République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Par :

M^{me}. TEBANI Souheyr.

Intitulé

Etude de la stabilité des systèmes perturbés par la méthode des inégalités intégrales aux échelles de temps et applictions

Dirigé par : Dr BOUKRIOUA Khaled

Devant le jury

PRESIDENT	Mr. Y .Bouattia	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Mr. K .Boukrioua	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Mr. N .Sellami	MCB	Univ-Guelma

Session Juin 2015

Remerciement

Première remerciement à

(Mon dieu).

Je tiens, plus spécialement, à exprimer toutes mes reconnaissances à mon Encadreur,

Mr Boukrioua Khaled, pour avoir dirigé ce travail avec abnégation et disponibilité. Ses conseils et son solution m'ont été d'un grand apport pour l'accomplissement de ce mémoire. Sans cela, ce mémoire n'aura pas eu lieu.

Je remercie, également tous les **membres du jury (Mr Bouattiya-y** et **Mr Sellami-n)** pour avoir accepté d'en faire partie, Leurs critiques et leurs remarques me seront, dans l'avenir, un jalon dans ma carrière professionnelle.

Enfin, je envoyée aussi nos plus sincères remerciement à **Dr Hamlaoui-H** et **Mr Meftah-B.** et aussi à tous **lés étudiants** de ma promotion qui m'ont encouragé pour la réalisation de ce travail.

Dédicace

Merci Allah *(Mon dieu)* de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir la force d'y croire et la patience d'accomplir mon travail.

Je dédie ce modeste travail à deux personnes que je l'âme beaucoup et qui ne jamais les oublies à l'aime mon père *"Rachid"* et ma mère *"Samia"*.

A mon marié "Hicham" pour son soutient morale et ses encouragement.

A ma sœur adorable, leur marie et leur fils.

A mes frères "Bessam" et "Hana".

A mon bébé "Rahaf".

A toute ma famille et à tous ce que j'aime et mes amies.

SOHHEYR.

Table des matières

0.1 Introduction

La théorie mathématique du contrôle a connu un développement trés important et son champ d'application couvre actuellement de nombreux domaines, notamment l'industrie, l'économie, la biologie et l'automatique.

Cette théorie fait appel à de nombreux outils mathématiques et repose sur une grande variété de modèles. Ces outils théoriques permettent de prévoir mais aussi d'appliquer ses concepts afin de remplir les objectifs qui sont en relation discrète avec elle.
En d'autres termes nous avons des systèmes régis par des équations aux dérivées partielles, ou intégrales ou intégro-différentielles, lorsque les variables caractéristiques du processus à étudier sont des fonctions de la variable d'espace.
Les systèmes sont représentés mathématiquement par des équations différentielles ou par des équations aux différences finies lorsque les processus sont décrits par un nombre fini de grandeurs.
Les systèmes sont stochastiques lorsque les phénomènes aléatoires interviennent.

L'un des thèmes importants de cette théorie est la vérification de la stabilité d'un système qui est un point crucial de l'élaboration de la loi de commande.Pour paraphraser, il parait même que toutes les techniques de construction des lois de commande sont étroitement liées à des considérations de stabilité. Dans le cas des systèmes linéaires ce problème de stabilité a été largement étudié et une théorie complète est disponible dans la littérature voir [7] .Pour les systèmes non linéaires, le problème reste essentiellement ouvert et les résultats restent limités à des classes particulières de systèmes.

En général, la stabilité d'un système est vérifiée en construisant une fonction $V : D \rightarrow \mathbb{R}$, où D est un domaine de $\mathbb{R}^n$, définie positive et telle que sa dérivée temporelle totale soit définie négative. Dans des problèmes concrets, bien que cette condition soit nécessaire et suffisante pour la stabilité asymptotique, il est souvent très difficile de trouver une telle fonction.
D'où la motivation pour établir des conditions suffisantes (et nécessaires) pour garantir

la stabilité asymptotique sans connaitre une fonction de Lyapunov.

La théorie des équations dynamiques aux échelles de temps a été introduite en 1988 par Stefan Hilger dans sa thèse de doctorat où il a notamment définie la Δ-dérivée de la façon suivante.

Définition 0.1 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$, f est dite $\Delta-$différentiable en t s'il existe un vecteur $f^{\Delta}(t) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage U de t tel que*

$$\left\| f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \right\| \leq \epsilon \mid \sigma(t) - s \mid,$$

pour tout $s \in U$. On appelle $f^{\Delta}(t)$ la $\Delta-$dérivée de f en t. Si f est $\Delta-$différentiable en t pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, alors $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^n$ est dite la $\Delta-$dérivée de f sur $\mathbb{T}^k$.

Ici, $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$, $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$ et

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus]\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}] & \text{si} \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & \text{si} \sup \mathbb{T} = \infty. \end{cases}$$

C'est à partir de cette définition qu'ont été introduites les équations aux échelles de temps qui ont la même forme qu'une équation différentielle à l'exception que par exemple, dans une équation du premier ordre, la dérivée d'une fonction x (x') est remplacée par la Δ-dérivée (x^{Δ}) de cette fonction. Nous verrons plus loin dans le texte que si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, la Δ-dérivée équivaut à la dérivée au sens classique et les équations aux échelles de temps deviennent des équations différentielles. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, les équations aux échelles de temps deviennent des équations aux différences finies, pour plus de détails, on peut consulter les deux livres [3, 4]. D'ailleurs, l'intérêt pour ce dernier type d'équations a connu un essor considérable au cours des dernières années pour expliquer plusieurs phénomènes discrets notamment en économie, psychologie et génie. La théorie des équations aux échelles de temps vient dans un premier temps unifier ce qui peut être fait dans les domaines des équations différentielles et les équations aux différences finies. En travaillant sous l'angle d'une échelle de temps générale, il est possible de faire progresser simultanément ces deux champs des mathématiques. Dans un deuxième temps, la théorie développée autour des échelles de temps permet l'étude de phénomènes se modélisant d'une façon qui fait appel simultanément au discret et au continu. Ainsi, une équation définie sur une échelle de temps de la forme $\cup_{k=0}^{k=\infty}[2k, 2k+1]$ est très utile pour décrire des phénomènes saisonniers. Par exemple, ce pourrait être pour l'étude d'une population d'insectes qui après un certain temps disparaît, pour réapparaître ultérieurement après avoir été pendant un certain temps sous forme de larve. Motivé par cette théorie, les auteurs de l'article [2] ont étudié la stabilité uniformément asymptotique et exponentielle d'un système dynamique perturbé aux échelles de temps où, ils ont montré si le système linéaire suivant

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) &= A(t)x(t), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{T}$; et $A : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice régressive dépend de t, est uniformément exponentiellement stabe, alors le système perturbé associé conserve aussi la même propriété.

Nous représentons la perturbation comme une terme additif sur la droite de $x^{\Delta}(t) = A(t)x(t)$. Donc, le système perturbé associé est donnée par

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) &= A(t)x(t) + F(t, x(t)), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{2}$$

où $F(t;0) = 0$ sur $\mathbb{T}$, et $F : \mathbb{T}\times\mathbb{R}^n$ est une fonction rd-continu.

Le but de ce mémoire est de développer des résultats obtenus dans [2] autour de la vérification de la stabilité de certaines classes des systèmes dynamiques perturbés aux échelles de temps, en utilisant les inégalités intégrales de type Gronwall-Belleman aux échelles de temps. On montre sous des conditions exigés sur le terme perturbé que le système non linéaire reste uniformément exponentiellement stable si le système associé possède cette propriété.

