République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

M1510.135

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Probabilités et applications**

Par :

M^{lle} Bousnobra Maria et Hadjadji Amel

Intitulé

Les processus croissants dans l'ordre convexe

Dirigé par :

Devant le jury

PRESIDENT	Ezzebsa.A	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Benchaabane.A	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Bouhadjar .S	Univ-Guelma

Session Juin 2014

Remerciements

Je remercie premièrement *ALLAH* de m'avoir éclairé le chemin du savoir et de m'avoir armé de foi de patience et de force afin d'élaborer ce travail.

Comme je tiens à exprimer ma gratitude, ma reconnaissance et mes profonds remerciements à mon docteur de recherche « **Benchaabane** », **pour** sa confiance, ses conseils précieux et également pour sa rigueur.

Ainsi un grand merci à tous les membres de ma famille et surtout mes parent qui m'ont soutenu et encouragé pour poursuivre mes études et réaliser leurs rêve.

Tous les enseignants ainsi que tous les cadres administratifs du département de mathématique de l'université du GUELMA.

J'espère n'avoir oublié personne, si c'est le cas je m'en excuse par avance.

A tous nos proches et amis « es »

MERCI.

Table des matières

Abstract

Dans ce mémoire on s'intéresse à la classe des processus croissants dans l'ordre convexe (Peacock). Nous donnons en particulier plusieurs exemples construits à l'aide du mouvement Brownien ou plus généralement des processus définis à l'aide d'une intégrale stochastique.

Nous avons ensuite montré que tout processus 1-martingale est un processus croissant dans l'ordre convexe, mais la réciproque est difficile à établir.

Introduction

La tâche d'un gestionnaire de portefeuille consiste a choisir la bonne combinaison de titres en vue de maximiser le rendement de l'investisseur, compte tenu d'un niveau de risque donné. La gestion de portefeuille est un processus continu et dynamique. Les versions simples des problèmes de portefeuille peuvent être résolues par les techniques d'optimisation classiques, comme l'approche "moyenne-variance" introduite par le prix Nobel Harry Markowitz (1952). Celle-ci tient compte du rendement moyen, de l'écart-type et de la corrélation des rendements des différents actifs ; on détermine ainsi le portefeuille d'actifs minimisant les risques par rapport à un taux de rendement donné.

Un autre critère probabiliste de décision est le critère de l'espérance de l'utilité de von-Neumann-Morgenstern (1944). Il consiste a représenter les préférences dans l'incertain par des fonctions d'utilité concaves et à préférer la décision qui a l'espérance de l'utilité du gain la plus elevée possible. Ce critère de l'espérance de l'utilité, plus général que le critère d'espérance-variance, est très utilisé en economie de l'incertain et en finance du fait de sa simplicité.

Il existe une autre approche en economie et en finance, utilisant la notion d'ordre stochastique, pour comparer des variables aléatoires réelles représentant des gains ou des pertes. La dominance stochastique g en eralise en e et la théorie de l'utilité en evitant toute hypothèse arbitraire concernant la forme de la fonction d'utilité. Elle n'impose aucune spéciffication explicite des fonctions d'utilités des agents. Le concept de dominance stochastique permet de comparer des distributions entières de probabilité.

Le plan de ce mémoire est le suivant :

Dans le premier chapitre, nous rappelons des notions très importantes en théorie de probabilité concernant les processus gaussiens. Nous donnons les principales propriétés du mouvement Brownien et des martingales.Nous abordons ensuite la notion d'intégrale stochastique nous terminons ce chapitre par quelques rappels sur les équations différentielles stochastiques.

Le deuxième chapitre est consacré aux processus croissants dans l'ordre convexe. Nous commençons par définir ces processus et nous montrons qu'on peut remplacer les fonctions convexes citées dans la définition par une fonction convexe possédant de bonnes propriétés et nous introduisons la notion de 1-martingale et nous montrons l'équivalence entre les processus croissants dans l'ordre convexe et les 1-martingale. Nous nous appuyons ensuite sur la technique des EDS pour exhiber les 1-martingales associées à des Peacocks particuliers.

Chapitre I

Le Calcul Stochastique

I. Le calcul stochastique

Le calcul stohastique est une extension du calcul différentiel et intégrale classique, dans laquelle les processus à temps continus remplacant les fonctions, et les martingales jouent le rôle des constantes. Il sert à la fois de construire de nouveaux processus, indispensables notamment pour les modèles financiers et certains modèles de l'assurance, et à déterminer leurs propriétés.

Le but de ce chapitre est consacré de donner des définitions de base et des résultats obtenus pour les utiliser aux prochains chapitres.

1.1 Généralités sur les processus stochastiques

Définition I.1 (Processus Stochastiques) *Soit T un ensemble. On appelle **processus stochastique** sur un espace de probabilité $(\Omega,\ F,\ p)$ indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, une famille $(X_t)_{t\in T}$ d'applications mesurables de$(\Omega,\ F)$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$; pour tout $t \in T$, X_t soit une variable aléatoire.*

Remarque I.2 - *Si $T = \mathbb{N}$, on dit que le prcessus à temps discret.*

- *Si $T = \mathbb{R}_+$ ou $T = [0, a]$,on dit que le processus à temps continu.*

- *Les fonctions $t \curvearrowright X_t(\omega)$ sont appelées **trajectoires** du processus stochastique X_t.*

Définition I.3 *On appelle **filtration** $(F_t)_{t\geq 0}$ de (Ω, F), une famille croissante de sous tribus de F .i.e $F_s \subset F_t \subset F$, $\forall s \leq t$.*

Remarque I.4 *Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est satisfait les conditions habituelles si :*

- Les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$.

- La filtration est continue à droite i.e. $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s \quad \forall t$.

La famille croissante de sous tribus $G_t = \sigma(X_s\ s \leq t)$ s'appelle **la filtration naturelle** du processus stochastique X . Mais G_0 ne contient pas nécessairement les ensembles négligeables (N), c'est pour cela on introduit la filtration naturelle augmentée de X définie par $\mathcal{F}_t = \sigma(N \cup G_t)$.Lorsque on parlera de filtration naturelle il s'agira toujours la filtration naturelle augmentée.On note aussi que $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_t \mathcal{F}_t)$.

Définition I.5 *Un processus stochastique $(X_t)_{t\in T}$ est dit* **càdlàg** *(continu à droite, limité à gauche) si prèsque sûrement, ses trajectoires sont contineus à droite avec limite à gauche.*

Définition I.6 *Un processus stochastique $(X_t)_{t\in T}$ est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si $\forall t \geq 0, X_t \in \mathcal{F}_t$ i.e.X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable pour tout t.*

Définition I.7 *Soient $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ deux processus stochastiques définis sur même espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*

(i) X est une modification (ou une version) de Y si : pour tout $t \geq 0$,les variables X_t et Y_t sont égales

$\mathbb{P} - p.s \quad \forall t\ \mathbb{P}(X_t = Y_t \quad) = 1$

(ii) X et Y sont indistinguables si $\mathbb{P} - p.s.$les trajectoires de X et Y sont les mêmes i.e.

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1.$$

Définition I.8 *Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si l'application $(s,\omega) \longrightarrow X_s(\omega)$ de$[0,t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté. On note aussi que si X est processus mesurable et adapté alors il possède une modification progressivement mesurable.

