République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : Probabilités et Applications

Par :

Melle Chabbi Sarra et Melle Mahmoudi Atika

Intitulé

Intégration numérique d'EDS et leurs applications en finance

Dirigé par : KERBOUA Mourad

Devant le jury

PRESIDENT : BOUHADJAR.S	**Univ- Guelma**
RAPPORTEUR :KERBOUA.M	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR : SEKRANI.S	**Univ-Guelma**

Session Juin 2014

Dédicace

Mes dédions a modeste travail à deux personnes qui sont les plus chères au monde qui nous ont comblé de leurs amours et leurs affection :

Ma mère qui m'a toujours soutenue depuis premier pas jusqu'à ce jour et qui toujours su trouver les mots qu'il fallait pour m'encourager.

Mon père qui à tout fait pour que je ne manque derien.

Mes dédions et mes grande remerciment à Dr :Kerboua.M . de m'avoir encadré et d'avoir pu bénéficier aussi bien de leurs conseils et ses compétence scientifiques, son soutient incessant aussi bien normal, ses conseils et ses encouragements furent déterminants

Mes dédions spécial à:

. tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation.

.tous la famille et les collègues et amies , a mes frères .

.la promotion 2013-2014.

.tous les personnes qui m'aidés de prés et de loin à réaliser mon travail

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles servent a décrire des phénomènes physiques très variés. Cependant, dans de nombreuses situations les phénomènes observés ne suivent que grossièrement les trajectoires des équations qui semblent devoir leur correspondre. Les causes possibles d'un tel comportement peuvent être variées : erreur de modélisation, fluctuation au cours du temps des paramètres de l'équation, présence de bruit d'observation, ... Dans ces situations, les approches probabilistes trouvent naturellement leur place et il peut alors être intéressant d'incorporer des termes aléatoires dans les équations différentielles afin de prendre en compte les incertitudes précédentes. Cependant, l'introduction de ces termes aléatoires conduit a une intégration des équations qui ne correspond pas, en général, a une adaptation immédiate de la théorie classique des équations différentielles.

De manière similaire aux équations différentielles ordinaires où la résolution numérique passe par une discrétisation du temps et un schéma d'approximation concernant l'intervalle de temps elémentaire sur lequel l'intégration est faite, il est nécessaire de procéder de manière similaire avec les équations différentielles stochastiques, a quelques différences près : (i) pour une équation ordinaire, la trajectoire étant déterministe (en tout cas pour les exemples simples a une particule, oscillateur harmonique ou anharmonique), on peut contrôler avec la solution exacte la qualité de l'approximation. Avec un processus de Wiener (ou mouvement Brownien), nous avons vu que deux trajectoires sont très différentes, cette différence s'accroissant avec le temps. Si par contre, on cherche à résoudre un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, on sait que le système évolue vers une distribution stationnaire que la variance des trajectoires est finie... (ii) Les schémas d'approximation des méthodes de résolution des équatioins différentielles sont basés sur le calcul différentiel usuel. Dans le cas des équations différentielles stochastiques, ces schémas reposent sur le calcul différentiel stochastique de nature assez différente. L'objectif de notre mémoire est d'introduire le calcul d'Itô qui permet d'aborder les équations différentielles stochastiques. On commencera par quelques rappels et compléments de théorie des probabilités (**chapitre I**) qui seront utiles pour cela. Après avoir présenté quelques résultats importants relatifs aux intégrale stochastique et calcul d'Itô (**chapitre II**), on verra (**chapitre III**) comment il peut être mis en oeuvre pour la résolution des équations différentielles stochastiques (EDS). Comme pour les équations différentielles classiques, on ne sait pas en général intégrer de manière exacte les EDS. Aussi, on présentera quelques techniques permettant d'obtenir des approximations numériques des trajectoires des EDS et on donnera quelques exemples sur ces méthodes applquées en finance.

