

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



M/S 10.137



### Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
**Master Académique en Mathématiques**  
Option : **Equations aux Dérivées Partielles**



Par :

M<sup>lle</sup>. Sarra CHAOUCH

### Intitulé

**Stabilité structurelle et bifurcations locales**

Dirigé par : Dr. SELLAMI Nabil

Devant le jury

**PRESIDENT  
RAPPORTEUR  
EXAMINATEUR**

Mme. A.FRIOUI  
Mr. N.SELLAMI  
Mr. A.DEBOUCHE

MC Univ-Guelma  
MC Univ-Guelma  
MC Univ-Guelma

Session Juin 2015

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



M/S10.137



**Mémoire**

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
**Master Académique en Mathématiques**  
Option : **Equations aux Dérivées Partielles**



Par :

M<sup>lle</sup>. Sarra CHAOUCH

**Intitulé**

**Stabilité structurelle et bifurcations locales**

**Dirigé par : Dr. SELLAMI Nabil**

**Devant le jury**

**PRESIDENT  
RAPPORTEUR  
EXAMINATEUR**

**Mme. A.FRIOUI  
Mr. N.SELLAMI  
Mr. A.DEBUCHE**

**MC Univ-Guelma  
MC Univ-Guelma  
MC Univ-Guelma**

**Session Juin 2015**



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



**Mémoire**

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
**Master Académique en Mathématiques**  
Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Par :

**M<sup>lle</sup>. Sarra CHAOUCH**

**Intitulé**

**Stabilité structurelle et bifurcations locales**

**Dirigé par : Dr. SELLAMI Nabil**

**Devant le jury**

**PRESIDENT  
RAPPORTEUR  
EXAMINATEUR**

**Mme. A.FRIOUI  
Mr. N.SELLAMI  
Mr. A.DEBOUCHE**

**MC Univ-Guelma  
MC Univ-Guelma  
MC Univ-Guelma**

**Session Juin 2015**

# Remerciement

Avant tout, je tiens à exprimer mon remerciements et ma profonde gratitude au bon Dieu qui m' à donné la vie et la santé pour le parachèvement de ce modeste travail;

je tiens à offrir mon respect a mon encadreur Dr: SELLAMI Nabil et je le remercie vivement pour toute sa gentillesse, ses conseils fructueux et son aide;

je tiens à remercier les membres de Jury Mme. Frioui et Mr. Debouche qui m'ont honorer par leurs présences

Aussi je remercie tous les enseignants de département de Mathématique qui m'ont aidé et encouru dans mes cours durant ces cinq années.





# DÉDICACE

Au nom de Dieu le tout puissant, le miséricordieux, Il m'a aidé a réaliser le rêve de ma vie pour pouvoir accéder en fin des études universitaires demandées, Travail accompli et réussite totale.

Je dédié donc ce mémoire avant tout autre propos devancier, a mes parents adoptifs, Qui m'ont soutenu dès le début et encouragée a poursuivre sans relache les études, qui se sont trops peines à me voir terriblement peiné dans les révisions intensives des cours, menant vers mes études. Je le dédié aussi à mes parents chéris, qui m'ont beaucoup aidé et soutenu

Je le dédié sans façon à mon éducateur et formateur de principe, en collaboration de mom bon encadreur, À tous mes professeurs qui m'ont aidé et encouru dans mes cours, Je le dédié sans aucune réserve à toute ma famille, à tous mes amis, juristes, éducateurs, ou professeurs, De loin ou de près, je vous remercie de m'avoir supporté et hisse en pôle position des études, Je vous remercie et je vous adore pour le bien fait de la continuation aux prochaines études supérieures, Cordialement

# Table des matières

0.1	Introduction . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Notions Préliminaires</b>	<b>4</b>
1.1	Existence et unicité de la solution . . . . .	4
1.1.1	Théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .	5
1.2	Théorie de la stabilité . . . . .	5
1.3	Notion de portrait de phase . . . . .	6
1.4	Types les plus simples des points critiques . . . . .	7
1.5	Classification Topologique des points critiques . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Stabilité structurelle</b>	<b>14</b>
2.1	Stabilité structurelle des champs de vecteurs . . . . .	14
2.2	Stabilité structurelle des systèmes linéaires à coefficients constants . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Bifurcations aux points d'équilibre non hyperboliques</b>	<b>21</b>
3.1	Bifurcation nœud-selle . . . . .	21
3.2	Bifurcation transcritique . . . . .	27
3.3	Bifurcation fourche . . . . .	28



## Résumé

Dans ce mémoire, on étudie la stabilité structurelle des champs de vecteurs et les différents types de bifurcations qui peuvent arriver dans les  $C^1$ -systèmes  $\dot{x} = f(x, \mu)$ , dépendants d'un paramètre  $\mu \in \mathbb{R}$ . En particulier, nous étudions les bifurcations dans les points critiques non hyperboliques, qui sont appelées bifurcations locales, à savoir la bifurcation nœud-selle, la bifurcation transcritique et la bifurcation fourche. L'étude de chaque type de bifurcation est illustrée par un ou deux exemples.

## 0.1 Introduction

Le terme bifurcation est associé aux changements du type topologique de la trajectoire d'un système dynamique quand un ou plusieurs paramètres dont elle dépend changent. C'est une notion très importante en mécanique où l'étude des systèmes non linéaires dépend de plusieurs paramètres. Mathématiquement, il y a bifurcation quand les portraits de phase ne sont pas homéomorphes. Nous allons étudier les systèmes de la forme  $\dot{x} = f(x)$  (1),  $f \in C^1(E)$  où  $E$  est un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ; nous illustrons la question: comment est le comportement qualitatif de (1) quand on change la fonction ou le champ de vecteurs  $f$ . Si le comportement qualitatif de (1) reste le même pour tout champ de vecteurs proche de  $f$ , alors le système (1) ou le champ de vecteurs  $f$  est dit structurellement stable. L'idée de stabilité structurelle est trouvée par Andronov et Pontriaguine en 1937. Si un champ de vecteur  $f \in C^1(E)$  n'est pas structurellement stable, il appartient à l'ensemble de bifurcation dans  $C^1(E)$ . Lorsque le champ de vecteurs  $f$  passe par un point de l'ensemble de bifurcation, la structure qualitative de l'ensemble solution ou du portrait global de phase de (1) change. Nous étudions les différents types de bifurcation qui peuvent arriver dans les  $C^1$ -systèmes  $\dot{x} = f(x, \mu)$ , dépendants d'un paramètre  $\mu \in \mathbb{R}$ . En particulier, nous étudions les bifurcations dans les points critiques non hyperboliques, qui sont appelées bifurcations locales.

Notre mémoire comporte trois chapitres:

Le premier chapitre est un chapitre préliminaire qui contient les définitions et les notions de base de la théorie des systèmes dynamiques. On commence par le théorème d'existence et d'unicité de la solution d'un système différentiel et on passe à la théorie de la stabilité au sens de Lyapunov des solutions. Ensuite, on définit la notion de portrait de phase, les points critiques et leurs classifications ainsi que leur stabilité.

Dans le deuxième chapitre, on étudie la notion de stabilité structurelle. On commence par définir la stabilité structurelle qui dépend de l'équivalence topologique entre deux champs de vecteurs et sa relation avec la bifurcation et on donne des exemples. Finalement, on caractérise la stabilité structurelle des systèmes linéaires à coefficients constants.

Enfin, le dernier chapitre est consacré à l'étude de trois différents types de bifurcations locales dans les points critiques non hyperboliques, à savoir la bifurcation noeud-selle, la bifurcation transcritique et la bifurcation fourche. L'étude de chaque type de bifurcation est illustrée par un ou deux exemples.



# Chapitre 1

## Notions Préliminaires

**Définition 1.1** On appelle système différentiel tout système de la forme

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Lorsque le champ de vecteurs  $f$  dépend explicitement du temps le système est dit non-autonome. Dans le cas contraire, on dit que le système est autonome. Dans un système autonome, la trajectoire  $x(x_0, t)$  ne dépend pas du temps initial  $t_0$ , alors que dans un système non-autonome elle dépend de  $t_0$ .

### 1.1 Existence et unicité de la solution

Intéressons-nous à des systèmes de la forme

$$\dot{x} = f(x, t)$$

Dans cette formulation, les données sont

- 1- Un ensemble ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
- 2- Une application continue  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

### 1.1.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

**Théorème 1.1** *Supposons que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\Omega$ . Alors, pour tout point  $x_0 \in \Omega$  et tout  $t_0 \in \mathbb{R}$ , il existe  $\delta > 0$  tel que le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*Possède une unique solution définie sur  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ .*

*Ce théorème se généralise à des fonctions  $f$  localement lipschitziennes.*

## 1.2 Théorie de la stabilité

Soit le système d'équations différentielles (1.1), on suppose que  $f$  satisfait les conditions d'existence et d'unicité des solutions.