Proposition I.9 *Si X est un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à droite (ou à gauche), alors X est mesurable et progressivement mesurables s'il est de plus adapté.*

Définition I.10 *Un processus $A = (A_t, t \geq 0)$ est un processus croissant si $A_0 = 0$ et $t \rightarrow A_t$ est une fonction croissante i.e.*

$$A_t(\omega) \leq A_s(\omega) \qquad \forall t \leq s$$

Définition I.11 *Un processus $V = (V_t.t \geq 0)$ est dit à varation bornée sur $[0, t]$ si*

$$\sup_{t_i} \sum_i |V_{t_{i+1}} - V_{t_i}| < K$$

le sup étant pris sur les subdivisions $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \ldots . \leq t_i \leq t_{i+1} \leq t$

Définition I.12 *Un processus $V = (V_t.t \geq 0)$ est dit à variation finie sur $[0, t]$ si*

$$\sup_{t_i} \sum_i |V_{t_{i+1}} - V_{t_i}| < \infty$$

1.2 Processus gaussien :

La loi normale est l'une des principales distributions de probabilité. Elle a été introduite par le mathématicien Abraham de Moivre en 1733 qui l'utilisa afin d'approcher des probabilités associées à des variables aléatoires binomiales possédant un paramètre n très grand. Cette loi a été mise en évidence par Laplace et Gauss au XIXe siècle et permet de modéliser de nombreuses études biométriques. Sa densité de probabilité dessine une courbe dite courbe en cloche ou courbe de Gauss.

Définition I.13 *Une variable X est gaussienne de loi $N(m, \sigma^2)$ si elle a pour densité :*

$$N(m, \sigma^2)(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(X-m)^2}{2\sigma^2}$$

On considère qu'une variable aléatoire constante suit une loi gaussienne de variance nulle, ce qui corespond à une masse de Dirac δ_a au point a est une probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que

$\int_R f(x)\delta_a(dx) = f(a)$ est correspond à une variable aléatoire constante égal à a.

Définition I.14 *Soit $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ X est un vecteur aléatoire gaussienne si toutes les combinaisons linéaires de ses composantes sont gaussiennes c'est à dire :*

$$\forall a_1, a_2, ...a_n \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \text{ est une variable aléatoire gaussienne.}$$

Définition I.15 *Une suite de variable aléatoire X_n converge en loi vers X si $E[\phi(X_n)] \longrightarrow E[\phi(X)]$ quand $n \longrightarrow \infty$ pour toute fonction ϕ continue bornée.*

Proposition I.16 *Soit X un vecteur gaussien :*

1. *Si Y est un vecteur gaussien alors :*

$$X \overset{loi}{=} Y \Leftrightarrow \begin{cases} E(X) = E(Y) \\ cov(X) = cov(Y) \end{cases}$$

2. *Si $E(X) = 0$ alors X est symétrique $(X \overset{loi}{=} -X)$*

Définition I.17 *Un processus gaussien est un processus $(X_t.t \geq 0)$ tel que $(X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, ..X_{t_n})$ est un vecteur aléatoire gaussien $\forall n \geq 1$ et $t_1, t_2....t_n \in \mathbb{R}_+$. Ceci revient à dire que* *toute combinaison linéaire finie de $(X_t.t \geq 0)$ est une variable aléatoire gaussienne c'est à dire*

$$\forall n, \forall t_i 1 \leq i \leq n, \forall a_i \in \mathbb{R}, \sum a_i X_{t_i} \quad \text{est une } v.a.r. gaussienne$$

Un processus gaussien est caractérisé par son espérence et sa covariance

Définition I.18 *Les variables aléatoires $X_t - X_s, 0 \leq s \leq t$, sont appelées des* ***accroissements*** *du processus stochastique (X_t).*

(i) Processus à accroissement indépendants :

$$(X_t - X_s) \perp F_t^X = \sigma(X_r, 0 \leq r \leq s) \vee 0 \leq s \leq t.$$

(ii) Processus à accroissement stationnarites :

$$X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0, \forall 0 \leq s \leq t.$$

Définition I.19 (Temps d'arrêt) *Une variable aléatoire $T : \Omega \to [0, \infty]$ est un* ***temps d'arrêt*** *si l'évenement $\{T \leq t\} \in F_t, \forall t, 0 \leq t < \infty$.*

1.3 Mouvement Brownien

Définition I.20 *On appelle* ***Mouvement Brownien*** *un processus stochastique $(B_t)_{t \geq 0}$ à valeurs réelles tel que :*

(i) Continuité $\mathbb{P} - p.s$: la fonction $s \longrightarrow B_s(\omega)$ est une fonction continue.

(ii) Indépendance des accroissements : si $0 \leq s \leq t, B_t - B_s$est indépendant de $F_s = \sigma(B_u, u \leq s)$ et de loi gaussienne centrée de variance $t - s$.

(iii) Stationnarité des accroissements : si $0 \leq s \leq t$, la loi de $B_t - B_s$ est identique à celle de $B_{t-s} - B_0 = B_{t-s}$ car $B_0 = 0$ p.s

On dit qu'un mouvement brownien par rapport à x si $B_0 = x$.

Définition I.21 *Un mouvement brownien est dit* ***standard si*** $B_0 = 0$ $\mathbb{P}-p.s, \mathbb{E}[B_t] = 0$ *et* $\mathbb{E}[B_t^2] = t$ $(i.e.\ \mu = 0$ *et* $\sigma = 1)$.

Dans la suite si on parlera de mouvement brownien sans précision, il s'agira d'un mouvement brownien standard

Proposition I.22 *Soit* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement brownien standard, alors* B_t *est un processus gaussien i.e. pour tout* n *et tous* $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 .... \leq t_n, (B_{t_1}, ...B_{t_n})$ *est un vecteur gaussien.*

Théorème I.23 X *est mouvement brownien standard si et seulement si* X *est un processus gaussien continu centré de fonction de covariance*

$$cov(X_s, X_t) = s \wedge t = min(s, t).$$

Proposition I.24 *Soit* B *un Movement Brownien Standard, on a :*

1- pour tout $T > 0, \{B_{t+T} - B_T\}_{t\geq 0}$ *est un mouvement brownien indépendant de* $\sigma(B_u, u \leq T)$

2- pour tout $c > 0, \{cB_{\frac{t}{c^2}}\}_{t\geq 0}$ *: est un mouvement brownien ;*

3- Le processus défini par $X_0 = 0$ *et* $X_t = tB_{\frac{1}{t}}$ *est un mouvement brownien ;*

Proposition I.25 ***1-*** $\forall t, \mathbb{P} - p.s, .B_t$ *n'est pas différentiable en aucun point* t.

2- B_t *n'est pas à variation finie en aucun point* t.

1.4 Martingales

Définition I.26 *Un processus* $(M_t)_{t\geq 0}$ *est dit martingale si :*

(i) *Pour tout* $t \geq 0, M_t$ *est* F_t- *mesurable ;*

(ii)*Pour tout* $t \geq 0$ $,M_t$ *est intégrable i.e.* $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$;

(iii) *Pour tout* $\forall t \geq s \geq 0$ $\mathbb{E}(M_t \ / \ F_s) = M_s$ $p.s.$

On définit de manière similaire une sous-martingale si (iii) *est remplacé par* $\mathbb{E}(M_t \,/\, \mathcal{F}_s) \geq M_s \; \mathbb{P}-\; p.s.$Et sur-martingale si (iii) est remplacé par ($\mathbb{E}(M_t \,/\, \mathcal{F}_s) \leq M_s$) $p.s, \forall t \geq s \geq 0$.

Proposition I.27 *Le mouvement brownien standard $(B_t, t \geq 0)$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$.*

Proposition I.28 *soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Les processus suivants sont des martigales par rapport à $(\mathcal{F}_t^B)$:*
(i) $M_t = B_t^2 - t$
(ii) $N_t = e^{(B_t - \frac{t}{2})}$.

Théorème I.29 (de Lévy) *Soit X_t un processus stochastique à trajectoires continues, adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ et tel que :*
(i) X_t est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)$,
(ii) $(X_t^2 - t)$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)$,
alors X_t est un mouvement brownien.

Théorème I.30 (d'arrêt) *Soit (M_t) est une martingale continue par rapport à $(\mathcal{F}_t)$ et T_1, T_2 deux temps d'arrêts tels que $0 \leq T_1(\omega) \leq T_2(\omega) \leq K < \infty, \; \forall \omega \in \Omega$. Alors*

$$\mathbb{E}(M_{T_2} \,/\, \mathcal{F}_{T_1}) = M_{T_1} \quad p.s \text{ et donc } \mathbb{E}(M_{T_2}) = \mathbb{E}(M_{T_1})$$

En particulier, si $0 \leq T(\omega) \leq K, \forall \omega \in \Omega$, alors $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$.