Ce travail est organisé de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, on commence par rappeler brièvement quelques notions générales sur les échelles de temps avec exemples. Ensuite nous présentons les notions fondamentales de stabilité, puis on introduise quelques résultats sur les inégalités intégrales de type Gronwall-Bellman aux échelles de temps qui nous seront utiles dans le deuxième chapitre.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions la stabilité uniformément asymptotique et exponentielle du système (2) par l'approche des inégalités intégrales de type Gronwall-Bellman aux échelles de temps. .

Enfin, on termine le chapitre par la présentation de quelques applications.

Chapitre 1

Rappels et Généralités :

1.1 Introduction :

Aujourd'hui, la stabilité asymptotique et exponentielle des équations différentielles ordinaire (EDO) est bien maîtrisée. Au 19ème siècle, le célèbre Alexander Mikhailovich Lyapunov a été le premier qui a avoir formulé mathématiquement cette idée. Lyapunov a montré que l'existence de certaines fonctions, définie positive, prouvait la stabilité pour les EDO continues. Pour permettre d'étudier analytiquement le problème de stabilité d'un point d'équilibre, Lyapunov [9] a généralisé la notion d'énergie en regardant l'évolution de cette dernière. La méthode de Lyapunov, consiste à étudier la stabilité du système sans connaître la solution explicite du système étudié. En effet, la procédure de base est de générer une fonction "de type énergie" dite fonction de Lyapunov pour le système dynamique et d'en examiner sa dérivée temporelle le long de ces trajectoire. Ce qui traduit physiquement l'idée que si l'énergie totale du système est dissipée de manière continue alors le système devra rejoindre un point d'équilibre dans un temps infini (stabilité asymptotique) ou dans un temps fini (stabilité en temps fini). En d'autre termes, le système est stable si son énergie diminue et elle est minimale à l'équilibre. Plus tard en 1963 J. Kurzweil a démontré dans [8] l'équivalence entre l'existence de ces fonctions, appelées fonctions de Lyapunov, et la stabilité pour les EDO continues.

Dans ce chapitre, nous présentons en première partie quelques notions de base sur la théorie des échelles de temps, puis en deuxième partie, nous introduisons les notions fondamentales de stabilité et on termine le chapitre par l'etablissement de queqlques inégalités intégrales de type Grondwall-Bellman qui sont trés utiles dans l'etude de stabilité.

1.2 Notions de base sur la théorie des échelles de temps

Nous signalons que les résultats de cette section sont tirés des deux livres [3, 4].

Définition 1.1 *Une échelle de temps* $\mathbb{T}$ *est un sous ensemble fermé non vide de* $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1 *Les ensembles* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, [0,1] \cup [2,3], [0,1] \cup \mathbb{N}$ *sont des échelles de temps.*

Exemple 1.2 *Les ensembles* $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \mathbb{C}, (0,1)$ *ne sont pas des échelles de temps.*

Remarque 1.1 *La topologie de* $\mathbb{T}$ *est induite par celle de* $\mathbb{R}$.

1.2.1 Operateur de saut

Définition 1.2 *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps, pour* $t \in \mathbb{T}$*, on définit l'opérateur de saut avant* $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}. \tag{1.1.1}$$

Définition 1.3 *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps, pour* $t \in \mathbb{T}$*, on définit l'opérateur de saut arrière* $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}. \tag{1.1.2}$$

Remarque 1.2 *Par convention, on supposera que $\sigma(t) = t$ si t est le maximum de $\mathbb{T}$, et que $\rho(t) = t$ si t est le minimum de $\mathbb{T}$.*

1.2.2 Classification des points

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, t un point de $\mathbb{T}$.

Définition 1.4 *On dit que t est un point dense à droite de $\mathbb{T}$, $t < \sup \mathbb{T}$ (resp. un point t dense à gauche de $\mathbb{T}$) si $\sigma(t) = t$ (resp. $\rho(t) = t$).*

Définition 1.5 *On dit que t est un point dense s'il est simultanément dense à droite et à gauche.*

Définition 1.6 *On dit que t est un point dispersé à droite de $\mathbb{T}$ (resp. un point dispersé à gauche de $\mathbb{T}$) si $\sigma(t) > t$ (resp. $\rho(t) < t$).*

Définition 1.7 *On dit que t est un point isolé s'il est simultanément dispersé à droite et à gauche.*

Définition 1.8 *Nous définissons les fonctions de granulation $\mu, \nu : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty[$ par :*

$$\mu(t) = \sigma(t) - t \text{ et } \nu(t) = t - \rho(t). \tag{1.1.3}$$

Maintenant, nous présentons quelques exemples concernant le calcul de l'opérateur de saut avant et arrière :

Exemple 1.3 *Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf(t, \infty) = t, \\ \rho(t) &= t, \end{aligned}$$

donc tous les points de $\mathbb{R}$ sont denses. Les fonctions de granulation μ, ν sont données par :

$\mu(t) = 0$ *et* $\nu(t) = 0$.

Exemple 1.4 *Soit $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a*

$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf\{t+1, t+2, \ldots\ldots\} = t+1, \rho(t) = t-1,$

ainsi tous les points de $\mathbb{Z}$ sont isolés. Les fonctions de granulation μ, ν sont : $\mu(t) = 1$ et $\nu(t) = 1$.

Exemple 1.5 *Soit $\mathbb{T} = [0,1] \cup [2,3]$ on a :*

$$\sigma(t) = \begin{cases} t \ si \ t \in [0,1[\cup [2,3] \\ 2 \ si \ t = 1 \end{cases},$$

et

$$\rho(t) = \begin{cases} t \ si \ t \in [0,1] \cup]2,3] \\ 1 \ si \ t = 2 \end{cases}.$$

Ainsi

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t \in [0,1[\cup [2,3] \\ 1 \ si \ t = 1 \end{cases},$$

et

$$\nu(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t \in [0,1] \cup]2,3] \\ 1 \ si \ t = 2 \end{cases}.$$

Exemple 1.6 *Considérons l'échelle de temps $\mathbb{T} = \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k, 2k+1]$.*

On a

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k, 2k+1[\\ 1 \ si \ t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \{2k+1\} \end{cases},$$

On définit maintenant l'ensemble $\mathbb{T}^{\mathrm{k}}$.

Définition 1.9 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps*

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus]\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}] & si \ \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & si \ \sup \mathbb{T} = \infty \end{cases}.$$

Remarque 1.3 *Si le maximum de $\mathbb{T}$ est dispersé à gauche, alors on pose $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} \setminus \sup \mathbb{T}$. Sinon, par convention $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.*

Définition 1.10 *Pour deux points $a, b \in \mathbb{T}$, l'intervalle d'échelle de temps est définie par :*

$$[a, b]_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} \ : a \leq t \leq b\}.$$

Si $b = +\infty$, nous notons $\mathbb{T}_a^+ = [a, +\infty[_{\mathbb{T}}$.

