

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

M/SAO. 133

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Probabilités et Applications**

Par :

BOUTALEB Hayat et GHELLAB Bouchra



Intitulé

Outil Statistique pour la Prévision

Dirigé par : EZZEBSA Abdelali

Devant le jury

PRESIDENT
RAPPORTEUR
EXAMINATEUR

Dr. KERBOUA.M
Dr. EZZEBSA.A
Dr. BAKHOUCHE.S

MCA
MCA
MCA

Univ-Guelma
Univ-Guelma
Univ-Guelma

Session Juin 2014



Remerciements

Au nom de Dieu, Clément et Miséricordieux

" Lis, au nom de ton Seigneur qui a créé tout, Qui a créé l'homme de sang coagulé ? Lis, car ton Seigneur est plus généreux, Il t'a appris l'usage de la plume,

Il apprit à l'homme, ce que l'homme ne savait pas. "

Le Coran, Sourate 106,(1-5) On tiens à exprimer

notre profonde reconnaissance à notre encadreur du mémoire le

*Docteur **EZZEBSA ABDELALI,***

qui grâce à sa disponibilité, son soutien, ses conseils et ses

encouragements nous a permis de

mener à bien ce travail.

On adresse l'expression de notre gratitude à notre enseignant le

*docteur : **KERBOUA MOURAD,***

qui nous fait l'honneur de présider ce jury et d'examiner notre

mémoire. Ainsi qu'au docteur :

***BAKMOUCHE.S,** qui a accepté d'examiner notre mémoire et*

faire partie de ce jury.



Dédicace

Je dédie ce mémoire

*À mes parents, mon cher père et ma douce mère , vous êtes
l'exemple de
Dévouement.*

*Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon
éducation et mon bien être.*

*À Mon cher marie FAKHER EL DDINE, pour son soutien aux
moments difficiles de mon travail surtout pour sa patience*

*A mes frères: Farouk, Mohamed Lamine, Adel, Fouzi
et leurs epoux et enfants*

*A mon fils **Abd el djafil***

A mes charmantes amis : HIBA, ZINA, SAMIHA, AMINA

A mon camarade dans cet travaille : BOUCHRA.

*Sans oublier bien sûre mes cousines, mes amies et tous qui m'ont
aidé et m'ont donné le soutien moral durant mes moments de
faiblesse.*

Hayat...





Dédicace

Je dédie ce fruit de fin d'étude à la science.

À mes très chères parents :

À toi maman, la fleur de ma vie et le symbole de tendresse.

À toi papa, qui nous a toujours encouragés et insistés à terminé

Mon étude.

À mes chères sœurs : MALAK et AMINA.

Je vous souhaite une belle vie plein d'amour et de santé.

À mon seul frère : SAMIR,

À tous les enseignements des mathématiques.

*À mes charmantes amis : RIMA, MERIEM, SAMIRA, ZINA ,
SOUMIA, LOUIZA, SAMIA*

À mon camarade dans cet travaille : HAYAT.

À toute ma famille grand et petit.

À tous ceux qui j'aime et qui m'aiment.

BOCHRA



Table des matières

Introduction	iii
1 Processus stochastique et stationnarité	1
1.1 Notions de base	1
1.1.1 Séries chronologiques (temporelles)	1
1.1.2 Méthode graphique	2
1.1.3 Séries financières	3
1.1.4 Processus bruit blanc	4
1.1.5 Théorème de Wold	5
1.1.6 Opérateurs	5
1.2 Processus aléatoires	6
1.2.1 Processus stochastique	6
1.2.2 Processus linéaire	7
1.2.3 Processus stationnaires	7
1.2.4 Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation	8
1.2.5 La fonction d'autocorrélation partielle	10
1.3 Classe des modèle <i>ARMA</i>	11
1.3.1 Le processus auto-régressifs <i>AR(p)</i>	11
1.3.2 Le processus en moyennes mobiles <i>MA(q)</i>	13
1.3.3 Les processus <i>ARMA</i> stationnaires linéaires	15
1.4 Extension des modèles <i>ARMA</i>	17
1.4.1 Processus autorégressif moyenne mobile intégré d'ordre <i>ARIMA(p, d, q)</i>	17
1.4.2 Modèles saisonniers mixtes <i>SARIMA</i>	19
2 Processus conditionnellement hétéroscédastique	22
2.1 Processus <i>ARCH(p)</i>	23
2.1.1 Processus <i>ARCH(1)</i>	24

Introduction

Depuis toujours, l'Homme a voulu prédire l'avenir, que ce soit pour prendre de meilleures décisions ou simplement pour satisfaire sa curiosité. Les premières tentatives étaient basées sur l'astrologie ou autres superstitions. Toutefois, ces méthodes de prédiction ne peuvent pas être considérées comme rigoureuses aux yeux de la science. Heureusement, la science a énormément évolué au cours des dernières décennies ; les méthodes de prévision qui en découlent ne font pas exception.

Une méthode de prévision très populaire est basée sur l'étude rigoureuse de séries chronologiques. Cette approche permet de prédire, par exemple, de nombreux phénomènes naturels et financiers. Une série chronologique est constituée de valeurs observées à des intervalles de temps réguliers. Par exemple, les débits annuels sur un cours d'eau ou encore les valeurs mensuelles de titres boursiers sont des séries chronologiques.

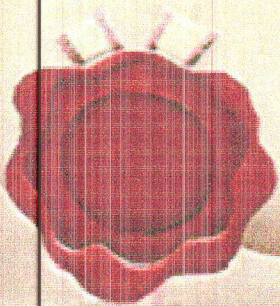
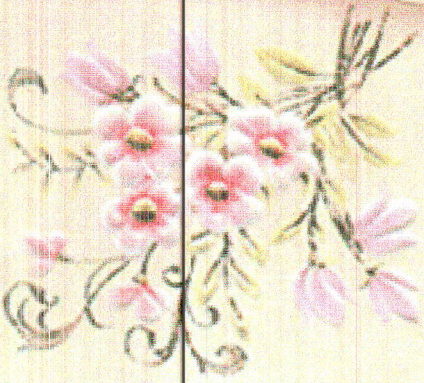
À la base, l'étude formelle des séries chronologiques consiste à trouver un modèle mathématique qui explique le mieux possible les données observées. À partir de ce modèle, il est possible de faire de la prévision. Cependant, la justesse des prévisions dépend fortement de la qualité du modèle choisi. Il est donc primordial de trouver des modèles qui reflètent le mieux possible la réalité afin de minimiser les erreurs de prévision.

L'objet de ce mémoire est de fournir les outils et méthodes nécessaires à l'étude de la dynamique des séries temporelles économiques et financières.

CHAPITRE 0. INTRODUCTION

Notre travail est composé de trois chapitres, le premier chapitre commence par une présentation détaillée et progressive des bases de l'économétrie des séries temporelles, en rappelant d'abord différents concepts de séries chronologiques (**fonction autocovariance, d'autocorrélation, stationnarité,...**), puis en dérivant les processus de type *ARMA* (**Autorégressifs et moyenne mobile**), Le deuxième chapitre consacré aux modèles *ARCH* et *GARCH* (**Autoregressive conditionnellement hétéroscédastique**), et dans le troisième chapitre on va introduire un outil essentiel de prévision "**lissage exponentiel**" et on va terminer avec une annexe sur quelques commandes et quelques exemples simulés avec le logiciel statistique "**R**".

Chavira



Chapitre 1

Processus stochastique et stationnarité

L'analyse des séries temporelles est très différente de l'analyse statistique habituelle car l'ordre des observations revêt une importance primordiale. Une série temporelle est définie comme une suite d'observations indexées par le temps. On peut prendre comme exemple en économie ou en finance une série : de prix, de taux d'intérêt, etc. Mais on peut trouver bien d'autres exemples dans les autres disciplines.

1.1 Notions de base

1.1.1 Séries chronologiques (temporelles)

Une série temporelle (ou encore une série chronologique) est une suite finie (X_1, \dots, X_n) de données indexé par le temps. L'indice temps peut être selon les cas la minute, l'heure, le jour, l'année etc... . Le nombre n est appelé la longueur de la série. Il est la plupart du temps bien utile de représenter la série temporelle sur un graphe construit de la manière suivant : en abscisse le temps, en ordonnée la valeur de l'observation à chaque instant. Pour des questions de lisibilité, les points ainsi obtenus sont reliés par des segments de droite. Le graphe apparaît donc comme une ligne brisée.

1.1.2 Méthode graphique

La représentation graphique de la chronique permet de détecter la présence d'une tendance, d'un cycle, d'une saisonnalité ou d'une modification de structure (rupture).

Aussi, l'étude de la fonction d'autocorrélation (corrélogramme) qui consiste à analyser le corrélogramme simple permet de détecter si :

- ▶ Des pics marquants apparaissent aux retards $S, 2S, 3S, \dots$, ce qui fait penser de la présence d'une saisonnalité de période S .
- ▶ La fonction d'autocorrélation ne décroît pas d'une manière rapide vers zéro, ce qui fait croire à la présence d'une tendance.

Exemple 1 : Taille de la population d'algerie de 2008 à 2014 (Figure 1).

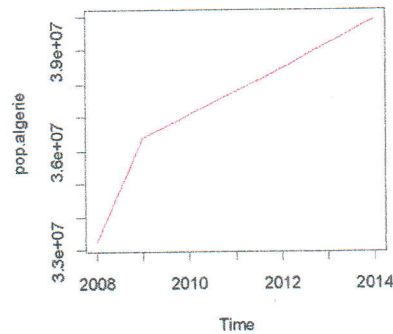


Figure (1)

Exemple 2 : Nombre des morts accidentelles aux Guelma-Algerie de 1995 à 2013 (Figure 2).

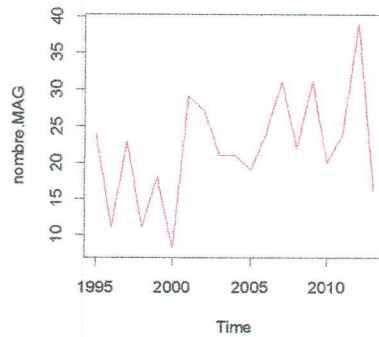


Figure (2)

1.1.3 Séries financières

La modélisation des séries financières est un problème complexe. Cette complexité n'est pas seulement due à la grande variété des séries utilisées (prix d'action, taux d'intérêt, taux de change, etc...), à l'importance de la fréquence d'observation (seconde, minute, heure, jour, etc) ou à la disponibilité d'échantillons de très grande taille. Elle tient surtout à l'existence de régularités statistiques "**faits stylisés**" communes à un très grand nombre de séries financières et difficiles à reproduire artificiellement à partir des modèles stochastiques.