Le théoreme est encore valide pour une sous -martingale et une sur-martingale(avec les inégalités correspondantes).

Théorème I.31 (Inégalité de DOOB) *Soit (M_t) est une martingale par rapport à (F_t), continue, de carré intégrable et telle que $M_0 = 0$ $\mathbb{P}.p.s.$alors :*

$$a)\ \mathbb{P}(\sup_{0\leq s\leq t}|M_s| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[|M_t|)}{\lambda},\ \forall t>0,\ \lambda>0,$$
$$b)\ \mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t}|M_s^2|) \leq 4\mathbb{E}(M_t^2),\ \forall t>0.$$

Théorème I.32 (Théorème d'arrêt de Doob) *Si X est une martingale et si σ et τ sont deux temps d'arrêt bornés tels que $\sigma\leq\tau$, $\mathbb{E}[X_\tau\ /\ F_\sigma] = X_\sigma$ $\mathbb{P}-p.s.$*

Théorème I.33 (Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy "BDG") *Soit $p\in]0,\infty[$. Il existe deux constantes c_p et C_p telles que, pour toute martingale locale continue X, nul en 0.*

$$c_p\mathbb{E}[\langle X,X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}] \leq \mathbb{E}[\sup_{t\geq 0}|X_t|^p] \leq C_p\mathbb{E}[\langle X,X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}].$$

Remarque I.34 *En particulier, si $T>0$,*

$$c_p\mathbb{E}[\langle X,X\rangle_T^{\frac{p}{2}}] \leq \mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^p] \leq C_p\mathbb{E}[\langle X,X\rangle_T^{\frac{p}{2}}].$$

1.5 Calcul d'Itô

L'objectif de ce paragraphe est de définir l'intégrale $(\int_0^t X_s dB_s, t\in[0,T])$, pour un processus (X_t) vérifiant certaines propriétés techniques. Nous étendons ensuite cette intégrale au cas où B_t est remplacé par un processus continu plus général appelé processus d'Itô.Ceci n'est pas facile, car comme nous l'avons cité précédemment les trajectoires d'un mouvement brownien ne sont pas à variation finie et donc l'intégrale précédente n'est pas en aucun cas une 'intégrale de Lebesgue-Stieljes. Pour cela , on procède plusieurs étapes pour construire cette intégrale. L'idée générale est dans une première étape de définir l'intégrale $\int_0^t X_s dB_s$ pour des processus X assez simples (prévisibles élémentaires), puis d'étendre cette définition à des processus plus généraux par un passage à la limie dans L^2. Dans une troisième étape, nous étendons l'intégrale à des processus encore plus généraux par un passage à la lilmite au sens de la converge en probabilité.

Dans cette partie, nous nous donnons $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ Une filtration qui vérifiée les conditions habituelles et B_t et un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$mouvement brownien. Et les martingales sont toujours continues à droite limitées à gauche.

Définition I.35 (Processus d'Itô) *On appelle processus d'Itô, un processus X à valeurs réelles tel que :*

$$\forall 0 \leq t \leq T, \ ..X_0 + \int_0^t b_s ds \ + \int_0^t \sigma_s dB_s, \ \mathbb{P} - p.s \tag{1}$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0-$mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions

$$\int_0^t |b_s| \, ds \ < \infty \quad et \quad \int_0^t |\sigma_s^2| \, ds \ < \infty$$

Le coefficient b est le drift ou la dirivée, σ est le coefficient de diffusion.

Théorème I.36 (Formule d'Itô) *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x, à dérivées bornées, on a*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_x(s, X_s) dX_s + \int_0^t f_s(s, X_s) ds - \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s)\sigma_s^2 ds \tag{2}$$

ce qui l'on note

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= [f_t(t, X_t) + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X_t)\sigma_t^2] dt + f_x(t, X_t) dX_t \\ &= f_t(t, X_t) dt + f_x(t, X_t) dX + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X_t) d\langle X\rangle_t \end{aligned} \tag{3}$$

Proposition I.37 *La formule d'Itô montre que*

$$d[X_1X_2](t) = X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + \sigma_1(t)\sigma_2(t)dt \tag{4}$$

Cette formule est conue sous le nom d'intégration par parties. La quantitié $\sigma_1(t)\sigma_2(t)$ correspond au crochet de X_1, X_2 noté $\langle X_1, X_2\rangle$ est défini comme le processus à varation fini $\langle X_1, X_2\rangle = \int_0^t \sigma_1(s)\sigma_2(s)ds$.

1.6 Equations Différentielles Stochastiques

Définition I.38 *Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \tag{5}$$

ou sous une forme

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\ dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{6}$$

L'inconnu est le processus X. Le problème est, comme une équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients, l'équation différentielle a une unique solution.

Définition I.39 *Soit b et σ deux fonctions de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles données. On se donne également un espace (Ω, F, P) muni d'une filtration (F_t) et un (F_t) mouvement brownien B sur cet espace. Une solution de (5) est un processus X continu (F_t) -adapté tel que les intégrales $\int_0^t b(s, X_s)ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$ ont un sens et l'égalité*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \tag{7}$$

est satisfaite pour tout t, $\mathbb{P} - p.s.$

Théorème I.40 *On suppose que*

a) les fonctions b et σ sont continues.

b) Il existe K tel que pout tout $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (i) & |b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K\,|x-y| \ (\textit{condition de Lipschitz}) \\ (ii) & |b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)| \leq K^2(1+|x|^2) \ (\textit{condition de croissance}) \end{cases} \tag{8}$$

c) La condition initiale X_0 est indépendante de $(B_t, t \geq 0)$ et de carré intégrable, alors il existe une unique solution de (7) à trajectoires continues pour $t \leq T$. De plus cette solution vérifie

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 < \infty) \tag{9}$$

1.6.1 Propriétés de Markov. On note $(X_s^{t,x}, s \geq t)$ la solution de (7) partant de x à l'instant t, soit

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(u, X_u^{t,x})du + \int_t^s \sigma(u, X_u^{t,x})dB_u$$

Sous les conditions du théorème d'existence, on peut montrer que

$$X_s^{0,x} = X_s^{t, X_t^{0,x}}, s \geq t$$

Ce qui montre que la solution (7) est un processus de Markov par rapport à la filtration F_t :

$$E(f(X_s) \,/\, F_t) = E(f(X_s) \,/\, X_t) = \phi(s,t,X_t)$$

où $\phi(s,t,X_t) = E(f(X_s^{t,x})), s \geq t$. Ce résultat est extrêmement important et permet de calculer facilement des espérances conditionnelles. En particulier si

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(X_u^{t,x})du + \int_t^s \sigma(X_u^{t,x})dB_u$$

On obtient un processus de Markov homogène

$$\mathbb{E}(f(X_s)\ /\ F_t) = \mathbb{E}(f(X_s)\ /\ X_t) = \phi(s,t,X_t) = \psi(s-t,X_t)$$

où $\phi(s,t,x) = \mathbb{E}(f(X_s^{t,x}) = \mathbb{E}(f(X_{s-t}^{0,x})$ et $\psi(u,x) = E(f(X_u^{0,x})$.

1.7 Fonction convexe :

Définition I.41 *Soit f une fonction réelle définie sur E, on note domaine de f par :*

$$dom\ f = \{x \in E; f(x) < +\infty\}$$

f est une fonction convexe si pour tout $x, y \in dom\ f$ et pour tout $t \in [0,1]$

$$f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y)$$

Proposition I.42 *Si f est une fonction convexe, alors f est lypschitzienne sur tout convexe compact inclu dans dom f.*

Proposition I.43 *Si f est une fonction de classe C^2, alors f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.*

Chapitre II

Les Peacock et Les Processus

1- Martingale

II. Les peacock et les processus 1-martingale

2.1 les processus croissants dans l'ordre convexe (peacock)

Nous commençons par définir la notion de peacock. Le mot "peacock" provient de la prononciation anglaise de l'abréviation P.C.O.C (du terme "Processus Croissant pour l'Ordre Convexe"). Notons qu'en anglais, "peacock" signifie paon.