**Définition 1.2** *Une solution  $\phi(t)$  de (1.1) telle que  $\phi(t_0) = \phi_0$  est dite stable au sens de Lyapunov si quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\delta > 0$  telle que pour toute solution  $x(t)$  de (1.1) vérifiant  $x(t_0) = x_0$ , on a :*

$$\|x(t_0) - \phi(t_0)\| < \delta \implies \|x(t) - \phi(t)\| < \varepsilon.$$

*Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \phi(t)\| = 0$ . La solution  $\phi(t)$  est dite asymptotiquement stable.*

*La solution de (1.1) est dite instable si pour  $\delta > 0$  aussi petit que l'on veut, l'inégalité n'est pas vérifiée pour au moins une solution  $x(t)$ .*

**Exemple 1.1** *En partant de la définition de la stabilité au sens de Lyapunov, étudier la stabilité de la solution de l'équation  $\dot{x} = -x + t + 1$  avec  $x(0) = 0$ .*

**Solution**

*Cette équation est linéaire non homogène, sa solution générale est  $x(t) = ce^{-t} + t$ .*

*A la condition initiale  $x(0) = 0$  satisfait une solution*

$$\phi(t) = t$$



A la condition initiale  $x(0) = x_0$  satisfait une solution

$$x(t) = x_0 e^{-t} + t$$

On a :

$$x(t) - \phi(t) = x_0 e^{-t} = (x_0 - 0)e^{-t}$$

On en déduit que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\delta > 0$  tel que toute solution  $x(t)$  de l'équation vérifiant  $|x_0 - 0| < \delta$  vérifie l'inégalité

$$|x(t) - \phi(t)| = |x_0 - 0| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

d'où  $\phi(t) = t$  est stable.

De plus, puisque

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - \phi(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |x_0 - 0| e^{-t} = 0$$

Alors  $\phi(t) = t$  est asymptotiquement stable.

### 1.3 Notion de portrait de phase

On considère le système plan :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.2)$$

Où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes en  $x$  et  $y$ .

Les solutions du système  $\dot{x} = f(x)$  se représentent dans le plan  $(x, y)$  par des courbes appelées orbites, les points critiques de ce système sont des solutions constantes représentées par des points dans le plan  $(x, y)$ .

La figure complète des orbites du système  $\dot{x} = f(x)$  ainsi que les points critiques représentées dans le plan  $(x, y)$  s'appelle portrait de phase et le plan  $(x, y)$  s'appelle plan de phase.

**Théorème 1.2** Soit le système

$$\dot{x} = Ax \quad (1.3)$$

Où  $A$  est une matrice constante inversible d'ordre  $n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$ .

1- Si  $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0, \forall k = 1, \dots, n$  alors pour chaque  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  il existe deux constantes  $C$  et  $\mu$  positives telles que

$$\|x(t)\| \leq C \|x_0\| e^{-\mu t}$$

et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$  et  $x(t) = 0$  est asymp-stable.

2- Si  $\operatorname{Re}(\lambda_k) \leq 0 \forall k = 1, \dots, n$  où les valeurs propres avec  $\operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$  sont distinctes, alors il existe une constante positive  $C$  telle que :  $\|x(t)\| \leq C \|x_0\|$  et  $x(t) = 0$  est stable.

3- Si il existe une valeur propre  $\lambda_k$  avec  $\operatorname{Re}(\lambda_k) > 0$  alors dans chaque voisinage de  $x = 0$  il y a des valeurs initiales telles que pour les solutions correspondantes on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = \infty$$

Et dans ce cas  $x = 0$  est instable.

**Définition 1.3** On appelle point d'équilibre (ou point fixe ou point stationnaire ou point critique) de  $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x)$  tout point  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $f(\bar{x}) = 0$ .

## 1.4 Types les plus simples des points critiques

Soit donné le système différentiel linéaire à-coefficients constants dans le plan

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad (1.4)$$

qui s'écrit sous la forme matricielle :  $\dot{X} = AX$ , avec  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\det A \neq 0$

L'origine  $(0, 0)$  est le seul point critique pour ce système. Pour étudier le type (la nature) du point critique  $(0, 0)$  il faut chercher les valeurs propres de la matrice  $A$ .



Les cas suivants peuvent se présenter :

**1. Les valeurs propre de  $A$  sont réelles distinctes :**

Soit  $\lambda_1, \lambda_2$  les valeurs propres de  $A$  réelles et distinctes:

.Si  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 > 0$ , alors  $(0, 0)$  s'appelle nœud impropre (instable).

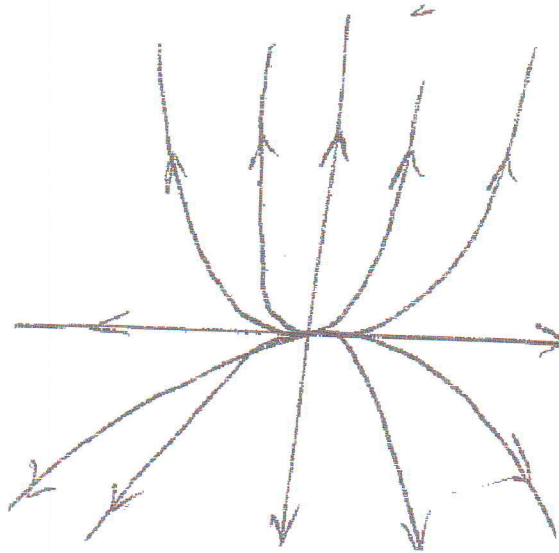


Figure 1.1: Nœud impropre instable

.Si  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 < 0$ , alors  $(0, 0)$  s'appelle nœud impropre (asympt-stable).

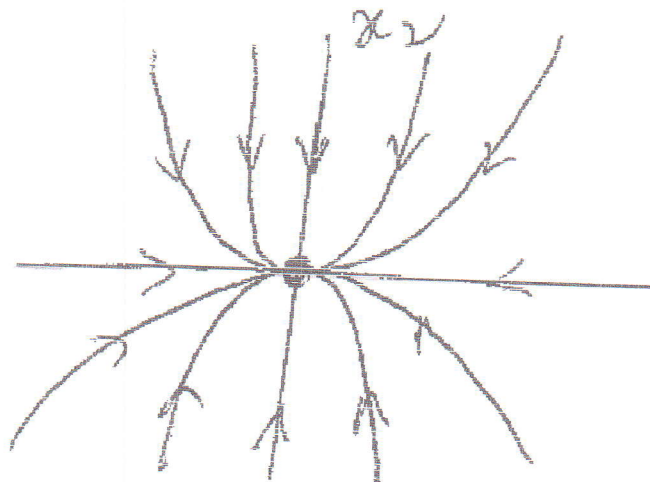


Figure 1.2: Nœud impropre asympt-stable

Si  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 > 0$  ou  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 < 0$ , alors  $(0, 0)$  est une selle (instable).

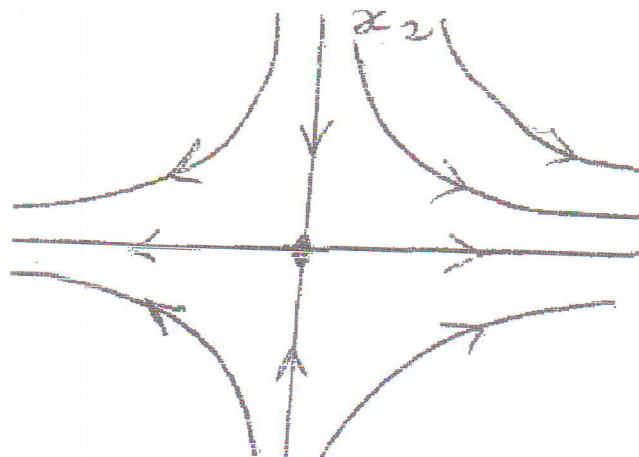


Figure 1.3: Selle instable

## 2-Les valeurs propres de $A$ sont réelle double

Si  $\lambda_1 = \lambda_2$  (réelles doubles), dans ce cas, on distingue deux sous-cas :

1) Si  $A$  est diagonalisable, alors  $(0, 0)$  est un nœud propre asymp-stable si  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$  et instable si  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

