gaussien si toutes ses lois de dimension finie sont gaussiennes i.e.

$\forall n \geq 1, \; \forall t_1 < t_2 < ..., t_n \in T, \; (X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ est un vecteur gaussien.

Définition 1.2.12 On dit que le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est à accroissements indépendants si :

$\forall n \geq 1, \forall t_1, ..., t_n \in T, \; X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

Nous pouvons à présent définir le processus le plus important en calcul stochastique, à savoir le mouvement brownien appelé aussi processus de Wiener.

Le mouvement brownien, qui tient son nom de Richard Brown, botaniste Ecossais du 19 ème siècle, est considéré comme un phénomène naturel d'une part, et un objet mathématique d'autre part.
Observant le mouvement irrégulier et incessant des particules de pollen en suspension dans l'eau, Richard brown effectua des expériences avec des particules inorganiques en suspension dans un liquide. Le phénomène qui paraissait à priori vital fut alors écarté de la biologie.
De ce fait des chercheurs comme Einstein, Wiener et Levy s'intéressèrent à ce phénomène d'un point de vue autre que le point de vue naturel en lui donnant une forme mathématique qui n'est en vérité qu'une idéalisa tion mathématique du mouvement réel. Le mouvement brownien est alors présenté comme :

Définition 1.2.13 (Le mouvement brownien).
Le mouvement brownien standard est un processus stochastique réel $B = (B_t)_{t \geq 0}$ vérifiant :

i) $B_0 = 0 \; P$ p.s.
ii) $\forall s \in [0, t], \; Bt - Bs \sim N(0, t - s)$.
iii) $\forall n \geq 1, \forall t_1 \leq t_2 \leq .... \leq t_n \; ; \; B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.
iv) $P - p.s.$, l'application $t \longrightarrow B_t$ est continue.

Pour cette dernière définition, on peut remplacer les propriétés ii) et iii) par d'autres propriétés comme le montre la proposition suivante :

Proposition 1.2.14 Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\begin{cases} ii)(B_t; t \in \mathbb{R}_+) \text{ est à accroissements indépendants,} \\ iii)\forall 0 \leq s < t, B_t - B_s \text{ suit une loi normale } N(0, t - s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ii')\forall t \geq 0, B_t \text{ suit une loi normale } N(0,t), \\ iii')\forall 0 < s \leq t, B_t - B_s \text{ est indépendant de } F_s = \sigma(B_u, u \leq s) \end{cases}$$
$$\begin{cases} ii'')\ (B_t)_{t>0} \text{ est un processus gaussien, centré,} \\ iii'')\forall s,t \in \mathbb{R}_+, cov\,(B_t, B_s) = E\,[B_t B_s] = s \wedge t. \end{cases}$$

Définition 1.2.15

- Soit $x \in \mathbb{R}$, un mouvement brownien issu de x $B^x = (B_t^x)_{t>0}$ est un processus qui vérifie ii), iii) et iv) et $B_0 = x$, $P-$p.s.

- Un mouvement standard dans $\mathbb{R}^d$ noté BM^d est un processus $B = (B_t)_{t>0}$ où $B_t = \left(B_t^1, ..., B_t^d\right)$ avec $\{(B_t^i), 1 \leq i \leq d\}$ des mouvements browniens standard indépendants.

Le mouvement brownien possède de nombreuses bonnes propriétés, en effet :

Proposition 1.2.16 Soit $B = (B_t)_{t>0}$ un mouvement brownien défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ alors

-a) **Symétrie.**
Le processus $(-B) = (-B_t)_{t>0}$ est encore un mouvement brownien.

-b) **Changement d'échelle (scaling).**
Soit $\lambda > 0$. Le processus $B^\lambda = (B_t^\lambda)_{t>0}$ avec $B_t^\lambda = \left(\frac{1}{\lambda}\right) B_{\lambda^2 t}$ est encore un mouvement brownien.

-c) **Propriété de Markov simple.**
Pour $s \geq 0$, posons $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$ et $B_t^{(s)} = B_{t+s} - B_s$ alors $B^{(s)} = \left(B_t^{(s)}\right)_{t>0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$

Définition 1.2.17 Soit $(\mathcal{F}_t)$ une filtration et $T : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ une application. On dit que T est un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Définition 1.2.18 Soit T un temps d'arrêt, posons $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\mathcal{F}_t, t \geq 0\right)$ On appelle tribu des évènements antérieurs à T et on note $\mathcal{F}_T$ la tribu

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty, \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

Remarque 1.2.19
On vérifie facilement que $\mathcal{F}_T$ est une tribu et que, si T est constant et égale à t alors T est un temps d'arrêt et $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$

Lemme 1.2.20 (Propriété de Markov forte.)
Soient $B = (B_t)_{t>0}$ un mouvement brownien, T un temps d'arrêt. Posons pour $t \geq 0$

$$Y_t = B_{T+t} - B_T$$

Alors, sur $\{T < \infty\}$, le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$

Définition 1.2.21 (Processus prévisible)
Un processus stochastique est dit $(\mathcal{F}_t)$-privisible si la fonction de $(t, \omega) \in \tau \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable par rapport à la tribu sur $\tau \times \Omega$ engendrée par les processus adaptés est *cont*inue à gauche.
En quelque sort, la valeur de X en t est entièrement déterminé à partir des valeurs passées de $X(s)$, $s < t$. Intuitivement, un processus prévisible est un processus dont la valeur en t découle des valeurs observés avant t.
Proposition 1.2.22 Soit X un processus $(\mathcal{F}_t)$-privisible alors pour tout t, X_t est $(\mathcal{F}_t)$ mesurable.
Proposition 1.2.23 Tout processus adapté à $(\mathcal{F}_t)$ est continue à gauche est $(\mathcal{F}_t)$-privisible.

1.3 Martingales à temps continu

On suppose donné un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$

Définition 1.3.1 Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté et intégrable, on dit que X est

1. Une martingale si

$$\forall 0 \leq s \leq t, \quad E(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s.$$

2. Une surmartingale si

$$\forall 0 \leq s \leq t, \quad E\left(X_t/\mathcal{F}_s\right) \leq X_s.$$

3. Une sousmartingale si

$$\forall 0 \leq s \leq t, \quad E\left(X_t/\mathcal{F}_s\right) \geq X_s.$$

Exemples 1.3.2 Si $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $\theta \in \mathbb{C}$, alors les processus

$$(B_t)_{t\geq 0}, (B_t^2 - t)_{t\geq 0} \text{ et } \left(e^{\theta B_t - \frac{\theta^2}{2}t}\right)_{t\geq 0}$$

sont des martingales par rapport à la filtration naturelle de B.

Définition 1.3.3 Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique
1) On dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable si :

$$\lim_{\alpha \longrightarrow +\infty} \sup_{t\geq 0} \int_{(|X_t|>\alpha)} |X_t|\, dP = 0$$

2) Si $p \geq 1$, on dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est borné dans L^p si :

$$\sup_{t\geq 0} E\left[|X_t|^p\right] < \infty$$

Proposition 1.3.4 Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique :
1) S'il existe une v.a.r positive et intégrable Z telle que $|X_t| \leq Z, \forall t \geq 0$, alors $X = (X_t)_{t\geq 0}$est uniformément intégrable.

2) Si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est borné dans L^p, $(p > 1)$, alors $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable.

Théorème 1.3.5 (Inégalité maximale de Doob).
Si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue à droite, alors

$$\forall p > 1; \quad \left(E\left[\left|\sup_{0\leq s\leq t} X_s\right|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \sup_{0\leq s\leq t} \left(E\left[|X_s|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 1.3.6 (martingale arrêtée)
Si $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale et T un temps d'arrêt, alors $M^T = \left(M_t^T\right)_{t\geq 0} = (M_{T\wedge t})_{t\geq 0}$ est encore une martingale. Elle est appelée martingale arrêtée.

Proposition 1.3.7 Soient β une sous-tribu de $\mathcal{F}$, Y un vecteur aléatoire $\beta-$mesurable et X une variable aléatoire indépendante de β. Alors, pour toute fonction mesurable h

$$E\left[h\left(X,Y\right)/\beta\right] = \Phi\left(Y\right), P-\text{p.s},$$

où $\Phi\left(t\right) = E\left(h\left(t,X\right)\right)$

1.4 L'intégrale stochastique

Soit $B = (Bt)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle i.e. $\mathcal{F}_t = \sigma\left(B_u, u \leq t\right)$. Le mouvement brownien n' étant pas à variation bornée, on ne peut pas s'appuyer sur la théorie de l'intégration classique de Riemann-Stieljes afin de donner un sens à la quantité

$$\int_0^t H_s dB_s$$

où H est un processus stochastique continu. C'est pour cette raison qu'on construit une nouvelle intégrale, appelée l'intégrale d'Itô.

Définition1.4.1 Soit $A = (A_t)_{t\geq 0}$ un processus continu et adapté,

1. On dit que A est croissant, si pour tout $\omega \in \Omega$,

$$t \longrightarrow A_t\left(\omega\right) \quad \text{est croissante}$$

2. On dit que A est à variation bornée, si pour tout $\omega \in \Omega$

$$t \longrightarrow A_t\left(\omega\right) \quad \text{est à variation borné}$$

Définition 1.4.2 Soit $\left(\Delta_n = \left\{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < ... < t_{p_n-1}^{(n)} < t_{p_n}^{(n)} = t\right\}\right)_{n\geq 0}$

une suite de subdivisions de $[0,t]$ telle que :

$|\Delta_n| \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu.

Posons :

$$T_t^{\Delta_n}(X) = \sum_{i=1}^{p_n-1} \left(X_{t_{i+1}^{(n)}} - X_{t_i^{(n)}} \right)^2$$

On dit que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est à variation quadratique finie sur $[0, t]$ si $T_t^{\Delta_n}(X)$ converge en probabilité. Cette limite est alors notée $< X, X >_t$ i.e.

$$< X, X >_t = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{p_n-1} \left(X_{t_{i+1}^{(n)}} - X_{t_i^{(n)}} \right)^2 \quad \text{en probabilité.}$$

Remarque 1.4.3
Si $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard et $t > 0$, alors on a :

$$< B, B >_t = t \qquad \text{et} \quad V_0^t(B) = \infty \qquad P - p.s.$$

Définition 1.4.4 (Martingale locale)
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré,$X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu.
On dit que X est une $(\mathcal{F}_t, P)$ −martingale locale, s'il existe une famille de temps d'arrêt $\{T_n, n \geq 1\}$, telle que

i) La suite $(T_n)_{n\geq 1}$ est croissante et $\lim_{t \longrightarrow \infty} T_n = +\infty$ p.s,

ii) Pour tout n, le processus $X^{T_n} 1_{\{T_n > 0\}} = \left(X_t^{T_n} 1_{\{T_n > 0\}} \right)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t, P)$ − martingales uniformément intégrable.