Définition II.1 *Soit X, Y deux variables aléatoires réelles intégrables. On dit que X domine Y pour l'ordre convexe si pour toute fonction convexe $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $E(|\psi(X)|) < \infty$ et $E(|\psi(Y)|) < \infty$ on a*

$$E(\psi(X)) \geq E(\psi(Y))$$

on note cette relation par

$$X \overset{(c)}{\geq} Y$$

Généralement, il n'est pas évident de montrer qu'un processus$(X_t\ , t \geq 0)$soit un peacock en utilisant cette définition, pour cela nous introduisons une nouvelle classe de fonction convexe notée C.

Définition II.2 *On note par C l'ensemble des fonction ψ convexe, positives, de classeC^2 et tel qu'il existent a, a', b, b' tels que :*

i) $\psi(x) = ax + b$ *pour x assez grand.*

ii) $\psi(x) = -a'x + b'$ *pour x assez petit.*

Proposition II.3 *Si $\psi \in C$ alors*

1. *$|\psi'|$ est bornée.*
2. *ψ'' est à support compact.*

3. *$\exists k_1, k_2$ positives telle que* $\psi(x) = |\psi(x)| \leq k_1 + k_2|x|$.

Démonstration. Soit $\psi \in C$. Donc ils existent m et m' tel que

$$\psi(x) = \begin{cases} -a'x + b', \text{ si } x \in]-\infty, m'] \\ \varphi(x), \text{ si } x \in [m', m] \\ ax + b, \text{ si } x \in [m, +\infty[\end{cases}$$

où φ est une fonction de classe C^2, convexe, positive

1. $|\psi'|$ est bornée : En effet

$$\psi^{'}(x) = \begin{cases} -a', \text{ si } x \in]-\infty, m'] \\ \varphi'(x), \text{ si } x \in [m', m] \\ a, \text{ si } x \in [m, +\infty[\end{cases}$$

ψ' est continue sur $[m', m]$ donc

$$|\psi'(x)| \leq \left(\sup_{x \in [m', m]} |\psi'(x)| \right)$$

Ainsi

$$\left|p^{\star'}(x)\right| \leq \max\left(\sup_{x \in [m', m]} |\psi'(x), a', a| \right)$$

2. ψ'' est a support compact : Puisque ψ est convexe de classe C^2

$$\psi''(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \in]-\infty, m'] \\ \varphi''(x), \text{ si } x \in [m', m] \\ 0, \text{ si } x \in [m, +\infty[\end{cases}$$

Alors

$$\psi''(x) = \begin{cases} \varphi''(x), \text{ si } x \in [m', m] \\ 0, \text{ si ailleurs} \end{cases}$$

3. Si on pose $k_2 = \max(a', a)$; $k_1 \geq \psi(0)$ d'où la majoration

$$\psi(x) = |\psi(x)| \leq k_1 + k_2 |x|$$

■

On remarque qu'il est plus facile de travailler avec la classe C qui possède plusieurs propriétés que d'utiliser une fonction ψ convexe quelconque. La proposition suivante nous permet de passer à la classe C.

Proposition II.4 *Soit X et Y deus variables aléatoires réelles intégrables alors on a l'équivalence entre :*

1. $X \overset{(c)}{\geq} Y$.

2. $E(X) = E(Y)$ *et pour tout* $\psi \in C, E[\psi(X)] \geq E[\psi(Y)]$.

Démonstration. 1) Montrons que $1 \Rightarrow 2$ Si $X \overset{(c)}{\geq} Y \Rightarrow \forall \psi$ convexe $E[(\psi(X))] \geq E[(\psi(Y))]$, appliquons l'inégalité une fois pour $\psi(x) = x$ et une fois pour $\psi(x) = -x$, on obtient alors:

$$E(X) \geq E(Y) \Rightarrow E(X) - E(Y) \geq 0.$$

Et

$$E(-X) \geq E(-Y) \Rightarrow E(X) - E(Y) \leq 0.$$

Ainsi $E(X) - E(Y) = 0 \Rightarrow E(X) = E(Y)$. De plus pour toute fonction ψ convexe $E[\psi(x)] \geq E[\psi(y)]$ .Donc, en particulier pour $\psi \in C$ .D'une autre part, pour un $\psi \in C$.

$$E[|\psi(X)|] = E[\psi(X)] \leq k_1 + k_2 E[|X|] \leq \infty.$$

Et

$$E[|\psi(Y)|] = E[\psi(Y)] \leq k_1 + k_2 E[|Y|] \leq \infty.$$

2) Montrons que $2 \Rightarrow 1$ Soit ψ une fonction convexe quelconque, montrons que $E[\psi(X)] \geq E[\psi(Y)]$ .Nous voulons construire une suite $\psi_n \in C$ qui croit vers ψ. Soit ψ une fonction convexe, positive et

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \alpha_n x + \beta_n, \text{ si } x \in]-\infty, -n] \\ \psi(x), \text{ si } x \in [-n, +n] \\ a_n x + b_n, \text{ si } x \in [n, +\infty[\end{cases}$$

Pour x fixé et n assez grand $|x| < n$ alors $|\varphi_n(x) - \psi(x)| \to 0$. De plus φ_n ainsi définie est une suite de fonctions croissantes convexes continues par constriction mais elle n'est pas de classe C^2, pour régulariser nous procédons comme suit soit p_n une suite régularisante à support compact. On pose $\psi_n(x) = \varphi * p(x)$, alors

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \int_{-1}^{+1} \left(\alpha_n \left(x - \frac{y}{n}\right) + \beta_n\right) p(y)\, dy \text{ si } x \in \left]-\infty, -n - \frac{1}{n}\right] \\ f_n(x, y) + \int^{x+\frac{1}{n}} \psi(y)\, p(n(x-y))\, dy \text{ si } x \in \left]-n - \frac{1}{n}, -n + \frac{1}{n}\right] \\ \int_{-1}^{+1} \psi\left(x - \frac{y}{n}\right) p(y)\, dy \text{ si } x \in \left[-n + \frac{1}{n}, n - \frac{1}{n}\right] \\ g_n(x, y) + \int^{x+\frac{1}{n}} \psi(y)\, p(n(x-y))\, dy \text{ si } x \in \left]n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}\right] \\ \int_{-1}^{+1} \left(a_n \left(x - \frac{y}{n}\right) + b_n\right) p(y)\, dy \text{ si } x \in \left[n + \frac{1}{n}, +\infty\right[\end{cases}$$

où $f_n(x, y) = \int_{x+n}^{\frac{1}{n}} (\alpha_n (x - y) + \beta_n)\, p(ny)\, dy$ et $g_n(x, y) = \int_{x-n}^{\frac{1}{n}} (\alpha_n (x - y) + \beta_n)\, p(ny)\, dy$. Verifions que $\psi_n$est convexe

$$\begin{aligned} \psi_n(\theta x + (1-\theta) y) &= \varphi * p(\theta x + (1-\theta) y). \\ &= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(\theta x + (1-\theta) y - z)\, p(nz)\, dz. \\ &= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(\theta(x - z) + (1-\theta)(y - z))\, p(nz)\, dz. \end{aligned}$$

Mais, puisque φ_n est convexe

$$\begin{aligned}
\psi_n(\theta x + (1-\theta) y) &= \theta \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(x-z) p(nz) dz + (1-\theta) \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(y-z) p(nz) dz \\
&= \theta \psi_n(x) + (1-\theta) \psi_n(y)
\end{aligned}$$