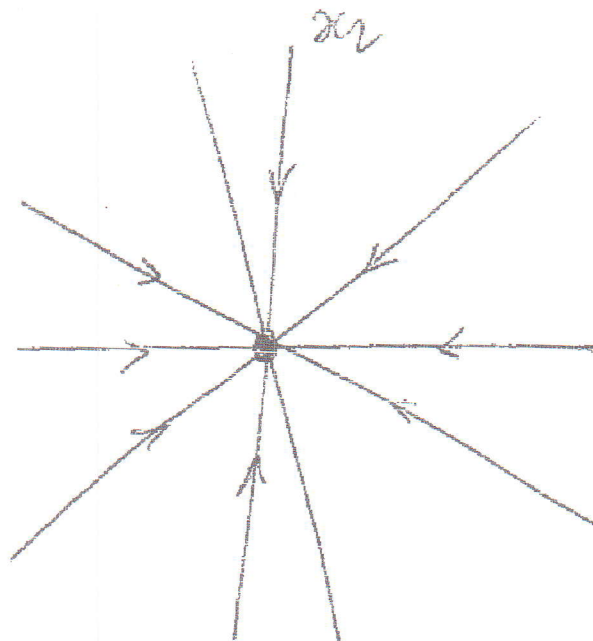


Figure 1.4: Nœud propre asymp-stable

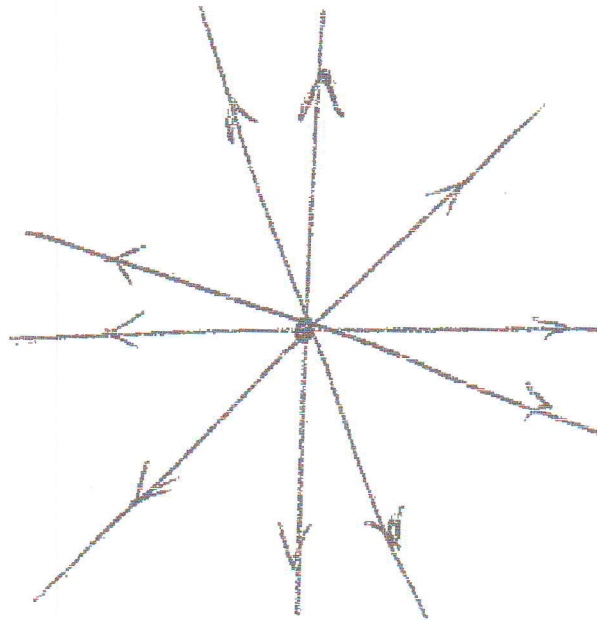


Figure 1.5: Noeud propre instable

2) Si  $A$  est non diagonalisable, alors  $(0, 0)$  est un noeud exceptionnel asymp-stable si  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$  et instable si  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

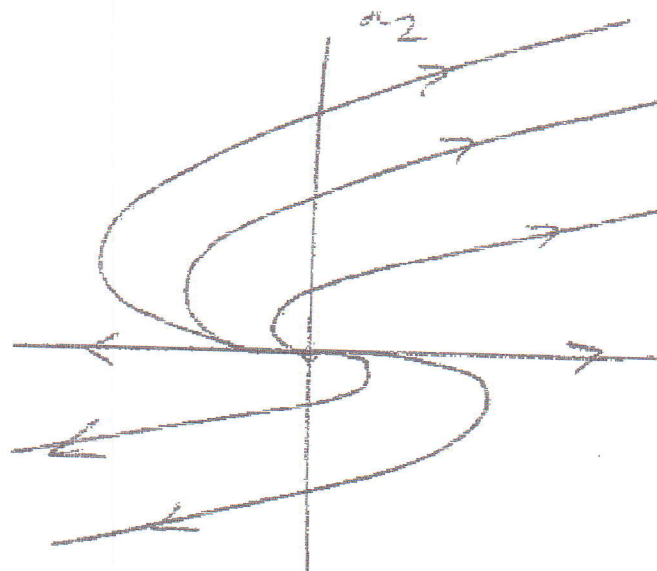


Figure 1.6: Noeud exceptionnel instable



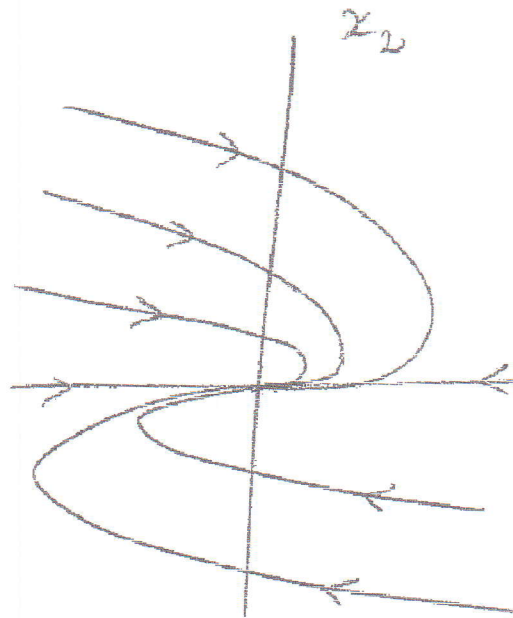


Figure 1.7: Noeud exceptionnel  
asympt-stable

3. Les valeurs propres de  $A$  sont complexes :

Soit  $\lambda_1 = p + iq$  et  $\lambda_2 = p - iq$ , les deux valeurs propres complexes de  $A$ ;

. Si  $p > 0$  et  $q \neq 0$ , alors  $(0, 0)$  est un foyer (instable).

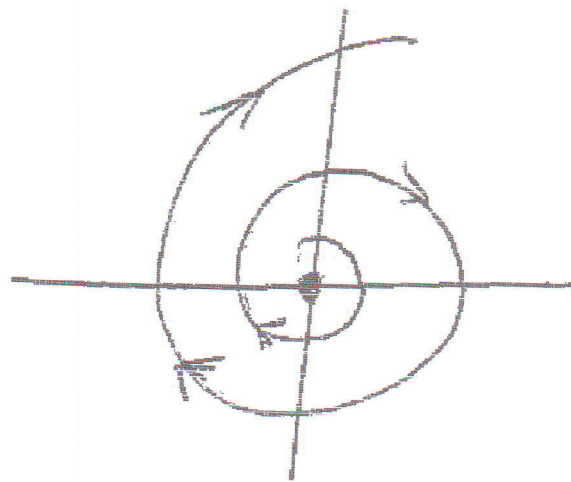


Figure 1.8: Foyer (instable).

. Si  $p < 0$  et  $q \neq 0$ , alors  $(0, 0)$  est un foyer (asymp-stable).

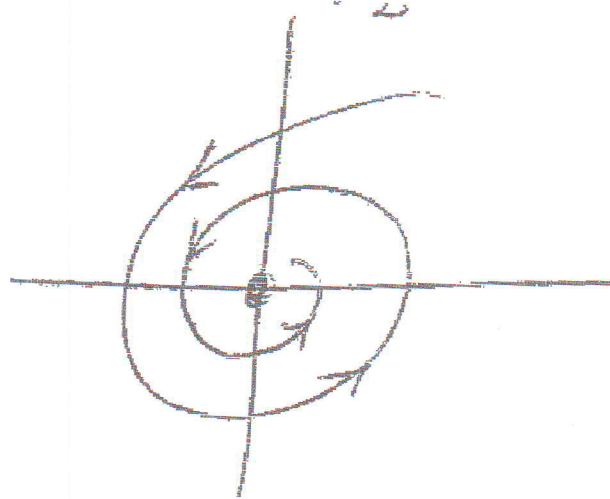


Figure 1.9: Foyer (asymp-stable)

. Si  $p = 0$  et  $q \neq 0$ , alors  $(0, 0)$  est un centre qui est seulement stable.

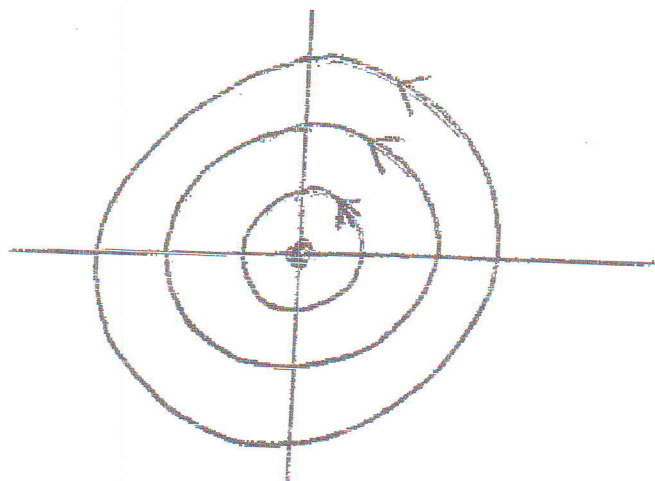


Figure 1.10: Centre seulement stable

## 1.5 Classification Topologique des points critiques

Soient deux systèmes linéaires :  $\dot{x} = Ax$  et  $\dot{x} = Bx$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  dont les parties réelles de toutes leurs valeurs propres sont non nulles.