1.2.3 $\Delta-$Dérivée

Définition 1.11 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$, une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$, f est dit $\Delta-$différentiable en t s'il existe un vecteur $f^{\Delta}(t) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$,il existe un voisinage U de t tel que*

$$\left\| f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \right\| \leq \varepsilon \left| \sigma(t) - s \right|,$$

pour tout $s \in U$. On appelle $f^{\Delta}(t)$ la $\Delta-$dérivée de f en t. Si f est $\Delta-$différentiable en t pour tout $t \in \mathbb{T}$, alors $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^n$ est dite la $\Delta-$dérivée de f sur $\mathbb{T}^k$.

Théorème 1.1 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $t \in \mathbb{T}$.*

(i)Si f est $\Delta-$différentiable en t, alors f est continue en t.

(ii)Si f est continue en t et si t est dispersé à droite, alors f est $\Delta-$différentiable en t, de plus on a :

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}. \tag{1.1.4}$$

(iii)Si t est dense à droite, alors f est $\Delta-$ différentiable en t si et seulement si

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

existe et est finie.

Dans ce cas on a :

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

(iv) *Si f est différentiable en t, alors :*

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t). \tag{1.1.5}$$

Maintenant, on donne quelques exemples concernant le calcul de la Δ–dérivée.

Exemple 1.7 *Considérons la fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t^2$ où $\mathbb{T} = \left\{\frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}_0\right\}$.*
Comme $t \in \mathbb{T}$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : t = \frac{n_0}{2}$.
Ainsi

$$\sigma(t) = \frac{n_0 + 1}{2},$$

et comme

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t},$$

alors

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \frac{\left(\frac{n_0+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n_0}{2}\right)^2}{\frac{n_0+1}{2} + \frac{n_0}{2}} \\ &= \frac{n_0+1}{2} + \frac{n_0}{2} \\ &= \frac{2n_0}{2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

D'où

$$f^{\Delta}(t) = 2t + \frac{1}{2}.$$

Remarque 1.4 *Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, alors d'après (iii) du théorème précédent la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\Delta-$différentiable en $t \in \mathbb{R}$ ssi :*

$$f'(t) = \lim_{t \to s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

existe et de plus $f^{\Delta}(t) = f'(t)$.

Remarque 1.5 *Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ d'après (ii) la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est $\Delta-$différentiable en $t \in \mathbb{Z}$ et on a*

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t).$$

Théorème 1.2 *Si $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sont $\Delta-$différentiables en $t \in \mathbb{T}^k$, alors :*

(i) $f + g$ est $\Delta-$différentiable en t de plus

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t).$$

(ii) (αf) est $\Delta-$différentiable en t pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et on a

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t).$$

(iii) fg est $\Delta-$différentiables en t et on a

$$\begin{aligned} (fg)^{\Delta}(t) &= f^{\Delta}(t) g(t) + f(\sigma(t)) g^{\Delta}(t) \\ &= f(t) g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t) g(\sigma(t)). \end{aligned}$$

(iv) *Si* $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$, *alors* $\frac{f}{g}$ *est* $\Delta-$*différentiable en* t *on a*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)\,g(t) - f(t)\,g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

Définition 1.12 *Une fonction* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ *est dit rd-continue si elle est continue en tout point dense à droite de* $\mathbb{T}$ *et si sa limite à gauche existe et finie en tout point dense à gauche de* $\mathbb{T}$.

Remarque 1.6 *L'ensemble de toutes les fonctions rd-continues est noté par* C_{rd} *ou* $C_{rd}(\mathbb{T})$.

Remarque 1.7 *L'ensemble de toutes les fonctions* $\Delta-$*différentiables et rd-continues est noté par* C_{rd}^1 *ou* $C_{rd}^1(\mathbb{T})$..

Définition 1.13 *La fonction* $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est dite primitive de* $f : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ *si elle vérifie* $F^{\Delta}(t) = f(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{T}^k$.

Théorème 1.3 *Toute fonction rd-continue* $f : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ *admet une primitive* $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *et on note*

$$\int_s^r f(t)\,\Delta t = F(r) - F(s) \text{ pour tout } r, s \in \mathbb{T},$$

de plus

$$\int_s^{\sigma(t)} f(\tau)\,\Delta\tau = \mu(t)\,f(t)\,, t \in \mathbb{T}^k.$$

Théorème 1.4 *Soient* $a, b, c \in \mathbb{T}, \lambda \in \mathbb{R}$ *et* $f, g \in C_{rd}(\mathbb{T}^k)$ *alors :*

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(t)+g(t)]\,\Delta t &= \int_a^b f(t)\,\Delta t + \int_a^b g(t)\,\Delta t,\\
\int_a^b (\lambda f(t))\,\Delta t &= \lambda \int_a^b f(t)\,\Delta t,\\
\int_a^b f(t)\,\Delta t &= -\int_b^a f(t)\,\Delta t,\\
\int_a^b f(t)\,\Delta t &= \int_a^c f(t)\,\Delta t + \int_c^b f(t)\,\Delta t.\\
\int_a^a f(t)\,\Delta t &= 0.
\end{aligned}$$

Si

$$|f(t)| \leq g(t)$$

sur $[a,b]_{\mathbb{T}^k}$, *alors*

$$\left|\int_a^b f(t)\,\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\,\Delta t.$$

Proposition 1.1 *Pour* $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ *on a*

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \int_a^b f(t)\,dt.$$

1.2.4 Δ−Intégration par partie

Proposition 1.2

$$\begin{aligned}
\int_a^b f^{\sigma}(t)\,g^{\Delta}(t)\,\Delta t &= [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f^{\Delta}(t)\,g(t)\,\Delta t,\\
\int_a^b f(t)\,g^{\Delta}(t)\,\Delta t &= [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f^{\Delta}(t)\,g^{\sigma}(t)\,\Delta t.
\end{aligned}$$

Définition 1.14 *Soit* $p:\mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$, *p est dit régressive si elle vérifie :*

$$1+\mu(t)\,p(t)\neq 0.$$

Remarque 1.8 *Pour tout $t\in\mathbb{T}^k$, l'ensemble des fonctions régressives et rd-continues est noté par $\Re$.*

Définition 1.15 *L'ensemble de toutes les fonctions régressives positives est définie par :*

$$\Re^{+}=\left\{p\in\Re : 1+\mu(t)\,p(t)>0,\ \text{pour tout } t\in\mathbb{T}^{K}\right\}.$$

Définition 1.16 *Pour $h>0$, on définit la transformation cylindrique :*
$\xi_h:\mathbb{C}_h\rightarrow\mathbb{Z}_h$, par :

$$\xi_h(z)=\frac{1}{h}\log(1+zh),$$

où log est le logarithme principale,

$$\mathbb{Z}_h=\left\{z\in\mathbb{C}\ :-\frac{\pi}{h}<\mathrm{Im}(z)\leq\frac{\pi}{h}\right\}$$

et

$$\mathbb{C}_h=\left\{z\in\mathbb{C}\ :\ z\neq\frac{1}{h}\right\}.$$

Pour $h=0$, on définit : $\xi_0(z)=z$ pour tout $z\in\mathbb{C}$.