La classe des martingales locales est strictement plus large que celle des martingales continues, cependant on a :

Proposition 1.4.5
- Toute martingale continue est une martingale locale.
- Une martingale locale positive est une surmartingale.
- une martingale locale bornée est une martingale.

Théorème 1.4.6 Si $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale alors il existe un "unique" processus continu, adapté, croissant et issu de 0 noté $(< M, M >_t)_{t\geq 0}$ tel que :

$$(M_t^2 - < M, M >_t)_{t \geq 0}$$

soit une martingale locale (continue).
De plus, pour tout $t > 0$, toute suite$(\Delta_n)_{n \geq 0}$ de subdivisions de $[0, t]$ avec $|\Delta_n| \longrightarrow 0$,

$$\sup_{s \leq t} \left(T_t^{\Delta_n}(M) - < M, M >_t \right) \xrightarrow{p} 0$$

Si $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale locale, on a vu que le $< M, M >_t$est bien défini. De plus $t \longrightarrow < M, M >_t$ est une fonction positive croissante, ainsi on peut poser pour $\omega \in \Omega$

$$< M, M >_\infty (\omega) = \lim_{t \longrightarrow \infty} < M, M >_t (\omega) .$$

Théorème 1.4.7 Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une martingale locale issue de 0.

1. Si M est une martingale bornée dans L^2 alors $E\,(< M, M >_\infty) < \infty$ et $(M_t^2 - < M, M >_t)_{t \geq 0}$ est une martingale uniformément intégrable.

2. Si $E\,(< M, M >_\infty) < \infty$ alors M est une martingale bornée dans L^2.

3. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

   i) M est une martingale de L^2

   ii) $\forall t \geq 0,\ E\,(< M, M >_\infty) < \infty$.
   Si ces deux conditions sont vérifiées alors $(M_t^2 - < M, M >_t)_{t \geq 0}$ est une martingale.

Définition 1.4.8 (Semimartingale).
Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus continu, on dit que M est une semimartingale s'il s'écrit :

$$X_t = X_0 + M_t + A_t$$

où $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale locale continue issue de 0 et $(A_t)_{t \geq 0}$ est un processus continu à variation bornée issu de 0.

Théorème 1.4.9

1. Si $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale locale continue et $A = (A_t)_{t \geq 0}$ un processus continu à variation bornée, alors

$$< A, A > \equiv 0 \equiv < M, A >$$

2. Si $X_t = X_0 + M_t + A_t$ et $Y_t = Y_0 + N_t + H_t$ sont deux semimartingales, alors

$$< X, Y > \equiv < M, N > .$$

où $< M, N >_t = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sum\limits_{i=1}^{p_{n-1}} \left(M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n} \right) \left(N_{t_{i+1}^n} - N_{t_i^n} \right)$ p.p.s

Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une martingale locale issue de 0. On note par $L^2_{loc}(M)$ l'espace des processus progressivement mesurables $H = (H_t)_{t \geq 0}$ vérifiant :

$$\forall t \geq 0, \quad \int\limits_0^t H_s^2 d < M, M >_s < \infty \qquad P\text{-p.s}$$

Théorème 1.4.10 Si $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une martingale locale issue de 0 et $H = (H_t)_{t \geq 0} \in L^2_{loc}(M)$ alors il existe un "unique" processus noté $((H.M)_t)_{t \geq 0}$ tel que

- $((H.M)_t)_{t \geq 0}$ est une martingale locale issue de 0

- Pour toute martingale locale $N = (N_t)_{t \geq 0}$

$$< H.M, N > = H. < M, N >$$

on note aussi

$$(H.M)_t = \int_0^t H_s dM_s$$

Passons à présent à l'intégrale stochastique par rapport aux semimartingales. Soient $H = (H_t)_{t \geq 0}$ un processus continu et adapté, $X = (X_t)_{t \geq 0}$ une semimartingale continue i.e.

$$X_t = X_0 + M_t + V_t$$

où $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale locale issue de 0 et $V = (V_t)_{t \geq 0}$ est un processus à variation bornée, continu et issu de 0. On note

$$(H.X)_t = \int_0^t H_s dX_s.$$

Définition 1.4.11 Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ une semimartingale continue qui se décompose

$$X_t = X_0 + M_t + V_t$$

. Si $H = (H_t)_{t \geq 0}$ est un processus continu et adapté alors l'intégrale stochastique de H par rapport à X est définie par

$$H.X = H.M + H.V$$

Remarque 1.4.12 Si $H = (H_t)_{t \geq 0}$ est un processus continu et $V = (V_t)_{t \geq 0}$un processus à variation bornée. Alors

$$(H.V)_t = \int_0^t H_s dV_s$$

est bien définie (au sens de Riemann Stieljes)

Propriétés 1.4.13
Soient $K = (K_t)_{t \geq 0}$, $H = (H_t)_{t \geq 0}$ deux processus progressivement mesurable et $B = (B_t)_{t \geq 0}$un mouvement brownien standard.

- Si X est une martingale locale continue alors $H.X$ est une martingale locale continue.
- Si X est une martingale continue, bornée dans L^2 alors $H.X$ l'est aussi
- Si X est un processus continu à variation bornée alors $H.X$ est un processus à variation bornée.
- Si X est une semimartingale continue alors $H.X$ l'est aussi
- Si H et K sont $L^2_{loc}(B)$ alors pour tout $t \geq 0$

$$E\left[(H.B)_t\,(H.K)_t\right] = \int_0^t H_s K_s ds$$

- Soit $M = (M_t, t \geq 0)$ une martingale. Si

$$E\left(\int_0^t H_s^2 d < M, M >_s < \infty\right) \quad \forall t \geq 0$$

Alors $H.M$ est une martingale, De plus

$$E\left[\left(\int_0^t H_s dM_s\right)^2\right] = E\left(\int_0^t H_s^2 d < M, M >_s\right)$$

En particulier, si $H = (H_t)_{t \geq 0}$ un processus de $L^2_{loc}(B)$ alors

$$\left(M_t = \int_0^t H_s dB_s\right)$$

est une martingale

L'intégrale stochastique possède une formule de changement de variables semblable à la formule du changement de variable classique mais qui fait apparaître la dérivée de second ordre inexistante dans la théorie de l'intégrale de Riemann, ceci découle du fait que la variation quadratique est nulle pour les fonctions à variation bornée. Le résultat suivant établit cette formule :

Théorème 1.4.14 (Formule d'Itô)
Si $X^1, ..., X^d$ sont des semimartingales continues et $F : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, alors $\left(F\left(X_t^1, ..., X_t^d\right)\right)_{t\geq 0}$ est une semimartingale, de plus pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} F\left(X_t^1, ..., X_t^d\right) &= F\left(X_0^1, ..., X_0^d\right) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}\left(X_s^1, ..., X_s^d\right) dX_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\left(X_s^1, ..., X_s^d\right) d\left\langle X^i, X^j\right\rangle_s \end{aligned}$$

Cette formule est souvent utilisée pour les semimartingales de dimension 2 et dont l'une des composantes est un processus à variation bornée. Dans ce cas on a :

Lemme 1.4.15 Soit $A = (A_t)_{t\geq 0}$ un processus à variations bornée, $X = (X_t)_{t\geq 0}$ une semimartingale continue et g une fonction C^2.On a alors :

$$\begin{aligned} g\left(A_t, X_t\right) &= g\left(A_0, X_0\right) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial u} g\left(A_r, X_r\right) dA_r + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial v} g\left(A_r, X_r\right) dX_r \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} g\left(A_r, X_r\right) d\left\langle X, X\right\rangle_r \end{aligned}$$

dans le cas où $F(x,y) = xy$, on a :

Théorème 1.4.16 (Formule d'intégration par parties).
Soient X et Y deux semimartingales. On a pour tout $t \geq 0$

$$dX_tY_t = X_tdY_t + Y_tdX_t + d < X, Y >_t$$

Lorsque la formule d'Itô est appliquée à une fonction vérifiant l'équation de la chaleur, on obtient

Corollaire 1.4.17 Si $M = (M_t)_t \geq 0$ une martingale locale et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors $\varepsilon^\lambda(M) = (\varepsilon^\lambda(M)_t)_t \geq 0$ est une martingale locale , avec

$$\varepsilon^\lambda(M)_t)_t = e^{\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M,M\rangle_t}$$

Preuve. Posons

$$F(s,x) = e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}s}$$

F vérifie l'équation de la chaleur i.e.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial s} = 0,$$

donc, par la formule d'Itô,

$$\begin{aligned}
\varepsilon^\lambda(M)_t &= F\left(\langle M,M\rangle_t, M_t\right) \\
&= e^{\lambda M_0} + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}\left(\langle M,M\rangle_s, M_s\right) dM_S
\end{aligned}$$

d'où $\varepsilon^\lambda(M)$ est une martingale locale.

On a vu dans la remarque (1.4.3) que la variation quadratique du mouvement brownien sur $[0,t]$ vaut t, le résultat suivant montre que la réciproque aussi est vraie :

Théorème 1.4.18 (Caractérisation de Lévy.)
Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu, adapté et issu de 0. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. X est un mouvement brownien.

2. X est une martingale locale et $< X, X >_t = t$.

Le résultat suivant montre que pour les martingales locales, le crochet est une horloge interne qui permet de retouver le processus quand on évalue un M.B. dans la classe des martingales locales continues.