**Théorème 1.3** *Pour qu'ils soient topologiquement équivalents deux systèmes linéaires dont la partie réelle de toute valeur propre est non nulle, il faut et il suffit que le nombre des valeurs propres à partie réelle négative soit le même dans les deux systèmes :*

*Le nombre des valeurs propres à partie réelle négative de la matrice  $A$  est égale au nombre des valeurs propres à partie réelle négative de la matrice  $B$ . et le nombre des valeurs propres à partie réelle positive de la matrice  $A$  est égale au nombre des valeurs propres à partie réelle positive de la matrice  $B$ .*

**Définition 1.4** *On appelle point critique hyperbolique de  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  le point critique  $x_0$  tel que aucune des valeurs propres de  $A = Df(x_0)$  n'a de partie réelle nulle*

**Définition 1.5** *Un point critique  $x_0$  de  $\dot{x} = f(x)$  est appelé puits si toutes les valeurs propres de  $A = Df(x_0)$  ont des parties réelles négatives. Il est appelé source si toutes les valeurs propres de  $A = Df(x_0)$  ont des parties réelles positives. Il est appelé selle ou col s'il est hyperbolique et si  $A = Df(x_0)$  a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive et au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.*



# Chapitre 2

## Stabilité structurelle

### 2.1 Stabilité structurelle des champs de vecteurs

Soit  $f \in C^1(E)$  où  $E$  est un ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , alors on définit la  $C^1$ -norme de  $f$

$$\|f\|_1 = \sup_{x \in E} |f(x)| + \sup_{x \in E} \|Df(x)\| \quad (2.1)$$

Où  $|\cdot|$  dénote la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\|\cdot\|$  dénote la norme usuelle de la matrice  $Df(x)$ . Si  $K$  est un ensemble ouvert compact de  $E$ , alors la  $C^1$ -norme de  $f$  sur  $K$  est définie par

$$\|f\|_1 = \max_{x \in K} |f(x)| + \max_{x \in K} \|Df(x)\| \quad (2.2)$$

**Définition 2.1** Soit  $E$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , un champ de vecteurs  $f \in C^1(E)$  est dit *structurellement stable* s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tous  $g \in C^1(E)$  avec  $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ , alors  $f$  et  $g$  sont topologiquement équivalents sur  $E$ . i.e. il existe un homéomorphisme préservant l'orientation  $H : E \rightarrow E$  qui applique les trajectoires de

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.3)$$

Sur celles de

$$\dot{x} = g(x). \quad (2.4)$$

Dans ce cas, on dit aussi que le système dynamique (2.3) est structurellement stable. Si  $f$  n'est pas structurellement stable, alors on dit que  $f$  est structurellement instable.

Les portraits de phase du système  $\dot{x} = g(x)$  sont montrés dans la figure (2.1).

Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \mu x \\ \dot{y} = x + \mu y \end{cases}$$

est de la forme

$$\dot{X} = AX$$

où

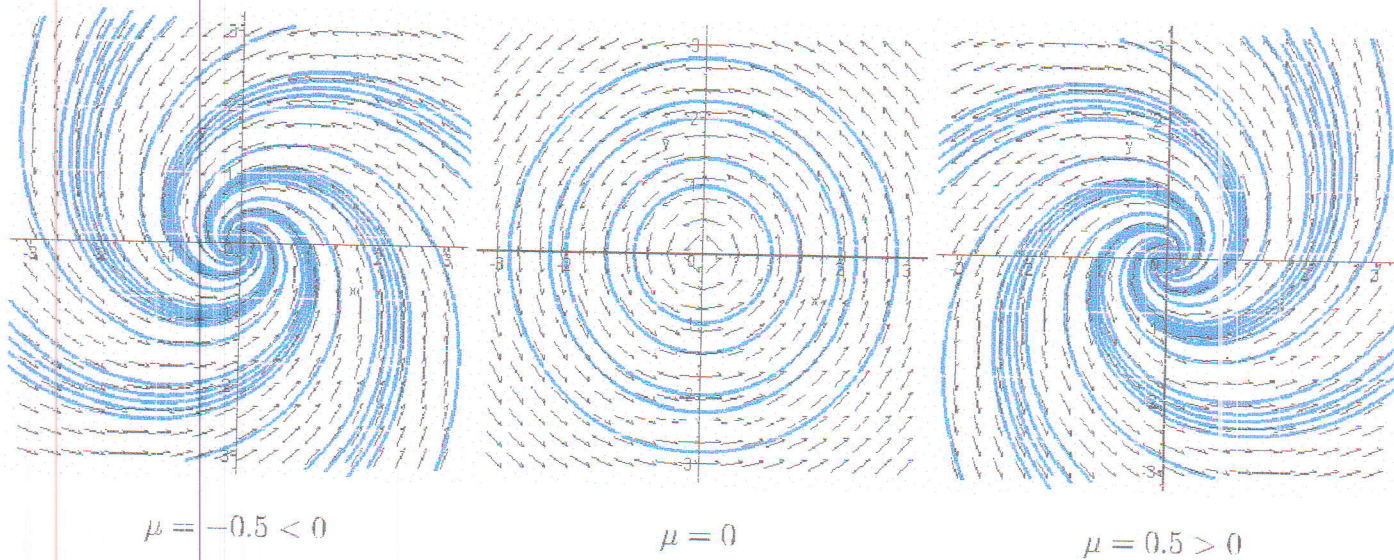
$$A = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mu - \lambda & -1 \\ 1 & \mu - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\mu - \lambda)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \mu + i, \lambda_2 = \mu - i$$

Si  $\mu < 0$  alors  $(0, 0)$  est un foyer stable.

Si  $\mu = 0$  alors  $(0, 0)$  est un centre.

Si  $\mu > 0$  alors  $(0, 0)$  est un foyer instable.



**Figure 2.1:** Portrait de phase du système  $\dot{x} = g(x)$  de l'exemple 2.1

$f$  n'est pas topologiquement équivalent à  $g$  ainsi  $f$  n'est pas structurellement stable sur  $\mathbb{R}^2$ .

Le nombre  $\mu = 0$  est dit valeur de bifurcation du système  $\dot{x} = g(x)$ .

**Exemple 2.2** Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 1)^2 \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1)^2, \end{cases}$$

Il est structurellement instable sur tout ensemble compact  $\mathbb{k} \subset \mathbb{R}^2$  qui contient le disque unité dans son intérieur

Ceci peut être vu en considérant le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x \left[ (x^2 + y^2 - 1)^2 - \mu \right] \\ \dot{y} = x + y \left[ (x^2 + y^2 - 1)^2 - \mu \right] \end{cases}$$

Qui est  $\varepsilon$ -près du système ci-dessus si

$$|\mu| = \frac{\varepsilon}{d+2}$$

Où  $d$  est le diamètre de  $\mathbb{k}$ .

L'écriture de ce dernier système en coordonnées polaires donne

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r^2 - 1) - \mu \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Où

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Par conséquent, nous avons les portraits de phase montrés dans la figure (2.2) ci-dessous le système ci-dessus avec  $\mu = 0$  est structurellement instable.

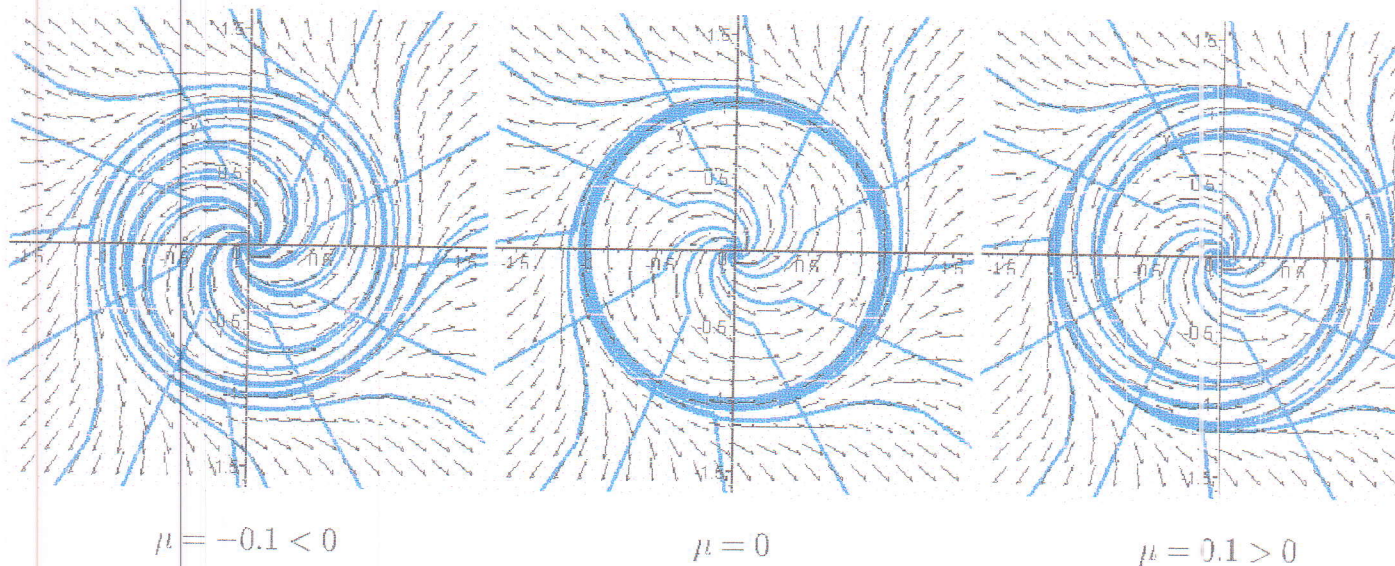
Le nombre  $\mu = 0$  est appelé valeur de bifurcation du système. Et pour  $\mu = 0$  ce système a un cycle limite de multiplicité 2 représenté par  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^t$ .