Les principales propriétés des séries financières

Les séries de prix d'actif et de rendements présentent généralement un certain nombre de propriétés similaires suivant leur périodicité. Soit p_t le prix d'un actif à la date t et r_t le logarithme du rendement correspondant :

$$r_t = \log(p_t) - \log(p_{t-1}) = \log(1 + R_t) \quad (1.1)$$

où $R_t = \left(\frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} \right)$ désigne la variation relative des prix.

Propriété 1.1 : (Stationnarité)

Les processus stochastiques p_t associés aux prix d'actif sont généralement non stationnaires au sens de la stationnarité du second ordre, tandis que les processus associés aux rendements sont compatibles avec la propriété de stationnarité au second ordre.

Propriété 1.2 : (Saisonnalité)

Les returns présentent de nombreux phénomènes de saisonnalité (effets week end, effet janvier etc...).

Propriété 1.3 : (Autocorrélations des carrés des variations de prix)

La série r_t^2 associée aux carrés des rendements associée au carré des rendements présente généralement de fortes autocorrélations tandis que les autocorrélations de la série r_t sont souvent très faibles (hypothèse de bruit blanc).

1.1.4 Processus bruit blanc

Plus simple processus stationnaire en analyse des séries temporelles est appelé processus bruit blanc $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ qui est une séquence de variables aléatoires non corrélées de moyenne nulle et de variance constante σ^2

Définition 1.1.1 : $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un **bruit blanc fort** si :

- ▶ $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées (**i.i.d**).
- ▶ $\forall t \in \mathbb{Z} : \mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$ et $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$.

Définition 1.1.2 : $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un **bruit blanc faible** si :

- ▶ $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires réelles identiquement distribuées,
- ▶ $\forall (t, s) \in \mathbb{Z}^2, t \neq s : Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$,
- ▶ $\forall t \in \mathbb{Z} : \mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$ et $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$.

Exemple 3 : Simulation d'un processus bruit blanc dans la (Figure 3).

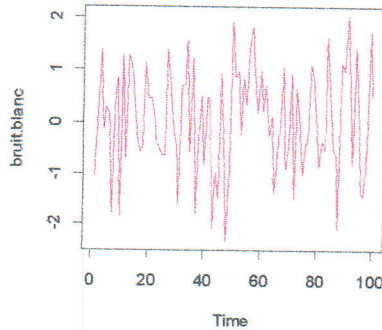


Figure (3)

1.1.5 Théorème de Wold

Un processus stochastique non paramétrique se définit à partir de la distribution conjointe des observations ou de ses premiers moments. Un processus stochastique paramétrique se définit au contraire à partir d'un mécanisme de génération qui est indexé par des paramètres. Il est possible de caractériser ce mécanisme de manière très générale au moyen du théorème de **Wold(1954)**. Ce théorème montre que tout processus stationnaire peut être représenté de manière unique par la somme de deux composantes indépendantes, une composante régulière parfaitement prévisible parfois appelée déterministe et une composante stochastique.

Théorème 1.1.1 : Soit (Y_t) un processus stationnaire au seconde ordre, alors (Y_t) peut s'écrire :

$$Y_t = c_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \varepsilon_{t-i} \quad (1.2)$$

où ε_t et un bruit blanc

1.1.6 Opérateurs

Opérateurs retard

L'opérateur retard est un opérateur linéaire noté B , tel que

$$BX_t = X_{t-1} \quad (1.3)$$

Propriétés 1.4

- ▶ $B^j X_t = X_{t-j}$, $j \in \mathbb{Z}$ en particulier on a $B^0 X_t = X_t$
- ▶ Si $X_t = C$; $\forall t \in \mathbb{Z}$, avec $C \in \mathbb{R}$: $B^j X_t = B^j C = C \forall j \in \mathbb{Z}$
- ▶ $B^i (B^j X_t) = B^{i+j} X_t = X_{t-i-j}$, $\forall i, j \in \mathbb{Z}$
- ▶ $B^{-i} X_t = X_{t+i} \forall t, i \in \mathbb{Z}$
- ▶ $(B^i + B^j) X_t = X_{t-i} + X_{t-j}$, $\forall i, j \in \mathbb{Z}$

Opérateur de différence

On note ∇ l'opérateur différence :

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} \quad (1.4)$$

Puissances de B et de ∇ :

$$B^k X_t = X_{t-k} \quad (1.5)$$

$$\nabla^2 X_t = \nabla(\nabla X_t) = \nabla(X_t - X_{t-1}) = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}, \text{ etc...} \quad (1.6)$$

Propriété 1.5

Si m_t est un polynôme d'ordre k , $\nabla^k m_t$ est une constante. On note ∇^k l'opérateur :

$$\nabla_k X_t = X_t - X_{t-k} \quad (1.7)$$

Si X_t a une composante saisonnière de période d :

$$\begin{aligned} \nabla_d X_t &= X_t - X_{t-d} = (m_t + s_t + Y_t) - (m_{t-d} + s_{t-d} + Y_{t-d}) \\ &= m_t - m_{t-d} + Y_t - Y_{t-d} \end{aligned} \quad (1.8)$$

1.2 Processus aléatoires

1.2.1 Processus stochastique

Définition 1.2.1 : Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé. Un processus stochastique X est une famille de variables aléatoires réelles $(X_t)_{t \in \Theta}$, où $\Theta \subset \mathbb{R}$ est appelé l'espace des temps. Si $\Theta \subset \mathbb{Z}$, le processus est dit à temps discret. Si Θ est un intervalle de \mathbb{R} , le processus est dit à temps continu.

Remarque 1.2.1 : La loi du processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est caractérisée par les lois de toutes les sous-familles finies X_{t_1}, \dots, X_{t_n} , $n \in \mathbb{N}^*$, $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$.

Une série chronologique est l'observation à T instants d'un processus stochastique.

1.2.2 Processus linéaire

Définition 1.2.2 : $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus linéaire (resp. linéaire général) de moyenne μ s'il peut être écrit sous la forme :

$$X_t = \mu + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \theta_i \varepsilon_{t-i}, \quad (1.9)$$

où ε_t est un bruit blanc fort (resp. faible) de variance σ^2 et où la suite des coefficients θ_i est supposée tel que :

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \theta_i^2 < +\infty \quad (1.10)$$

1.2.3 Processus stationnaires

La notion de stationnarité joue un rôle central dans la théorie des processus aléatoires, et particulièrement en analyse des séries chronologiques. Dans plusieurs problèmes du monde réel, on rencontre des processus aléatoires qui évoluent dans un état d'équilibre statistique, dans le sens où les propriétés probabilistes et statistiques des processus ne changent pas dans le temps, de tels processus sont dits stationnaires. On commence par donner la définition d'un processus stationnaire au sens strict, et ensuite celle de la stationnarité du second ordre.

Processus strictement stationnaire (stationnarité forte)

Grossièrement, un processus aléatoire est dit strictement stationnaire si sa loi de probabilité est invariante par translation dans le temps. Mathématiquement, le concept de stationnarité stricte est donné par la définition suivante :

Définition 1.2.3 : Le processus (X_t) est dit strictement stationnaire si les vecteurs $(X_1, \dots, X_k)^t$ et $(X_{1+h}, \dots, X_{k+h})^t$ ont même loi jointe, pour tout entier k et tout entier relatif h . La stationnarité de ces deux moments peut donc être suffisante pour expliquer la stationnarité du processus. Pour cette raison, on a besoin d'un concept de stationnarité moins fort et qui peut être rencontré dans la pratique.

Processus faiblement stationnaire (du second ordre)

Considérons un processus stochastique de second d'ordre $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

Définition 1.2.4 : Un processus X_t est stationnaire au second ordre si :

- ▶ $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}(X_t) = m$ (de moyenne constante).
- ▶ $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}(X_t^2) < \infty$
- ▶ $Cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h) \quad \forall t, h \in \mathbb{Z}$

Remarque 1.2.2 : La fonction $\gamma(h)$ est dite fonction d'autocovariance du processus.

1 ▶ La fonction d'autocovariance d'un processus faiblement stationnaire dépend seulement de la différence des instants

2 ▶ Dans la classe des processus du second ordre, il est clair que la stationnarité stricte implique la stationnarité faible (la réciproque n'est pas vraie, sauf pour les processus dits Gaussiens).

3 ▶ Un processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit Gaussien si toute sous-famille finie du processus constitue un vecteur Gaussien.

1.2.4 Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation.

Dans un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, la variable aléatoire au temps t dépend généralement, d'une certaine façon, des observations précédentes $X_s, s < t$. Une manière de comprendre les liens d'interdépendance entre les termes d'une telle série consiste à considérer les fonctions d'autocovariances et d'autocorrélations. Ces fonctions mesurent, respectivement, la covariance et la corrélation entre les termes d'une séries chronologique.

Définition 1.2.5 : **Fonction d'autocovariance**

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stationnaire. On appelle fonction d'autocovariance la fonction γ définie de \mathbb{Z} dans \mathbb{R} par :

$$\forall h, t \in \mathbb{Z}, \gamma(h) = Cov(X_t, X_{t+h}). \tag{1.11}$$

Le graphe de cette fonction est appelé **variogramme**.

Propriétés 1.6

La fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire vérifie

- ▶ $\forall h \in \mathbb{Z}, \gamma(-h) = \gamma(h)$: elle est paire;
- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (a_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall (t_i) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \gamma(t_i - t_j) > 0$: elle est de type positif;
- ▶ $\gamma(0) = \text{Var}(X_t)$;
- ▶ $|\gamma(h)| \leq \gamma(0), \forall h$

Estimation de la fonction d'autocovariance

Pour construire un estimateur de la fonction d'autocovariance, rappelons que si $(X_1, Y_1), \dots, (X_T, Y_T)$ sont des observations bivariées (**i.i.d**). De variance finie, un estimateur de la covariance entre X et Y est donné par :

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y}). \quad (1.12)$$

On estime donc naturellement la fonction d'autocovariance par :

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-|h|} (X_t - \bar{X})(X_{t+|h|} - \bar{X}) \quad (1.13)$$

Il est appelé l'autocovariance empirique.

Propriétés 1.7 : On peut montrer que

- ▶ $\hat{\gamma}(h)$ est un estimateur biaisé de $\gamma(h)$.
- ▶ Sous certaines conditions, on peut montrer que $\hat{\gamma}(h)$ est asymptotiquement non biaisé.
- ▶ Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stationnaire gaussien et si la série de terme général $\gamma(h)$ est absolument convergente, alors $\hat{\gamma}(h)$ converge en moyenne quadratique vers $\gamma(h)$.

Définition 1.2.6 : Fonction d'autocorrélation

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stationnaire. On appelle fonction d'autocorrélation la fonction ρ définie de \mathbb{Z} dans \mathbb{R} par : $\forall h \in \mathbb{Z}$,

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \quad (1.14)$$

Le graphe de cette fonction est appelé **corrélogramme**.