Téorème1.4.19 (Dubins Schwarz)
Soit M une martingale locale continue issue de 0 et telle que $\langle M, M\rangle = +\infty$ p.s alors, il existe un mouvement brawnien B tel que :

$$\text{p.s} \qquad \forall t \geq 0, \qquad M_t = B_{\langle M,M\rangle_t}.$$

Théorème 1.4.20 (Représentation des martingales browniennes).
Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale (cadlàg) de carré intégrable pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, la filtration d'un mouvement brownien $B = (B_t)_{t\geq 0}$. Alors il existe un unique processus $H = (H_t)_{t\geq 0}$ de $M^2(\mathbb{R})$, tel que

$$\forall t \geq 0, \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s.dB_s \qquad P-\text{p.s.}$$

Théorème 1.4.21 (Inégalités de Burkholder, Davis et Gundy (BDG).)
Soit $p > 0$. Il existe deux constantes c_p et C_p telles que, pour toute martingale locale X continue et issue de 0,

$$c_p E\left[\langle X, X\rangle_\infty^{p/2}\right] \leq E\left[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle X, X\rangle_\infty^{p/2}\right]$$

En particulier, si $T > 0$,

$$c_p E\left[\langle X, X\rangle_T^{p/2}\right] \leq E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle X, X\rangle_T^{p/2}\right]$$

Définition 1.4.22 on note par sgn la fonction signe définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 0, \\ -1 & \text{si} \quad x < 0, \end{cases}$$

Proposition 1.4.23 (Formule de Tanaka.)

$$|B_t| = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\, dB_s + L_t$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard et L_t le temps local en 0 du mouvement brownien B (le temps local passé par B en 0 jusqu'au temps t).

(L_t) est un processus adapté à $(\mathcal{F}_t)$(la filtration canonique du mouvement brownien)

Définition 1.4.22(Martingale d'Ocone).
Une martingale locale continue M dont la représentation est $M_t = B_{\langle M\rangle_t}$ est dit une martingale locale d'Ocone si B est indépendant de $\langle M\rangle$.

Chapitre 2

La classe d'unicité des martingales locales continues

De façon générale, la loi $L(\langle M\rangle)$ du processus de variation quadratique d'une martingale locale continue M ne détermine pas la loi $L(M)$ de M. En effet, deux martingales locales de lois différentes peuvent avoir le même processus de variation quadratique.

On s'intéresse ici à la caractérisation de la classe U des lois $L(M)$ de martingales locale continues M déterminées par la loi $L(\langle M\rangle)$ de leur processus de variation quadratique $\langle M\rangle$ c'est-à-dire : $L(M) \in U$ équivaut à : si M' est une martingale locale continue définie éventuellement sur un autre espace filtré telle que $L(\langle M\rangle) = L(\langle M'\rangle)$, alors $L(M) = L(M')$.

Récemment, dans [16], les auteurs ont remarqué que la classe U est incluse dans la classe des martingales locales d'Ocone (voir la Définition 2.1.1 ci-dessous), et ont formulé la conjecture suivante, qu'on démontre ici : la classe U coïncide avec la classe des martingales gaussiennes (modulo une condition supplémentaire, assez faible).

Dans la suite, on utilise les notations de [16] : pour une martingale locale continue M, on désingne par C l'inverse continu à droite de $\langle M\rangle$: $C_t = \inf\{s \geq t\,,\, \langle M\rangle_s > t\}$, $\{\mathcal{F}_t^M\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle de M, $\{\mathcal{F}_t^N\}_{t\,\geq\,0}$ la filtration de son crochet $\langle M\rangle$ et $\left(\mathcal{F}_t^C\right)$ la filtration de C (soulignons que la tribu $\left(\mathcal{F}_0^C\right)$ interviendra dans plusieurs de nos arguments).
Toutes les filtrations considérées sont complètes et continues à droite. De

plus, sauf précision contraire, B désignera le mouvement brownien de Dubins-Shwarz (DDS) associés à M.

2.1 Les martingales locales d'Ocone :

Nous prendrons ici pour définition d'une martingale locale d'Ocone la définition suivante :

Définition 2.1.1 une martingale locale continue est dite martingale locale d'Ocone si elle est nulle on 0, et si son mouvement brownien de DDS est indépendant de $\langle M \rangle$.

Cette définition est équivalente à la propriété suivante : si $\{\varepsilon_t\}_{t \geq 0}$ est un $\mathcal{F}^M$–processus prévisible à valeursdans $\{-1, +1\}$ alors

$$M^\varepsilon \overset{(loi)}{=} M \quad \text{où } M_t^\varepsilon = \int_0^t \varepsilon_s dM_s\,; \qquad (1)$$

c'est cette propriété dont Ocone [11] a montré initialement qu'elle est équi-
valente à la Définition 2.1.1 ci-dessus. Pour d'autres propriétés équivalentes à (1), voir [4] et [16].

La proposition simple suivante, nous servira souvent par la suite :

Proposition 2.1.2 Soit M une matingale locale continue. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$i)$ $L(M) \in U$.

$ii)$ Pour tout espace filtré $(\Omega,\ A,\ P,\ \mathcal{F})$, s'il existe une $\mathcal{F}$–martingale locale continue M'avec $L(\langle M' \rangle) = L(\langle M \rangle)$, alors M' est une martingale locale d'Ocone.

Preuve. Il suffit de montrer que, si $L(M) \in\ U$ alors M une martingale locale d'Ocone. Pour tout processus $(\varepsilon_t)_{t \geq 0}$ prévisible et à valeurs dans $\{-1, +1\}$, si

$$M_t^\varepsilon = \int_0^t \varepsilon_s dM_s,$$

alors

$$\langle M^\varepsilon \rangle \equiv \langle M \rangle.$$

D'où

$$L(M) = L(M^\varepsilon).$$

Remarque 2.1.3.
1)Il est naturel pour notre étude d'introduire la notion de $\mathcal{F}-$martingale locale d'Ocone (comme on a introduit la notion de $\mathcal{F}-$ mouvement brownien, etc).
Une $\mathcal{F}-$martingale locale d'Ocone est une $\mathcal{F}-$martingale locale qui satisfait (1) pour tout processus $\mathcal{F}-$prévisible $(\varepsilon_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\{-1,+1\}$. En général, une martingale locale d'Ocone n'est pas une $\mathcal{F}-$martingale locale d'Ocone. Par exemple, si $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle d'un mouvement brownien B, alors les seules $\mathcal{F}-$martingales locales d'Ocone de crochet strictement croissant, sont des martingales gaussiennes. En effet, soit M une $\mathcal{F}-$martingale locale d'Ocone, $M_t = \int_0^t \mu_s dB_s$, alors $M_t' = \int_0^t |\mu_s| \, dB_s$ est une martingale locale d'Ocone. D'aprés le Théorème 3 de [16], le processus $(|\mu_t|)_{t\geq 0}$ est indépendant de B et il est en même temps adapté à B, d'où $\langle M \rangle$ est déterministe. Dans [16], on trouve des exemples de martingale locale d'Ocone M "au sens strict" (c'est-a-dire qui ne sont pas gaussiennes) dans la filtration $\mathcal{F}$ (avec $\mu_t > 0$ $dtdP$ $p.p.$).

2)Remarquons que si $L(M) \in U$ et M est une $\mathcal{F}-$martingale locale, alors M est une $\mathcal{F}-$martingale locale d'Ocone. Mais l'hypothèse qu'une martingale locale de M soit $\mathcal{F}-$martingale locale d'Ocone est loin d'être suffisante pour que $L(M) \in U$, car cette hypothèse impose l'égalité des processus de variation quadratique, ce qui est beaucoup plus restrictif que la seule égalité de leurs lois (voir proposition 2.3.11 ci-dessous).

Voici un exemple d'une martingale locale d'Ocone M telle que $L(M) \notin U$:soit (B^1, B^2) un mouvement brownien 2-dimensionnel, d'aprés [16] la martingale locale $M_t = \int_0^t |B_s^1| \, dB_s^2$ est une martingale locale d'Oone. Mais la martingale locale $N_t = \int_0^t |B_s^1| \, dB_s^1$ qui satisfait évidement $\langle M \rangle \equiv \langle N \rangle$ n'a pas même loi que M (car N est extrémale et donc n'est pas une martingale locale d'Ocone).

2.2 Quelques éléments de la classe U

Il est clair que si $\mathcal{F}_{\infty}^{N} = \mathcal{F}_{0}^{N}$ alors $L(M) \in U$. le lemme suivant permet d'avoir d'autres éléments de U.

Lemme 2.2.1 Soit M une martingale locale continue. Si M' est une martingale locale continue telle que $\langle M' \rangle \overset{(loi)}{=} 1_{[\varepsilon,+\infty[}\langle M \rangle_{-\varepsilon}$, alors

$$L(M) \in U \text{ implique que } L(M') \in U.$$

Preuve. Soit $M'_t = B'_{\langle M' \rangle_t}$ une martingale locale continue de filtration $\left(\mathcal{F}_t^{M'}\right)$ satisfaisant $\langle M' \rangle \overset{(loi)}{=} 1_{[\varepsilon,+\infty[}\langle M \rangle_{-\varepsilon}$. Soit A le processus continu croissant $A_t = \langle M' \rangle_{t+\varepsilon}$. A est un $\mathcal{F}_{C'}^{M'}$−changement de temps continu et $N_t = B'_{A_t}$, est une martingale locale continue dont la loi du crochet est $L(\langle M \rangle)$. D'aprés la proposition 2.1.2, N est une martingale locale d'Ocone et donc M' aussi, d'où $L(M') \in U$

La proposition suivante nous fournit une condition suffisante pour que $L(M) \in U$.

Proposition 2.2.2 Soient M une martingale locale continue et C l'inverse de $\langle M \rangle$. Si $\mathcal{F}_{\infty}^{N} = \mathcal{F}_{0}^{C}$, alors $L(M) \in U$.

Remarque 2.2.3.
En fait, on démontre ci-dessus que cette propriété est caractéristique des éléments de la classe U.
On insiste sur le fait que cette propriété est bien $\mathcal{F}_{0}^{C} = \mathcal{F}_{\infty}^{N}$ et non $\mathcal{F}_{0}^{N} = \mathcal{F}_{\infty}^{N}$, car en générale, $\mathcal{F}_{0}^{C} \neq \mathcal{F}_{0}^{N}$.
Un contre exemple simple est donné aprés la preuve.