Théorème 1.5 *On suppose que $p\in\Re$ et $t_0\in\mathbb{T}$ un point fixé, alors le problème à valeur initiale*

$$y^{\Delta}(t)=p(t)\,y(t),\ y(t_0)=1, \tag{1.1.6}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{T}$, donnée par

$$y(t)=e_p(t,t_0),$$

avec

$$e_p(t,t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}\left(p(\tau)\right)\Delta\tau\right).$$

Remarque 1.9 *Il est clair que*

$$e_p(\sigma(t), t_0) = (1 + \mu(t)\, p(t))\, e_p(t, t_0). \tag{1.1.7}$$

Remarque 1.10 *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, la fonction exponentielle est donnée par :*

$$e_p(t,t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,\Delta\tau\right)$$

où $t, t_0 \in \mathbb{R}$ et $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Remarque 1.11 *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, la fonction exponentielle est donnée par :*

$$e_p(t,t_0) = \prod_{\tau=t_0}^{\tau=t} \left[1 + p(\tau)\right],$$

où $t, t_0 \in \mathbb{Z}$, $t_0 < t$ et, $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est une suite vérifie

$$p(t) \neq -1 \text{ pour tout } t \in \mathbb{Z}.$$

Théorème 1.6 *Soit $a \in \mathbb{T}^k, b \in \mathbb{T}$ et $L : \mathbb{T} \times \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ est continue en (t,t), pour $t \in \mathbb{T}^k$, $t > a$ et $L^{\Delta}(t, .)$ est rd-continue dans $[a, \sigma(t)]$, on suppose que pour tout $\varepsilon > 0, \exists U$, un voisinage de t indépendant de $\tau \in [a, \sigma(t)]$ tel que :*

$$\left|L(\sigma(t), \tau) - L(s, \tau) - L^{\Delta}(t, \tau)(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon \left|\sigma(t) - s\right|, \quad \forall s \in U.$$

Où f^{Δ} dénote la dérivée de f par rapport à la $1^{\text{ière}}$ variable, alors on a :

$$g(t) = \int_{a}^{t} L(t,\tau)\,\Delta\tau \Rightarrow g^{\Delta}(t) = \int_{a}^{t} L^{\Delta}(t,\tau)\,\Delta\tau + L(\sigma(t), t),$$

Théorème 1.7 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable et $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ $\Delta-$différentiable dans $\mathbb{T}^k$, alors $f \circ g$ est $\Delta-$différentiable et on a :*

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = \left\{ \int_0^1 f'\left(g(t) + h\mu(t) g^{\Delta}(t)\right) dh \right\} .g^{\Delta}(t), \quad t \in \mathbb{T}^k.$$

Définition 1.17 *On définit le cercle minus de soustraction $\ominus$ sur $\Re$ par*

$$\begin{aligned} p \ominus q &= \frac{p-q}{1+\mu q}, \\ (\ominus p)(t) &= \frac{-p(t)}{1+\mu p(t)}, \\ \ominus(\ominus p) &= p. \end{aligned}$$

Théorème 1.8 *Soit $p, q \in \Re$, on à :*

$(i) e_0(t,s) \equiv 1$ *et* $e_p(t,t) \equiv 1$;

$(ii) e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t)) e_p(t,s)$;

$(iii) \frac{1}{e_p(t,s)} = e_{\ominus p}(t,s)$;

$(iv)\ e_p(t,s) = \frac{1}{e_p(s,t)} = e_{\ominus p}(s,t)$;

$(v) e_p(t,s) e_p(s,r) = e_p(t,r)$;

$(vi) e_p(t,s) e_q(t,s) = e_{p \oplus q}(t,s)$;

$(vii) \frac{e_p(t,s)}{e_q(t,s)} = e_{p \ominus q}(t,s)$;

$(viii) (\frac{1}{e_p(,s)})^{\Delta} = -\frac{p(t)}{e_p^{\sigma}(,s)}$.

1.3 Notions fondamentales de Stabilité

Nous entendons par stabilité du système, la stabilité des points d'équilibre qui est généralement étudiée à l'aide du concept de stabilité au sens de Lyapunov. Les défnitions de la stabilité au sens de Lyapunov consiste en l'étude des trajectoires du sytème quand l'état initial est "près" d'un état d'équilibre. Cela reflète la possibilité de perturbations affectant le système, sous forme des conditions initiales non nulles.

Définition 1.18 *Le point d'équilibre* $x = 0$ *du système (2) est dit stable si,* $\forall\ \varepsilon > 0$, $\forall t_0 \in \mathbb{T}$, *il existe un scalaire positif* $\delta(\varepsilon, t_0)$ *tel que,*

$$||x(t_0)|| < \delta(\varepsilon, t_0) \Longrightarrow ||x(t, t_0, x_0)|| < \varepsilon,\ \forall t \in \mathbb{T}^+_{t_0}. \tag{1.2.1}$$

Sinon le point d'équilibre est dit instable.

Définition 1.19 *Le point d'équilibre* $x = 0$ *du système (2) est dit uniformément stable si,* $\forall\ \varepsilon > 0$ *il existe un scalaire positif* $\delta(\varepsilon)$ *indépendant du point initial* t_0*, tel que*

$$||x(t_0)|| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow ||x(t, t_0, x_0)|| < \varepsilon, \forall t \in \mathbb{T}^+_{t_0}. \tag{1.2.2}$$

Cette définition signifie, quelle que soit la boule d'exigence de rayon, il est toujours possible de choisir une certaine sous-boule de rayon r telle que pour toute condition initiale comprise dans cette sous-boule, la trajectoire résultante sera, en tout temps, comprise dans la boule d'exigence de rayon .

Dans un langage plus imagé, un petit déséquilibre initial n'entraine qu'un petit déséquilibre au cours du temps, déséquilibre qui peut très bien être permanent.

Il existe plusieurs notions de stabilité :

-Stabilité asymptotique.

-Stabilité exponentielle.

-Stabilité locale et globale.

La stabilité asymptotique exige l'existence d'un voisinage de l'équilibre tel que toute trajectoire ayant pour condition initiale un point de ce voisinage converge vers le point d'équilibre

Définition 1.20 *Le point d'équilibre* $x = 0$ *du système (2) est dit uniformément asymptotiquement stable s' il est uniformément stable et uniformément attractif,i.e,. il existe une constante positive c,vérif ie*

$$\forall ||x(t_0)|| < c, \forall \varepsilon > 0, \exists T := T(\varepsilon, c) \quad \textit{tel que} \quad ||x(t, t_0, x_0)|| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 + T. \tag{1.2.3}$$

Définition 1.21 *Le point d'équilibre $x = 0$ du système (2) est dit globalement uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable, $\delta(\varepsilon)$ peut être choisir pour satisfaire $\lim\limits_{\varepsilon \to +\infty} \delta(\varepsilon) = +\infty$ et la relation (1.2.3) est satisfaite pour tous les $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$.*

Définition 1.22 *Le point d'équilibre $x = 0$ du système (2) est dit uniformément exponentiellement stable s' ils existent deux constantes $\lambda, \gamma > 0$, avec $-\lambda \in \Re^+$ telles que pour tout t_0 et $x(t_0)$, la solution satisfaite :*

$$||x(t)|| \leq \gamma e_{-\lambda}(t, t_0)||x_0||, \quad \textit{pour tout } t \in T_{t_0}^+ \tag{1.2.4}$$

L'analyse de la stabilité des systèmes linéaires non-autonomes peut complètement être caractérisé en termes de la résolvante du système. En effet, considérons le problème

$$X^\Delta(t) = A(t)X(t), X(t_0) = I_n, \tag{1.2.5}$$

Définition 1.23 *L'application $A : \mathbb{T} \to M_n(\mathbb{R})$ est appelée régressive, si pour tout $t \in \mathbb{T}$ la matrice carré $I + \mu(t)A$ de degré $n \times n$ est inversible, où I est la matrice identité. La classe de tous les fonctions régressives et rd-continues A de $\mathbb{T}$ vers $M_n(\mathbb{R})$ est notée par $C_{rd}\Re(\mathbb{T}; M_n(\mathbb{R}))$.*

Nous supposons que les coefficients de la matrice dans le modèle (1.2.5) sont bien déterminés pour que le modèle spatial admet une solution unique pour chaque spécifique valeur initiale $x(t_0)$.