Propriétés 1.8

La fonction d'autocorrélation d'un processus stationnaire vérifie

- ▶ $\forall h \in \mathbb{Z}, \rho(-h) = \rho(h)$ elle est paire
- ▶ $\rho(0) = 1$
- ▶ $|\rho(h)| \leq 1, \forall h.$

Estimation de la fonction d'autocorrélation

On estime ensuite naturellement la fonction d'autocorrélation à partir de l'autocovariance empirique de la façon suivante :

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)} = \frac{\sum_{t=1}^{T-|h|} (X_t - \bar{X})(X_{t+|h|} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2} \quad (1.15)$$

Il est appelé l'autocorrélation empirique.

Propriétés 1.9

- ▶ $\hat{\gamma}(h)$ est de type positif.
- ▶ $\forall h \in \mathbb{Z}, -1 \leq \hat{\gamma}(h) \leq 1.$

1.2.5 La fonction d'autocorrélation partielle

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stationnaire. Définissons tout d'abord la régression affine de X_t sur $(X_{t-1}, \dots, X_{t-h})$ notée $X_{t,h}^*$. On a

$$X_t = X_{t,h}^* + R_{t,h} = \lambda_{0,h} + \sum_{s=1}^h \lambda_{s,h} X_{t-s} + R_{t,h} \quad (1.16)$$

où $R_{t,h}$ est une variable aléatoire non corrélée avec X_{t-1}, \dots, X_{t-h} . La fonction d'autocorrélation partielle τ est définie par

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \tau(h) = \lambda_{h,h} \quad (1.17)$$

le graphe de cette fonction est appelé **corrélogramme partiel**.

Propriétés 1.10 : L'autocorrélation partielle d'ordre h $\tau(h)$ représente le coefficient de corrélation linéaire entre

- ▶ le résidu $X_t - X_{t,h-1}^*$ de la régression de X_t par $X_{t-h+1}, \dots, X_{t-1}$ et
- ▶ le résidu $X_{t-h} - X_{t-h,h-1}^*$ de la régression de X_{t-h} par $X_{t-h+1}, \dots, X_{t-1}$.

1.3 Classe des modèle ARMA

1.3.1 Le processus auto-régressifs $AR(p)$

Le modèle que présent le processus auto-régressif, construits à partir de l'idée que l'observation au temps t s'explique linéairement par les observations précédentes.

Définition 1.3.1 : On dit que (X_t) est un processus autorégressif (Auto-Regressive) d'ordre p (centré) s'il s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \varepsilon_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} \quad (1.18)$$

où $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ sont des réels fixés et $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2 . On notera parfois :

$$\varepsilon_t = \sum_{i=0}^p \phi_i X_{t-i}. \quad (1.19)$$

Posons $\Phi(B) = I - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$, on peut écrire :

$$\varepsilon_t = \Phi(B)X_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (1.20)$$

1 ► En prenant l'espérance de et en utilisant la stationnarité du processus, on obtient que l'espérance μ du processus vérifie $\mu(1 - \sum_{i=1}^p \phi_i) = 0$. donc lorsque 1 n'est pas racine de Φ , on a nécessairement $\mu = 0$

2 ► Considérons que des processus $AR(p)$ centrés. Un processus $AR(p)$ non centré serait défini par :

$$X_t = \mu + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i}. \quad (1.21)$$

CHAPITRE 1. PROCESSUS STOCHASTIQUE ET STATIONNARITÉ

Exemple 4 : Le processus $Y_1 = 0,1X_{t-1} + 0,8X_{t-3}$ et un $AR(3)$ la réalisation de taille $T = 200$ de cette serie à la (Figure 4)

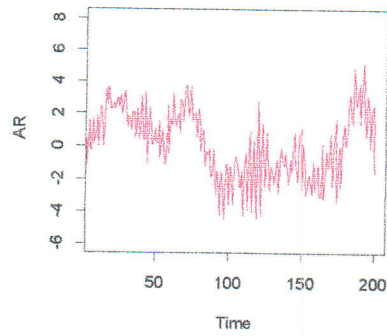


Figure (4)

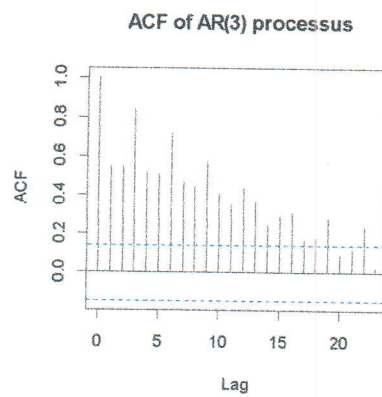


Figure (5)

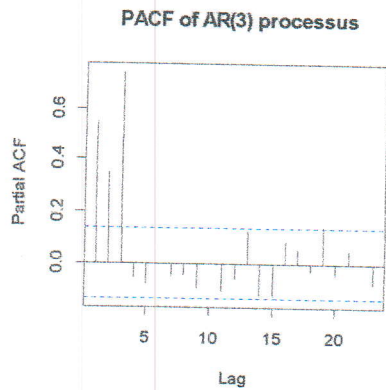


Figure (6)

1.3.2 Le processus en moyennes mobiles $MA(q)$

Ces processus forment une classe flexible de modèles pour de nombreux phénomènes observés. Ils sont construits à partir de l'idée que l'observation au temps t s'explique linéairement par les observations d'un bruit blanc ; ils sont donc définis par la relation

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (1.22)$$

où $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ sont des réel fixés et $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2 .

Définition 1.3.2 : On appelle moyenne mobile (Moving Average) d'ordre q un processus de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (1.23)$$

où les ε_t pour $t - q \leq j \leq t$ sont des bruits blancs centrés de variance σ^2 . On notera parfois

$$X_t = \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad (1.24)$$

en imposant $\theta_0 = 1$, donc $\Theta(B) = I - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$, on peut écrire :

$$X_t = \Theta(B)\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (1.25)$$

Remarque 1.3.1 : Notons immédiatement que :

- 1 ► Un processus à moyenne mobile est défini de manière explicite.
- 2 ► Un processus à moyenne mobile est défini de manière explicite.
- 3 ► Un processus à moyenne mobile est automatiquement centré et stationnaire.
- 4 ► Un processus à moyenne mobile est par définition purement innovant et causal. Mais attention son bruit blanc innovant n'est pas nécessairement égal à ε .

Exemple 5 : Le processus $X = 6 + \varepsilon_{t-1} + 0,7\varepsilon_{t-3}$ est un processus $MA(3)$ de moyenne $\mu = 6$. la réalisation de taille $T = 100$ de cette série est présentée à la (Figure 7).

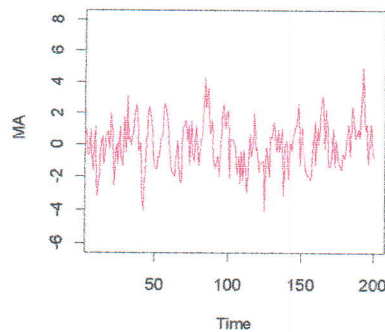


Figure (7)

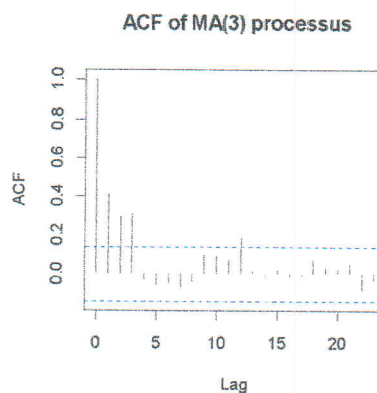


Figure (8)

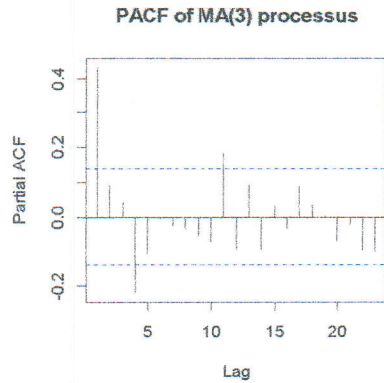


Figure (9)

1.3.3 Les processus ARMA stationnaires linéaires

Les modèles ARMA permettent de représenter un grand nombre de processus aléatoires stationnaires. Et cette classe plus générale de modèles définit des processus sous la forme d'une récurrence auto-régressive avec un second membre de type moyenne mobile.

Définition 1.3.3 : On dit qu'un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus ARMA (AutoRegressive Moving Average) d'ordre (p, q) , noté ARMA (p, q) , si :

- ▶ $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire.
- ▶ il existe $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p) \in \mathbb{R}^p$ avec $\phi_p \neq 0$ et $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q) \in \mathbb{R}^q$ avec $\theta_q \neq 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$X_t - \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}. \quad (1.26)$$

On utilise généralement la notation suivante :

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t \quad (1.27)$$

où $\Phi(B) = I - \sum_{i=1}^p \phi_i B_i$ et $\Theta(B) = I + \sum_{i=1}^q \theta_i B_i$.

- ▶ Un procesus AR (p) est un processus ARMA $(p, 0)$; un procesus MA (q) est un processus ARMA $(0, q)$.

CHAPITRE 1. PROCESSUS STOCHASTIQUE ET STATIONNARITÉ

► La stationnarité d'un $ARMA(p, q)$ est assurée lorsque toutes les racines du polynôme $A(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$ sont de module strictement supérieur à 1. Ce polynôme forme avec $B(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$ les deux polynômes caractéristiques du processus. On supposera également que les polynômes A et B n'ont pas de racine commune, afin de s'assurer qu'il n'y a pas de représentation plus courte.

Exemple 6 : Le processus $Z = 0,5Z_{t-1} + 0,2Z_{t-2} + \varepsilon_t - 0,5\varepsilon_{t-1}$ est un processus $ARMA(2, 1)$ est sa réalisation présenté dans la (Figure 10)

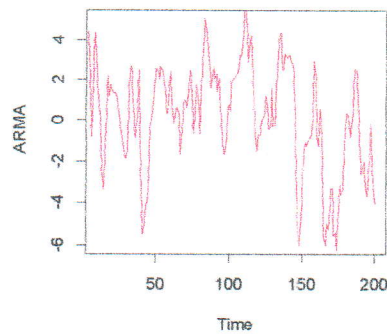


Figure (10)

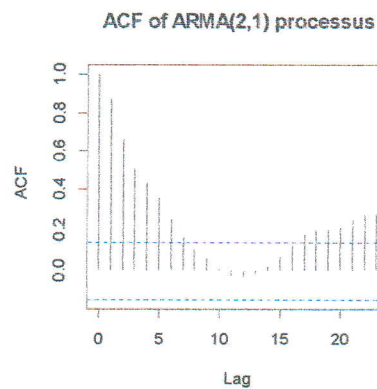


Figure (11)

1.4. EXTENSION DES MODÈLES ARMA

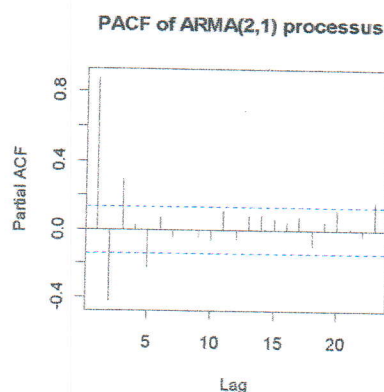


Figure (12)

1.4 Extension des modèles ARMA

L'objectif de cette extension est de tenir compte des effets (tendance, saisonnalité) dans la modélisation de la chronique, sans avoir recours aux méthodes exposées ci-dessus (pour rendre la série stationnaire).