Preuve. Si M' est une martingale locale continue telle que

$$L(M') = L(\langle M \rangle), \text{ alors } \mathcal{F}_{\infty}^{N'} = \mathcal{F}_{0.}^{C'}.$$

D'où, si B' est le mouvement brownien de DDS de M', alors B' est indépendant de $\mathcal{F}_{0}^{C'} \subset \mathcal{F}_{C_0}^{M'}$et donc de $\mathcal{F}_{\infty}^{N'}$, ce qui donne que M' est une martingale locale d'Ocone.D'aprés la proposition 2.1.2, $L(M) \in U$.

Voici un exemple simple d'une martingale M qui n'est pas gaussienne avec $L(M) \in U$. Soient a_1 et a_2 deux fonctions continues et croissantes de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $a_1(0) = a_2(0) = 0$ et η une variable aléatoire de Bernoulli $\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$P(\eta = 1) = P(\eta = 0) = \tfrac{1}{2}.$$

On définit la martingale d'Ocone M associée au processus croissant donné par :

$$\langle M \rangle_t = a_1(t)\, 1_{\{\eta=1\}} + a_2(t)\, 1_{\{\eta=0\}}.$$

On a

$$\mathcal{F}_\infty^N = \sigma(\eta) = \mathcal{F}_0^C.$$

D'où

$$L(M) \in U.$$

Pour $\varepsilon > 0$, si M' est la martingale d'Ocone associée au processus croissant $\langle M' \rangle$, telle que :

$$\langle M' \rangle \overset{(loi)}{=} 1_{[\varepsilon,+\infty[} \langle M \rangle_{-\varepsilon}$$

alors $L(M') \in U$, d' aprés le lemme 2.2.1. Remarquons aussi que :

$$C_0' = \varepsilon,\ \mathcal{F}_0^{C'} = \sigma(\eta)$$

et $\mathcal{F}_0^{N'}$ est triviable. Donc $\mathcal{F}_0^{N'} \neq \mathcal{F}_0^{C'}$.

Dans un premier temps, on va traiter le cas où $d\langle M \rangle_t$ est équivalente à dt. Dans ce cas, les éléments de U correspondants sont les martingales gaussiennes, ce qui découlera aisément de la proposition suivante :

Proposition 2.2.4 Soit M une martingale locale continue définie sur un espace filtré $(\Omega, A, P, \mathcal{F})$ telle que :

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds \text{ et } H_s > 0\ dsdP \text{ p.s.}$$

Si $L(M) \in U$, alors $\langle M \rangle$ est indépendant de tout $\mathcal{F}-$mouvement brownien B.

Preuve. Un grossissement indépendant (c'est-à-dire le plongement de Ω dans le produit de Ω par l' espace de Winer) permet de supposer qu'il exist sur Ω un mouvement brownien B' indépendant de $\mathcal{F}_\infty$.
Posons

$$M'_t := \int_0^t H_s dB_s \text{ et } M''_t := \int_0^t H_s dB'_s.$$

M et M'' sont deux $\mathcal{F}'-$martingales
où

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F} \vee \beta' \left(\beta' = \mathcal{F}^N at\ (B')\right)$$

On a :

$$B_t = \int_0^t \frac{dM'_s}{H_s} \text{ et } B'_t = \int_0^t \frac{dM''_s}{H_s}$$

donc B et B' sont adapté à $\{\mathcal{F}_t^{M'}\}$ et $\{\mathcal{F}_t^{M''}\}$ respectivement (grâce à la positivité de H).
D'où,

$$(\langle M \rangle, B) \overset{(loi)}{=} (\langle M \rangle, B').$$

Ainsi, $\langle M \rangle$ est indépendant de B

Théorème 2.2.5 Soit M une martingale locale continue de loi $L(M) \in U$ telle que :
i) $\langle M \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds,$
ii) $H_s > 0\ dsdP$ p.s.
iii) Il existe un mouvement prownien B, d-dimensinnel, $d \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, tel que $\langle M \rangle$ soit adapté à la filtratoin de B.
Alors $\langle M \rangle$ est déterministe.

Preuve. Considérons la filtration naturelle de B. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_i(s))_{1 \leq i \leq n}$ des fonctions déterministes boréliennes bornées telles que

$$\sum_{i=1}^n f_i^2(s) > 0.$$

Soit γ le mouvement prownien :

$$\gamma_t = \int_0^t \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(s) dB_s^i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} f_i^2(s)\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

D'aprés la Proposition 2.2.4, $\langle M \rangle$ est indépendant de γ et donc de $\int_0^t \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(s)\, dB_s^i$.

Alors, pour tout $t \geq 0$ et toutes fonctionnelle $\Phi \geq 0$ on a :

$$E\left[\Phi\left(\langle M \rangle_s, s \leq t\right) \exp\left(\int_0^t \sum_{i=1}^{n} f_i(s)\, dB_s^i\right)\right] = E\left[\Phi\left(\langle M \rangle_s, s \leq t\right)\right] E\left[\exp\left(\int_0^t \sum_{i=1}^{n} f_i(s)\, dB_s^i\right)\right].$$

Ainsi, $\langle M \rangle$ est indépendant de B et en même temps adapté à B, donc déterministe.

Le théorème suivant, dû à M. Émery, nous permet de supprimer l'hypothèse (iii) du Théorème 2.1.5.
Nous utilisons la terminologie suivant : Une filtration $\mathcal{F}$ est faiblement incluse dans une filtration G, si $\mathcal{F}_t \subset G_t$, $\forall t \geq 0$ (les $\mathcal{F}-$martingales locales ne sont pas nécessairement des $G-$martingale locales)

Théorème 2.2.6 Toute filtration $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F}_\infty$ soit essentiellement séparable et $\mathcal{F}_0$ triviale, peut être incluse faiblement dans une filtration brownienne unidimensionnelle (au sens où la filtation brownienne contient une sous filtration isomorphe à $\mathcal{F}$).

Preuve. Soit $(t_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une subdivision de $]0,+\infty[$. D'aprés le Théorème d'isomorphisme lacunaire de Vershik [15] (voir aussi le Théorème 3 de [5]), il existe une sous-suite $(t'_k)_{k\in\mathbb{Z}}$de $(t_k)_{k\in\mathbb{Z}}$telle que $t'_k \downarrow 0$ quand $k \downarrow -\infty$ et $t'_k \uparrow +\infty$ et quand $k \uparrow +\infty$ et $\left(\mathcal{F}_{t'_k}\right)$ soit standard. Il existe donc une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme dans $[0,1]$ telle que : $\mathcal{F}_{t'_k} = \sigma(..., U_{k-1}, U_k)$.
Un mouvement brownien B dont la filtration naturelle contient $\mathcal{F}$ est défini par ses accroissements $B_{t_{k-1}} - B_{t_{k-2}} = \varphi_k^{-1}(U_k)$ où φ_k est la fonction

de répartition de $N(0, t_{k-1} - t_{k-2})$

Corollaire 2.2.7 Soit M une martingale locale continue telle que $\mathcal{F}_0^C$ soit triviable. Si $L(M) \in U$, alors $\langle M \rangle$ est déterministe.

Preuve. (Dans le cas où $\langle M \rangle_t$ est équivalente à la mesure de Lebesgue, ceci découle immédiatement des Théorèmes 2.2.6 et 2.1.5 ci-dessus). Introduisons un mouvement brownien B de filtration naturelle $\mathcal{F}^B$ tel que $\mathcal{F}_t^C \subset \mathcal{F}_t^B$ pour tout t. $\langle M \rangle$ est un $\mathcal{F}^B-$changement de temps continu d'aprés la Proposition 1.1.2, Chap. V de [13]. Considérons la martingale locale $N_t = B_{\langle M \rangle_t}$,on a $\langle N \rangle \equiv \langle M \rangle$, d'où N est une martingale locale d' Ocone (Proposition 1.1.2). Mais $\langle M \rangle$ est $\mathcal{F}_\infty^B-$mesurable, donc $\langle M \rangle$ est déterministe.

2.3 Le théorème de caractérisation de la classe U :

Citons la proposition suivante, dû a [16]. Ici on propose une démonstration différente.

Proposition 2.3.1 Soit M une martingale d'Ocone.

i) Toute $\{\mathcal{F}_t^N\}$ $-$martingale (N_t) est une $\{\mathcal{F}_t^M\}$ $-$martingale et elle est orthogonale à M, c'est-à-dire $\langle N, M \rangle = 0$.

ii) M est extrémale si et seulement si, M est gaussienne.

Preuve.

i) Toute $\{\mathcal{F}_t^N\}$ $-$martingale est une $\{\mathcal{F}_t^M\}$ $-$martingale, car $\{\mathcal{F}_t^N \vee \mathcal{F}_\infty^B\}_{t\geq 0}$, est un élargissement "de type indépendant" de $\{\mathcal{F}_t^N\}$ (donc $\{\mathcal{F}_t^N\}$ est immergée dans $\{\mathcal{F}_t^N \vee \mathcal{F}_t^B\}$) et

$$\forall t \geq 0,\ \mathcal{F}_t^M \subset \mathcal{F}_t^N \vee \mathcal{F}_\infty^B,\ \text{où } \mathcal{F}_\infty^B \equiv \sigma\{B_u,\ u \geq 0\}, \quad (\text{voir [3]}).$$

Montrons que $\langle M, N \rangle \equiv 0$ pour toute $\{\mathcal{F}_t^N\}$ $-$martingale N. On suppose que $\langle M \rangle$ est strictement croissant (pour le cas général, voir [16]). N est une $\{\mathcal{F}_t^M\}$ $-$martingale continue, d'où

$$\forall t \geq 0,\ \langle M, N \rangle_t = \left\langle B_{\langle M \rangle}, N_{C \circ \langle M \rangle} \right\rangle_t = (\langle B, N_C \rangle \circ \langle M \rangle)_t = 0,$$

car B et N_C sont indépendants.

ii) Supposons que M soit extrémale ; si N est une $\{\mathcal{F}_t^N\}$ −martingale, alors il exsist un processus prévisible $(f_t)_{t \geq 0}$ tel que :

$$N_t = N_0 + \int_0^t f_s dM_s \quad \text{et} \quad \langle N, M \rangle_t = \int_0^t f_s d\langle M \rangle s = 0$$

D'où

$$\langle N \rangle_t = \int_0^t f_s^2 d\langle M \rangle_s = 0$$

Donc

$$N_t = N_0,\ \forall \geq 0$$

Tout les $\{\mathcal{F}_t^N\}$ −martingales sont donc constantes, $\mathcal{F}_\infty^N$ est triviale et M est gaussienne.