Or ψ_n est croissante car $\varphi_n(x)$ et $p_n(x)$sont croissantes par construction. De plus, pour x fixé et n assez grand $|x| < n - \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} |\psi_n(x) - \psi(x)| &\leq \lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{+1} \left| \left(\psi\left(x - \frac{y}{n}\right) - \psi(x) \right) \right| p(y) dy. \\
&\leq \int_{-1}^{+1} \lim_{n\to+\infty} \left| \psi\left(x - \frac{y}{n}\right) - \psi(x) \right| p(y) dy \to 0. \\
&\quad \text{(car } \psi \text{ est continue).}
\end{aligned}$$

Si ψ est convexe quelconque, il existe a, b tels que la fonction $\psi(x) + ax + b$ soit positive.autrement dit, on peut toujours se ramener à une fonction positive convexe. Donc si nous montrons que : $E(\psi(X) + aX + b) \geq E(\psi(Y) + aY + b)$, nous aurons alors : $E(\psi(X)) \geq E(\psi(Y))$, car par hypothése $E(X) = E(Y)$. Soit $\psi_n \in C$. Par hypothese $E[\psi_n(X)] \geq E[\psi_n(Y)]$ par passage à la limite (en utilisant théoréme de convergence monotone) nous aboutissons au résultat voulu. ∎

Exemple II.5 *Soient X, Y deux v.a.r intégrables. Si $E(Y / X) = 0$, alors le processus $(X_t = X + tY, t \geq 0)$ est un peacock.*

Démonstration.

1. Montrons d'abord que $E(X_t) = E(X_s)$

$$\begin{aligned}
E(X_t) &= E(X + tY) \\
&= E(E(X + tY \ / \ X)). \\
&= E(X) + E(t\underbrace{E(Y \ / \ X)}_{=0}) = E(X). \\
&\Rightarrow E(X_s) = E(X). \\
&\Rightarrow E(X_t) = E(X_s).
\end{aligned}$$

2. Montrons que $\forall t \geq 0 : E[|\psi(X_t)|] \leq \infty$. Soit $\psi \in C$:

$$\begin{aligned}
E[|\psi(X_t)|] &\leq k_1 + k_2 E[|X + tY|] \\
&\leq k_1 + k_2 E[|X|] + E[|tY|] < \infty
\end{aligned}$$

3. Montrons que $\forall \psi \in C : E(\psi(X_t)) \geq E(\psi(X_s))$. Soit $\psi \in C$:

$$\psi'(x) \leq \alpha \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \psi'(x)\, dp(w) < \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dp(w) = \alpha$$

Ainsi on peut premutre l'éspérance et la dérivée (par lebesgue)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E(\psi(X + tY))}{\partial t} &= E[Y\psi'(X + tY)] \\
&= E\left[Y\left\{\psi'(X) + \int_X^{X+tY} \psi''(u)\, du\right\}\right] \\
&= E[Y\psi'(X)] + E\left(Y\int_X^{X+tY} \psi''(u)\, du\right) \\
&= E[E(Y\psi'(X) \ / \ X)] + E\left(Y\int_X^{X+tY} \psi''(u)\, du\right) \\
&= E[\psi'(X) E(Y \ / \ X)] + E(Y\int_X^{X+tY} \psi''(u)\, du) \\
&= E\left(Y\int_X^{X+tY} \psi''(u)\, du\right)
\end{aligned}$$

comme $\psi''(u) \geq 0$.

$$\begin{aligned}\text{Si } Y &\geq 0 \Rightarrow tY \geq 0 \\ &\Rightarrow X + tY \geq X \Rightarrow Y \int_X^{X+tY} \psi''(u)\, du \geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Si } Y &\leq 0 \Rightarrow tY \leq 0 \\ &\Rightarrow X + tY \leq X \\ &\Rightarrow \int_X^{X+tY} \psi''(u)\, du \leq 0 \Rightarrow Y \int_X^{X+tY} \psi''(u)\, du \geq 0\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\partial E(\psi(X+tY))}{\partial t} \geq 0$$

Donc $\forall s \leq t : E(\psi(X_t)) \geq E(\psi(X_s))$

■

Définition II.6 (peacock) *On appelle peacock un processus $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs réelles intégrable, ie :*

1. $\forall t > 0, E[|Xt|] < \infty$
2. *Pour toute fonction convexe $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$t \in \mathbb{R}_+ \to E[\psi(X_t)] \in]-\infty, +\infty[\ \text{ est croissante}$$

Remarque II.7 *Un processus $(X_t, t \geq 0)$ est croissant dans l'ordre convexe si, pour tout $s \leq t$*

$$X_s \overset{(c)}{\leq} X_t$$

Remarque II.8 *Pour prouver qu'un processus donée est un peacock, on peut se restreindre à la classe de fonction : $K = \{\psi$ est une fonction convexe de classe C^2 telle que ψ'' est à supp*

En effet, toute fonction convexe peut s'écrire comme l'enveloppe convexe des fonctions affines qui lui sont inférieures, i.e.peut s'écrire comme une limite croissante de fonctions de K, et on obtient le résultat en passant à la limite. Remarquons que si $\psi \in K$, alors ψ est bornée.

Proposition II.9 *Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus intégrable tel que $E[X_t]$ ne dépende pas de t. Alors, pour prouver que $(X_t, t \geq 0)$ est un peacock, on peut se limiter à la classe de fonction :*

$$K' = \begin{cases} \theta \in K;\ \theta(0) = \theta'(0) = 0. \\ \theta \textit{ est décroissante sur }]-\infty, +\infty[\,, \textit{ et croissante sur }]0, +\infty[\,. \end{cases}$$

En effet, si $\psi \in K$, il suffit de poser :

$$\theta(x) = \int_0^x (x-u)\, \psi''(u)\, du$$

et de remarquer que θ satisfait les hypothéses précédement citées ainsi que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \psi(x) - \psi(y) = \psi'(0)(x-y) + \theta(x) - \theta(y).$$

2.2 Application :

Proposition II.10 *Soient $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deus fonctions boreliennes telles que les application $\sigma_s : x \to \sigma(s,x)$ et $b_s : x \to b(s,x)$ soient localement liptischitziennes en x, uniformement sur les compacts en s. Soit $(X_t, t \geq 0)$ l'unique solution forte de l'EDS :*

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s + \int_0^t b(s, X_s)\, ds$$

1. *Si pour tout $s \geq 0$, b_s est croissante, alors $(X_t - E[X_t], t \geq 0)$ est un peacock.*

2. *Si $x = 0$ et pour tout $s \geq 0$*

   (a) *σ_s est paire ou impaire.*

   (b) *b_s est impaire et $sgn(b_s(x)) = sgn(x)$.*

   Alors le processus $(X_t, t \geq 0)$ est un peacock.

Démonstration. i) Soit $\psi \in K$. Posons $h(t) = E[X_t] = x + \int_0^t E[b(s, X_s)]\, ds$ et appliquons la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} E[\psi(X_t - h(t))] &= \psi(x) + E\left[\int_0^t \psi'(X_s - h(s))(b(s, X_s) - h'(s))ds\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}E\left[\int_0^t \psi''(X_s - h(s))\sigma^2(s, X_s)\, ds\right]. \end{aligned}$$

En dérivant, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}E[\psi(X_t - h(t))] &= E[\psi'(X_t - h(t))(b(t, X_t) - h'(t))] \\ &\quad + \frac{1}{2}E\left[\psi''(X_t - h(t))\sigma^2(t, X_t)\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

ψ étant convexe, le second terme du membre de droite est positif, et nous allons montrer que le premier l'est également. En effet, en notant b_s^{-1} l'inverse continu à droite de b_s, on a :

$$E[\psi'(X_t - h(t))(b(t, X_t) - h'(t))] \geq \psi'\left(b_t^{-1}(h'(t)) - h(t)\right) E[(b(t, X_t) - h'(t))] = 0,$$

Ce qui achéve la preuve du point (i).