En effet

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r^2 - 1) - \mu \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$



On a  $\dot{r} = 0 \Leftrightarrow r = 0$  ou  $r^2 = 1$ . Le cycle limite est  $r^2 = 1$ .



**Figure 2.2:** Portrait de phase du système de l'exemple 2.2

Notons que pour  $\mu = 0$ , l'origine est un point critique non hyperbolique pour l'exemple (2.1) et  $\gamma(t)$  est un cycle limite non hyperbolique pour l'exemple (2.2).

En générale, les systèmes dynamiques avec des points critiques et / ou des orbites périodiques non hyperboliques ne sont pas structurellement stables. Ceci ne signifie pas que les systèmes dynamiques avec seulement des points d'équilibres et des orbites périodiques hyperboliques sont structurellement stables.

## 2.2 Stabilité structurelle des systèmes linéaires à coefficients constants

Soit  $L(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble des transformations linéaires réelles de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ . On définit la norme d'une matrice  $n \times n$ ,  $A = (a_{ij})$  par

$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|.$$

Un  $\varepsilon$ -voisinage de  $A$  est donné par

$$N_\varepsilon(A) = \{B \in L(\mathbb{R}^n) / \|B - A\| < \varepsilon\}.$$

Chaque  $B \in N_\varepsilon(A)$  est dite  $\varepsilon$ -proche de  $A$

**Définition 2.2** Un flot linéaire  $\exp(At) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dit structurellement stable dans  $L(\mathbb{R}^n)$  s'il existe un  $\varepsilon$ -voisinage de  $A$ ,  $N_\varepsilon(A) \subseteq L(\mathbb{R}^n)$ , tel que pour tout  $B \in N_\varepsilon(A)$ , on a  $e^{Bt}$  est topologiquement équivalent à  $\exp(At)$ .

**Proposition 2.1** Un flot linéaire sur  $\mathbb{R}^n$  est structurellement stable dans  $L(\mathbb{R}^n)$  si et seulement si il est hyperbolique.

*Preuve.* Un flot linéaire  $\exp(At)$  est hyperbolique si toutes les valeurs propres de la matrice  $A$  ont des parties réelles non nulles.

Les valeurs propres de toute matrice  $B$   $\varepsilon$ -proche de  $A$  diffèrent de celles de  $A$  avec des termes  $o(\varepsilon)$  ainsi pour un  $\varepsilon$  suffisamment petit on peut assurer que les valeurs propres de  $B$  sont assez proches de celles de  $A$  et ses parties réelles sont non nulles.

De plus  $A$  et  $B$  ont le même nombre  $n_s$  des valeurs propres avec parties réelles négatives, et  $n_u$  des valeurs propres avec parties réelles positives.

Ceci implique que  $\exp(At)$  et  $\exp(Bt)$  sont équivalents au flot du système

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

où  $x \in \mathbb{R}^{n_s}$  et  $y \in \mathbb{R}^{n_u}$

Donc  $A$  est structurellement stable.

Réciproquement, supposons que le flot  $\exp(At)$  n'est pas hyperbolique, alors  $A$  possède au moins une valeur propre avec partie réelle nulle. Cependant  $B = A + \varepsilon I$  est hyperbolique pour presque tout  $\varepsilon \neq 0$  et proche de  $A$  en prenant  $\varepsilon$  suffisamment petit. Ainsi linéaire est le flot non hyperbolique  $\exp(At)$  n'est pas structurellement stable. Par conséquent si un flot non structurellement stable, il doit être hyperbolique.



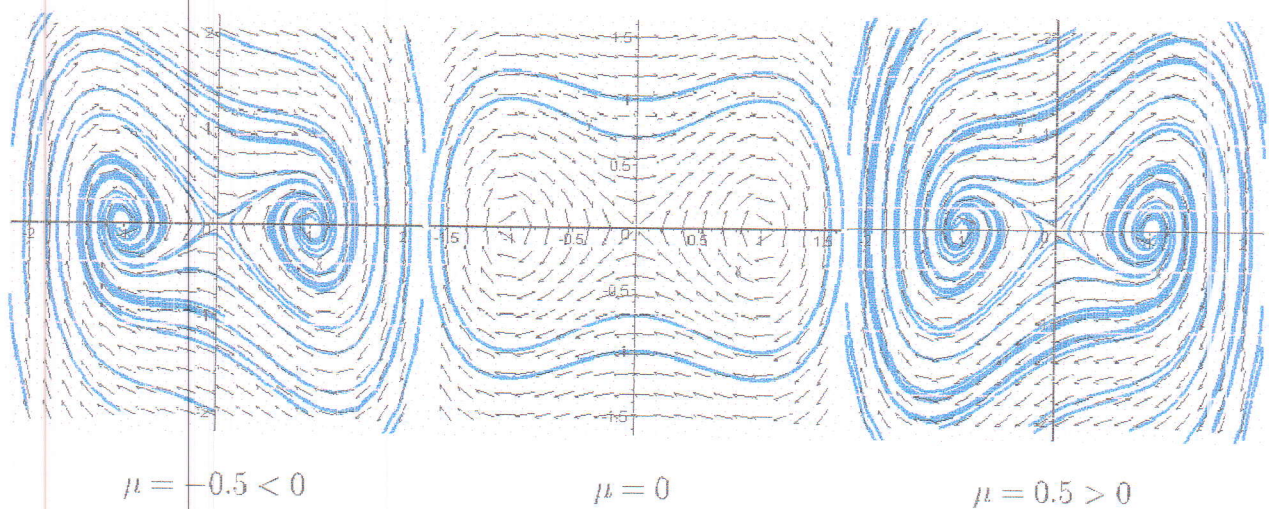
**Exemple 2.3** Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu y + x - x^3 \end{cases}$$

pour  $\mu = 0$ , ceci est un système hamiltonien, où le hamiltonien est

$$H(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

Les courbes de cette fonction sont montrées dans la figure (2.3).



**Figure 2.3:** Portrait de phase du système de l'exemple 2.3

D'après les portraits de phase dans la figure(2.3), le système avec  $\mu \neq 0$  n'est pas topologiquement équivalent au système avec  $\mu = 0$ .

■



## Chapitre 3

# Bifurcations aux points d'équilibre non hyperboliques

Soit le système

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (3.1)$$

Où  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1(E)$ ,  $E$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

Le terme bifurcation désigne tout changement qualitatif et topologique des comportements des solutions de (3.1) quand le paramètre  $\mu$  change.

Une valeur  $\mu_0$  du paramètre  $\mu$  dans l'équation (3.1) pour laquelle le  $C^1$  champ de vecteurs  $f(x, \mu_0)$  n'est pas structurellement stable est dite valeur de bifurcation.

On va étudier les différents types simples de bifurcations qui peuvent arriver dans les systèmes dynamiques unidimensionnels et les systèmes dynamiques planaires au voisinage des points critiques non hyperboliques.

Les trois types simples de bifurcations des points critiques non hyperboliques de (3.1) sont illustrés dans les exemples suivants.

### 3.1 Bifurcation nœud-selle

**Exemple 3.1** *Soit le système unidimensionnel*

$$\dot{x} = \mu - x^2$$

*Si  $\mu < 0$  : on n'a pas de points critiques.*

Si  $\mu = 0$  : on a un seul point critique  $x = 0$ .

$\dot{x} = -x^2$ ,  $Df(0, 0) = 0 \Rightarrow x = 0$  est non hyperbolique.

$f(x) = -x^2$  est structurellement instable. Et  $\mu = 0$  est la valeur de bifurcation.

Si  $\mu > 0$

$\dot{x} = \mu - x^2 = 0 \Rightarrow$  on a deux points critiques  $x = \pm\sqrt{\mu}$

$$Df(x, \mu) = -2x$$

donc

$$Df(\sqrt{\mu}, \mu) = -2\sqrt{\mu} < 0$$

Alors  $x = \sqrt{\mu}$  est stable.

et

$$Df(-\sqrt{\mu}, \mu) = 2\sqrt{\mu} > 0$$

Alors  $x = -\sqrt{\mu}$  est instable.