Chapitre 1

Rappels et compléments de probabilités

1.1 Généralités sur les processus à temps continu

Les processus aléatoires décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps (ou de l'espace). Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires notamment en physique statistique (par exemple le ferromagnétisme, les transitions de phases, etc), en biologie (évolution, génétique et génétique des populations), médecine (croissance de tumeurs, épidémie), et bien entendu les sciences de l'ingénieur. Dans ce dernier domaine, les applications principales sont pour l'administration des réseaux, de l'internet, de la télécommunication et bien entendu dans les domaines économiques et financiers.

L'étude des processus aléatoires s'insère dans la théorie des probabilités dont elle constitue l'un des objectifs les plus profonds. Elle soulève des problèmes mathématiques intéressants et souvent très compliqués. Dans cette section, nous présentons les définitions et les propriétés des processus stochastiques à temps continu.

1.1.1 Regularité des trajectoires

Commençons tout d'abord par préciser ce que l'on entend par processus à temps continu

DÉFINITION 1.1.1 *On appelle processus stochastique à temps continu et à valeurs dans un espace E muni d'une tribu $\mathcal{B}$, une famille $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(E, \mathcal{B})$.*

REMARQUE 1.1.1 *1. Dans la pratique l'indice t représente le temps.*
2. Un processus peut aussi être vu comme une fonction aléatoire, i.e., à chaque $\omega \in \Omega$ on associe la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans E, $t \longmapsto X(t,\omega)$, appelée trajectoire du processus.
3. Un processus peut être considéré comme une application de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans E, nous supposerons toujours que cette application est mesurable lorsque l'on munit $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ de la tribu $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathcal{F}$ et E de la tribu $\mathcal{B}$.
4. En considérera aussi des processus indexés par un intervalle de temps $[0,T]$ borné.

C'est un enjeu que de savoir si un processus admet des trajectoires mesurables, continues, dérivables ou encore plus régulières.

DÉFINITION 1.1.2 *Un processus $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ réel est dit stochastiquement continu (ou continu en probabilité) si $\mathbb{P} - \lim\limits_{s\to t} X(s) = X(t)$, $s,t \in \mathbb{R}_+$, i.e., $\forall t \in \mathbb{R}_+$ et $\epsilon > 0$, on a $\lim\limits_{s\to t} \mathbb{P}(|X(s) = X(t)| \geq \epsilon) = 0$.*

De la définition précédente, on peut déduire facilement les propriétés suivantes. Soient $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $Y = (Y(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ deux processus réels continus en probabilité, alors

Propriétés

1. Le processus $(X(t) + Y(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est continu en probabilité.
2. Le processus $(-X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est continu en probabilité.
3. Le processus $(X(t) - Y(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est continu en probabilité.
4. Le processus $(|X(t)|)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est continu en probabilité.
5. Le processus $(X(t)Y(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est continu en probabilité.

DÉFINITION 1.1.3 *Deux processus X et Y, sont dits équivalents s'ils ont même loi (égalité de toutes les lois finidimensionnelles). On écrira $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$. On dira que Y est une version du processus X si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X(t) = Y(t)) = 1$. On parle encore d'équivalence au sens fort. Deux processus X et Y sont dit indistinguables si $\mathbb{P}(X(t) = Y(t), \forall t \in \mathbb{R}) = 1$.*

Il est facile de voir que pour deux processus stochastiques X et Y :

PROPOSITION 1.1.1 *indistinguable $\Longrightarrow$ équivalence forte $\Longrightarrow$ équivalence.*

L'équivalence forte définit une relation d'équivalence pour les processus stochastiques et deux processus fortement équivalent sont équivalents pour cette relation.

Souvent lorsqu'on considère un processus stochastique $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, on en cherche une version $(Y(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ dont les trajectoires ont de bonnes propriétés de régularité.

THÉORÈME 1.1.1 *(Kolmogorov) Soit $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus tel qu'il existe $a, b, c > 0$ vérifiant pour tout s, t :*

$$\mathbb{E}\left\{|X(t) - X(s)|^a\right\} \leq c\,|t - s|^{b+1} \tag{1.1}$$

Alors il existe une version continue $\widetilde{X}$ de X .