La propriété qu'une martingale locale soit une martingale locale d'Ocone est préservée par un changement de probabilité équivalente avec une densité $D_\infty \in L^1(\mathcal{F}_\infty^N)$. C'est ce qu'on démontre dans la proposition suivante :

Remarque 2.3.2
La Proposition 2.3.1 reste vraie si M est seulement supposée une P−martingale locale.

Proposition 2.3.3 Soient M une martingale locale continue, définie sur l'espace filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}_\infty^M, P, \mathcal{F}^M\right)$ et P' une probabilité à équivalente à P telle que $D_\infty = \frac{dP'}{dP}$ soit $\mathcal{F}_\infty^N$−mesurable. Si M est une martingale locale d'Ocone sous P, alors elle est une martingale locale d'Oone sous P'.

Preuve. D'aprés la Proposition 2.3.1 *i*), si $D_t := E\left[D_\infty / \mathcal{F}_t^M\right]$ alors

$$\langle D, M \rangle \equiv 0.$$

En fait, si $D'_t := E\left[D_\infty / \mathcal{F}_t^N\right]$, D' est $\mathcal{F}_t^M-$martingale locale, et donc $D \equiv D'$. D'où M est une martingale locale sous P'. Montrons que M est une martingale locale d'Oone sous P'. Soient $H_1 \in L^\infty\left(\mathcal{F}_\infty^B\right)$ et $H_2 \in L^\infty\left(\mathcal{F}_\infty^N\right)$.

$$\begin{aligned} E_{P'}\left[H_1 H_2\right] &= E_P\left[D_\infty H_1 H_2\right] \\ &= E_P\left[D_\infty H_2\right] E_P\left[H_1\right] E_P\left[D_\infty\right] \\ &= E_P\left[D_\infty H_1\right] E_P\left[D_\infty H_2\right] \\ &= E_{P'}\left[H_1\right] E_{P'}\left[H2\right], \end{aligned}$$

puisque $Ep\left[D_\infty\right] = 1$ et B est indépendant de $\langle M\rangle$. Danc M est une martingale locale d'Ocone sous P'.

Remarque 2.3.4
La Propositin 2.3.3 reste vraie si P' est seulement supposée absolument continue par rapport à P.

Corollaire 2.3.5 Avec les notations de la Proposition 2.3.3, on a :

$$L_P(M) \in U \Leftrightarrow L_{P'}(M) \in U,$$

où $L_P(M)$ désigne la loi de M sous P et $L_{p'}(M)$ désigne la loi de M sous P'.

Preuve. Soit M' une martingale locale continue sur un espace filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}_\infty^{M'}, Q', \mathcal{F}^{M'}\right)$ telle que $L_{Q'}\left(\langle M'\rangle\right) = L_{P'}\left(\langle M\rangle\right)$.
Posons $Q := D_\infty^{-1}.Q'$ avec $D_\infty^{-1} := D_\infty^{-1}\left(\langle M'\rangle\right)$ et $D'_t := E_{Q'}\left[D_\infty^{-1} \backslash \mathcal{F}_t^M\right]$.
On a :

$$L_Q\left(\langle M'\rangle\right) = L_P\left(\langle M\rangle\right)$$

en effet : pour une fonctionnelle bornnée F,

$$\begin{aligned} E_Q\left[F\left(\langle M'\rangle\right)\right] &= E_{Q'}\left[D_\infty^{-1} F\left(\langle M'\rangle\right)\right] \\ &= E_{P'}\left[D_\infty^{-1}\left(\langle M\rangle\right) F\left(\langle M\rangle\right)\right] \\ &= E_P\left[F\left(\langle M\rangle\right)\right]. \end{aligned}$$

On a $\widetilde{M'} := M' - \int \frac{d\langle D', M\rangle}{D'}$ est une $Q-$martingale locale telle que :

$$\left\langle \widetilde{M'} \right\rangle = \langle M' \rangle \text{ et } L_Q\left(\left\langle \widetilde{M'} \right\rangle\right) = L_P\left(\langle M \rangle\right).$$

Donc $L_Q\left(\widetilde{M'}\right) = L_P(M)$ et $\widetilde{M'}$ est une $Q-$martingale locale d' Ocone.

La Proposition 2.3.3 nous donne que $\widetilde{M'}$ est une $Q'-$martingale locale d'Ocone, d'où $\widetilde{M'} = M'$ est une $Q'-$martingale locale d'Ocone.

On va citer deux lemmes qui seront utiles pour la démonstration de notre théorème de caractérisation de la classe U.

Lemme 2.3.6 Soient η_0 une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, +1\}$ avec $P\{\eta_0 = 1\} = \frac{1}{2}$, $t_0, t_{-1} \in]0, \infty[$ avec $t_0 > t_{-1}$ et B un mouvement brownien indépendant de η_0, et de filtration naturelle $\mathcal{F}^B$. Il exsist un mouvement brownien B' tel que

$$sgn\left(B'_{t_0} - B'_{t-1}\right) = \eta_0, \mathcal{F}^{B'}_{\infty} = \mathcal{F}^{B}_{\infty} \vee \sigma(\eta_0)$$

et B est un $B'-$mouvement brownien.

Remarque 2.3.7
Le mouvement brownien B' qu'on va construire, est une solution de l'équation

$$dB'_s = a(s, B'_s)\, dB_s \quad \text{où} \quad a(t, x) = sgn\left(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}\right) 1_{]t_k, t_{k+1}]}(t),$$

avec $x \in C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $(t_k)_{k \leq 0}$ est une suite de $\mathbb{R}^+$ qui décroît strictement vers 0. Cette équation a été étudiée dans [7] (voir aussi [1]).

Preuve. Considérons la suite $(\eta_k)_{k\,<\,0}$ définie par :

$$\begin{aligned} \eta_{-1} &= \eta_0 sgn\left(B_{t_0} - B_{t_{-1}}\right), \\ \eta_k &= \eta_0 \prod_{n=0}^{k+1} u_n, \text{ où } u_n = sgn\left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right), \text{ pour } \ k \leq -1. \end{aligned}$$

$\forall k \leq 0$, la variable aléatoire η_k est indépendante de B, en effet :

$$E[\eta_k] = E[\eta_0]\, E\left[\prod_{n=0}^{k+1} u_n\right] = 0,$$

et

$$E\left[F(B)\eta_k\right] = E\left[F(B)\eta_0\prod_{n=0}^{k+1}u_n\right] = E[\eta_0]\,E\left[F(B)\prod_{n=0}^{k+1}u_n\right] = 0.$$

On définie B' par : $sgn\left(B'_{t_0} - B'_{t_{-1}}\right) = \eta_0$ et $B' = \int \eta dB$ où

$$\eta_t = \sum_{k<0}\eta_k 1_{]t_k,t_{k+1}]}(t) + \eta_0 1_{]t_0,+\infty[}(t).$$

On remarque que $\eta_k = sgn\left(B'_{t_k} - B'_{t_{k-1}}\right)$ et $B'_t - B'_{t_k} = \eta_k\left(B_t - B_{t_k}\right)$ si $t \in [t_k, t_{k+1}[$.
La filtration considérée est la plus petite filtration $\mathcal{F}$ complétée par rapport à la probabilité produit contenant $\mathcal{F}_t^B \vee \sigma(\eta_k)$, où $t \in [t_k, t_{k+1}[$ ($\mathcal{F}$ est une filtration continue à droite).
Montrons que B' est un $\mathcal{F}-$mouvement brownien. Soient $t \in [t_k\,, t_{k-1}[$ et $\varepsilon \in \{-1,+1\}$, on a

$$\begin{aligned} E[\left(B'_t - B'_{t_k}\right)1_{\{\eta_k=\varepsilon\}}F(B_u,\ u\le t_k)] &= E[\eta_k(B_t - B_{t_k})]\,1_{\{\eta_k=\varepsilon\}}F(B_u,\ u\le t_k) \\ &= \varepsilon P(\eta_k=\varepsilon)\,E[(B_t - B_{t_k})\,F(B_u,\ u\le t_k)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{B'}$ car $\mathcal{F}_\infty^{B'} = \mathcal{F}_\infty$ et B' est un $\mathcal{F}-$mouvement brownien. B est un $\mathcal{F}^{B'}-$ mouvement brownien car $B = \int \eta dB'$ et η est $\mathcal{F}-$prévisible.

Lemme 2.3.8 Soient $\varepsilon > 0$ et M une martingale locale continue telle que $L(M) \in U$.
Si M^ε est une martingale locale continue (définie éventuellement sur un autre espace filtré) telle que

$$M^\varepsilon = \begin{cases} t & \text{si } t \le \varepsilon, \\ \langle M\rangle_{t-\varepsilon} + \varepsilon & \text{si } t \ge \varepsilon, \end{cases} \qquad (2)$$

alors, $\langle M^\varepsilon\rangle$ est indépendant de $\sigma\left(\beta^\varepsilon_{t+\varepsilon} - \beta^\varepsilon_\varepsilon, t \ge 0\right)$, où β^ε est le mouvement brownien de DDS de M^ε.

Preuve. Soit M^ε une martingale locale qui satisfait l'hypothèse (2).
Notons

$$N_t := \gamma^\varepsilon_{\langle M^\varepsilon\rangle_{t+\varepsilon}-\varepsilon}, \text{ où } \gamma^\varepsilon_t = \beta^\varepsilon_{t+\varepsilon} - \beta^\varepsilon_\varepsilon.$$

Pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$ on a

$$\{\langle N_t\rangle \leq s\} = \{\langle M^\varepsilon\rangle_{t+\varepsilon} \leq s+\varepsilon\} \in \mathcal{F}^{M^\varepsilon}_{C^\varepsilon_{s+\varepsilon}}.$$

D'où $\langle N\rangle$ est un $\left(\mathcal{F}^{M^\varepsilon}_{C^\varepsilon_{s+\varepsilon}}\right)_{s\geq 0}$ $-$changement de temps continu et donc N est une martingale locale continue. On a $L(\langle N\rangle) = L(\langle M\rangle)$, alors N est une martingale locale d'Ocone et $\langle M^\varepsilon\rangle$ est indépendant de γ^ε.

On peut énoncer maintenant notre théorème de caractérisition de la classe U.