Les portraits de phases de cette équation sont montrés dans la figure (3.1).

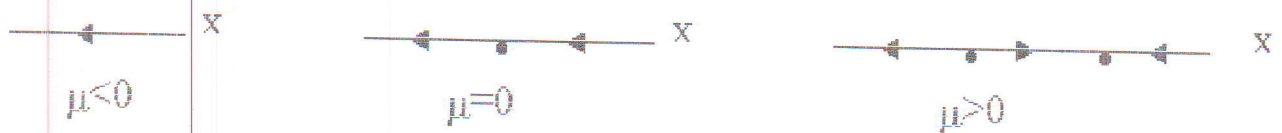


Figure 3.1 : Portrait de phase de l'exemple 3.1

La courbe  $\mu - x^2 = 0$  détermine la position d'équilibre du système.

Ce type de bifurcation est appelé bifurcation nœud-selle.

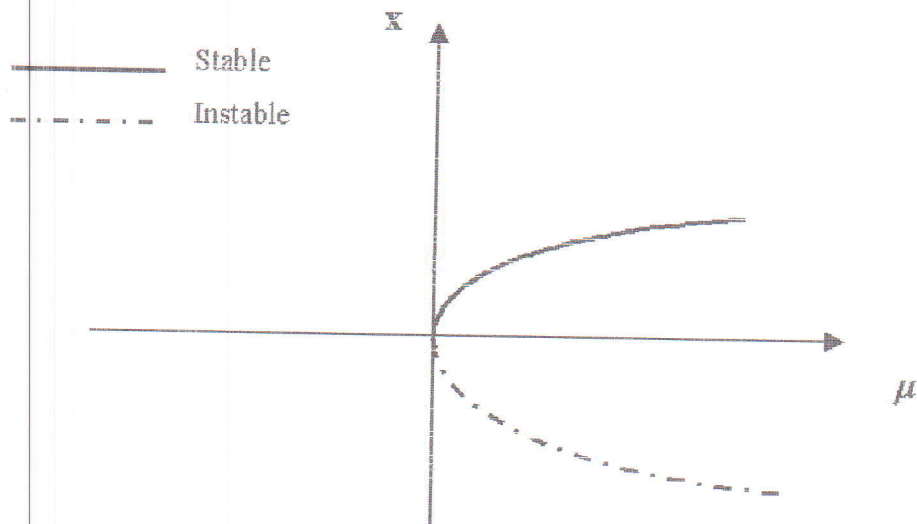


Figure 3.2 : Diagramme de bifurcation Nœud-Selle

**Exemple 3.2** Soit le système dynamique planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + \mu \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.2)$$

Selon le signe de  $\mu$  : trois cas doivent être considérés :

Si  $\mu < 0$  :

Dans ce cas, le système admet deux points d'équilibre de coordonnées  $(-\sqrt{|\mu|}, 0)$  et  $(\sqrt{|\mu|}, 0)$ .

Afin de déterminer la nature de chacun de ces points d'équilibre, calculons la matrice Jacobienne qui, de manière générale, s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour le premier point d'équilibre  $(-\sqrt{|\mu|}, 0)$ ,  $A$  est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2\sqrt{|\mu|} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



La matrice admet deux valeurs propres réelles et de signes négatif :  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -2\sqrt{|\mu|}$ . Par conséquent le point  $(-\sqrt{|\mu|}, 0)$  est un noeud asymptotiquement stable. Pour le second point d'équilibre  $(\sqrt{|\mu|}, 0)$ , la matrice  $A$  devient :

$$A = \begin{pmatrix} 2\sqrt{|\mu|} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice admet deux valeurs propres réelles et de signes opposés :  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -2\sqrt{|\mu|}$ . Par conséquent le point  $(\sqrt{|\mu|}, 0)$  est un point selle (instable). Les isoclines verticales  $\dot{x} = 0$  sont les deux droites  $x = \pm\sqrt{\mu}$  et l'isocline horizontale  $\dot{y} = 0$  est la droite  $y = 0$ . Le portrait de phase peut être facilement construit Figure (3.3).

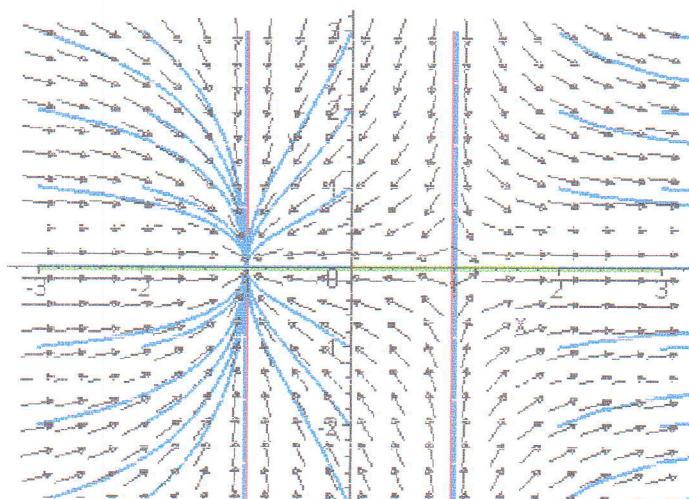


Figure 3.3 : Portrait de phase de la bifurcation selle-noeud de l'exemple 3.2 pour  $\mu < 0$  .

Si  $\mu = 0$ , dans ce cas, le système se réduit à :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.3)$$

Qui admet l'origine comme unique point d'équilibre. Il s'agit d'un point non hyperbolique car la matrice Jacobienne est la suivante :

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le système est découplé en  $x$  et en  $y$ . L'étude de la première équation du système (3.3) montre que  $x = 0$  est un point d'équilibre non hyperbolique. La seconde équation indique que  $y = 0$  est point d'équilibre asymptotiquement stable de la seconde équation. La figure (3.4) présente le portrait de phase du système (3.3) :

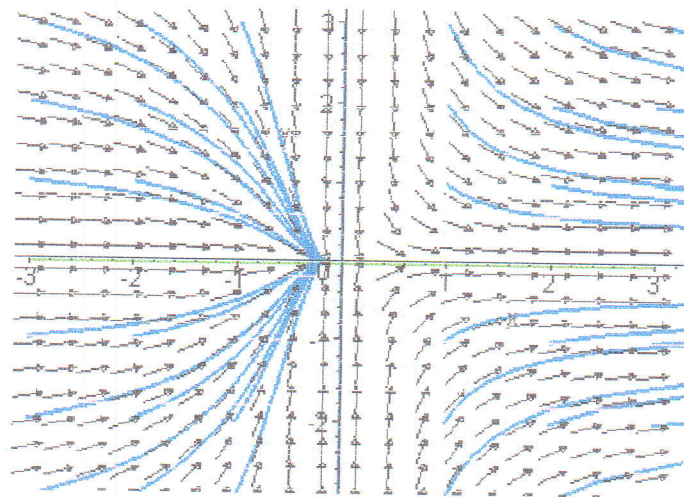


Figure 3.4 : Portrait de phase de la bifurcation selle-noeud pour  $\mu = 0$ .

Ce portrait de phase prend l'apparence d'un noeud stable pour les  $x < 0$  et d'un point selle pour les  $x > 0$ .

Si  $\mu > 0$ , dans ce cas, le système dynamique devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + \mu \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.4)$$

Il n'admet aucun point d'équilibre. La variable  $x$  est toujours croissant. La variable  $y$  est croissante pour les  $y < 0$  et décroissante pour les  $y > 0$ . La figure (3.5) montre le portrait de phase correspondant.

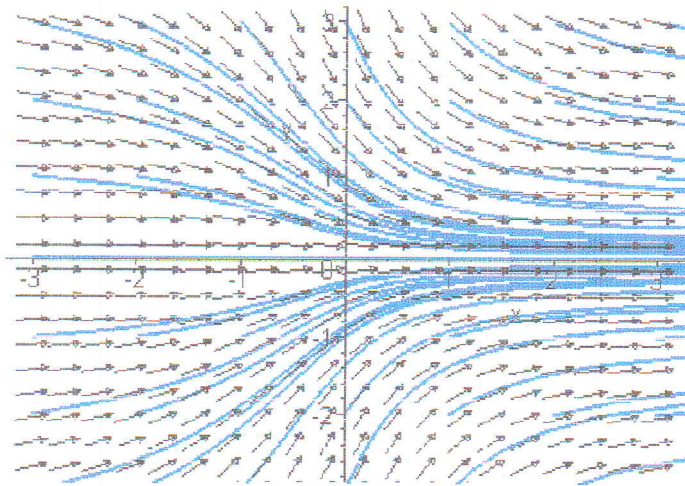


Figure 3.5 : Portrait de phase de la bifurcation  
selle-noeud pour  $\mu > 0$ .