En fait, les trajectoires de $\widetilde{X}$ ont mêmes $\gamma-$hôldériennes pour tout $\gamma < \frac{b}{a}$.

1.1.2 Temps d'arrêt et martingales

Comme dans le cas discrèt, on introduit la notion de filtration

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, une filtration $(\mathcal{F}(t))_{t\geq 0}$ est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$. La tribu $\mathcal{F}(t)$ représente l'information dont on dispose à l'instant t. On dit qu'un processus $(X(t))_{t\geq 0}$ est adapté à $(\mathcal{F}(t))_{t\geq 0}$, si $X(t)$ est $\mathcal{F}(t)-$mesurable pour tout t.

REMARQUE 1.1.2 *Dans la suite, les filtrations que l'on considérera, auront la propriété suivante*

$$\forall t : \mathcal{F}(t) \text{ contient } \mathcal{N} : \text{l'ensemble des parties } \mathbb{P} - \text{négligeables} \tag{H}$$

ceci nous permet d'affirmer que si $X = Y$ p.s et si Y est $\mathcal{F}(t)-$mesurable alors X est $\mathcal{F}(t)-$mesurable.

On peut construire une filtration a partir d'un processus $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ en posant $\mathcal{F}^X(t) = \sigma(X(s),\ s \leq t)$. Cette filtration ne vérifie pas en général l'hypothèse **H** précédente. Cependant, si on remplace $\mathcal{F}(t)$ par la tribu complitée, i.e., par $\mathcal{F}^c(t) = (\mathcal{F}^X(t), \mathcal{N})$ on obtient une filtration vérifiant l'hypothèse H. On appelle cette filtration la filtration naturelle du processus $(X(t))_{t\geq 0}$. On convient donc, lorsque on parle de filtration pour un processus $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ sans aucune précision, il s'agit de sa filtration natrelle.

La notion de temps d'arrêt est aussi utile. Un temps d'arrêt modélise un temps aléatoire qui depend de l'historique d'un processus $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Définition 1.1.4 *Soient$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(\mathcal{F}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ une filtration. Une variable aléatoire τ définie sur Ω valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ est appelée un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ si $\forall t \in \mathbb{R}_+ : \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$. Intuitivement, $\mathcal{F}(t)$ contient tous les évenements qui ne dépendent que de l'histoire du processus jusqu'au temps t. Un temps d'arrêt est dit fini si $\mathbb{P}(\tau = \infty) = 0$. On définit ainsi, la tribu $\mathcal{F}(\tau)$ comme étant la tribu des événements antérieurs à τ : $\mathcal{F}(\tau) = \{A \in \mathcal{F}(\infty) : A \cap [\tau = t] \in \mathcal{F}(t),\ \forall t \geq 0\}$ où $\mathcal{F}(\infty) = \sigma\left(\cup_{t\geq 0}\mathcal{F}(t)\right) \subset \mathcal{F}$.*

Propriétés

Soient s et τ deux temps d'arrêts

1. Si $\tau = k$ (constant) alors est un temps d'arrêt, de même $s \wedge t = \inf\{s, \tau\}$, $s \vee \tau = \sup\{s, \tau\}$, $\tau \wedge a$ où $a \in [0, +\infty[$ sont aussi des temps d'arrêts.
2. Si $A \in \mathcal{F}(s)$ alors $A \cap \{s \leq \tau\} \in \mathcal{F}(\tau)$.
3. Si $s \leq \tau$ alors $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(\tau)$.
4. $\mathcal{F}(s \wedge t) = \mathcal{F}(s) \cap \mathcal{F}(\tau)$.
5. $\mathcal{F}(s \vee \tau) = \sigma\{\mathcal{F}(s), \mathcal{F}(\tau)\}$. Si $A \in \mathcal{F}(s \wedge t)$ alors $A \cap \{s \leq \tau\} \in \mathcal{F}(\tau)$.

Les martingales en temps continu est un outil fondamental pour la théorie des équations différentielles stochastiques. La définition suivante est une extension de celle du temps discret.