1.4.1 Processus autorégressif moyenne mobile intégré d'ordre ARIMA(p, d, q)

Ce sont des modèles ARMA intégrés notés ARIMA. Ils sont issus des séries stationnaires par l'application du filtre aux différences et ceci, bien entendu dans le cas des processus DS détectés par le test de Dicky-Fuller.

Définition 1.4.1 : Un processus *intégré* est un processus qui peut être rendu stationnaire par différenciation. Si un processus stochastique doit être différencié d fois pour atteindre la stationnarité, il est dit être intégré d'ordre d ou $I(d)$; les processus stationnaires sont $I(0)$.

Remarque 1.4.1 : Les modèles intégrés sont très présents dans les séries économiques et financières, notamment les séries d'indices boursiers, d'indice de production, d'indice de prix.

Définition 1.4.2 : Pour d entier tel que $d \geq 1$, le processus X_t est un ARIMA(p, d, q) si le processus $Y_t = (1-B)^d X_t$ est un processus ARMA(p, q)

CHAPITRE 1. PROCESSUS STOCHASTIQUE ET STATIONNARITÉ

de moyenne nulle. On dit aussi que le processus $ARIMA(p, d, q)$ est un processus $ARMA(p, q)$ de moyenne nulle "intégré" d fois. X_t satisfait donc une équation de la forme :

$$\Phi^*(B)X_t \equiv \Phi(B)(1 - B)^d X_t = \Theta(B)Z_t \quad (1.28)$$

Φ et Θ sont des polynômes de degrés respectifs p et q , et B est l'opérateur retard :

$$B^k X_t = X_{t-k} \quad (1.29)$$

$$\begin{cases} \Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p \\ \Theta(z) = 1 - \theta_1 z - \dots - \theta_q z^q \end{cases}$$

Remarque 1.4.2 : 1 ► Si $\nabla^d X_t$ est un $ARMA(p, q)$ de moyenne non nulle μ , alors :

$$X_t = \mu \frac{t^d}{d} + \tilde{X}_t \quad (1.30)$$

où \tilde{X}_t est un $ARIMA(p, d, q)$.

2 ► les modèles intégrés sont très présents dans les séries économiques et financières, notamment les séries d'indices boursiers, d'indice de production, d'indice de prix.

Exemple 7 : Simulation d'un processus $ARIMA(1, 1, 0)$ est sa réalisation présentée dans la (Figure 13)

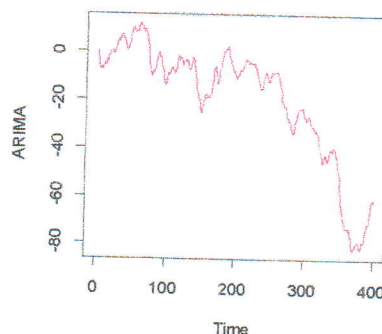


Figure (13)

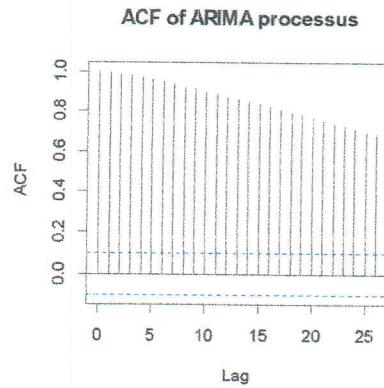


Figure (14)

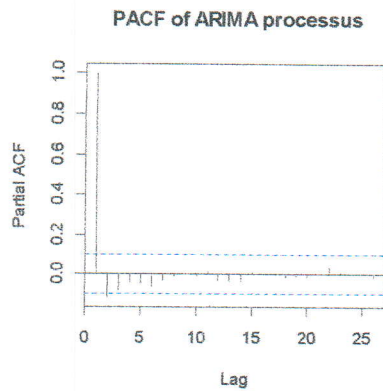


Figure (15)

1.4.2 Modèles saisonniers mixtes SARIMA

Les modèles *SARIMA* (*S* pour **Seasonal**) permettent de rendre compte des variations saisonnières dans la série considérée, ces variations pouvant elles-mêmes présenter un caractère aléatoire.

Ce sont des extensions des modèles *ARMA* et *ARIMA*. Ils représentent généralement des séries marquées par une saisonnalité comme c'est le plus souvent le cas pour des séries économiques voire financières. Ces séries peuvent mieux s'ajuster par des modèles saisonniers.

Définition 1.4.3 : Le processus X_t est appelé *SARIMA*(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ si le processus différentié :

$$Y_t = (1 - B)^d(1 - B^s)^D X_t \quad (1.31)$$

CHAPITRE 1. PROCESSUS STOCHASTIQUE ET STATIONNARITÉ

est un processus ARMA tel que :

$$\Phi(B)\Phi_s(B^s)Y_t = \Theta(B)\Theta_s(B^s)\varepsilon_t \quad (1.32)$$

Φ et Θ sont des polynômes de degrés respectifs p et q :

$$\begin{cases} \Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p \\ \Theta(z) = 1 - \theta_1 z - \dots - \theta_q z^q \end{cases}$$

Φ_s et Θ_s sont des polynômes de degrés respectifs P et Q :

$$\begin{cases} \Phi_s(z) = 1 - \phi_{s,1} z - \dots - \phi_{s,P} z^P \\ \Theta_s(z) = 1 - \theta_{s,1} z - \dots - \theta_{s,Q} z^Q \end{cases}$$

Exepmle 8 : La simulation de processus SARIMA(1, 1, 1) \times (1, 1, 1)₁₂ est présenté dans la (Figure 16)

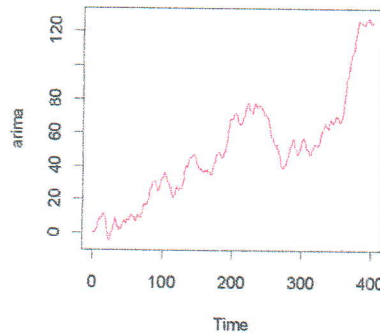


Figure (16)

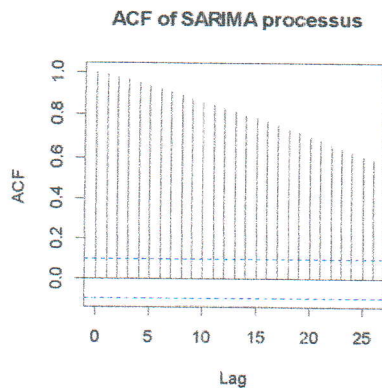


Figure (17)

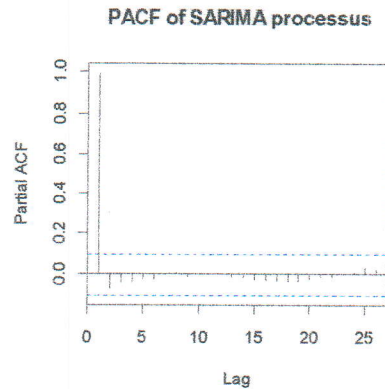


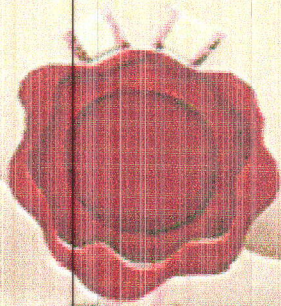
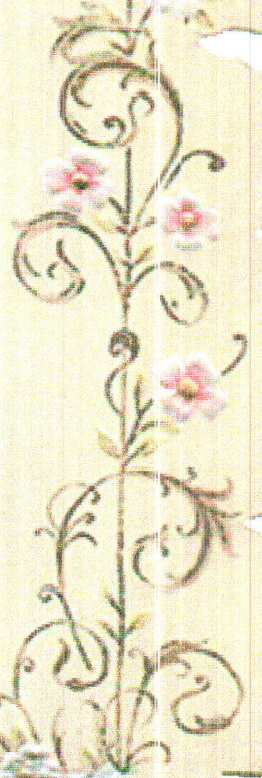
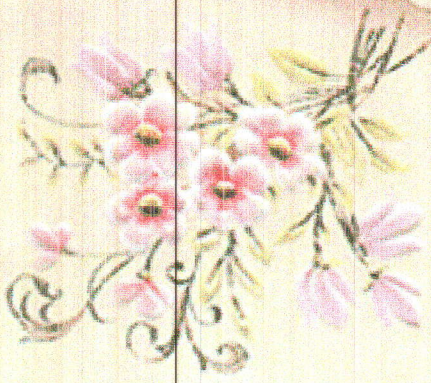
Figure (18)

Remarque 1.4.3 : Les séries précédemment étudiées étaient supposées stationnaires ou non-stationnaires mais étaient dans tous les cas “**homoscédastique**” c’est-à-dire avaient une variance constante dans le temps. Si besoin, tendances et saisonnalités étaient supprimées pour obtenir une série résiduelle stationnaire ou du moins une série à accroissements stationnaires. Néanmoins, toutes les séries résiduelles obtenues de la sorte ne sont pas nécessairement stationnaires. Il peut arriver que la variance d’un processus varie au cours du temps. Les modèles de type ARIMA qui supposent un comportement “**homoscédastique**” (variance constante), ne sont pas adaptés à ce type de série. Nous présentons dans 2^{ème} chapitre des modèles adaptés à ce type de série les processus ARCH (**Auto Regressive Conditionally Heteroscedastic**) introduits par **Engle(1982)**, ainsi que leur généralisation, les processus GARCH. Ces modèles permettent de prendre en compte une variation de la variance au cours du temps (et, plus largement, des moments d’ordres supérieurs ou égaux à deux). Dans la théorie des processus ARMA, la variance d’une série est (entre autres) déterminée par la variance du processus des innovations. Pour simplifier, considérons le bruit blanc gaussien

$$X_t = \varepsilon_t \quad (1.33)$$

où $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$. La variance de ce processus est la variance du processus des innovations (ε_t), c’est-à-dire σ^2 . Nous souhaitons à présent tenir compte d’un éventuel changement au cours du temps de la variance, provenant de l’évolution passée du processus (variance instantanée). C’est ce que permettent les modèles ARCH, dont l’idée est de déterminer la distribution de ε_t conditionnellement à toutes les valeurs passées X_{t-1}, X_{t-2}, \dots

Chantrelle



Chapitre 2

Processus conditionnellement hétéroscédastique

L'approche *ARCH/GARCH* a été proposée pour prendre en compte des variances conditionnelles dépendant du temps. Le principe général consiste donc à remettre en cause la propriété d'homoscédasticité que l'on retient généralement dans le cadre du modèle linéaire. La spécification hétéroscédastique conditionnelle ou *ARCH* a été initiée par **Engle (1982)** Pour caractériser la dynamique des seconds moments conditionnels que l'on retrouve dans la Plupart des séries financières. Elle a été par la suite généralisée par **Bollerslev (1986)** avec ce qu'on a appelé l'hétéroscédastique conditionnelle autorégressive généralisée ou *GARCH* c'est le modèle le plus populaire lorsqu'il s'agit d'estimer les variances conditionnelles. Les modèles *GARCH* ne se contentent pas seulement d'estimer des variances qui évoluent dans le temps, mais incorporent également les caractéristiques observés sur les séries financières.