Cette bifurcation est appelée une bifurcation selle-noeud et correspond à l'apparition simultanée de deux points d'équilibre, l'un instable (un point selle) et l'autre asymptotiquement stable (un noeud). D'une manière générale, cette bifurcation se produit lorsque deux isoclines de natures différentes, c'est-à-dire l'une verticale  $\dot{x} = 0$  et l'autre horizontale  $\dot{y} = 0$ , initialement disjointes, deviennent tangentes (à la bifurcation) et se coupent ensuite en deux points

d'équilibre qui apparaissent.

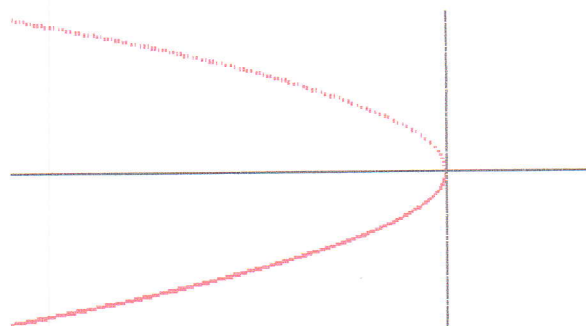


Figure 3.6 : Diagramme de la bifurcation  
selle-noeud.

## 3.2 Bifurcation transcritique

**Exemple 3.3** *Considérons le système*

$$\dot{x} = \mu x - x^2.$$

Les points critiques sont  $x = 0$  et  $x = \mu$ .  $Df(x, \mu) = \mu - 2x$

Si  $x = \mu$  alors  $Df(\mu, \mu) = \mu - 2\mu = -\mu$

Si  $\mu < 0$  alors  $Df(\mu, \mu) > 0 \Rightarrow x = \mu$  est instable.

Si  $\mu = 0$  alors  $Df(0, 0) = 0 \Rightarrow x = 0$  est un point d'équilibre non hyperbolique instable

car  $f(x) = -x^2$

Si  $\mu > 0$  alors  $Df(\mu, \mu) < 0 \Rightarrow x = \mu$  est asymptotiquement stable.

Si  $x = 0$  alors  $Df(0, \mu) = \mu$

Si  $\mu < 0$  alors  $Df(0, \mu) < 0 \Rightarrow x = 0$  est asymptotiquement stable.

Si  $\mu = 0$  alors  $Df(0, \mu) = 0 \Rightarrow x = 0$  est un point d'équilibre non hyperbolique instable

car  $f(x) = -x^2$

Si  $\mu > 0$  alors  $Df(0, \mu) > 0 \rightarrow x = 0$  est instable.

On remarque qu'il y a un échange de stabilité des points critiques à partir du point de bifurcation  $\mu = 0$ .



Ce type de bifurcation est appelé bifurcation transcritique.

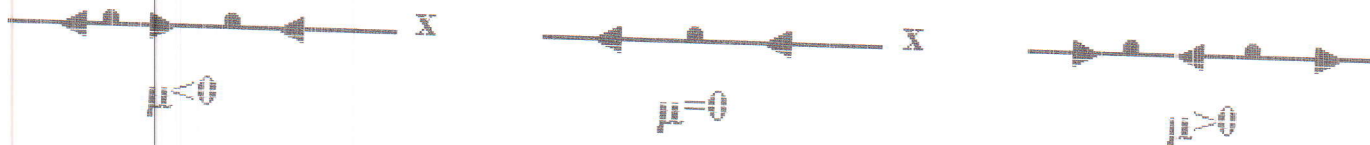


Figure 3:7 : Portraits de phases de l'exemple 3.3

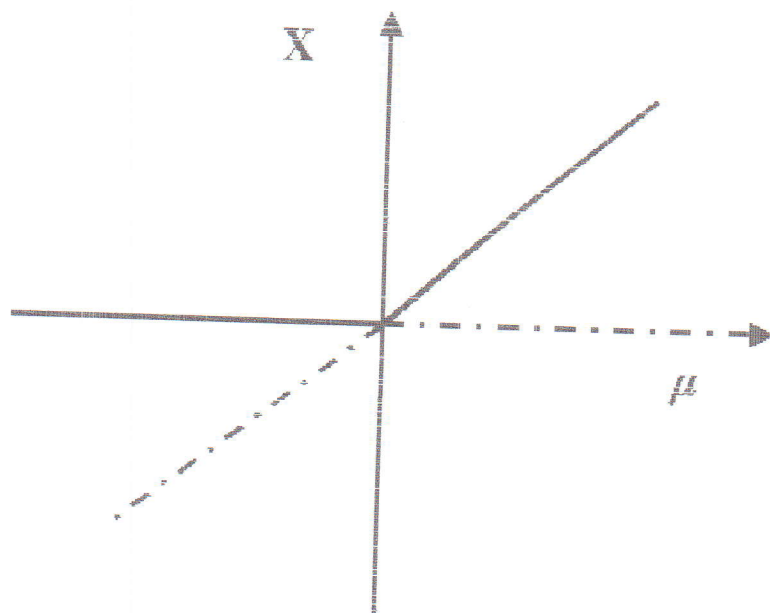


Figure 3.8 Diagramme de bifurcation transcritique.

### 3.3 Bifurcation fourche

Exemple 3.4 Soit le système unidimensionnel

$$\dot{x} = \mu x - x^3$$

Si  $\mu < 0$  on a un seul point critique  $x = 0$  et

$$Df(x, \mu) = \mu - 3x^2$$

Alors

$$Df(0, \mu) = \mu < 0$$

Donc  $x = 0$  est asymptotiquement stable.

Si  $\mu = 0$  alors

$$Df(0, 0) = 0$$

Donc  $x = 0$  est non hyperbolique. Alors le système  $\dot{x} = -x^3$  est structurellement instable.

Et  $x = 0$  est asymptotiquement stable.

Si  $\mu > 0$  alors

$$Df(0, \mu) = \mu > 0$$

Donc  $x = 0$  est instable.

On a deux nouveaux points critiques  $x = \pm\sqrt{\mu}$ .

$$Df(\pm\sqrt{\mu}, \mu) = \mu - 3\mu = -2\mu < 0$$

Donc  $x = \pm\sqrt{\mu}$  est asymptotiquement stable.

Ce type de bifurcation est appelé bifurcation fourche.



Figure 3.9 : Portraits de phase de l'exemple 3.5

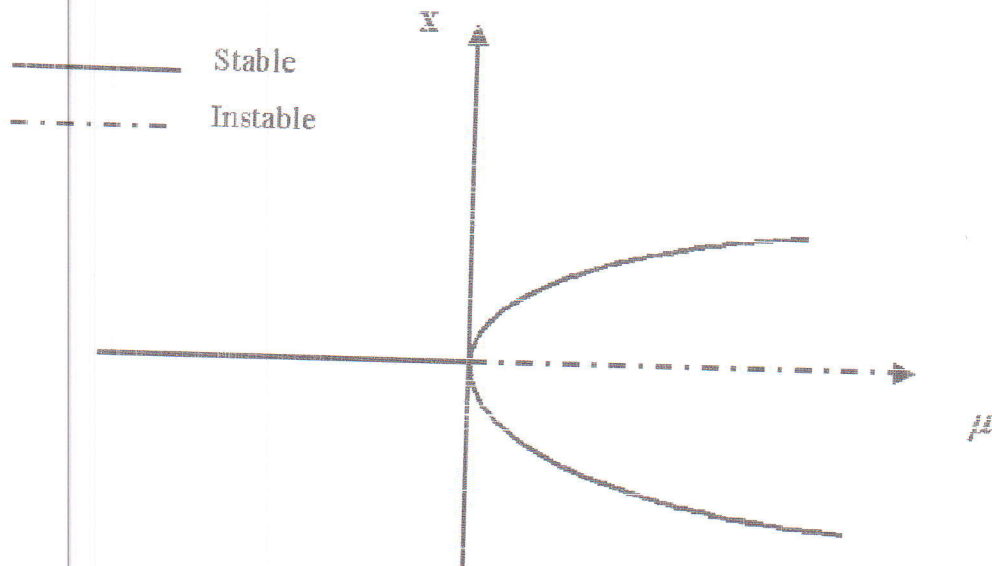


Figure 3.10 : Diagramme de bifurcation fourche.

**Exemple 3.5** Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-\mu - x^2) \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.8)$$

A nouveau, trois cas doivent être distingués selon le signe du paramètre  $\mu$  :

Si  $\mu < 0$

Dans ce cas, le système admet trois points d'équilibre, l'origine et deux autres points symétriques de coordonnées  $(-\sqrt{|\mu|}, 0)$  et  $(\sqrt{|\mu|}, 0)$ . Afin de déterminer la nature de chacun de ces points d'équilibre, calculons la matrice Jacobienne qui s'écrit de manière générale :

$$A = \begin{pmatrix} -\mu - 3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Au point d'équilibre origine, cette matrice s'écrit :

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} |\mu| & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice admet deux valeurs propres réelles et de signe opposé :  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = |\mu|$ . Par conséquent l'origine est un point selle (instable).