Définition 1.1.5 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{F}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, $M = (M(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ une famille adaptée de variables aléatoires intégrables. Alors la famille $(M(t), \mathcal{F}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est appelée*

1. Une martingale, si pour tout $s \le t$, $\mathbb{E}(M(t) \mid \mathcal{F}(s)) = M(s)$, p.s.

2. Une surmartingale, si pour tout $s \le t$, $\mathbb{E}(M(t) \mid \mathcal{F}(s)) \le M(s)$, p.s.

3. Une sousmartingale, si pour tout $s \le t$, $\mathbb{E}(M(t) \mid \mathcal{F}(s)) \ge M(s)$, p.s.

Propriétés

1. Une martingale $(M(t), \mathcal{F}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est constante en moyenne i.e., $t \to E\{M(t)\}$ est constante, une surmatingale est croissante en moyenne et une sousmartingale est décroissante en moyenne.

2. Si $(M(t), \mathcal{F}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale et φ est une fonction convexe (resp. concave) telle que $\varphi(M(t))$ soit intégrable, alors $(\varphi(M(t)))_{t\ge 0}$ est une sousmartingale (resp. surmatringale).

3. Si $(M(t), \mathcal{F}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale, τ un temps d'arrêt, alors $(M_\tau(t), \mathcal{F}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale, où le processus $(M_\tau(t))_{t\ge 0}$ est défini par $M_\tau(t) = M(t \wedge \tau)$.

1.2 Exemples de processus

La loi d'un processus aléatoire est caractérisée par la donnée des lois finidimensionnelles. En fait, on parle de la loi du processus $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ lorsque l'on connait la loi conjointe du vecteur $(X(t_1), ..., X(t_n))$ pour toute suite finie croissante de temps $\{t_1 \le t_2 \le ... \le t_n\}$. Cette loi est entièrement déterminée soit par la fonction de répartition finidimensionnelle

$$F_{(t_1,...,t_n)}(x_1, ..., x_n) = \mathbb{P}(X(t_1) \le x_1, ..., X(t_n) \le x_n)$$

ou par la fonction caractéristique

$$\begin{aligned}\varphi_{(t_1,\dots,t_n)}(u_1,\dots,u_n) &= \mathbb{E}\left\{\exp\left\{i\sum_{i=1}^{n}u_iX(t_i)\right\}\right\}\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\exp\left\{i\sum_{i=1}^{n}u_ix_i\right\}d^nF_{(t_1,\dots,t_n)}(x_1,\dots,x_n).\end{aligned}$$

Ce type de définitions est peu pratique à manipuler. Nous y ferons parfois référence de manière implicite afin de conserver la fluidité de notre discussion.

1.2.1 Processus à accroissements indépendants

DÉFINITION 1.2.1 *Un processus réel $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est dit processus à accroissements indépendants (PAI), si*

a) *$X(0) = 0$ p.s (on se ramène à ce cas en considérant le processus $(X(t) - X(0))_{t\in\mathbb{R}_+}$).*

b) *$\forall s < t$, $X(t) - X(s)$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}^X(s)$.*

Si de plus

c) l'accroissement $X(t) - X(s)$ a la même loi que $X(t-s)$, le PAI est dit PAI stationnaire (PAIS).

1.2.2 Processus gaussiens

DÉFINITION 1.2.2 *Un processus réel $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est appelé processus gaussien si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$, le vecteur $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))'$ est gaussien.*

Autrement dit $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est gaussien si toute combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} a_iX(t_i)$ suit une loi gaussienne (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+^n$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Il est connu que la loi díun vecteur gaussien $(X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n))'$ est connue (via sa fonction caractéristique) par le vecteur moyenne$(\mathbb{E}\{X(t_1)\}, ..., \mathbb{E}\{X(t_n)\})'$ et la matrice de covariance $(Cov(X(t_i), X(t_j)), 1 \leq i, j \leq n)$. On comprend dés lors que toute la loi d'un processus gaussien est connue dés qu'on se donne la fonction moyenne $\mu(t) = \mathbb{E}\{X(t)\}$ et l'opérateur de covariance $K(s;t) = Cov(X(s), X(t))$. En effet, la loi finidimensionnelle de $(X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n))'$ est alors la loi normale de dimension n, $\mathcal{N}\left(\underline{\mu}_n, K_n\right)$ avec $\underline{\mu}_n = (\mu(t_1), ..., \mu(t_n))'$ et $K_n = ((K(t_i, t_j))_{1 \leq i,j \leq n}$. Les fonctions $\underline{\mu}$ et K définissent donc toutes les lois finidimensionnelles du processus et donc aussi sa loi.