Théorème 2.3.9 Soient M une martingale locale continue et C l'inverse de son crochet $\langle M\rangle$. On a $L(M) \in U$ si et seulement si $\mathcal{F}^N_\infty = \mathcal{F}^C_0$. En particulier, $L(M) \in U$ est une loi gaussinne, si et seulement si $\mathcal{F}^C_0$ est triviale.

Preuve. Il suffit de montrer : $L(M) \in U \Longrightarrow \mathcal{F}^N_\infty = \mathcal{F}^C_0$. Nons allons présenter la preuve en plusieures étapes. Dans les trois premières, on traite le cas particulier où $\mathcal{F}^C_0$ est triviale.

Étape 1 :
Nous allons montere que $\forall t \geq 0$, $\mathcal{F}^C_t$ est triviale. Raisonnons par l' absurde et supposons qu'il existe un $t_0 > 0$ et un ensemble $A \in \mathcal{F}^C_{t_0}$ avec $P(A) \notin \{0, 1\}$. Soit Q le changement de probabilité : $Q := D_\infty . p$, où

$$D_\infty := \tfrac{dQ}{dP} = \tfrac{1}{2P(A)} 1_A + \tfrac{1}{2P(A^c)} 1_{A^c}.$$

Remarquons que $Q(A) = \frac{1}{2}$.
Dans la suite, on va travailler sous la Probabilité Q (d'aprés le Corollaire 2.3.5, $L_Q(M) \in U$). Soient $0 < t_{-1} < t_0$ et $(T_t)_{t\geq 0}$ le processus croissant :

$$T_t = \begin{cases} t & \text{si } t \leq t_{-1}, \\ \langle M\rangle_{t-t_{-1}} + t_{-1} & \text{si } t \geq t_{-1}, \end{cases}$$

(remarquons que $T \overset{(loi)}{=} \langle M^{t-1} \rangle$ du Lemme 2.3.8). Notons C' l'inverse de T et introduisons le mouvement brownien B' du Lemme 2.3.6), construit à partir de $\eta_0 = 1_A - 1_{A^c}$ et de B (B est le mouvement brownien de DDS de M).

Étape 2 :
On a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3.10 Notons $\mathcal{F}'_t := \mathcal{F}_t^{B'} \vee \mathcal{F}_t^{C'}$. Si A est indépendant de $\mathcal{F}_{t-1}^{C'}$, alors le mouvement brownien B' est un $\mathcal{F}'$−mouvement brownien

$$\left(\mathcal{F}_t^{C'} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma \left(C'_s, \, s \leq t + \varepsilon \right) \right).$$

Preuve. Soient $t_{k+1} \leq t \leq t_k$ et F une fonction $\mathcal{F}_{t_k}^{C'}$−mesurable et bornée. Posons pour $k \leq -1$, $\eta_k = \eta_0 \upsilon_k$, où $\upsilon_k = \prod_{n=0}^{k+1} \operatorname{sgn}(B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$, on a

$$\begin{aligned} I &= E[\left(B'_t - B'_{t_k}\right) F H \left(B_u, \; u \leq t_k\right) 1_{\{\eta_k = \varepsilon\}}] \\ &= \sum_{\varepsilon' = \pm 1} E\left[\upsilon_k \left(B_t - B_{t_k}\right) H 1_{\{\upsilon_k = \varepsilon\varepsilon'\}}\right] E\left[\eta_0 F 1_{\{\eta_0 = \varepsilon'\}}\right]. \end{aligned}$$

Mais pour $k = 0$

$$I = E\left[\left(B_t - B_{t_0}\right) H \left(B_u, \, u \leq t_0\right)\right] E\left[F \eta_0 1_{\{\eta_0 = \varepsilon\}}\right] = 0,$$

et pour $k < 0$, η_0 est indépendant de F,

$$\begin{aligned} I &= \sum_{\varepsilon' = \pm 1} E\left[\upsilon_k \left(B_t - B_{t_k}\right) H \left(B_u, \, u \leq t_k\right) 1_{\{\upsilon_k = \varepsilon\varepsilon'\}}\right] E\left[\eta_0 1_{\{\eta_0 = \varepsilon'\}}\right] E\left[F\right] \\ &= E\left[F\right] E\left[\eta_k \left(B_t - B_{t_k}\right) H \left(B_u, \; u \leq t_k\right) 1_{\{\eta_k = \varepsilon\}}\right] \\ &= E\left[F\right] E\left[\left(B'_t - B'_{t_k}\right) H \left(B_u, \; u \leq t_k\right) 1_{\{\eta_k = \varepsilon\}}\right] = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, B' est un $\mathcal{F}'$−mouvement brownien.

Étape 3 :
En fait, A est indépendant de $\mathcal{F}_{t-1}^{C'} = \mathcal{F}_0^C$ (car $C'_t = t$ pour $t \leq t_{-1}$ et $C'_t = C_{t-t_{-1}} + t_{-1}$ pour $t > t_{-1}$), donc B' est un $\mathcal{F}'-$mouvement brownien. On sait que T est un $\mathcal{F}'-$changement de temps continu, d'où $N_t = B'_{T_t}$ est une $\mathcal{F}'-$martingale locale cotinue. Comme $\langle N \rangle \overset{(loi)}{=} \langle M^{t-1} \rangle$, on a l'indépendance entre $\sigma\left(B'_{t+t_{-1}} - B'_{t_{-1}},\ t \geq 0\right)$ et $\langle N \rangle$, et donc entre $\sigma\left(B'_{t+t_{-1}} - B'_{t_{-1}},\ t \geq 0\right)$ et $\langle M \rangle$ (Lemme 2.3.8). Ceci provoque une contradiction (car $A = \left\{B'_{t_0} - B'_{t_{-1}} > 0\right\}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_\infty^N$), ce qui achève la démonstration dans le cas particulier.

Étape 4 : (Le cas générale)
Dans cette étape, on va travailler sur l'espace canonique ~~(on n'utilise pas les notations de l'énoncé du Théorème 3.2)~~. Soient M' l'ensemble (convexe) de toutes les probabilités P sur $\Omega = C\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\right)$ telles que le processus des coordonnées $M_t(\omega) = \omega(t)$, soit une $P-$martingale par rapport à sa filtration naturelle $\left(\mathcal{F}_t^M\right)$ ($\left(\mathcal{F}_t^M\right)$ est continue à droite et complétée par rapport à P).

On à besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3.11 Soient $P \in M'$ et P' une probabilité sur $\mathcal{F}_\infty^M$ telle que $P' \ll P$ et $D_\infty = \frac{dP'}{dP}$ soit $\mathcal{F}_0^C-$mesurable :
  $i)$ $P' \in M'$.
  $ii)$ Si $P \in U$, alors $P' \in U$.

Preuve.
  $i)$ Soient $0 \leq s \leq t$ et $F \in L^\infty\left(\mathcal{F}_{C_s}^M\right)$, ona :

$$E_{P'}\left[(B_t - B_s) F\right] = E_P\left[(B_t - B_s) F D_\infty\right] = 0.$$

D'où B est un $\left(P', \mathcal{F}_C^M\right)-$mouvement brownien et M est une $P'-$martingale locale.
  $ii)$ Le cas où $P' \sim P$ a été traité dans le Corollaire 2.3.5. Supposons que $P\left(D_\infty = 0\right) > 0$ et considérons $Q' \in M'$ telle que $L_{Q'}\left(\langle M \rangle\right) = L_{P'}\left(\langle M \rangle\right)$.
Posons

$$Q := \frac{1_{\{D_\infty \neq 0\}}}{D_\infty}.Q' + 1_{\{D_\infty = 0\}}.\mathrm{P}.$$

En utilisant $i)$, on a :

$$\frac{1}{D_\infty P(D_\infty>0)}.Q' \in M' \text{ et } \frac{1_{\{D_\infty=0\}}}{P(D_\infty=0)}.P\in M'.$$

Donc. Par convexité de M', $Q \in M'$.
Remarquons que $L_Q(\langle M\rangle) = L_P(\langle M\rangle)$, d'ou $P = Q$ et $P' = Q'$.

Étape 5 :

On va montrer que $\{Mult\left(\mathcal{F}^C_\infty/\mathcal{F}^C_0\right) > 1\} = \emptyset$ p.s.
Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $t_0 > 0$ tel que

$$B := \left\{Mult\left(\mathcal{F}^C_{t_0}/\mathcal{F}^C_0\right) > 1\right\} \neq \emptyset \text{ p.s.}$$

D'apr'es le lemme 2.3.11, $P' := \frac{1_B}{P(B)}.P \in U$.
En raisonnant de la même façon que dans le cas particulier (Étapes1, 2 et 3) avac P' au lieu de P et $Q' := \frac{1}{2}\left(\frac{1_A}{P'\left(A/\mathcal{F}^C_0\right)} + \frac{1_{A^c}}{P'\left(A^c/\mathcal{F}^C_0\right)}\right).p'$ au lieu de Q, on trouve le résultat (remarquons que A et $\mathcal{F}^C_0$ sont Q'−indépendants, $Q'(A) = \frac{1}{2}$, $Q'(E) = P'(E)$ et $Q(A\cap E) = \frac{1}{2}Q'(E)$ pour tout $E \in \mathcal{F}^C_0$).

Voici maintenant une autre caractérisation de la classe d'unicité.

Proposition 2.3.12 $L(M) \in U$ si et seulement si le mouvement brownien B de DDS de M a la PRP dans la filtration $\mathcal{F} = \mathcal{F}^B \vee \mathcal{F}^C$, et M une martingale locale d'Ocone.

Preuve. Supposons que B ait la PRP dans $\mathcal{F}$ et que M soit une martin6 gale locale d'Ocone, et montrons que $\mathcal{F}^C_0 = \mathcal{F}^C_\infty = \mathcal{F}^N_\infty$.
Les filtrations $\mathcal{F}^C$ et $\mathcal{F}^B$ sont immergées dans $\mathcal{F}$, et si N est une $\left(\mathcal{F}^C_t\right)$ −martingale locale, alors

$$N_t = N_0 + \int_0^t f_s dB_s.$$

pour un $\mathcal{F}$−processus prévisible (f_t). Mais $\langle N, B\rangle \equiv 0$, on a donc

$$\int_0^t f_s ds = 0, \forall t \geq 0,$$

D'où

$$\forall t \geq 0, \int_0^t f_s^2 ds = 0 \text{ et } N_t = N_0.$$

Ainsi, $\mathcal{F}_0^C = \mathcal{F}_\infty^C = \mathcal{F}_\infty^N$ et $L(M) \in U$ (d'aprés la Proposition 2.2.2).