Définition 1.24 *Pour $t_0 \in \mathbb{T}$, la solution du problème (1.2.5) s' appelle exponentielle de la fonction matricielle, notée par $\phi_A(t, t_0)$, où $A \in C_{rd}\Re(\mathbb{T}, M_n(\mathbb{R}))$*

En conséquence, la fonction $\phi_A(t, t_0)$ possède les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_A^{\Delta}(t, t_0) &= A(t)\phi_A(t, t_0), \\ \phi_A(t_0, t_0) &= I_n. \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

Cette fonction matricielle est appelée matrice de transition et notre hypothèse sur $A(t)$ montre que la matrice de transition existe et elle est unique.

Théorème 1.9 *Supposons $A, B \in C_{rd}\Re(\mathbb{T}; M_n(\mathbb{R}))$, alors La matrice de transition possède les propriétés suivantes*

(i) $\phi_A(t, r)\phi_A(r, s) = \phi_A(t, s)$, $s, t \in \mathbb{T}$;

(ii) $\phi_A(\delta(t), s) = (I + \mu(t)A(t))\phi_A(t, s)$;

(iii) Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *et* A *est constante, alors* $\phi_A(t, s) = e_A(t, s) = e^{A(t-s)}$;

(iv) Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, *avec* $h > 0$, *et* A *est constante, alors* $\phi_A(t, s) = (I + hA)^{\frac{(t-s)}{h}}$.

Remarque 1.12 *Pour le systeme linéaire (1) on rappelle que l'origine est un point d'équilibre et la stabilité locale est équivalente à la stabilité globale et on note aussi que la stabilité de chaque solution revient à l'etude de la stabilité de l'origine.*

Dans [6] ,**Dacunha** a montré que les solutions du système linéaire (1) sont uniformément stable ssi elles sont uniformément bornées.

Théorème 1.10 [6] *Le système linéaire* (1) *est uniformément stable si et seulement s' il existe une constante positive γ satsifaite*

$$||\phi_A(t, t_0)|| \leq \gamma; \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}_{t_0}^{+}, \tag{1.2.7}$$

Théorème 1.11 [6] *Le système linéaire* (1) *est uniformément exponentiellement stable si et seulement s' ils existent deux constantes $\lambda > 0$ avec $-\lambda \in \Re^{+}$ et $\gamma \geq 1$ indépendantes de tout point initial t_0, vérifient*

$$||\phi_A(t,t_0)|| \leq \gamma e_{-\lambda}(t,t_0); \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}^+_{t_0} \tag{1.2.8}$$

En utilisant les propriétés de la matrice de transition associée au système (1), ***Dacunha*** [6] *a illustré l'équivalence entre la stabilité uniformément exponentielle et la stabilité globalement uninformément asymptotique. Ce résultat est donné par le Théorème suivant*

Théorème 1.12 [6] *La solution de l'équation* (1) *est uniformément exponentiellement stable si et seulement si elle est globalement uniformément asymptotiquement stable.*

1.4 Quelques inégalités integrales

Dans cette section, nous présentons quelques inégalités intégrales de type Gronwall-Bellman utiles dans l'etude de stabilité des systèmes perturbés, pour cela, on a besoin d' enoncer les Lemmes suivants .

Lemme 1.1 [3].*(Comparaison) :*

On suppose que $x, b \in C_{rd}$, $a \in \Re^+$. *Si*

$$x^{\Delta}(t) \leq a(t)\,x(t) + b(t), \ t \geq t_0, \ t \in \mathbb{T}^k. \tag{1.3.1}$$

Alors,

$$x(t) \leq x(t_0)\,e_a(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} e_a(t,\sigma(s))\,b(s)\,\Delta s, t \geq t_0, \ t \in \mathbb{T}^k. \tag{1.3.2}$$

Lemme 1.2 [3]. *Soit* $t_0 \in \mathbb{T}$ *;* $x, f \in C_{rd}$ *et* $p \geq 0$, *alors, l'inégalité*

$$x(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^{t} x(\tau)p(\tau)\Delta\tau, \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^+_{t_0}, \tag{1.3.3}$$

implique

$$x(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^{t} e_p(t, \sigma(\tau)) f(\tau) p(\tau) \Delta\tau, \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}_{t_0}^{+}. \tag{1.3.4}$$

Lemme 1.3 [10] .*Soit* $a \in \mathbb{T}, x, y, p \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}_+)$ *et* y *une fonction delta-différentiable sur* $\mathbb{T}$, *avec* $y^{\Delta}(t) \geq 0$, *alors l'inégalité*

$$x(t) \leq y(t) + \int_{a}^{t} p(s) x(s) \Delta s; \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}_{a}^{+}, \tag{1.3.5}$$

implique

$$x(t) \leq y(a) e_p(t, a) + \int_{a}^{t} y^{\Delta}(s) e_p(t, \sigma(s)) \Delta s, \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}_{a}^{+}. \tag{1.3.6}$$

Maintenant, on va introduire une comparaison traitée dans [5] entre l' exponentielle d'une fonction dans une échelle de temps et l'exponentielle d'une fonction dans le cas classique.

Lemme 1.4 *Pour une fonction* p *non négative avec* $-p \in \Re^{+}$, *nous avons les inégalités suivantes*

$$1 - \int_{a}^{t} p(u) \Delta u \leq e_{-p}(t, a) \leq \exp\{-\int_{a}^{t} p(u) \Delta u\}; \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}_{a}^{+}. \tag{1.3.7}$$

La Remarque suivante indique une relation déjà prouvé dans [5,*Remark.2*].

Remarque 1.13 *Si* p *est une fonction non négative et rd-continue , alors, on a*

$$1 + \int_{a}^{t} p(u) \Delta u \leq e_p(t, a) \leq \exp\{\int_{a}^{t} p(u) \Delta u\}; \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}_{a}^{+}. \tag{1.3.8}$$

Dans ce qui suit du chapitre, nous citons avec démonstration les Théorèmes intervenants dans l'étude de stabilité du système perturbé (2). Nous signalons que ces Théorèmes sont démontrés par les auteurs du papier [2] .