1.2.3 Mouvement brownien réel

Le mouvement brownien *(MB)* est associé à l'analyse de mouvements qui évoluent au cours du temps de manière désordonnée qu'il semble difficile de prévoir leur évolution, même dans un intervalle de temps très court. Il joue un rôle central dans la théorie des processus stochastiques, notamment parce que dans de nombreux problèmes théoriques ou appliqués, le mouvement brownien ou les diffusions (qui lui sont associées) fournissent des modèles simples sur lesquels de nombreux calculs peuvent être faits.

Un botaniste anglais, **Robert Brown** décrit en 1827 le mouvement de fines particules organiques en suspension dans un gaz ou un fluide. Au $19^{ème}$ siècle, aprés lui, plusieurs physiciens reconnaissent que ce mouvement est trés irrégulier et ne semble pas admettre de tangente. On ne pourrait donc pas parler de sa vitesse, ni a fortiori lui appliquer les lois de la mécanique ! Il constitue un bon exemple de processus gaussiens.

DÉFINITION 1.2.3 *Un processus réel $B = (B(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est appelé mouvement brownien (MB) (ou encore processus de Wiener) s'il satisfait les conditions suivantes*

1. $B(0) = 0$ $p.s.$

2. $(B(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus à accroissements indépendants.

3. Si $0 \leq s < t$, $B(t) - B(s) \rightsquigarrow B(t-s)$ ou encore la loi $\mathcal{N}(0, t-s)$.

PROPOSITION 1.2.1 *Si $B = (B(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un MB standard, alors*

1. [Propriété différentielle] $\{B(t+s)-B(t)\}_{t\geq 0}$ est un MB standard pour tout $s>0$, indépendant de $\sigma(B(u), u<t)$.

2. [Propriété d'échelle] Pour tout $c>0$, $\{cB(t/c^2)\}_{t\geq 0}$ est un MB standard.

3. [Symétrie] $(-B(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un MB standard.

4. [Processus gaussien] Un MB est gaussien de moyenne nulle et de fonction de covariance $Cov(B(t), B(s)) = \mathbb{E}(B(t)B(s)) = t\wedge s$.

5. [Renversement du temps] Le processus $(\widetilde{B}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ défini par $\widetilde{B}(t) = tB(1/t)\delta_{\{t>0\}}$ est un MB standard.

PROPOSITION 1.2.2 ([MB comme martingales]) *Si $(B(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un MB standard, alors*

1. $(B(t), \mathcal{F}^B(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale.
2. $(B^2(t)-t, \mathcal{F}^B(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale.
3. $\left(\exp\left\{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right\}, \mathcal{F}^B(t)\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale.

Chapitre 2

Intégrale stochastique et calcul d'Itô

Dans toute cette partie $B = (B(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un MB standard défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Cette espace de probabilité est de plus équipé de la filtration naturelle $(\mathcal{F}^B(t))_{t\geq 0}$.

La construction de l'intégrale stochastique (ou de Itô) se construit de façon semblable à celle de l'intégrale classique de Riemann-Stiltjes. L'intégrale est tout d'abord définie sur une classe de processus étagés (ou élémentaires) notée $\mathcal{E}([0,T]\times\Omega)$ et ensuite elle est étendue à une classe plus large par approximation.