$ii)$ Traitons le cas σ_s paire. On peut remarquer tout d'abord que pour tout $t \geq 0$, la loi de X_t est symétrique. En effet :

$$\begin{aligned} -X_t &= -\int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s + \int_0^t b(s, X_s)\, ds \\ &= \int_0^t \sigma(s, -X_s)\, d(-B_s) + \int_0^t b(s, -X_s)\, ds \end{aligned}$$

Et puisque $(-B_s, s \geq 0)$ est un mouvement brownien standard issu de 0, par unicité trajectorielle de la solution de cette EDS,

$$(X_t, t \geq 0) \overset{loi}{=} (-X_t, t \geq 0).$$

En particulier, pour tout $t \geq 0$, $h(t) = E[X_t] = 0$ ne dépende pas de t, Soit donc $\theta \in K^{'}$. (10)se réécrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} E[\theta(X_t)] = E[\theta'(X_t)(b(t, X_t))] + \frac{1}{2} E\left[\theta''(X_t)\sigma^2(t, X_t)\right],$$

et il ne reste plus qu'à remarquer que pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\theta'(x)\, b(t, x) \geq 0.$$

Le cas σ impaire se traite de la méme manière. ■

Exemple II.11 *Si $(X_t, t \geq 0)$ est un processus de Ornstein-Uhlenbeck de paramétre $c \leq 0$:*

$$X_t = B_t - c\int_0^t X_s ds.$$

Alors $(X_t, t \geq 0)$ est un peacock. Observons que $(X_t, t \geq 0)$ reste un peacock pour $c \geq 0$, puisque :

$$X_t \overset{I.d}{=} B_{\frac{1-\exp\{-2ct\}}{2c}}$$

et pour tout $c \in \mathbb{R}^*, t \longrightarrow \frac{1-\exp\{-2ct\}}{2c}$ est une fonction croissante.

2.3 Les processus 1-martingale :

Dans cette partie, nous allons exhiber des martingales $(M_t, t \geq 0)$ pour plusieurs processus $(X_t, t \geq 0)$ croissants dans l'ordre convexe telles que pour tout t fixé $X_t \overset{loi}{=} M_t$

Définition II.12 *Un processus $(X_t, t \geq 0)$ est un 1-martingale s'il existe une martingale $(M_t, t \geq 0)$ tel que pour tout t fixé*

$$X_t \overset{loi}{=} M_t$$

Définition II.13 *Soient X une v.a. et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne et convexe telle que $E[|\varphi(X)|] < \infty$. Alors :*

$$\varphi(E[X]) \leq E[\varphi(X)]$$

Théorème II.14 (kellerer) *Un processus à valeures réelles $(X_t, t \geq 0)$ est un peacock si et seulement si c'est une martingale*

Démonstration. $i)$ Pour $\psi \in k$ et $s \leq t$, par hypothése $X_t \overset{loi}{=} M_t$

$$\begin{aligned} E[\psi(X_t)] &= E[\psi(M_t)] \\ &= E[E[\psi(M_t)] \ / \ f_s] \\ &\geq E[\psi[(M_t) \ / \ f_s]] \quad (\text{ par l'inègalitè de Jensen}) \end{aligned}$$

puisque M_t est une martingale

$$\begin{aligned} E[\psi(X_t)] &\geq E[\psi(M_s)] \\ &\geq E[\psi(X_s)] \end{aligned}$$

$ii)$ La réciproque, nettement plus difficile à établir. ■

2.3.1 Méthode des EDS : On note par :

- $I = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, impaire, strictement croissante et $\varphi(+\infty) = +\infty\}$
- $J = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, impaire, strictement croissante $\varphi(+\infty) = +\infty$ et $sgn\varphi''(x) =$

Lemme II.15 *Soit $\varphi \in I$, alors $(\varphi(B_t), t \geq 0)$ est un peacock.*

Soit $\varphi \in I$, comme $(\varphi(B_t), t \geq 0)$ est un peacock, nous allons maintenant voir au prix de quelque hypothéses supplémentaires sur φ qu'il existe une martingale $(M_t, t \geq 0)$ solution de

$$M_t = \int_0^t \sigma(u, M_u)\, dB_u$$

(pour une fonction σbien choisie) tel que, pour tout $t \geq 0$ fixé on ourait

$$M_t \stackrel{loi}{=} \varphi(B_t)$$

Hypothèses et notations :

1. Soit $\varphi \in J$ tel que, pour tout $t \geq 0$

$$E(|\varphi(B_t)|) < \infty \text{ et } E(|\varphi''(B_t)|) < \infty.$$

2. Soit $H : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_-$ une fonction définie par

$$H(u, x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi''(y) \exp\left\{-\frac{y^2}{2u}\right\} dy.$$

Nous avons que $H(u,x)$ ainsi défini vérifie 2 propriétés qui sont les suivantes

$$\begin{aligned}
|H(u,x)| &= \left|\int_{-\infty}^{x} \varphi''(y) \exp\left\{-\frac{y^2}{2u}\right\} dy\right|. \\
&\leq \int_{-\infty}^{x} |\varphi''(y)| \exp\left\{-\frac{y^2}{2u}\right\} dy. \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi''(y)| \exp\left\{-\frac{y^2}{2u}\right\} dy. \\
&\leq E\left(|\varphi''(B_t)|\right). \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Pour tout $u \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$H(u,x) \leq 0.$$

Si $x \in \mathbb{R}_-$,

$$\int_{-\infty}^{x} \varphi''(y) \exp\left\{-\frac{y^2}{2u}\right\} dy \leq 0.$$

car $\varphi''(y) \leq 0$

Si $x \in \mathbb{R}_+$, $sgn\varphi''(x) = sgn(x) \geq 0$, ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{x} \varphi''(y) \exp\left\{-\frac{y^2}{2u}\right\} dy &\leq \int_{0}^{+\infty} \varphi''(y) \exp\left\{-\frac{y^2}{2u}\right\} dy \Rightarrow \\
-\int_{0}^{x} \varphi''(y) \exp\left\{-\frac{y^2}{2u}\right\} dy &\geq -\int_{0}^{+\infty} \varphi''(y) \exp\left\{-\frac{y^2}{2u}\right\} dy.
\end{aligned}$$

En appliquant le changement de variable $[z = -y]$

$$-\int_{0}^{x} \varphi''(y) \exp\left\{-\frac{y^2}{2u}\right\} dy \geq \int_{-\infty}^{0} \varphi''(z) \exp\left\{-\frac{y^2}{2u}\right\} dz.$$

Ainsi

$$\int_{-\infty}^{x} \varphi''(y) \exp\left\{-\frac{y^2}{2u}\right\} dy \leq 0.$$

3. Soit $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction définie par

$$\sigma^2(x,y) = \left(\varphi' \circ \varphi^{-1}\right)^2(y) - \left(\varphi' \circ \varphi^{-1}\right)(y)\, H\left(u, \varphi^{-1}(y)\right) \exp\left\{\frac{\left(\varphi^{-1}\right)^2(y)}{2u}\right\}.$$

puisque $H(u,x) \leq 0$ et $\varphi'(x) \geq 0$, alors $\sigma^2(u,x) \geq 0$.