Théorème 1.13 *Soient $t_0 \in \mathbb{T}$, $\psi, \phi, \alpha, \varphi \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}_+)$, si l'inégalité*

$$\phi(t) \leq \varphi(t) + \psi(t) \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\phi(s)\Delta s. \tag{1.3.9}$$

est satisfaite, alors

$$\phi(t) \leq \varphi(t) + \psi(t) \int_{a}^{t} \alpha(s)\varphi(s) \exp(\int_{\sigma(s)}^{t} \alpha(\tau)\psi(\tau)\Delta\tau)\Delta s \ , \ t \in \mathbb{T}_{t_0}^{+} \tag{1.3.10}$$

Preuve. Soit $t \in \mathbb{T}_{t_0}^{+}$. Définissons la fonction $z(t)$ par

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\phi(s)\Delta s. \tag{1.3.11}$$

Donc

$$\phi(t) \leq \varphi(t) + \psi(t)z(t), \tag{1.3.12}$$

et

$$z^{\Delta}(t) = \alpha(t)\phi(t) \leq [\alpha(t)\psi(t)]z(t) + \alpha(t)\varphi(t), \tag{1.3.13}$$

Appliquons le Lemme 1.1, nous obtenons

$$z(t) \leq \int_{t_0}^{t} e_{\alpha\psi}(t, \sigma(s))\alpha(s)\varphi(s)\Delta s. \tag{1.3.14}$$

On utilise l'approximation exponentielle donnée par (1.3.7), on trouve l'inégalité

$$e_{\alpha\psi}(t, \sigma(s)) \leq \exp \int_{\sigma(s)}^{t} \alpha(\tau)\psi(\tau)\Delta\tau \tag{1.3.15}$$

En substituant (1.3.14), (1.3.15) dans (1.3.12), on arrive à l'inégalité souhaitée. ■

Théorème 1.14 *Supposons que $\phi, \varphi, \psi, \alpha, x \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}_+)$, alors l'inégalité*

$$\phi(t) \leq \varphi(t) + \psi(t) \int_{t_0}^{t} \{\alpha(s)\phi(s) + x(s)\}\Delta s; \ \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}_{t_0}^{+}, \tag{1.3.16}$$

implique

$$\phi(t) \leq \varphi(t) + \psi(t) \int_{t_0}^{t} \{\alpha(s)\varphi(s) + x(s)\} \exp[\int_{\sigma(s)}^{t} \alpha(\tau)\psi(\tau)\Delta\tau]\Delta s; \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}_{t_0}^{+} \tag{1.3.17}$$

Preuve. Pour $t \in \mathbb{T}_{t_0}^{+}$, on définit la fonction $z(t)$ par

$$z(t) = \int_{a}^{t} \{\alpha(s)\phi(s) + x(s)\}\Delta s. \tag{1.3.1.18}$$

On suit les mêmes étapes du Théorème précedent, on aboutit au résultat désiré. ■

Le résultat suivant est trés utile dans l'etude de stabilité uniformément asymptotique.

Théorème 1.15 *Supposons que* $\phi, \psi, \varphi \in C_{rd}([a, b[_{\mathbb{T}}; \mathbb{R}_+)$, *et soit* $R(t, x) : [a, b[_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *une fonction rd-continue par rapport au premier argument, continue par rapport au deuxième argument et différentiable sur* $[a, b[_{\mathbb{T}} \times]0, \infty[$. *Si sa dérivée partielle* $\frac{\partial R}{\partial x}(t, x)$ *est non négative sur* $[a, b[_{\mathbb{T}} \times]0, \infty[$ *et s' il existe une fonction continue* $S : [a, b[_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, *telle que*

$$\frac{\partial R}{\partial x}(t, x) \leq S(t, y) \ , \forall t \in]a, b[_{\mathbb{T}} \text{ et } x \geq y > 0. \tag{1.3.19}$$

Alors , l'inégalité

$$\phi(t) \leq \varphi(t) + \psi(t) \int_{a}^{t} R(u, \phi(u))\Delta u; t \in [a; b[_{\mathbb{T}}, \tag{1.3.20}$$

implique

$$\phi(t) \leq \varphi(t) + \psi(t) \int_{a}^{t} R(s, \varphi(u)) \exp[\int_{a}^{t} S(r, \varphi(r))\psi(r)\Delta r]\Delta s; t \in [a; b[_{\mathbb{T}}. \tag{1.3.21}$$

Preuve. Soit la fonction $y : [a, b[_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$y(t) := \int_{a}^{t} R(s, \phi(s))\Delta s. \tag{1.3.22}$$

Chapitre 2

Stabilité des systèmes perturbés aux échelles de temps et applications

2.1 Introduction

En 1961, **Aleksev** a introduit la relation liée la solution du système linéaire (1) à celle du système perturbé (2) dans les deux cas, discret et continu, pour plus de détails voir [1] . Les auteurs dans [2] ,ont trouvé une version dans le cas non classique,.i.e. dans le cas spécial (échelle de temps).

Théorème 2.1 *Considérons à nouveau le système linéaire*

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) &= A(t)x(t) \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

et le système perturbé associé

$$
\begin{aligned}
x^{\Delta}(t) &= A(t)x(t) + F(t, x(t)), \\
x(t_0) &= x_0.
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

où $F(t;0) = 0$ sur $\mathbb{T}$, et $F : \mathbb{T}\times\mathbb{R}^n$ est une fonction rd-continu, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{T}$; et $A : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice régressive dépend de t, alors la solution de (2.2) est donnée par

$$
x(t) = \phi_A(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi_A(t, \sigma(s))F(s, x(s))\Delta s. \tag{2.3}
$$

Preuve. Comme l'exponentielle de la fonction matricielle $\phi_A(t, t_0)$ vérifie (1.2.6), la solution du système perturbé (2.2) a la forme explicite (2.3) avec la condition initiale x_0. Reste à montrer que la forme explicite donnée par (2.3) vérifie le système (2.2). Pour cela, on applique le Théorème 1.6 et par dérrivaion de (2.3) par rapport à t, on obtient

$$
x^{\Delta}(t) = [\phi_A(t, t_0)]^{\Delta_t}x_0 + \int_{t_0}^{t} [\phi_A(t, \sigma(s))]^{\Delta_t}F(s, x(s))\Delta s + \phi_A(\sigma(t), \sigma(t))F(t, x(t)).
$$

On utilise (1.2.6), on trouve

$$
x^{\Delta}(t) = A(t)\phi_A(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} A(t)\phi_A(t, \sigma(s))F(s, x(s))\Delta s + F(t, x(t)).
$$

Ce qui donne

$$
\begin{aligned}
x^{\Delta}(t) &= A(t)[\phi_A(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \phi_A(t, \sigma(s))F(s, x(s))\Delta s] + F(t, x(t)) \\
&= A(t)x(t) + F(t, x(t)).
\end{aligned}
$$

Donc, l'expression (2.3) est une solution du système perturbé (2.2). La condition initiale est donnée par $\phi_A(t_0; t_0)x(t_0) = x(t_0)$. ■

Enfin, de l'expression (2.3), nous pouvons tirer des conclusions sur le comportement des solution du système perturbée (2.2), tenant compte du comportement des solutions du systèmes (2.1), la matrice fondamentale $\phi_A(.,.)$, et la perturbation F.

2.2 Etude de la stabilité

Le Théorème suivant montre que la stabilité exponentielle uniforme est également conservé sous certaines conditions exigées sur le terme perturbé.

Théorème 2.2 *Si les conditions suivantes sont satisfaites*

(i) Le système (2.1) est uniformément exponentiellement stable pour certaines constantes positives λ et γ,

(ii)$||F(t,x)|| \leq d(t)||x||$, $d(.) \in C_{rd}(\mathbb{T};\mathbb{R}_+)$,

(iii) $\int_a^{+\infty} \frac{d(s)}{1-\lambda\mu(s)} \Delta s \leq \widetilde{d} < +\infty$,

alors la solution triviale $x(t) \equiv 0$ du système (2.2) est uniformément exponentiellement stable.