Inversement, si $L(M) \in U$, alors $\mathcal{F}_0^C = \mathcal{F}_\infty^N$ (Théorème 2.3.9) et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0^C \vee \mathcal{F}_t^B$.

Preuve. Notons $P_0 := L(X)$, $\mathcal{F}$ la filtration naturelle de X et $(\mathcal{F}_t^N)_{t\geq 0}$ celle de $\langle X \rangle$.
Soient $P' \ll \quad P_0$, $D_t := \frac{dP'}{dP_0}/_{\mathcal{F}_t}$ et $\widetilde{X}_t = X_t - \int_0^t \frac{d\langle X,\, D\rangle_s}{D_s}$.
Si $L_{P'}(\langle X \rangle) = \Pi$, alors $L_{P'_0}\left(\widetilde{X}\right) = L(X)$. En effet (voir[16])

$$D_t = 1 + \int_0^t h_s dF_s + \int_0^t \varphi_s dX_s,$$

où F est une $(\mathcal{F}_t^N)_{t\geq 0}$ $-$martingale locale et h et φ soit deux processus $\mathcal{F}-$prévisibles. La condition $L_{P'}(\langle X \rangle) = \Pi$ est équivalente à $E\left[D_t/\mathcal{F}_t^N\right] = 1, \forall t \geq 0$. D'où, $L_{P'}(F) = L_{P_0}(F)$, c'est-à-dire que F est une $P'-$ martingale locale et $\int_0^t \frac{d\langle F,\, D\rangle_s}{D_s} = 0$, donc

$$\int_0^t h_s d\langle F \rangle_s = 0 \text{ et } D_t = 1 + \int_0^t \varphi_s dX_s.$$

Puisque D appartient à l'éspace stable engendré par X, si $P' \in M_\Pi$, alors $D \equiv 1$ (en raisonnant de la même façon que 1) et P est extrémale dans M_Π.

Chapitre 3

Autres classes de lois des martingales continues

Dans ce chapitre,on va voir quelques propriétés des martingales continues qui vont être analysées.

3.1 Quelques propriétés du M.B.S

De la caractérisation de Lévy, le mouvement brownien est l'unique martingale continue (M_t) tq : $\langle M \rangle_t = t$, on peut déduire les propriétés suivantes pour M un mouvement brownien

i) Si (ε_i) est le processus prévisible à valeurs dans $\{-1, +1\}$ alors :

$$M^{\varepsilon} \overset{loi}{=} M, \text{ où : } M_t^{\varepsilon} \overset{déf}{=} \int_0^t \varepsilon_s dM_s\,;$$

ii) Pour tout processus limité prévisible (φ_t) :

$$D_t^{\varphi} = \exp\left\{\int_0^t \varphi_s dM_s - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 d\langle M \rangle_s\right\}$$

est une martingale, et si on note $Q \equiv Q^{\varphi}$ la probabilité équivalante à P :

$$Q/_{\mathcal{F}_t} = D_t^{\varphi}.\mathrm{p}/_{\mathcal{F}_t}.$$

donc : $\widetilde{M^\varphi} \equiv M - \int_0^t \varphi_s d\langle M\rangle_s$ satisfait : $\left\{\widetilde{M^\varphi}, Q\right\} \overset{loi}{=} \{M.P\}$.

iii) Si $S_t^M = \sup_{s \leq t} M_S$, donc. $S^M - M \overset{loi}{=} |M|$..

Pour éviter toutes confusion, on doit vérifier que ces identités sont vraies en loi pour M un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien (en général pour les martingales locales continues M, D^φ peut être seulement une martingale locale).

En réalité dans la suite où M n'est pas un movement brownien B ça doit être convenable de considèrer quelques variantes precises de *ii)*.

ii)$_{\mathrm{det}}$ comme *ii)* mais φ est est un processus déterministe, Borel, et limité.

ii)$_{\langle M\rangle}$ comme *ii)* mais φ est un processus prévisible limité qui dépent de $\langle M\rangle$ seulement.

3.2 Martingale d'Ocone et propriétés

Le reste de ce chapitre consiste à discuter la classe des martingales continues M (autre que $(\mathcal{F}_t)-$movement brownien satisfont *i)* (ou quelques variantes ci dessus de *i)*) où *iii)*.

Par exemple, il n'est pas difficile de demontrer que, plus généralement : si (M_t) est une martingale Gaussiènne ceci est équivalent à

$$(\langle M\rangle_t \,, t \geq 0) \text{ est un processus déteministe.}$$

donc les trois propriétés sont valides.

En poussant ces arguments un peut plus loin, il n'est pas difficile de demontrer que ces propriétés sont aussi valides, pour (M_t) martingale d'Ocone avec la représentation de Dubins-Schwaz : $M_t = B_{\langle M\rangle_t}$ tel que B (movement brownien) et $\langle M\rangle$ sont indépendant

Le but de notre terminologie est Ocone [11] à montré la propriété d'indépendance est équivalente à la propriété *i)*.

En outre, l'interet des martingales d'Ocone en relation avec la transformation de Levy (en d'autre terme propriété *iii)* est réalisé en [4]).

Concernant la propriété *ii)*, on va le montrer :

Théorème 3.2.1 Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$a)$ (M_t) est une martingale d'Ocone
$b)$ propriété $ii)_{\langle M\rangle}$est satisfaite ; c) propriété $ii)_{\det}$.

Preuve. $c) \Rightarrow a)$ on admet que $ii)_{\det}$ est maintenu, et on considère une fonction détèrminéste φ Borél, bornée, pour les fonctionels positives F, on utilise donc la définition Q

$$E_Q\left[F\left(\langle M\rangle_s, s\leq t\right)\right] = E_P\left[F\left(\langle M\rangle_s, s\leq t\right)D_t^{\varphi}\right].$$

(d'aprés $ii)_{\det}$) on a :

$$E_Q\left[F\left(\langle M\rangle_s, s\leq t\right)\right] = E_P\left[F\left\langle M\right\rangle_s, s\leq t\right].$$

donc :

$$E_P\left[F\left\langle M\right\rangle_s, s\leq t\right] = E_P\left[F\left(\langle M\rangle_s, s\leq t\right)D_t^{\varphi}\right].$$

systematiquement c'est équivalente à :

$$E_P\left[D_t^{\varphi}/\left\langle M\right\rangle_s, s\leq t\right] = 1.$$

d'où :

$$E_P\left[\exp\left(\int_0^t \varphi_s dM_s/\left\langle M\right\rangle_s, s\leq t\right)\right] = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 d\left\langle M\right\rangle_s\right). \qquad (1)$$

La partie droite de (1) est égale à :

$$E_P\left(\exp\left(\int_0^t \varphi_s d\left(\gamma_{\langle M\rangle_s}\right)\right)/\left\langle M\right\rangle_s, s\leq t\right).$$

Où : $(\gamma_u, u\geq 0)$ est un movement brownien indépendant de $(\langle M\rangle_s, s\geq 0)$.
d'où l'équation (1) donne (2) :

$$\left(M_t, \langle M\rangle_t\ ;\ t\geq 0\right) \overset{(loi)}{=} \left(\gamma_{\langle M\rangle_t}, \langle M\rangle_t, t\geq 0\right). \qquad (2)$$

Rappelez que : $M_t = B_{\langle M\rangle_t}$, d'où le changement de temps dans les deux côtés de l'équation (2), avec l'inverse de $(\langle M\rangle_t, t\geq 0)$ on obtient :

$$\{(B_u, u \geq 0)\ ;\ (\langle M\rangle_t, t \geq 0)\} \overset{(loi)}{=} \{(\gamma_u, u \geq 0);\ (\langle M\rangle_t), t \geq 0\}.$$

Ce qui montre précisement que B et $\langle M\rangle$ sont indépendants.

.$a) \Rightarrow b)$: on commence par $(M_t, t \geq 0)$ une martingale d'Ocone et on concidére l'équation $\varphi(s)$ de la forme $\Phi(\langle M\rangle_u, u \leq s)$ qui est prévisible bornée. On a aussi noté $\widetilde{M}$ pour $\widetilde{M^\varphi}$

$$E_Q\left[F\left(\widetilde{M}_u, u \leq t\right)\right] = E_P\left[F\left(\widetilde{M}_u, u \leq t\right)\exp\left(\int_0^t \varphi(s)\, dM_s - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi^2(s)\, d\langle M\rangle_s\right)\right].$$

donc :

$$\widetilde{M}_u = B_{\langle M\rangle_u} - \int_0^{\langle M\rangle_u} \varphi(T_v)\, dv, u \leq t.$$

On fait un changement de temps dans l'éxponnentiel.
Aprés, dans la dernière éspérance on met en condition pour tout tribu engendrée par $(\langle M\rangle_u, u \geq 0)$, en consequence de la propriété $ii)$ pour le mouvement Brownien, on obtient l'spérance conditinelle est égale à :

$$E_P\left[F\left(B_{\langle M\rangle_u}, u \leq t\right) / \langle M\rangle\right].$$

En fin on obtient.

$$E_Q\left[F\left(\widetilde{M}_u, u \leq t\right)\right] = E_P\left[F\left(M_u, u \leq t\right)\right].$$

.$b) \Rightarrow c)$: c'est évident.

Remarque 3.2.2 $\alpha)$ On n'est pas sure que la propriété générale $ii)$ est satisfaite pour la martingale d'Ocone,
$\beta)$ Pour éviter le prolongement de la relation du théorème (1) on a pas ajoute la propriété suivante.
$d)$ Pour tout processus détèrministe bornée φ. $\{\langle M\rangle, Q^\varphi\} \overset{(loi)}{=} \{\langle M\rangle, p\}$.
La preuve de l'équivalente : $a) \Longleftrightarrow d)$ utilise les même arguments comme : $a) \Longleftrightarrow c)$.