Ergodicité : On dit que un processus aléatoire est ergodique au premier ordre si :

$$Y_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(u) du \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{mq} \mathbb{E}[X(t)] \quad (2.1)$$

Remarque 2.0.4 : 1 ► *Convergence en moyenne quadratique*

$$Y_T = \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{mq} \mathbb{E}[X(t)] = m \quad (2.2)$$

$$\iff$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(Y_T - m)^2] = 0$$

2 ► *Lien entre ergodicité et stationnarité*

Ergodicité \Rightarrow *Stationnarité*

Stationnarité \nRightarrow *Ergodicité*

2.1 Processus ARCH(p)

Les économistes utilisent fréquemment des modèles estimés à l'aide des séries temporelles où la variabilité des résidus est relativement faible pendant un certain nombre des périodes successives, puis beaucoup plus grande pour un certain nombre d'autres périodes et ainsi de suite, et ce généralement sans aucune raison apparente, ce phénomène est particulièrement fréquent et visible avec les séries boursières, des taux des changes étrangers, ou d'autre prix déterminés, sur les marchés financiers, ou la volatilité semble généralement varier dans le temps. Récemment, d'importants approfondissements ont vu le jour dans la littérature pour modéliser ce phénomène. L'article novateur d'Engle (1992), expose pour la première fois le concept d'hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive, ou ARCH. L'idée fondamentale est que la variance de l'aléa au temps t dépend de l'importance des aléas au carré des périodes passés, cependant il existe plusieurs façons de modéliser cette idée de base, la littérature correspondante est foisonnante.

Définition 2.1.1 : On dit que le processus (X_t) est un processus ARCH(p) s'il défini par une équation de la forme :

$$X_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t \text{ où } h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 \quad (2.3)$$

où (ε_t) est un bruit blanc gaussien, centré, de variance σ^2 , soit $\varepsilon_t \rightsquigarrow N(0, \sigma^2)$. Ceci peut aussi s'écrire :

$$X_t^2 = \varepsilon_t \left[\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 \right] \quad (2.4)$$

ce n'est plus le processus (X_t) que l'on cherche à modéliser, mais le processus (X_t^2)

Propriétés 2.1

$$\left\{ \begin{array}{l} \blacktriangleright \mathbb{E}(X_t) = 0 \\ \blacktriangleright \mathbb{E}(X_t/F_{t-1}) = 0 \\ \blacktriangleright \text{Var}(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i} \text{ si } \sum_{i=1}^p \alpha_i < 1 \\ \blacktriangleright \text{Var}(X_t/F_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p X_{t-p}^2 \\ \blacktriangleright \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = 0 \quad \forall h > 0 \\ \blacktriangleright \text{Cov}(X_t, X_{t+h}/F_{t-1}) \end{array} \right.$$

Remarque 2.1.1 : Un processus ARCH est conditionnellement hétéroscédastique (car la variance conditionnelle varie dans le temps) mais inconditionnellement homoscedastique (la variance non conditionnelle est invariante dans le temps)

2.1.1 Processus ARCH(1)

Le processus (X_t) est un processus ARCH(1) si :

$$X_t = \varepsilon_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2} \tag{2.5}$$

où (ε_t) est un bruit blanc gaussien $\varepsilon_t \rightsquigarrow N(0, \sigma^2)$. On notera généralement

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 \text{ et donc } X_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t \tag{2.6}$$

Dans le cas où (ε_t) est un bruit blanc fort, alors (ε_t) peut être vu comme une différence de martingale. Pour que le processus (X_t) soit stationnaire au second ordre, la variance marginale de (X_t) doit être constante. Or

$$V(X_t) = \alpha_0 + \alpha_1 V(X_{t-1}) \tag{2.7}$$

c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\alpha_1 < 1, \text{ et donc } V(X_t) = \alpha_0 / (1 - \alpha_1) \tag{2.8}$$

2.2 Processus GARCH(p, q)

Plusieurs variantes du modèle ARCH ont été proposées. Une variante particulièrement utile est le modèle ARCH généralisé ou GARCH suggéré par **Bollerslev (1986)**. Contrairement au modèle ARCH, la variance conditionnelle h_t dépend aussi bien de ses propres valeurs passées que des valeurs retardées de ε_t^2 . Dans la pratique un modèle GARCH avec très peu de paramètres ajuste souvent aussi bien qu'un modèle ARCH ayant de nombreux paramètres, en particulier, un modèle simple qui fonctionne souvent très bien est le modèle GARCH(1, 1).

Définition 2.2.1 : Un processus GARCH(p, q) [généralisée ARCH] est défini par :

$$X_t = \varepsilon_t h_t \text{ où } h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^2 \text{ et } \varepsilon_t \rightsquigarrow N(0, \sigma^2) \quad (2.9)$$

on peut noter tout d'abord que, sous cette forme, les coefficients p et q ne sont pas analogues à ceux des modèles ARMA en particulier, q correspond au caractère autorégressif du processus (h_t^2) alors :

$$\mathbb{E}(X_t/X_{t-1}) = 0 \text{ et } \mathbb{E}(X_t^2/X_{t-1}) = h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^2 \quad (2.10)$$

Propriété 2.2 : Si le processus GARCH(p, q) est stationnaire au second ordre, alors nécessairement

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1 \quad (2.11)$$

et dans ce cas où, la variance de(X_t) est :

$$V(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{j=1}^q \beta_j} \quad (2.12)$$

Dans le cas où (2.11) est saturée, i.e.

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j = 1 \quad (2.13)$$

On dira alors que le processus $GARCH(p, q)$ est intégré, et on parlera de processus $IGARCH(p, q)$. Cette dénomination peut se justifier par l'existence d'une racine unité dans la composante autorégressive de (2.3).

Remarque 2.2.1 : *Un processus $GARCH(p, 0)$ est un $ARCH(p)$*

Propriétés 2.3

$$\left\{ \begin{array}{l} \blacktriangleright \mathbb{E}(X_t) = 0 \\ \blacktriangleright \mathbb{E}(X_t/F_{t-1}) = 0 \\ \blacktriangleright Cov(X_t, X_{t+h}) = \sigma_h = 0 \quad \forall h > 0 \\ \blacktriangleright Cov(X_t, X_{t+h}/F_{t-1}) = 0 \end{array} \right.$$

Définition 2.2.2 : (*Processus $GARCH(p, q)$ fort*) : Soit ε_t une suite de variables *i.i.d* de loi normal. On dit que (X_t) est un processus $GARCH(p, q)$ au sens fort s'il vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} X_t = h_t \varepsilon_t \\ h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^2 \end{array} \right. \quad (2.14)$$

où les α_i et β_j sont des constantes positives et α_0 est une constante strictement positive. Il est clair qu'un processus $GARCH$ fort tel que σ_t^2 est mesurable par rapport à la tribu (σ_u) est un processus $GARCH$ au sens définition (2.9). La réciproque n'est cependant pas vraie.

2.3 Etude de la stationnarité

Modèle $GARCH(1, 1)$

Dans le cas où $p = q = 1$ le modèle (2.14) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} X_t = h_t \varepsilon_t \\ h_t^2 = \alpha_0 + \alpha X_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}^2 \end{array} \right. \quad (2.15)$$

avec $\alpha_0 \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0$. On pose $\alpha(z) = \alpha z^2 + \beta$

2.3. ETUDE DE LA STATIONNARITÉ

Théorème 2.3.1 : *(Stationnarité au sens stricte du modèle GARCH(1, 1))*

Si

$$-\infty \leq \gamma = \mathbb{E} \log(\alpha \varepsilon_t^2) < 0, \quad (2.16)$$

la série

$$\left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a(\varepsilon_{t-1}) \cdots a(\varepsilon_{t-i}) \right\} a_0 \quad (2.17)$$

converge presque sûrement et le processus (X_t) définie par $X_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t$ est l'unique solution strictement stationnaire du modèle (2.15). Cette solution est non anticipative et ergodique.

Si $\gamma \geq 0$ et $\alpha_0 > 0$, il n'existe pas de solution strictement stationnaire.

Théorème 2.3.2 : *(Stationnarité au seconde ordre du GARCH(1, 1))*

Supposons $\alpha_0 > 0$.

► Si $\alpha + \beta \geq 1$, il n'existe pas de solution GARCH(1, 1) non anticipative et stationnaire au seconde ordre.

► Si $\alpha + \beta < 1$, le processus (X_t) est stationnaire au seconde ordre. Plus précisément, (X_t) est un bruit blanc. De plus, il n'existe pas d'autre solution stationnaire au seconde ordre et non anticipative.

Théorème 2.3.3 : *(Stationnarité stricte du modèle GARCH(p, q))*

Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un processus GARCH(p, q) strictement stationnaire, solution du modèle (2.9) est que

$$\gamma < 0 \quad (2.18)$$

où γ est le plus grand exposant de **Lyapounov** de la suite $\{A_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Lorsqu'elle existe, la solution strictement stationnaire est unique, non anticipative et ergodique.