Preuve. Soit $t_0 \in \mathbb{T}$, $t \in \mathbb{T}_{t_0}^+$ et $x(t) = x(t,t_0,x_0)$ est la solution du système (2,2).
La formule (2.3), donne

$$||x(t)|| \leq ||\phi_A(t,t_0)||.||x_0|| + \int_{t_0}^{t} ||\phi_A(t,\sigma(s))||.||F(s,x(s))||\Delta s, \qquad (2.4)$$

on utilise les conditions (i) et (ii), on obtient l'estimation suivante pour une solution arbitraire $x(t)$ du système (2.2),

$$||x(t)|| \leq \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)||x_0|| + \gamma e_{-\lambda}(t,t_0) \int_{t_0}^{t} e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))d(s)||x(s)||\Delta s. \qquad (2.5)$$

D'aprés les propriétés données par le Théorème 1.8 et par application du Théorème 1.13 à l'estimation (2.5), nous obtenons

$$||x(t)|| \leq \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)||x_0|| + \gamma^2 e_{-\lambda}(t,t_0)||x_0|| \int_{t_0}^{t} \frac{d(s)}{1-\lambda\mu(s)} \times \exp[\gamma \int_{\sigma(s)}^{t} \frac{d(\tau)}{1-\lambda\mu(\tau)}\Delta\tau]\Delta s. \tag{2.6}$$

Prenant compte de la condition (iii), nous déduisons

$$||x(t)|| \leq \gamma[1+\gamma\tilde{d}\exp[\gamma\tilde{d}]]e_{-\lambda}(t,t_0)||x_0||. \tag{2.7}$$

Par conséquent, cette estimation est valable pour chaque $t \in T_{t_0}^{+}$. Cette inégalité montre que l'état d'équilibre zéro du système (2.2) est uniformément exponentiellement stable. ∎

Théorème 2.3 *Supposons qu'il existe $d, k \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}_+)$ qui vérifient les conditions suivante*

(i) $||F(t,x)|| \leq d(t)||x|| + k(t)$,

(ii) $\int_a^{+\infty} \frac{d(s)}{1-\lambda\mu(s)}\Delta s \leq \tilde{d} < +\infty$, $\int_a^{+\infty} k(s)e_{-\lambda}(a,\delta(s))\Delta s \leq \bar{k} < +\infty$,

Si le système homogène est uniformément asymptotiquement stable alors, le système perturbé (2.2) est uniformément attracttif.

Preuve. Pour $t_0 \in \mathbb{T}$; $t \in \mathbb{T}_{t_0}^{+}$ et $x(t) := x(t,t_0,x_0)$, une solution du système (2,2) qui satisfaite la formule (2.3). Puisque le système homogène (2.1) est uniformément asymptotiquement stable, on peut estimer $x(t)$ à l'aide de l'hypothèse (i), de la façon suivante

$$||x(t)|| \leq \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)||x_0|| + \gamma e_{-\lambda}(t,t_0) \int_{t_0}^{t} e_{-\lambda}(t_{0,}\sigma(s))(d(s)||x(s)|| + k(s))\Delta s. \tag{2.8}$$

par application du Théorème 1.14 à l'inégalité (2.8), on trouve l' estimation

$$\begin{aligned} ||x(t)|| &\leq \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)||x_0|| + \gamma\{\int_{t_0}^{t} e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))(\gamma d(s)e_{-\lambda}(s,t_0)||x_0|| + k(s)) \quad (2.9) \\ &\quad \times \exp(\int_{\delta(s)}^{t} d(r)e_{-\lambda}(r,t_0)e_{-\lambda}(t_0,\sigma(r))\Delta r)\Delta s\}. \end{aligned}$$

En utilisant la conditions (ii), l'inégalité (2.9) devient

$$||x(t)|| \leq \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)||x_0|| + \gamma^2\widetilde{d}\exp[\gamma\widetilde{d}]e_{-\lambda}(t,t_0)||x_0|| + \gamma\exp[\gamma\widetilde{d}]\widetilde{k}e_{-\lambda}(t,t_0). \quad (2.10)$$

Maintenant, nous sommes en mesure d'affirmer l'attractivité uniforme de la solution triviale.

Nous fixons un arbitraire $\varepsilon > 0$ et $c > 0$ tel que $||x_0|| < c$. En utilisant le Lemme 1.4, nous obtenons la relation suivante

$$e_{-\lambda}(t,t_0) \leq e^{-\lambda(t-t_0)};\ \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^+_{t_0}.$$

Ensuite, on peut estimer l'inégalité (2.10) de cette manière

$$||x(t)|| \leq \gamma_1 e^{-\lambda(t-t_0)}c + \gamma_2 e^{-\lambda(t-t_0)};\ \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^+_{t_0}. \quad (2.11)$$

Cependant, il est facile de voir que

$$\gamma_1 e^{-\lambda(t-t_0)}c \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } t \geq t_0 + \frac{1}{\lambda}\log(\frac{2\gamma_1 c}{\varepsilon}). \quad (2.12)$$

En mettant

$$T(\varepsilon,c) = max\left\{\frac{1}{\lambda}\log\left(\frac{2\gamma_2}{\varepsilon}\right), \frac{1}{\lambda}\log\left(\frac{2\gamma_2 c}{\varepsilon}\right)\right\}, \quad (2.13)$$

avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit,on déduit

$$t \in \mathbb{T}^+_{t_0+T(\varepsilon,c)} \text{ implique } ||x(t,t_0,x_0)|| \leq \varepsilon, \tag{2.14}$$

ce qui signifie que la solution triviale du système (2.3) est uniformément attractif. ∎

Théorème 2.4 *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites*

(i) Le système (2.1) est uniformément exponentiellement stable pour certaines constantes γ et λ ;

(ii) le terme perturbé vérifie

$$||F(t,x)|| \leq R(t,||x||),\ t \in \mathbb{T}, x \in \mathbb{R}^n,$$

où la fonction R ayant les mêmes caractéristiques que celle du Théorème 1.15 , avec $R(t,0) = 0$ sur $\mathbb{T}$;

(iii) il existe une $\theta_0 > 0$ telle que les deux fonctions R,S définies au Théorème 1.15, vérifient

$$\int_a^{+\infty} \frac{S(s,\theta)}{1-\lambda\mu(s)} \Delta s \leq \widetilde{S} < +\infty,$$

et

$$\int_a^{+\infty} e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))R(s,\theta)\Delta s \leq \widetilde{R} < +\infty,\ \textit{pour tout } \theta \in]0;\theta_0].$$

Alors la solution triviale du système (2.2) est uniformément asymptotiquement stable.