Remarque 3.2.3 Malgré que la martingale d'Ocone partage les même propriété $i)$, $ii)_{\langle M\rangle}$, $iii)$ avec le mouvement Brownien, elle ne partage pas la propriété importante de la représentation des martingales Précisement pour toute martingale (N_t) (par rapport à la filtration naturelle de (M_t)) N n'est pas forcement une intégrale stochastique par rapport à M, d'ou :

Proposition 3.2.4 la martingale d'Ocone $(M_t, t \geq 0)$ a la propriété de représentation des martingales (avec la filtration naturelle) si et seulement si $(\langle M_t\rangle\,, t \geq 0)$ est un processus déterministe

Preuve. D'aprés la déinition des martingales d'Ocone $\langle M\rangle$ est indépendent de β, le mouvement Brownian de DDS associé à M on peut écrire :

$$P_M = \int P\left(\langle M\rangle \in da\right) w^a \qquad (*)$$

ou P_M,resp w^a sont 1, loi de M, resp : la loi du martingale continue avec un processus-croissant (déterministe) $a(.)$
M aura la propriété de la représentation des martingales ssi P_M est extrémal par rapport à l'ensemble des martingales continues.
De (*) P_M est un point extrémal ssi $p(\langle M\rangle \in da)$ diminue en mesure de Dirac en d'autre termes il existe une fonction $a(.)$ déterministe évolué comme $P\left(\langle M\rangle = a(.)\right) = 1$.

3.3 Les classes de martingales continues

En ce point ,ça apparait intérressent de dessiner le diagramme suivant qui indique les quatres classes remarquable pour les martingales locales continues :

$$\longleftarrow \quad \varepsilon \quad \longrightarrow$$
$$\longleftarrow \quad \mathrm{p} \quad \longrightarrow$$
$$\longleftarrow \quad \zeta \quad \longrightarrow$$
$$\longleftarrow \qquad\qquad \mathrm{O} \longrightarrow$$

$\boxed{\text{classification des martingales locales continues}}$

ε : **extrémal** p : **pure** ζ : **gaussien** **O** : **Ocone**
D'aprés le diagramme on à : $\zeta \subset p \subset \varepsilon$ aussi : $O \cap \varepsilon = O \cap p = \zeta$, on complète la proposition ci-dessus par la description de toute les martingales par rapport à la filtration naturelle$\left\{\mathcal{F}_t^M\right\}_{t\geq 0}$ de (M_t) . on pourait introduire $\left\{\mathcal{F}_t^N\right\}$ la filtration naturelle de $\{(\langle M_t\rangle, t \geq 0)\}$

Théorème 3.3.1 soit (M_t) une martingale d'Ocone.
1)pour toute $\left\{\mathcal{F}_t^N\right\}_{t\geq 0}$martingale$(N_t)$, N est $\left\{\mathcal{F}_t^M\right\}$ –martingale et elle est orthogonale à (M_t) qui est $(N_tM_t \geq 0)$ est $\left\{\mathcal{F}_t^M\right\}_{t\geq 0}$martingale locale.
2)L'espace des martingales carré intégrable $\left\{\mathcal{F}_t^M\right\}_{t\geq 0}$ est la somme direct de l'éspace stable engendré par$\left\{\mathcal{F}_t^N\right\}_{t\geq 0}$ et de l'éspace stable engendré par $\{M_t\}$.

Preuve. 1) on considère(N_t) la martingale uniformément intégrable $\left\{\mathcal{F}_t^M\right\}$ est martingale.
On va prouver :
$E\left[N_\infty/\mathcal{F}_t^M\right] = N_t \left(= E(N_\infty/\mathcal{F}_t^N\right)$
ce qui prouve le premier point de la premiere partie du théoreme avec la notation évidente on a :

$$\begin{aligned}
E\left[N_\infty f\left(M_s, s \leq t\right)\right] &= E\left[N_\infty f\left(\beta_{\langle M\rangle_s}, s \leq t\right)\right] \\
&= \int W\left(d\omega\right) E[N_\infty f\left(\omega(\langle M\rangle_s), s \leq t\right)] \\
&= \int W\left(d\omega\right) E\left[N_t f\left(\omega(\langle M\rangle_s), s \leq t\right)\right] \\
&= E\left[N_t f\left(M_s, s \leq t\right)\right].
\end{aligned}$$

On démontre que $(N_tM_t, t \geq 0)$ est une$\left\{\mathcal{F}_t^M\right\}$ martingale soit $s \leq t$ on a aussi :

$$E[N_tM_tf(M_u, u \leq s)] = \int W(d\beta)E\left[N_t\beta_{\langle M\rangle_t}f(\beta_{\langle M\rangle_u}, u \leq s)\right]$$

On utilise la propriété des martingales pour β et l'indépendance de $\langle M\rangle$

et β donne :

$$E[N_tM_tf(M_u,u\leq s)]=\int W(d\beta)E\left[N_t\beta_{\langle M\rangle s}f(\beta_{\langle M\rangle_u},u\leq s)\right]$$

Aprés on utilise la propriété des martingales pour (N_t) par raport à $\left\{\mathcal{F}_t^N\right\}$;on obtient :

$$\begin{aligned}E\left[N_tM_tf\left(M_u,u\leq s\right)\right] &= \int W\left(d\beta\right)E\left[N_s\beta_{\langle M\rangle_s}f\left(\beta_{\langle M\rangle_u},u\leq s\right)\right]\\ &= E\left[N_sM_sf\left(M_u,u\leq s\right)\right].\end{aligned}$$

2)Pour démontrer le deuxième point, il suffit de considérer $\Phi\in L^2(\mathcal{F}_\infty^M,p)$ de la forme :$\Phi=FG$ ou $F\in L^2(\mathcal{F}_\infty^N,p)$ et $G\in L^2(\beta_\infty,p)$ où :
$\beta_\infty=\sigma\left\{\beta_s,s\geq 0\right\}$.
comme il est bien connu, G peut être écrite sous la forme :

$$G=\gamma+\int_0^\infty Q^2(s)d\beta_s,$$

pour un $\gamma\in\mathbb{R}$ et $\{\beta_t\}$un processus prévisible φ ou

$$E\left[\int_0^\infty\varphi^2(s)ds\right]\leq\infty.$$

En formant le changement de temps $s=\langle M\rangle$ on obtient :

$$G=\gamma+\int_0^\infty\varphi(\langle M\rangle_u\,dM_u,$$

et on note :

$$G_t=\gamma+\int_0^\infty\varphi(\langle M\rangle_u\,dM_u.$$

D'autre part on associé à F la martingale $\left\{\mathcal{F}_t^N\right\}$:

$$F_t=E\left[F/\mathcal{F}_t^N\right]=E\left[F/\mathcal{F}_t^M\right]$$

En utilise la première partie du théorème, en utilisant la formule d'Itô :

$$F_tG_t=F_0\gamma+\int_0^\infty F_{s\_}dG_s+\int_0^\infty G_sdF_s+[F,G]_t$$

mais comme G est continue et (F_t) et (G_t) sont orthogonales on a :

$$[F, G]_t = \langle F^c, G \rangle \equiv 0.$$

finalement : $$\Phi \equiv FG = F_0\gamma + \int_0^\infty F_{s\_}\varphi(\langle M \rangle_s)dM_s + \int_0^\infty G_s dF_s,$$

ce qui prouve le $2^{\text{ème}}$ point.

3.4 Conclusion

L'objectif de ce mémoire est de généraliser la caractérisation de lévy d'un mouvement brownien standard dans le sens où si on connait la loi des crochet d'une martingale M on peut connaître la loi de M, ainsi on preuve que les seules martingales locales dont la loi est déterminée par la loi de leur crochets sont les martingales gaussiennes

Bibliographie

[1] **ATTAL S., BURDZY K., ÉMERY M., HU., Y. (1995) :** Sur quelques filtrations et transformations browniennes. Sém. Pro. **XXIX,** Lec Not. in Math. **1613,** Spinger. P. **56-69.**

[2] **BAGHDADI-SAKRANI**

[3] **Briand, P**, Equations Différentielles Stochastique Rétrograd, cours, Mars 2001

[4] **DUBINS L., ÉMERY M., YOR M. (1993) :** On the **Lévy** transformation of Brownian motions and continuous martingales. Sém. Pro. **XXVII,** Lec. Not. in Math. **1577,** Springer, P. **122-132.**

[5] **ÉMERY M., SCHACHERMAYER W. :** On Versnik's standardness criterion and Tsirelson's notion of cosiness, à paraître dans Sém. Pro. **XXXV**, Lec. Not. in Math. **1729,** Springer, **(2000).**

[6] **Godet, F**, Intégrale stochastique, présentation, 20 novembre 2006.

[7] **LE GALL J. F., YOR M.(1983) :** Sur l'équation stochastique de Tsirel'son. Sém. Pro.**XVII,** Lec. Not. in Math. **986,** Springer, p. **81-88.**

[8] **LE GALL J. F,** Mouvement brownian et calcul stochastique. Notes de cours de Master 2, 2008-2009 Université Paris-Sud. Master Probabilités et statistiques, octobre 2008.

[9] **Lévèque, O**, Cours de probabilités et calcul stochastique EPFL Semestre d'hiver 2004-2005.

[10] **Malti,D.F**, Les processus croissants dans l'ordre convexe, mémoire de magister en probabilités statistiques, octobre 2011.

[11] **OCONE D. L. (1993) : A** symmetry characterization of conditionally independent increment martingales. Proceedings of the San fe ice Workshop on Stochastik Analysis. D. Nualart and M. Sans, eds. Birkhäuser, p. **147-167.**

[12] **Oksendal, B**, Stochastic differential Equations. An introduction with Applications Fifth Edition, Corrected Printing Springer-Verlag Heidelberg New York.

[13] **REVUZ D., YOR M. (1999) :** continuous martingales and Brownian motion. Springer, Third edition.

[14] **Rogers, L.C.G.** et Williams, D.Diffusions, Markov processes, and martingales Volume 2 : Ito calculs, 2nd edition, cambridge University Press 1994.

[15] **VERSHIK A. M. (1968) :** On lacunary isomorphism of monotone sequences of partition. Funkcion. analiz i ego prilozh. **2** n° **3,** p. **17-21**

[16] **VOSTRIKOVA L., YOR. M. :** Some invariance properties (of the laws) of Ocone's martingales, à paraître dans Sém. Pro. **XXXIV**, lec. Not. in Math. **1729,** Springer. **(2000).**

[17] **YOR.M :** Sue les martingales continues .Stochastics, vol. **2**, n° **3** (**1979**), p. **191-196.**