2.1 L'intégrale stochastique sur $\mathcal{E}([0,T]\times\Omega)$

Un processus $X = (X(t))_{t\geq 0}$ est appelé processus étagé s'il existe une suite de réels $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$, et une suite de variables aléatoires $(X_j)_{0\leq j\leq n}$ telles que X_j soit $\mathcal{F}^B(t_j)-$mesurable, appartiènne à $L^2([0,T])$ et $X(t) = X_j$ pour tout $t \in [t_j, t_{j+1}[$, soit $X(t) = \sum_{j=1}^{n-1} X_i \mathbb{I}_{[t_j,t_{j+1}[}(t)$. On définit alors l'intégrale stochastique sur $\mathcal{E}([0,T]\times\Omega)$ par :

$$\int_0^T X(t)\, dB(t) = \sum_{j=1}^{n-1} X_j \left(B(t_{j+1}) - B(t_j)\right) \tag{2.1}$$

Remarque 2.1.1 *Lorsque $t\in[0,T]$ on définit naturellement*

$$\int_0^t X(t)\,dB(t)=\int_0^T X(t)\,\mathbb{I}_{[0,t]}dB(t)=\sum_{k=1}^{n-1}X_k\left(B\left(t_{k+1}\wedge t\right)-B\left(t_k\wedge t\right)\right).$$

2.1.1 Propriétés de l'intégrale stochastique sur $\mathcal{E}([0,T]\times\Omega)$

Sur l'ensemble $\mathcal{E}([0,T]\times\Omega)$ l'intégrale stochastique satisfait les propriétés suivantes

1. [Linéairité] : $\int_0^t(\alpha X(s)+\beta Y(s))dB(s)=\alpha\int_0^t X(s)dB(s)+\beta\int_0^t Y(s)dB(s)$ pour tout α et β réels.

2. Pour $0\le s<u<t\le T$: $\int_s^t X(v)dB(v)=\int_s^u X(v)dB(v)+\int_u^t X(v)dB(v)$.

3. Le processus $\left(\int_0^t X(s)dB(s)\right)_{t\in[0,T]}$ est $(\mathcal{F}^B(t))_{t\in[0,T]}-$adapté.

4. Le processus $\left(\int_0^t X(s)dB(s)\right)_{t\in[0,T]}$ est à trajectoires continues.

5. Si $\int_0^t \mathbb{E}\left[X(t)^2\right]dt<\infty$ pour tout $t\le T$, alors $\mathbb{E}\left[\int_0^t X(s)dB(s)\right]=0$ et $Var\left(\int_0^t X(s)dB(s)\right)=\int_0^t\mathbb{E}\left\{X^2(s)\right\}ds$ (l'isométrie de Itô).

6. On a pour tout $0\le s\le t\le T$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^t X(u)dB(u)\mid\mathcal{F}^B(s)\right]&=0,\\ \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X(u)dB(u)\right)^2\mid\mathcal{F}^B(s)\right]&=\mathbb{E}\left[\int_0^t X^2(u)du\mid\mathcal{F}^B(s)\right].\end{aligned}$$

7. Le processus $\left(\int_0^t X(s)dB(s),\mathcal{F}^B(t)\right)_{t\in[0,T]}$ est une martingale continue de $L^2([0,T])$.

8. Pour tout $t\le T$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X(s)dB(s)\right)\left(\int_0^t Y(s)dB(s)\right)\right]=\int_0^t\mathbb{E}\left\{X(s)Y(s)\right\}ds.$$

Remarque 2.1.2 *L'isométrie de Itô, traduit le fait que líapplication $X\to\int_0^T X(s)dB(s)$ est une isométrie de $\mathcal{E}([0,T]\times\Omega)$ sur l'espace des martingales sur $[0,T]$, continues et de carré intégrable (espace que l'on notera dorénavant $M^2([0,T])$), ces espaces étant munis de leur norme naturelle.*

2.2 Extension à $\mathbb{L}^2$

On peut prolonger la définition de l'intégrale sur $\mathcal{E}([0,T]\times\Omega)$ à une classe plus large de processus. On perd le caractère gaussien de l'intégrale, ce qui est déja le cas pour le cas de processus étagé.