Preuve. Pour toute condition initiale $x_0 = x(t_0)$, la solution de (2,2) vérifie

$$x(t) = \phi_A(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi_A(t,\sigma(s))F(s,x(s))\Delta s. \tag{2.15}$$

Comme le système (2.1) est uniformément exponentiellement stable pour certaines constantes γ et λ, la matrice de transition vérifie

$$||\Phi_A(t,t_0)|| \le \gamma e_{-\lambda}(t,t_0), \text{pour tout } t \in \mathbb{T}_{t_0}^+.$$

En prenant les normes des deux côtés de l'egalité (2.15) et en utilisant le Théorème 1.15, nous obtenons

$$\begin{aligned} ||x(t)|| &\le \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)||x_0|| + \\ & \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)\int_{t_0}^{t} e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))R(s,\gamma e_{-\lambda}(s,t_0)||x_0||)\times \\ & \exp[\int_{\sigma(s)}^{t} e_{-\lambda}(t_0,\sigma(r))S(r,\gamma e_{-\lambda}(r,t_0)||x_0||)\gamma e_{-\lambda}(r,t_0)\Delta r]\Delta s. \end{aligned}$$

Prenant un arbitraire $\varepsilon > 0$ et puisque $z \to \int_{t_0}^{+\infty} e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))R(s,z)\Delta s$ est continue au point 0 et $R(t,0) = 0$ sur $\mathbb{T}$, alors i il existe $\theta_1(\varepsilon) > 0$, tel que

$$||x_0|| \le \frac{\theta_1(\varepsilon)}{\gamma} \implies \int_{t_0}^{+\infty} e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))R(s,\gamma e_{-\lambda}(s,t_0)||x_0||\Delta s) \le \frac{\varepsilon}{2\gamma\exp(\gamma\widetilde{S})}.$$

Posons, $\theta(\varepsilon) := min\left\{\frac{\theta_0}{\gamma}, \frac{\varepsilon}{2\gamma}, \frac{\theta_1(\varepsilon)}{\gamma}\right\}$.

Si la condition initiale satisfaite $||x_0|| \le \theta(\varepsilon)$, alors , $||x(t)|| \le \varepsilon$, $\forall t \in \mathbb{T}_{t_0}^+$.

Par conséquent, la solution triviale du système perturbé (2,2) est uniformément stable.

De plus, les deux conditions de (iii), donnent l'estimation :

$$||x(t)|| \le \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)||x_0|| + \gamma\widetilde{R}\exp(\gamma\widetilde{S})e_{-\lambda}(t,t_0), \forall t \in \mathbb{T}_{t_0}^+. \tag{3.16}$$

Maintenant, si $||x_0|| \le c := \frac{\theta_0}{\gamma}$, alors $||x(t)|| \le [\gamma c + \gamma\widetilde{R}\exp(\gamma\widetilde{S})]e_{-\lambda}(t,t_0).\forall t \in \mathbb{T}_{t_0}^+$.

Posons

$$T(\varepsilon,c) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{\gamma\widetilde{R}\exp(\gamma\widetilde{S}) + yc}{\varepsilon}\right). \tag{2.17}$$

Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on déduit pour $t \in \mathbb{T}_{t_0+T(\varepsilon,c)}^+$ que $||x(t)|| \le \varepsilon$, ce qui signifie que la solution triviale du système (2.2) est uniformément asymptotiquement stable. ∎

2.3 Applications :

Pour illustrer l'utilité du théorème 1.15, nous présentons deux exemples l'un pour le cas classique $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ et l'autre pour le cas spécial $\mathbb{T}=\bigcup_{k=0}^{k=+\infty}[2k,2k+1]$.

Exemple 2.1 *Considérons le problème suivant*

$$x^{\Delta}=-px+q(t)ln(x+1),$$

où $p>0$ *avec* $-p\in\Re^{+}$, *et* $q\in C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R}_{+})$ *avec,*

$$\int_a^{+\infty}q(s)e_{-p}(a,\sigma(s))\Delta s)<+\infty \text{ pour tout } a\in\mathbb{T}, \tag{2.18}$$

Il est facile de voir que toutes les conditions du Théorème 1.15 sont vérifiées et conclure que ce système est uniformément asymptotiquement stable.

Exemple 2.2 *Nous considérons le problème non linéaire suivant :*

$$x^{\Delta}(t)=\begin{pmatrix}\frac{-1}{4} & 0\\ 0 & \frac{-1}{4}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+q(t)\arctan\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\begin{pmatrix}\frac{-x_1^2}{x_1^2+x_2^2}\\ \frac{x_2^2}{x_1^2+x_2^2}\end{pmatrix}, \tag{2.19}$$

où $\mathbb{T}=\bigcup_{0}^{+\infty}[2k,2k+1]$, *avec*

$$\int_a^{+\infty}q(s)e_{-\frac{1}{4}}(a,\sigma(s))\Delta s)<+\infty, \text{ pour tout } a\in\mathbb{T}. \tag{2.20}$$

Nous observons que $A=\begin{pmatrix}\frac{-1}{4} & 0\\ 0 & \frac{-1}{4}\end{pmatrix}$ est régressive car $\mu(t)\neq 4$(voir Exemple 1.6) pour tout $t\in\mathbb{T}$. Dans ce cas, le système linéaire peossède une solution unique $x(t,t_0,x_0)=\Phi_A(t,t_0)x_0$, où $\Phi_A(t,t_0)$ est l'exponentielle de la fonction matricielle. Elle est donnée par

$$\Phi_A(t,t_0)=\begin{pmatrix}e_{\frac{-1}{4}}(t,t_0) & 0 & ,t\in\mathbb{T}.\\ 0 & e_{\frac{-1}{4}}(t,t_0) & \end{pmatrix}$$

Si q satisfaite l'inégalité (2.20), il ne sera pas difficile de vérifier toutes les hypothèses du Théorème 1.15 . Donc, nous pouvons assurer que la solution du système (2.19) est uniformément asymptotiquement stable.

2.4 Conclusion

Le but de ce mémoire est la vérification des propriétés de la stabilité des systèmes perturbés à partir des propriétés des systèmes linéaires non perturbés, par l'utilisation des inégalités intégrales de type Gronwall-Bellman en se basant sur le choix du terme perturbé qui doit vérifier certaines conditions. L'approche classique pour l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires est l'utilisation de la théorie de Lyapunov qui se base sur l'utilisation des fonctions définies positives. Donc, on peut dire que la technique des inégalités intégrales est très efficace pour analyser la stabilité d'un système gouverné par une équation différentielle ordinaire ou dynamique définie sur une échelle de temps.

Bibliographie

[1] V. M. Alekseev, An estimate for the perturbations of solutions of ordinary differentiaicacel equations. Vestnik Moskov. Univ. Ser. I. Mat. Meh. 2 (1961), 28-36 (Russian).

[2] BB Nasser, K Boukerrioua, MA Hammami, On the stability of perturbed time scale systems using integral inequier alities, Applied Sciences 16, 56-71.

[3] M. Bohner, A. Peterson. Dynamic Equations on Time Scales : An Introduction with Applications, Birkhäuser, Boston, 2001.

[4] M. Bohner, A. Peterson. Advances in Dynamic Equations on Time Scales, Birkhäuser, Boston, 2003.

[5] M. Bohner, Some oscillation criteria for ¯rst order delay dynamic equations, Far East J. Appl. Math. 18, 3 (2005), 289-304.

[6] J. DaCunha, Stability for time varying linear dynamic systems on time scales. J. Comput. Appl. Math. 176 (2005), 381-410.

[7] H. K. Khalil, Nonlinear systems, 3nd edition. Prentice-Hall : New Jersey, 2002.

[8] J. Kurzweil "On the Inversion of Liapunov's Second Theorem on Stability of Motion" Amer. Math. Soc. Transl, vol. 24, pages 19-77, 1963.

[9] A. M. Lyapunov, "Stability of Motion : General Problem" Internat. J. Control, Lyapunov Centenary issue. vol. 55, no. 3, pages 520-790, march 1992.

[10] D.B. Pachpatte, {\em Explicit estimates on integral inequalities with time scale}. J. Inequal. Pure Appl. Math. 7, 4 (2006), 8 pages.