On note par **(H1)** les Hypothése que doit vérifier φ

i. $\varphi \in J$

ii. $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ est lipschitzienne et $\varphi'(0) > 0$

iii. Pour tout $c > 1$ il existe une constante K_c telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|x\varphi'(x)| \geq c\,|\varphi''| - K_c.$$

On peut trouver des exemples de fonctions qui vérifient les hypothéses $H1$, parmi elles considérons $\varphi(x) = sh(x)$ qui vérifie bien les hypothéses **(H1)**. En effet, la fonction $\varphi(x) = sh(x)$ est croissante impaire de classe C^2,et

$$sgn\left[\varphi''(x)\right] = sgn\left[sh(x)\right] = sgn(x)$$

De plus

$$\varphi' \circ \varphi^{-1}(x) = ch\left[\arg sh(x)\right] = \sqrt{x^2+1}$$

Ainsi

$$\left[\varphi' \circ \varphi^{-1}\right](x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

mais $\sqrt{x^2+1}$ est une fonction paire convexe, donc $\exists k \geq 0$ une constante tel que $\sqrt{x^2+1} \geq k'|x|$, par suite

$$\left|\left[\varphi' \circ \varphi^{-1}\right](x)\right| = \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| \leq \frac{1}{k'}$$

D'où $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ est lipschitzienne. Enfin, soit x_0 tel que

$$|x_0\varphi'(x_0)| = c|\varphi''(x_0)|$$

avec $c > x_0 > 0$, alors

$$K_c = c|\varphi''(x_0)|$$

Le lemme suivant nous fournit l'exestence et l'unicité de la solution de l'EDS

$$dM_t = \sigma(t, M_t)\, dB_t$$

Lemme II.16 *Sous **(H1)**, avec la fonction σ définie plus haut*

- *σ est localement lipshitzienne en x uniformément dans les compacts contenant u*
- *La croissance linéaire de σ en x uniformément dans les compacts contenant u*

alors l'EDS admet une solution unique

Théorème II.17 *Sous **(H1)**, soit $(M_t, t \geq 0)$ solution de*

$$M_t = \int_0^t \sigma(s, M_s)\, dB_s$$

alors la martingale $(M_t, t \geq 0)$ est telle que pour $t \geq 0$

$$M_t \overset{loi}{=} \varphi(B_t)$$

Avant de démontrer ce théoréme, nous allons justifier le choix de l'expression de σ. Soit $\tau : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(M_t, t \geq 0)$ solution de

$$M_t = \int_0^t \tau(s, M_s)\, dB$$

En utilisant la formule d'Ito, pour toute fonction f réguliére à support compact appliquée à M_t, nous avons

$$\begin{aligned} f(M_t) &= \int_0^t f'(M_s)\, dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(M_s)\, d\langle M, M\rangle_s \\ &= \int_0^t \tau(s, M_s) f'(M_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \tau^2(s, M_s) f''(M_s)\, ds \end{aligned}$$

Ainsi

$$E[f(M_t)] = \underbrace{E\left[\int_0^t \tau(s, M_s) f'(M_s)\, dB_s\right]}_{0} + \frac{1}{2}E\left[\int_0^t \tau^2(s, M_s) f''(M_s)\, ds\right]$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial t}E[f(M_t)] = \frac{1}{2}E\left[\tau^2(t, M_t) f''(M_t)\right]$$

et d'un autre coté en utilisant la formule d'Ito, pour toute fonction f réguliére à support compact appliquée à $\varphi(B_t)$, nous avons

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(B_t) &= \int_0^t \varphi'(B_s) f' \circ \varphi(B_s)\, dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \left[f'' \circ \varphi(B_s)(\varphi')^2(B_s) + \varphi''(B_s) f' \circ \varphi(B_s)\right] ds \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E[f \circ \varphi(B_t)] &= \underbrace{E\left[\int_0^t \varphi'(B_s) f' \circ \varphi(B_s)\, dB_s\right]}_{0} \\ &\quad + \frac{1}{2}E\left[\int_0^t \left[f'' \circ \varphi(B_s)(\varphi')^2(B_s) + \varphi''(B_s) f' \circ \varphi(B_s)\right] ds\right] \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial t}E[f \circ \varphi(B_t)] = \frac{1}{2}E\left[f' \circ \varphi(B_t)\varphi''(B_t) + f'' \circ \varphi(B_t)(\varphi')^2(B_t)\right]$$

Comme nous souhaitons obtenir

$$M_t \overset{loi}{=} \varphi(B_t)$$

On doit avoir,

$$\int_{\mathbb{R}} \tau^2(t,\varphi(x))\, f'' \circ \varphi(x) \frac{1}{\sqrt[2]{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f' \circ \varphi(x) \underbrace{\varphi''(x) \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\} dx}_{dH}$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} f'' \circ \varphi(x) (\varphi')^2(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\} dx$$

puisque f est réguliére à support compact, en intégrant par partie on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \tau^2(t,\varphi(x))\, f'' \circ \varphi(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \underbrace{\left[f' \circ \varphi(x) H(t,x)\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{0} \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f'' \circ \varphi(x) \varphi'(x) H(t,x)\, dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} f'' \circ \varphi(x) (\varphi')^2(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\} \left[f'' \circ \varphi(x)\right] \\
&\quad \times \left[(\varphi')^2(x) - \varphi'(x) H(t,x) \exp\left\{\frac{x^2}{2t}\right\}\right] dx
\end{aligned}$$

D'où le choix de σ

$$\sigma^2(t,\varphi(x)) = (\varphi')^2(x) - \varphi'(x) H(t,x) \exp\left\{\frac{x^2}{2t}\right\}$$

et en remplaçant y par $\varphi(x)$, on oura

$$\sigma^2(t,y) = \left(\varphi' \circ \varphi^{-1}\right)^2(y) - \varphi' \circ \varphi^{-1}(y) H\left(t, \varphi^{-1}(y)\right) \exp\left\{\frac{\left(\varphi^{-1}\right)^2(y)}{2t}\right\}$$

Démonstration. Soit la fonction σ définie plus haut et M_t solution de l'EDS, on note par $p(t, dy)$ la loi de M_t et $q(t, dy)$ la loi de $\varphi(B_t)$. M_t satisfait aux équations de Foker-Planck et nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, dy) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\sigma^2(t, y) p(t, dy) \right)$$

au sens des distributions. De méme, soit $X_t = \varphi(B_t)$ solution de

$$X_t = \int_0^t \varphi' \circ \varphi^{-1}(X_s) \, dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \varphi'' \circ \varphi^{-1}(X_s) \, ds$$

X_t satisfait aux équation de Fokker- Planck et nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t} q(t, dy) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\left(\varphi' \circ \varphi^{-1}(y) \right)^2 q(t, dy) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \varphi'' \circ \varphi^{-1}(y) \, q(t, dy) \right]$$

Mais ces équations sont les mémes, puisque nous avons choisi σ pour qu'il en soit ainsi. D'un autre coté $\varphi(B_0) = M_0$, alors

$$p(0, dy) = q(0, dy) = \delta_0(dy)$$

Ainsi $p(t, dy)$ et $q(t, dy)$ satisfaient aux mémes équation paraboliques avec les mémes condition initiales, par conséquent

$$M_t \stackrel{loi}{=} \varphi(B_t)$$

■

2.4 Peacocks forts et trés forts :

Nous définissons les notion de peacock fort et de peacock trés fort.

Lemme II.18 *Soit U une variable aléatoire intégrable. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout réels C, $E[1_{\{U \geq C\}}U] \geq 0$.*
2. *Pour toute fonction bornée et croissante $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$:*

$$E[h(U)U] \geq 0$$

3. $E[U] \geq 0$.

Définition II.19 *Un processus intégrable $(X_t,\ t \geq 0)$ est un peacock fort si, pour tous $0 \leq s < t$ et toute fonction borélienne bornée croissante $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:*

$$E[\phi(X_s)(X_t - X_s)] \geq 0 \tag{11}$$

Remarque II.20 1. *La donnée des martingales unidimensionnelles suffit à définir un peacock tandis que la définition d'un peacock fort fait intervenir les martingale bidimensionnelles.*

2. *Tout peacock fort est un peacock. En effet, si $\psi \in \mathbb{C}$,*

$$E[\psi(X_t)] - E[\psi(X_s)] \geq E[\psi'(X_s)(X_t - X_s)] \geq 0$$

3. *Si (X_t) est un peacock fort tel que $E(X_t^2) < \infty$ pour tout $t \geq 0$, alors :*

$$E[X_s(X_t - X_s)] \geq 0, \text{ pour tout } 0 \leq s < t.$$

Si X et Y sont deux processus ayant les mêmes martingales unidimensionnelles, alors il est possible que X soit un peacock fort et que Y ne le soit pas. Considérons par exemple $(X_t = t^{\frac{1}{4}}B_1, t \geq 0)$ et $(Y_t = \frac{B_t}{t^{\frac{1}{4}}}, t \geq 0)$, où $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien issu de 0. On montre, grâce ou Lemme II.18, que $(X_t, t \geq 0)$ est un peacock fort, par contre, $(Y_t, t \geq 0)$

n'en est pas un puisque, pour tout $a \in \mathbb{R}$ *et* $0 < s \leq t$.