On définit les processus *càglàd* de carré intégrable (appartenant à $\mathbb{L}^2$) comme l'ensemble des processus $\mathcal{H}$ adaptés continus à gauche limités à droite et $\mathcal{F}^B(t)-$adaptés tels que

$$\|X\|^2 = \mathbb{E}\left\{\int_0^\infty X^2(s)ds\right\} < +\infty.$$

Evidement, les processus étagés appartiennent à $\mathcal{H}$. On dit que la suite $X_n = (X_n(t))_{n\geq 0}$ converge vers X dans $\mathbb{L}^2$ si $\|X - X_n\|^2 \to 0$ quand $n \to +\infty$ (i.e., $\mathcal{E}([0,T]\times\Omega)$ est dense dans $\mathbb{L}^2$). L'application $X \to \|X\|^2$ définit une norme qui fait de $\mathcal{H}$ un espace complet.

On peut définir $\int_0^\infty X(s)dB(s)$ pour tous les processus X de $\mathcal{H}$: on approche X par des processus étagés, soit $X(t) = \lim\limits_{n\to\infty} X_n(t)$ où $X_n(t) = \sum_{i=1}^{k(n)} \widetilde{X}^{(n)}\mathbb{I}_{[t_i,t_{i+1}[}(t)$ avec $\widetilde{X}^{(n)} \in \mathcal{F}^B(t_i)$ et la limite étant au sens de $\mathbb{L}^2$. L'intégrale $\int_0^\infty X(t)dB(t)$ est alors la limite dans $\mathbb{L}^2$ des sommes $\sum_{i=1}^{k(n)} \widetilde{X}^{(n)}(B(t_{j+1}) - B(t_j))$ dont l'éspérance est 0 et de variance $\mathbb{E}\left\{\int_0^\infty X^2(t)dt\right\}$.

Remarque 2.2.1 *Notons que* $\int_0^t X(s)dB(s) = \int_0^\infty X(s)\mathbb{I}_{[0,t[}(s)dB(s)$. *Si* X *est étagé* $\int_0^t X(s)dB(s) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(B(t_{j+1}\wedge t) - B(t_j\wedge t))$. *Plus généralement si* τ *est un temps d'arrêt, le processus* $\mathbb{I}_{[0,\tau[}(t)$ *est adapté et on définit*

$$\int_0^{t\wedge\tau} X(s)dB(s) = \int_0^t X(s)\mathbb{I}_{[0,\tau[}(s)dB(s)$$

2.2.1 Propriétés de l'intégrale stochastique sur $\mathbb{L}^2$

Dans $\mathbb{L}^2$ l'intégrale stochastique satisfait les propriétés suivantes

1. [Linéairité] : $X \to \int_0^t X(s)dB(s)$ est linéaire.
2. Pour $0 \leq s < u < t$: $\int_s^t X(v)dB(v) = \int_s^u X(v)dB(v) + \int_u^t X(v)dB(v)$.
3. Le processus $\left(\int_0^t X(s)dB(s)\right)_{t\geq 0}$ est$(\mathcal{F}^B(t))_{t\geq 0}-$adapté.

4. Le processus $\left(\int_0^t X(s)dB(s)\right)_{t\geq 0}$ est à trajectoires continues.
5. Si $\mathbb{E}\left\{\int_0^t X^2(t)dt\right\} < \infty$ pour tout $t \geq 0$, alors $\mathbb{E}\left[\int_0^t X(s)dB(s)\right] = 0$ et $Var\left(\int_0^t X(s)dB(s)\right) = \int_0^t \mathbb{E}\left\{X^2(s)\right\} ds$ (l'isométrie de Itô).
6. On a pour tout $0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^t X(u)dB(u) \mid \mathcal{F}^B(s)\right] &= 0, \\
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X(u)dB(u)\right)^2 \mid \mathcal{F}^B(s)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t X^2(u)du \mid \mathcal{F}^B(s)\right].
\end{aligned}$$

7. Le processus $\left(\int_0^t X(s)dB(s), \mathcal{F}^B(t)\right)_{t\geq 0}$ est une martingale continue de $\mathbb{L}^2$.
8. Pour tout $t \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X(s)dB(s)\right)\left(\int_0^t Y(s)dB(s)\right)\right] = \int_0^t \mathbb{E}\left\{X(s)Y(s)\right\} ds.$$