Théorème 2.3.4 : *(Stationnarité au 2nd ordre du modèle GARCH(p, q))*

S'il existe un processus GARCH(p, q), au sens de la définition (2.9), stationnaire au second-ordre et non anticipatif, et si $\alpha_0 > 0$, alors la relation (2.11) vérifie

2.4 Les processus *ARMA* – *GARCH*

Weiss (1984) eut l'idée d'appliquer la théorie des modèles *GARCH* aux erreurs d'une régression linéaire ou à un processus d'innovation d'un modèle *ARMA*. Dans le premier cas, le modèle consiste à considérer un modèle de régression linéaire avec erreurs *GARCH* :

$$Y_t = aX_t + \varepsilon_t \quad (2.18)$$

avec $\varepsilon_t \rightsquigarrow GARCH(p, q)$. Ce modèle est appelé modèle de régression avec erreurs *GARCH*. Dans le deuxième cas, le modèle consiste en un processus *ARMA* avec un processus d'innovations *GARCH* :

$$\phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t \quad (2.19)$$

avec $\varepsilon_t \rightsquigarrow GARCH(p, q)$. Ce modèle est appelé modèle *ARMA* – *GARCH*.

2.5 Identification

L'analyse de la structure de corrélations du carré des observations d'un processus *GARCH*(p, q) permet de déceler l'ordre du modèle. Nous allons considérer dans cette section le problème plus général du choix de l'ordre d'un modèle *ARMA* – *GARCH* et nous verrons comment développer des tests pour les identifier. Nous savons que l'outil de base permettant d'identifier l'ordre d'un modèle *ARMA* est la fonction d'autocorrélation ou d'autocorrélation partielle des observations X_t . Supposons donc qu'un modèle *ARMA* ait été identifié pour X_t et que ses paramètres sont estimés. Nous pouvons donc écrire formellement :

$$\hat{\Phi}(B)X_t = \hat{\Theta}(B)\varepsilon_t \quad (2.20)$$

La présence d'un modèle *GARCH* dans les résidus peut être la cause d'une mauvaise identification des paramètres si on n'en tient pas compte pour modéliser le processus d'innovations. En conséquence, le développement de méthodes pour tester si une composante *GARCH* est présente ou non dans le processus d'innovations est très important.

Une méthode pour identifier une telle dépendance non linéaire des résidus consiste à utiliser à nouveau le test **portmanteau** sur le carré des résidus

e_t^2 . La procédure pour tester s'il réside des corrélations sur e_t^2 est alors la suivante : Calcul de la moyenne de e_t^2 :

$$\widehat{V}_T = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T e_i^2 \quad (2.21)$$

Calcul de la fonction d'autocorrélation empirique de e_t^2

$$\widehat{\rho}_T^{e^2}(h) = \frac{\sum_{t=1}^{T-h} (e_{t+h}^2 - \widehat{V}_T) (e_t^2 - \widehat{V}_T)}{\sum_{t=1}^T (e_t^2 - \widehat{V}_T)^2} \quad (2.22)$$

Calcul de la statistique du test **portmanteau**

$$Q_T(e^2) = \sum_{t=1}^K (\widehat{\rho}_T^{e^2}(h))^2 \quad (2.23)$$

Sous l'hypothèse nulle selon laquelle les e_t^2 sont non corrélés, cette statistique est distribuée asymptotiquement selon une loi de χ_K^2

En cas de rejet de l'hypothèse nulle, il faudra donc envisager d'ajuster un modèle (G)ARCH au processus des innovations. Pour terminer, signalons que d'autres tests d'hétéroscédasticité du modèles peuvent être mis en place. Par exemple, **Engle (1982)** a présenté un test dont l'hypothèse nulle est une variance conditionnelle constante de ε_t contre l'alternative de variance conditionnelle ARCH(q). Une discussion de ces tests peut être trouvée dans **Mills (1999)**.

2.6 Modèles avec erreurs ARCH

Nous allons considérons un processus (X_t) dont la dynamique est régie par un processus de type AR(1) :

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.24)$$

2.6.2 Erreur ARCH(p)

On considère ici un modèle plus général, sur le processus (Y_t) , de la forme $Y_t = AX_t + \varepsilon_t$ où $|\phi| < 1$ et ε_t satisfait $\varepsilon_t = h_t \times \eta_t$ avec (η_t) bruit blanc et où (X_t) est un vecteur multivarié (modèle de régression classique : variables exogènes), ou composé de retards de Y_t (modèle ARMA)

$$h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 = \alpha_0 + A(L) \varepsilon_t^2 \quad (2.32)$$

en posant

$$A(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_p L^p \quad (2.33)$$

Nous allons tester ici l'hypothèse $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$, contre l'hypothèse alternative où il existe i tel que $\alpha_i \neq 0$. La procédure pour tester cette absence d'effet ARCH est fondée soit sur un test de **Fisher**, soit sur un test *LM* du multiplicateur de **Lagrange**. La mise en place de ces tests se fait de la façon suivante,

- ▶ calcul des **résidus/erreurs** du modèles de régression : $\hat{\varepsilon}_t$
- ▶ calcul du carré des erreurs $\hat{\varepsilon}_t^2$
- ▶ à p fixé, on effectue la régression linéaire de $\hat{\varepsilon}_t^2$ sur son passé $\hat{\varepsilon}_{t-1}^2, \dots, \hat{\varepsilon}_{t-p}^2$

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \hat{\varepsilon}_{t-i}^2 \quad (2.34)$$

- ▶ calcul de la statistique *LM*, $LM = nR^2$ où n est le nombre d'observations utilisées lors de la régression, et R^2 le coefficient de la régression. Si $LM > \chi^2(p)$, on rejette H_0 : l'erreur est alors modélisée par un processus ARCH(p)

2.7 Estimation des paramètres par maximum de vraisemblance

Pour comprendre cette approche, nous allons tout d'abord considérer le cas plus simple d'un processus ARCH pur pour X , sans régression ni composante ARMA. Nous étudierons ensuite le cas des processus GARCH, et enfin des modèles de régression avec erreurs GARCH et les modèles ARMA – GARCH

Rappel : La fonction du maximum de vraisemblance

Définition 2.7.1 : Soit X une variable aléatoire à valeur dans (\mathcal{X}, a) de loi P_θ . On note $f(x; \theta)$ la densité de P_μ et $f(x_1, \dots, x_n; \theta)$ la densité empirique correspondante. On appelle vraisemblance du paramètre θ l'application $\Theta \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall \theta \in \Theta \rightarrow L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad (2.35)$$

2.7.1 Estimation des paramètres ARCH

L'estimation des paramètres de modèles ARCH se base sur la maximisation de la fonction de vraisemblance. Par hypothèse, X_t est conditionnellement gaussien. La vraisemblance associée à X_t conditionnellement au passé F_{t-1} est donc :

$$L(x_t/F_{t-1}; \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h_t} \exp\left(\frac{-x_t^2}{2h_t^2}\right) \quad (2.36)$$

et dépend du vecteur de paramètres $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_p)^t$ à travers σ_t . La fonction de vraisemblance de (x_1, \dots, x_T) conditionnelle à F_0 est par conséquent

$$L(x_1, \dots, x_T; \alpha) = \prod_{t=1}^T L(x_t/F_{t-1}; \alpha) \quad (2.37)$$

L'estimateur est alors défini comme le vecteur $\hat{\alpha}_T = (\alpha_0, T, \dots, \alpha_p, T)^t$ qui maximise le logarithme de cette fonction de vraisemblance :

$$\hat{\alpha}_T = \arg \max \log L(x_1, \dots, x_T; \alpha) \quad (2.38)$$

2.7.2 Estimation des paramètres GARCH

Remarquons que l'estimation par maximum de vraisemblance d'un modèle ARMA est rendue plus difficile que celle d'un processus autorégressif pur, puisque le processus d'innovations n'est pas directement observé. Le même phénomène survient lorsqu'on tente de maximiser la vraisemblance d'un processus GARCH. En effet, la vraisemblance associée à X_t conditionnellement au passé F_{t-1} s'écrit :

$$L(x_t/F_{t-1}; \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h_t} \exp\left(\frac{-x_t^2}{2h_t^2}\right) \quad (2.39)$$

mais cette fois, la variance σ_t^2 dépend des valeurs passées de la variance conditionnelle $\sigma_{t-1}^2, \dots, \sigma_{t-q}^2$. Ces valeurs n'étant pas observées en pratique, la maximisation directe de la vraisemblance est rendue impossible.

En pratique, on estime successivement les valeurs de h_1^2, \dots, h_{t-1}^2 avant de calculer la vraisemblance. Ainsi, pour un vecteur $\alpha^0 = (\alpha_0^0, \dots, \alpha_p^0, \beta_1^0, \dots, \beta_q^0)^t$ fixé de paramètres, on calcule récursivement

$$\widehat{h}_s^2 = \alpha_0^0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i^0 X_{s-i}^2 \sum_{j=1}^q \beta_j^0 \widehat{h}_{s-j}^2 \quad (2.40)$$

avec la convention $X_i = 0$ et σ_i^2 si $i \leq 0$. On remplace donc la fonction de vraisemblance par

$$\widehat{L}(x_t/F_{t-1}; \alpha^0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\widehat{h}_t^2}} \exp\left(\frac{-x_t^2}{2\widehat{h}_t^2}\right) \quad (2.41)$$

et la fonction de vraisemblance totale est :

$$\widehat{L}(x_1, \dots, x_T; \alpha^0) = \prod_{t=1}^T \widehat{L}(x_t/F_{t-1}; \alpha^0) \quad (2.42)$$

Cette fonction de vraisemblance peut être calculée pour différentes valeurs du vecteur α^0 et sa maximisation livre l'estimateur de maximum de vraisemblance.

2.8 Prédiction

Une application importante de la théorie des modèles *ARCH* consiste à évaluer la précision de prévision des valeurs futures d'une série chronologique. Dans le cas d'un processus *ARMA*, nous pouvons voir que la variance des prévisions dépend de l'horizon de prédiction et de la variance inconditionnelle de la série. En particulier, cette variance est indépendante du comportement local de la volatilité du processus à l'instant où on s'apprête à calculer les intervalles de prévision. Par contre, en ajustant un modèle *GARCH*, nous allons voir comment il est possible d'utiliser cette volatilité locale pour mesurer les intervalles de prévision. Partons du processus *ARMA*(r, s)

$$\phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t \quad (2.43)$$

CHAPITRE 2. PROCESSUS CONDITIONNELLEMENT
HÉTÉROSCÉDASTIQUE

où $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_r B^r$ et $\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_s B^s$ et ε_t est un processus $GARCH(p, q)$.