Aux deux autres points d'équilibre  $(-\sqrt{|\mu|}, 0)$  et  $(\sqrt{|\mu|}, 0)$ , la matrice Jacobienne prend la même forme :

$$A = \begin{pmatrix} -2|\mu| & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Elle admet deux valeurs propres réelles et négatives  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -2|\mu|$ . Ainsi, ces deux points d'équilibre sont des nœuds asymptotiquement stables. Les isoclines verticales ( $\dot{x} = 0$ ) correspondent à trois droites : la droite  $x = 0$  et les deux droites  $x = \pm\sqrt{|\mu|}$ . L'isocline horizontale ( $\dot{y} = 0$ ) est la droite. Le portrait de phase peut alors être construit Figure (3.11).

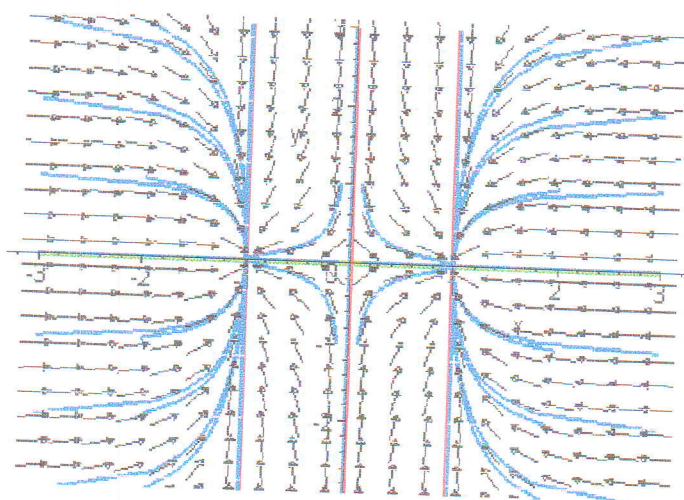


Figure 3.11 : Portrait de phase de la bifurcation fourche pour  $\mu < 0$ .

Ce portrait de phase montre un point selle fixe à l'origine entouré de deux nœuds asymptotiquement stables, symétriques autour de l'origine et qui s'en éloignent lorsque  $|\mu|$  augmente.

Si  $\mu = 0$

Dans ce cas, le système se réduit à :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.9)$$

Ce système admet l'origine comme point d'équilibre unique ; il est non hyperbolique car la



matrice Jacobienne en ce point s'écrit :

$$A_{(0,0)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer la stabilité de ce point d'équilibre, considérons la fonction définie positive suivante :

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$

Calculons  $\dot{V}$  Il vient :

$$\dot{V}(x, y) = 2xx' + 2yy' = -2(x^2 + y^2).$$

Cette expression est strictement négative sur l'ensemble du plan, à l'exception de l'origine. Par conséquent, la fonction  $V(x, y)$  est une fonction de Lyapunov forte pour le système (3.9). Par application du théorème de Lyapunov pour fonction forte, nous pouvons conclure que l'origine est asymptotiquement stable. De plus, le bassin d'attraction de l'origine est  $\mathbb{R}^2$  tout entier Figure (3.12).

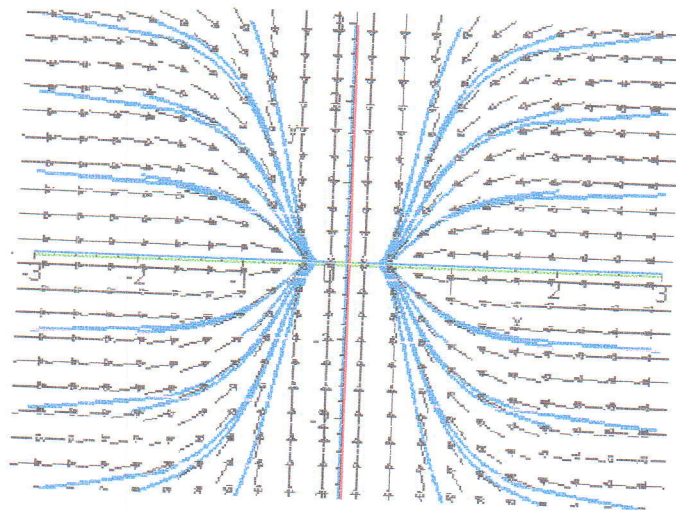


Figure 3.12 : Portrait de phase de la bifurcation fourche pour  $\mu = 0$ .

On peut également regarder ce système (3.9) sous un autre angle, en le résolvant explicitement.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.10)$$

Ainsi  $y(t) = y_0 e^{-t}$  avec  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ . De même :

$$\dot{x} = -x^3 \Leftrightarrow \frac{dx}{x^3} = dt \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2(t+k)} \Leftrightarrow x(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2(t+k)}}$$

avec  $t > k$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ .

Si  $\mu > 0$ , dans ce cas, le système dynamique devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-\mu - x^2) \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.11)$$

Il n'admet qu'un unique point d'équilibre, l'origine. La matrice Jacobienne en ce point s'écrit

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Elle admet deux valeurs propres réelles et négatives  $\lambda_1 = -c$  et  $\lambda_2 = -1$ . L'origine est donc un noeud asymptotiquement stable (Figure 3.13).

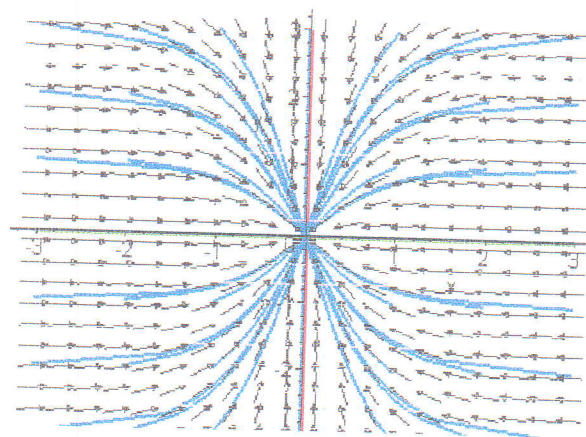


Figure 3.13 : Portrait de phase de la bifurcation fourche pour  $\mu > 0$ .

En résumé, à la valeur du paramètre  $\mu = 0$ , le système voit le nombre de points d'équilibre passer de trois à un. Pour  $\mu < 0$ , nous avons un point selle entouré de deux nœuds asymptotiquement stables. Pour  $\mu \geq 0$ , le système n'admet qu'un seul point d'équilibre asymptotiquement stable, l'origine. Le diagramme de bifurcation est présenté sur (Figure 3.16).

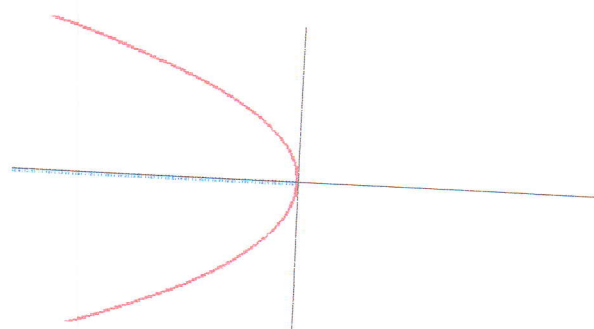


Figure 3.14: Diagramme de bifurcation de la bifurcation fourche super-critique.

Il s'agit là de la bifurcation fourche super-critique. Le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-\mu + x^2) \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.12)$$

Correspond par contre à une bifurcation fourche sous-critique dont le diagramme de bifurcation est donné sur la Figure (3.15).

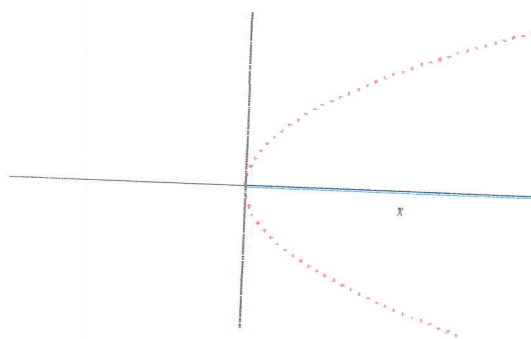


Figure 3.15 : Diagramme de bifurcation de la bifurcation fourche sous-critique.



# Bibliography

- [1] L. Perko. Differential Equations and Dynamical Systems, third edition, texts in applied mathematics 7. Springer. 2001.
- [2] D. K Arrowsmith & C. M. Palace. An introduction to Dynamical Systems. Cambridge University Press. 2001.
- [3] S. Badi cours système dynamique. 1 ère année master. 2014
- [4] S. Charles cour de Bifurcations dans  $\mathbb{R}^2$  Université de lyon (18/12/2008)