$$E[1_{\{\frac{B_s}{s^{\frac{1}{4}}}>a\}}(\frac{B_t}{t^{\frac{1}{4}}} - \frac{B_s}{s^{\frac{1}{4}}})] = (\frac{1}{t^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{s^{\frac{1}{4}}})E[1_{\{B_s>as^{\frac{1}{4}}\}}B_s] < 0$$

(Car $\frac{1}{t^{\frac{1}{4}}} < \frac{1}{s^{\frac{1}{4}}}$ *et* $E[1_{\{B_s>as^{\frac{1}{4}}\}}B_s] > 0$ *d'après lemme(II.18). Plus généralement, pour toute martingale non nulle* $(M_t, t \geq 0)$ *et toute fonction borélienne strictement croissante* $\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $(\frac{M_t}{\alpha(t)}, t \geq 0)$ *n'est pas un peacock fort.*

Proposition II.21 *Un processus gaussien centrée* $(X_t, t \geq 0)$ *est un peacock fort si et seulement si, pour tous* $0 \leq s < t$:

$$E[X_t X_s] \geq E[X_s^2] \tag{12}$$

Notons qu'un processus gaussien centré $(X_t, t \geq 0)$ *est un peacock si et seulement si :*

$$t \longrightarrow E[X_t^2] \text{ est une fonction croissante} \tag{13}$$

et que (12) implique (13), en effet, si (12) est vérifiée, alors, pour tous $0 \leq s < t$:

$E[X_s^2] \leq E[X_s X_t] \leq E[X_s^2]^{\frac{1}{2}} E[X_t^2]^{\frac{1}{2}}$, *(d'aprés l'inégalité de cauchy schwartz) ce qui entraîne (13)*

Démonstration.

1. *Soit* $(X_t, t \geq 0)$ *un peacock fort gaussien centré. En prenant* $\phi(x) = x$ *dans (11), nous avons :*

$$E[X_s(X_t - X_s)] \geq 0 \text{ pour tout } 0 < s \leq t,$$

i.e

$$K(s,t) \geq K(s,s) \text{ pour tout } 0 < s \leq t.$$

2. *Réciproquement, si (12) est vérifiée, alors, pour tous* $0 < s \leq t$ *et toute fonction borélienne bornée croissante* $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} E[\phi(X_s)(X_t - X_s)] &= E[\phi(X_s)(E[X_t \;/\; X_s] - X_s)] \\ &= (\frac{K(s,t)}{K(s,s)} - 1)E(\phi(X_s)X_s) \geq 0 \text{ d'aprés lemme (II.18)} \end{aligned}$$

Exemple II.22 *Toute martingale est un peacock fort : En effet, si* $(M_t, t \geq 0)$ *est une martingale par rapport à une filtration* $(F_t, t \geq 0)$, *alors pour toute fonction boréllienne bornée* $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$E[\phi(M_s)(M_t - M_s)] = E[\phi(M_s)E[M_t \;/\; F_s] - M_s)] = 0$$

Pour toute v.a intégrable et centré X, *le processus* $(C_t = tX, t \geq 0)$ *est un peacock fort.*

∎

Définition II.23 *Un processus integrable* $(X_t, t \geq 0)$ *est appelé peacock trés fort si, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *tout* $0 \leq t_1 < ... < t_n < t_{n+1}$ *et tout* $\phi \in I_n$, *nous avons :*

$$E[\phi(X_{t_1}, ..., X_{t_n})(X_{t_{n+1}} - X_{t_n})] \geq 0 \qquad (14)$$

Remarque II.24

1. *Pour définir un peacock fort, nous n'avons utilisé que les martingales bidimentionnelles. Mais, pour définir un peacock trés fort, nous faisons intervenir toutes les martingales fini-dimensionnelles.*
2. *Une martingale est un peacock trés fort.*
3. *Tout peacock trés fort est un peacock fort. Mais la réciproque est fausse. Nous donnons deux exemple.*

(a) *Soient G_1 et G_2 deux v.a gaussiennes indépendantes et centrées telles que : $E[G_1^2] = E[G_2^2] = 1$. soient α et β deux constantes qui vérifient $1 + 2\alpha^2 \leq \beta$. On considère le vecteur gaussien défini par :*

$$X_1 = G_1 - \alpha G_2, \; X_2 = \beta G_1, \; X_3 = \beta G_1 + \alpha G_2.$$

*Alors, (X_1, X_2, X_3) est un peacock fort(d'aprés la proposition **(11)** qui ne vérifie pas (14) puisque :*

$$E[X_1(X_3 - X_2)] = -\alpha^2 E[G_1^2] < 0.$$

(b) *De même, si G_1 et G_2 sont deux v.a symétriques, identiquement distribuées et indépendantes telles que $E[G_i^2] = 1 (i = 1, 2)$, alors, pour tout $\beta \geq 3$, le vecteur(X_1, X_2, X_3) défini par :*

$$X_1 = G_1 - G_2, \; X_2 = \beta G_1, \; X_3 = \beta G_1 + G_2.$$

est un peacock fort pour lequel la condition (14) n' est pas vérifiée.

Démonstration. Pour le point b comme G_1 et G_2 sont indépendantes et centré, nous avons :

$$E[1_{\{X_2 \geq a\}}(X_3 - X_2)] = E[1_{\{\beta G_1 \geq a\}} G_2] = 0$$

En noutre,

$$\begin{aligned}
E[1_{\{X_1\geq a\}}(X_2-X_1)] &= E[1_{\{G_1-G_2\geq a\}}((\beta-1)G_1+G_2)] \\
&= (\beta-1)E[1_{\{G_1-G_2\geq a\}}G_1]+E[1_{\{G_1-G_2\geq a\}}G_2] \\
&= \underbrace{(\beta-1)E[1_{\{G_2-G_1\geq a\}}G_2]}_{\text{en prenant } G_1 \text{ et } G_2} + E[1_{\{G_1-G_2\geq a\}}G_2] \\
&= \underbrace{(\beta-2)E[1_{\{G_2-G_1\geq a\}}G_2]}_{(\geq\ a \text{ d'aprés le lemme (II.18) puisque } \beta>2)} + E[1_{\{|G_1-G_2|\geq a\}}G_2] \\
&\geq 2E[1_{\{|G_1-G_2\geq a|\}}G_2]=0
\end{aligned}$$

Donc (X_1, X_2, X_3) est un peacock fort. Mais, (X_1, X_2, X_3) n'est pas un peacock trés fort comme le montre l'inégalité ci-dessous :

$$E[X_1(X_3-X_2)] = -E[G_1^2] < 0$$

Nous donnons quelques exemples de peacocks trés forts. ∎

Exemple II.25 *Tout les peacocks fort de l'exemple (II.22)satisfont (14).*

Bibliographie

1. Dounyazed Fatiha MALTI. Les processus croissants dans l'ordre convexe. 2011.
2. Christophe Profeta. *Pénalisations, pseudo-inverses et peacocks dans un cadre markovien*. PhD thesis, Nancy 1, 2010.
3. Antoine Marie Bogso. *Étude de peacocks sous l'hypothèse de monotonie conditionnelle et de positivité totale*. PhD thesis, Université de Lorraine, 2012.
4. Asma Meziou. *Decomposition Max-Plus des surmartingales et ordre convexe. Application aux options Americaines et a l'assurance de portefeuille*. PhD thesis, Ecole Polytechnique X, 2006.
5. Benchaabane Abbes. *Contrôle Optimal Stochastique avec Saut Application à la Finance : Problème d'investissement à volatilité stochastique*. PhD thesis, Université Badji Moktar de Annaba, 2013.