Supposons que l'on observe cette série jusqu'au temps t . Toute prévision $\hat{X}_t(h)$ à l'instant $t + h$ reproduisant la structure de la série est de la forme

$$X_{t+h} = \sum_{i=1}^r \phi_i X_{t+h-i} + \sum_{j=1}^s \theta_j \varepsilon_{t+h-j} + \varepsilon_{t+h} \quad (2.44)$$

le prédicteur optimal $\hat{X}_t(h)$ est donné par

$$\hat{X}_t(h) = \mathbb{E}(X_{t+h}|F_t) = \sum_{i=1}^r \phi_i \mathbb{E}(X_{t+h-i}|F_t) + \sum_{j=1}^s \theta_j \mathbb{E}(\varepsilon_{t+h-j}|F_t) \quad (2.45)$$

puisque $\mathbb{E}(\varepsilon_{t+h}|F_t) = 0$. À cause des diverses propriétés que nous avons décrites sur la moyenne conditionnelle des processus $GARCH$, on peut effectuer dans cette dernière relation quelques simplifications. L'essentiel est que, jusqu'à présent, la prévision est formellement identique à celle développée dans les chapitres consacrés aux processus linéaires. En d'autres termes, à ce niveau, la présence d'un modèle $(G)ARCH$ au niveau du processus d'innovations ne modifie pas la procédure de prévision. Calculons à présent l'erreur de prévision dans le but de déterminer les intervalles de prévision. En considérant que les paramètres ϕ_i sont compatibles avec l'hypothèse d'inversibilité du processus, le modèle (2.43) peut se réécrire sous la forme d'un processus $MA(\infty)$, et on peut donc écrire :

$$X_{t+h} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \varepsilon_{t+h-i} \quad (2.46)$$

où γ_i est le coefficient du terme z_i dans le développement de $\phi^{-1}(z)\Theta(z)$. En utilisant cette représentation pour calculer le prédicteur optimal, on peut écrire :

$$\hat{X}_{t+h} = \sum_{i=h}^{\infty} \gamma_i \varepsilon_{t+h-i} \quad (2.47)$$

et on en déduit l'erreur de prévision :

$$e_t(h) = X_{t+h} - \hat{X}_t(h) = \sum_{i=0}^{h-1} \gamma_i \varepsilon_{t+h-i} \quad (2.48)$$

La précision de la prévision peut à présent être mesurée par la variance de $e_t(h)$ conditionnellement à l'information F_t disponible à l'instant t :

$$\text{Var}(e_t(h)|F_t) = \sum_{i=0}^{h-1} \gamma_i^2 \mathbb{E}(\varepsilon_{t+h-i}^2 | F_t) \quad (2.49)$$

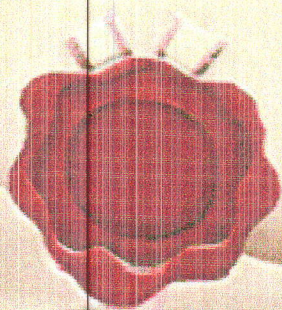
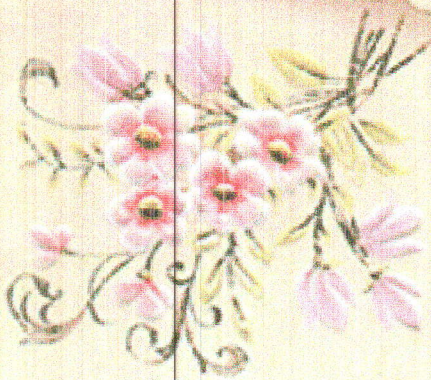
Nous pouvons à présent voir la grande différence entre la prévision avec ou sans effet *ARCH* dans le processus d'innovation : si un effet *ARCH* est présent, alors $\mathbb{E}(\varepsilon_{t+h-i}^2 | F_t)$ dépend en général de t , donc du point de référence à partir duquel la prévision est effectuée. À l'inverse, dans le cas d'un modèle homoscédastique dans lequel $\mathbb{E}(\varepsilon_{t+h-i}^2 | F_t) = \sigma^2$, la variance de la prévision des erreurs ne dépend pas de l'ensemble d'informations contenues dans F_t .

Remarque 2.8.1 : Pour calculer l'erreur de prévision (2.48) en pratique, nous pouvons utiliser une procédure itérative basée sur l'observation suivante : en utilisant la forme *ARMA*($\max(p, q), q$) d'un processus *GARCH*(p, q), on peut écrire :

$$\varepsilon_{t+h}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p, q)} (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t+h-i}^2 - \sum_{j=1}^q \beta_j \eta_{t+h-j} + \eta_{t+h} \quad (2.50)$$

Remarque 2.8.2 : L'espérance conditionnelle par rapport à F_t de cette relation permet d'obtenir $\mathbb{E}(\varepsilon_{t+h}^2 | F_t)$ en fonction de $\mathbb{E}(\varepsilon_{t+h-i}^2 | F_t)$ pour $i > 0$.

Chavira CB



Chapitre 3

Méthode de prévision

3.1 Lissage Exponentiel

La prévision à court terme a connu des développements importants durant les dernières années ; elle constitue la base de l'action. La prise de décision repose en effet toujours sur des prévisions. C'est ainsi qu'une entreprise commerciale s'intéresse aux prévisions des ventes futures pour faire face à la demande, gérer sa production ainsi que ses stocks, mais aussi orienter sa politique commerciale (prix, produits et marketing). De même, on essaie de prévoir les rendements d'un investissement, la pénétration d'un marché ou l'effet de la modération salariale sur l'emploi.

Les développements de la pratique statistique ont permis de disposer d'un certain nombre d'outils de calcul, les méthodes de lissage exponentiel font l'objet de ce mémoire, ces méthodes datent du début des années soixante (**HOLT en 1957 et BROWN en 1962**). Ils justifient amplement leurs utilisations.

Après avoir fait un lissage exponentiel simple qui ne peut être utilisé en présence d'une tendance ou d'une saisonnalité, nous passons au lissage double et à la méthode de **HOLT**, ces derniers peuvent convenir pour des séries présentant une tendance. Le lissage de **WINTERS** intervient dans les cas où la tendance et la composante saisonnière sont juxtaposées soit de manière additive soit de manière multiplicative.

3.2 Principe de base

La méthode de lissage exponentiel repose sur l'idée suivante : les informations contenues dans une série chronologique ont d'autant plus d'importance qu'elles sont plus récentes. Pour effectuer une prévision, il faut affecter aux informations un poids d'autant plus faible qu'elles proviennent d'époques plus éloignées.

3.2.1 Lissage exponentiel simple

Cette méthode ne doit être employée que sur une série qui ne présente ni tendance ni de composante saisonnière.

En prenant en compte toute l'histoire de la chronique de sorte que plus nous nous éloignons de la prévision moins l'influence des observations correspondantes est importante. Cette décroissance de l'influence est de type exponentiel ce qui justifie l'appellation. dispose d'une série X_1, \dots, X_T et on désire prédire X_{T+h} ($h \geq 1$). Dénotons la prévision par $\hat{X}_T(h)$.

Définition 3.2.1 : La valeur $\hat{X}_T(h)$ fournie par la méthode du lissage exponentiel simple avec la constante de lissage β ($0 < \beta < 1$) est

$$\hat{X}_T(h) = (1 - \beta) \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j X_{T-j} \quad (3.1)$$

$\hat{X}_T(h)$ est une moyenne des observations passées où le poids de chaque observation décroît de façon exponentielle avec la distance. Notons que $\hat{X}_T(h)$ ne dépend pas de h :

$$\hat{X}_T(h) \equiv \hat{X}_T \quad (3.2)$$

Remarque 3.2.1 : $\hat{X}_T(h)$ ne dépend pas de h , prévision constante.

► β proche de 1 : prévision "**rigide**", peu sensible aux fluctuations aléatoires qui sont lissées,

► β proche de 0 : prévision "**souple**", influencée par les observations récentes.

Proposition 3.2.1 : Si (X_t) est constante alors $\hat{X}_T(h) \simeq C$. Car

$$(1 - \beta) \sum_{k=0}^{T-1} \beta^k = 1 - \beta^T \simeq 1 \quad (3.3)$$

pour T "grand".

Proposition 3.2.2 : *Interprétation selon les moindres carrés*

$$\frac{\hat{X}_T(h)}{(1 - \beta)^h} \simeq \hat{X}_T(h) \quad (3.4)$$

minimise :

$$F(a) = \sum_{j=0}^{T-1} \beta_j (X_{t-j} - a)^2 \quad (3.5)$$

meilleure approximation de (X_t) par une constante au "voisinage" de $t = T$.

Formule d'actualisation

$$\begin{aligned} \hat{X}_T &= (1 - \beta) \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j X_{T-j} \\ &= (1 - \beta) X_T + (1 - \beta) \sum_{k=1}^{T-1} \beta^k X_{T-k} \\ &= (1 - \beta) X_T + (1 - \beta) \beta \sum_{k=1}^{T-2} \beta^k X_{T-1-k} \\ &= (1 - \beta) X_T + \beta \hat{X}_{T-1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Formule d'actualisation très simple, algorithme peu coûteux.

On retrouve

- ▶ β proche de 1 → prévision rigide
- ▶ β proche de 0 → prévision souple
- ▶ β déterminé empiriquement : souvent $\beta = 0.7$ ou $\beta = 0.8$.

3.2.2 Lissage exponentiel double (Brown 62)

Les formules précédentes permettent de calculer une prévision pour des séries chronologiques stationnaires sans tendance, nous pouvons définir un lissage exponentiel double qui est utilisé en cas de série présentant une tendance.

Amélioration : Prévision linéaire par

$$\hat{X}_T(h) = \hat{a}_T + \hat{b}_T h \quad (3.7)$$

\hat{a}_T et \hat{b}_T déterminés de manière à minimiser ($0 < \beta < 1$) :

$$\begin{aligned} F(a, b) &= \sum_{k=0}^{T-1} \beta^k (X_{T-k} - \hat{X}_T(-k))^2 \\ &= \sum_{k=0}^{T-1} \beta^k (X_{T-k} - a - bk)^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

meilleure approximation linéaire au voisinage de $t = T$.

Formules d'actualisation :

$$\hat{X}_T(h) = \hat{a}_T + \hat{b}_T h \quad (3.9)$$

Proposition 3.2.3 : Solution du problème

\hat{a}_T et \hat{b}_T sont donnés par les formules d'actualisation

$$\begin{cases} \hat{a}_T = \hat{a}_{T-1} + \hat{b}_{T-1} + (1 - \beta^2)(X_T - \hat{X}_{T-1}(1)) \\ \hat{b}_T = \hat{b}_{T-1} + (1 - \beta)^2(X_T - \hat{X}_{T-1}(1)) \end{cases} \quad (3.10)$$

Autrement écrit : (Manipulations algébriques simples)

$$\begin{cases} \hat{a}_T = \beta^2(\hat{a}_{T-1} + \hat{b}_{T-1}) + (1 - \beta^2)X_T \\ \hat{b}_T = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}(\hat{a}_T - \hat{a}_{T-1}) + (1 - \frac{1 - \beta}{1 + \beta})\hat{b}_{T-1} \end{cases} \quad (3.11)$$

- ▶ \hat{a}_T moyenne pondérée entre $\hat{X}_{T-1}(1)$ et X_T
- ▶ \hat{b}_T moyenne pondérée entre $\hat{X}_T(0) - \hat{X}_{T-1}(0)$ et \hat{b}_{T-1} .
- ▶ Les poids dépendent de β dans les deux équations.

3.2.3 Généralisation : lissage de Holt (1960)

Prévision linéaire :

$$\hat{X}_T(h) = \hat{a}_T + \hat{b}_T h \quad (3.12)$$

Mais les formules d'actualisation sont ici "**découplées**"

$$\begin{cases} \hat{a}_T = \alpha(\hat{a}_{T-1} + \hat{b}_{T-1}) + (1 - \alpha)X_T \\ \hat{b}_T = \beta(\hat{a}_T - \hat{a}_{T-1}) + (1 - \beta)\hat{b}_{T-1} \end{cases} \quad (3.13)$$

soit :

$$\begin{cases} \hat{a}_T = \alpha\hat{X}_{T-1}(1) + (1 - \alpha)X_T \\ \hat{b}_T = \beta(\hat{X}_T(0) - \hat{X}_{T-1}(0)) + (1 - \beta)\hat{b}_{T-1} \end{cases} \quad (3.14)$$

avec $0 < \alpha, \beta < 1 \rightarrow$ Plus flexible, mais deux constantes à choisir.

3.2.4 Méthode de Winters (1960)

Prévision par tendance linéaire et terme saisonnier de période τ :

$$\hat{X}_T(h) = \hat{a}_T + \hat{b}_T h + \hat{S}_{T+h-\tau} \quad (3.15)$$

(horizon $h < \tau$)

On a encore des formules d'actualisation pour tout t

- ▶ Une pour \hat{a}_t (moyenne, paramètre α),
- ▶ Une pour \hat{b}_t (pente, paramètre β),
- ▶ Une pour \hat{S}_t (saisonnalité, paramètre γ).

Modèle de Winters multiplicatif :

$$\hat{X}_T(h) = (\hat{a}_T + \hat{b}_T h) \hat{S}_{T+h-\tau} \quad (3.16)$$

Exemple 9 : La méthode de lissage de **Holt & Winter** sur la série `data(co2)`

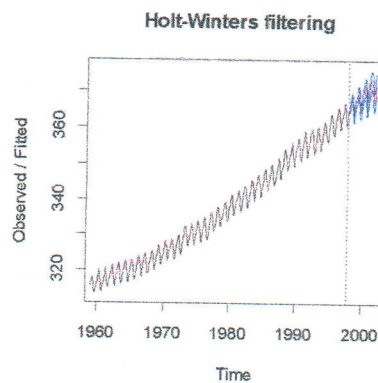


Figure (19)

3.3 Critique des méthodes de lissage exponentiel

L'avantage des méthodes vues dans ce chapitre pour la prévision, est de fournir une prévision "bon marché" (peu coûteuse en moyens). Les inconvénients les plus flagrants sont de deux ordres. Tout d'abord, rien ne garantit l'optimalité de la méthode sur une série de donnée : les méthodes de lissage exponentiel sont parfois loin d'être les mieux adaptées (encore faut-il s'en apercevoir). D'autre part, elles sont incapables de fournir des intervalles de prévision, c'est-à-dire un intervalle contenant la prévision avec une probabilité donnée. Et pour cause, aucun cadre probabiliste n'a été défini pour le moment. Pour pallier ces insuffisances, on est amené à réaliser des prévisions au moyen de modèles probabilistes. Il est à noter que les méthodes de lissage exponentiel correspondent (à l'exception de la version multiplicative de **Holt-Winters**) à des modèles probabilistes particuliers. On peut donc

3.3. CRITIQUE DES MÉTHODES DE LISSAGE EXPONENTIEL

voir les méthodes probabilistes comme des techniques plus générales permettant de justifier l'emploi des méthodes élémentaires et d'en élargir le champ d'application.

Chapitre 4

Annexes

4.1 Annexe A : C'est quoi le R ?

R est un logiciel de statistique dédiée a l'analyse des données et a leur visualisation. Il contient une collection d'outils pour la statistique, un environnement graphique et un langage de programmation orienté objet. La plupart des entités créées en **R** sont permanentes. Ces entités sont les objets "données, résultats, fonctions", et sont stockées dans le répertoire. **RData** créé par défaut. Le résultat d'une procédure statistique peut être ainsi réutilisé lors de différentes sessions. Il est donc important de créer un répertoire pour chaque projet statistique effectué en **R**.

On ouvre une session de **R** par la commande :

\$ R

Pour clôturer une session, utiliser :

>q()

L'historique d'une session est conservé dans le fichier. **Rhistory**.

R possède une documentation en ligne accessible par :

>help.start()

4.1.1 Quelques commandes

acf() : Estimation de la fonction d'auto-corrélation

arima() : Montage *ARIMA* - modèles

arima.sim() : Simulation des processus *ARIMA*

pacf() : Estimation de la fonction d'autocorrélation partiel

plot() : Commande graphique

`ts()` : Création l'objet des séries temporelles
`c()` : Commande vectorielle
`type="l"` : Le type de graphe qui sera dessiné, "p" : points, "l" : lignes.
`xlim=`, `yylim=` : Fixe les limites inférieures et supérieures des axes,

4.2 Annexe B : Applications

4.2.1 Simulation d'un bruit blanc

```

>bruit.blanc=ts(rnorm(100),frequency=1,start=c(1),end=c(100))
>plot(bruit.blanc,type="l",col="red") page (5)
  
```

4.2.2 Simulaton des processus

Exemple 1 : Population d'algerie (2008-2014) (page 2)

Année	Population
2008	33220302
2009	36383302
2010	37062820
2011	37762962
2012	38441705
2013	39188045
2014	39897487

```

>y=c(33220302, 36383302, 37062820, 37762962, 38441705, 39188045,
39897487)
>y
[1] 33220302 36383302 37062820 37762962 38441705 39188045
39897487
>pop.algerie=ts(y,start=c(2008),end=c(2014))
>pop.algerie
Time Series :
  
```

```

Start = 2008
End = 2014
Frequency = 1
[1] 33220302 36383302 37062820 37762962 38441705 39188045
39897487
>plot(pop.algerie,col="red")
Exemple 2 : Nombre des morts accidentelles en Guelma-Algérie (1995-
2013) (page 3)

```

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
N.des morts	24	11	23	11	18	08	29	27	21

2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
21	19	24	31	22	31	20	24	39	16

```

>z=c(24,11,23,11,18,08,29,27,21,21,19,24,31,22,31,20,24,39,16)
>z
[1] 24 11 23 11 18 8 29 27 21 21 19 24 31 22 31 20 24 39 16
>nombre.MAG=ts(z,start=c(1995),end=c(2013))
>nombre.MAG
Time Series :
Start = 1995
End = 2013
Frequency = 1
[1] 24 11 23 11 18 8 29 27 21 21 19 24 31 22 31 20 24 39 16
>plot(nombre.MAG,col="red")

```

4.2.3 Exemples des processus *AR*, *MA*, *ARMA*, *ARIMA*, *SARIMA*

```

Exemple 4 : Simulation d'un processus AR(3) page (12, 13)
>AR=arima.sim(200,model=list(ar=c(0.1,0,0.8)))

```

```
>plot(AR,type="l",col="red",ylim=c(-6,8),xlim=c(10,200))
```

Exemple 5 : Simulation d'un processus *MA*(3) page (14, 15)

```
>MA=arima.sim(200,model=list(ma=c(1,0,0.7)))
```

```
>plot(MA,type="l",col="red",ylim=c(-6,8),xlim=c(10,200))
```

Exemple 6 : Simulation d'un processus *ARMA*(2, 1) page(16, 17)

```
>ARMA=arima.sim(200,model=list(ar=c(0.5,0.2),ma=c(1,0.5)))
```

```
>plot(ARMA,type="l",col="red",ylim=c(-6,5),xlim=c(10,200))
```

Exemple 7 : Simulation d'un processus *ARIMA*(1, 1, 0) page(18, 19)

```
>ARIMA<-arima.sim(list(order=c(1,1,0),ar=0.7),n=400)
```

```
>plot(ARIMA,col="red")
```

Exemple 8 : Simulation d'un processus *SARIMA*(1, 1, 1) \times (0, 0, 0)₁₂
page (20, 21)

```
>arima(x,order=c(1,1,1),seasonal=list(order=c(1,1,1),period =12))
```

```
>plot(arima,col="red")
```

Exemple 9 : La méthode de lissage de **Holt & Winter** sur la série
data(co2) page (40)

```
>data(co2)
```

```
>m=HoltWinters(co2)
```

```
>p=predict(m,50,prediction.interval=TRUE)
```

```
>plot(m,p)
```

4.2.4 Les fonction d'auto-corrélation (ACF) est les fonctions d'auto-corrélations partiels (PACF)

```
>acf(AR,main="ACF of AR(3) processus")
```

```
>pacf(AR,main="PACF of AR(3) processus")
```

```
>acf(MA,main="ACF of MA(3) processus")
```

```
>pacf(MA,main="PACF of MA(3) processus")
```

```
>acf(ARMA,main="ACF of ARMA(2,1) processus")
```

```
>pacf(ARMA,main="PACF of ARMA(2,1) processus")
```

```
>acf(ARIMA,main="ACF of ARIMA processus")
```

```
>pacf(ARIMA,main="PACF of ARIMA processus")
```

```
>acf(arima,main="ACF of SARIMA processus")
```

```
>pacf(arima,main="PACF of SARIMA processus")
```

Bibliographie

- [1] RAINER VON SACHS & SEBASTIEN. STAT 2414
SÉRIES CHRONOLOGIQUES 4^e Édition 26 septembre 2005
- [2] ARTHUR CHARPENTIER. COURS DES SERIES TEMPORELLES
THEORIE ET APPLICATIONS.
- [3] ANNE PHILIPPE. Notes de Cours sur le logiciel R, 26 septembre 2012
- [4] AGNES LAGNOUX. Renforcement Statistique Séries chronologiques
- [5] LAURENT FERRARA. Séries Temporelles Avancées Polycopié de Cours
Université Paris Ouest Nanterre et Banque de France
- [6] J.J. DAUDIN, C. DUBY, S. ROBIN & P. TRECOURT. Analyse de Séries
Chronologiques, Mai 1996
- [7] CHRISTOPHE HURLIN. Econométrie pour la Finance Modèles *ARCH* –
GARCH
- [8] CHRISTIAN FRANCO ET JEAN-MICHEL ZAKOEAN. Modèles
GARCH et à volatilité stochastique, 14 décembre 2009
- [9] OLIVIER GAUDOIN. Principes et Méthodes Statistiques.
- [10] JULIEN JACQUES. Introduction aux série temporelle, Harner, New
York 1965