2.3 Calucl de Itô

Nous allons maintenant introduire un calcul différentiel sur ces intégrales stochastiques. On appelle ce calcul "calcul d'Itô" et l'outil essentiel en est la "formule d'Itô". La formule d'Itô donne, en particulier, la façon de différencier $t \to f(B(t))$ si f est de classe $C^{(2)}([0,T])$. L'exemple suivant prouve que le prolongement naïf du calcul différentiel usuel est voué à l'échec. Supposons que l'on veille "différencier" $t \to B(t)$ et l'exprimer en fonction de "$dB(t)$". Pour une fonction f différentiable nulle en 0, en $f^2(t) = 2\int_0^t f(s)f'(s)ds = 2\int_0^t f(s)df(s)$. Dans les cas du mouvement brownien et de l'intégrale stochastique, on ne peut avoir une telle formule du même type $B^2(t) = 2\int_0^t B(s)dB(s)$. En effet, d'après ce qui précède $\int_0^t B(s)dB(s)$ est une martingale (car $\int_0^t B^2(s)d(s) < +\infty$) nulle en 0. Si elle était égale à $B^2(t)$, elle serait une martingale positive nulle en 0, mais elle ne peut être positive que si elle est nulle.

Définition 2.3.1 *Un processus d'Itô est un processus $X = (X(t))_{0\leq t\leq T}$ adapté et continu sur $[0,T]$ de la forme*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s)\,ds + \int_0^t b(s)\,dB(s).$$

Où $a = (a(t))_{t\geq 0}$, $b = (b(t))_{t\geq 0}$ *deux processus de* $\mathbb{L}^2([0,T])$ *et* $X(0)$ *est* $\mathcal{F}^B(0)-$*mesurable. On adoptera souvent la notation différentielle stochastique suivante*

$$dX(t) = a(t)\,dt + b(t)\,dB(t).$$

2.3.1 Exemples

1. La différentielle stochastique de $(B^2(t))_{t\geq 0}$ est donnée par $dB^2(t) = 2B(t)dB(t)$.
2. La différentielle stochastique du processus $(tB(t))_{t\geq 0}$ est donnée par $d(tB(t)) = B(t)dt + tdB(t)$.
3. Pour tout $n \geq 2$ et tout un mouvement brownien $(B(t))_{t\geq 0}$ on a

$$d(B^n(t)) = nB^{n-1}(t)dB(t) + \frac{n(n-1)}{2}B^{n-2}(t)dt.$$

4. Pour tout polynôme P, on peut vérifier que

$$d(P(B(t))) = P'(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}P''(B(t))dt.$$

5. Si $f \in C^2(\mathbb{R})$, alors on a

$$d(f(B(t))) = f'(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}f''(B(t))dt.$$

2.3.2 La formule de Itô

La formule de Itô permet de déterminer de manière générale l'effet d'un changement de variables sur une différentielle stochastique. Elle prend la forme suivante

Définition 2.3.2 ([formule de Itô]) *Si* $X = (X(t))_{t\geq 0}$ *est un processus d'Itô :*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s)\,ds + \int_0^t b(s)\,dB(s),$$

et f *une fonction de classe* $C^2(\mathbb{R})$ *alors on a*

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t f'(X(s))\,dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s))\,d\langle X, X\rangle(s)$$

où, par définition $\langle X, X\rangle(t) = \int_0^t b^2(s)d(s)$, *et*

$$\int_0^t f'(X(s))\,dX(s) = \int_0^t f'(X(s))\,a(s)\,ds + \int_0^t f'(X(s))\,b(s)\,dB(s).$$

De même, si $(t,x) \to f(t,x)$ *est une fonction deux fois différentiables en* x *et deux fois différentiables en* t*, ces dérivées étant continues en* (t,x)*, on a*

$$\begin{aligned} f(t,X(t)) &= f(0,X(0)) + \int_0^t f'_s(s,X(s))\,ds + \int_0^t f'_x(s,X(s))\,dX(s) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s,X(s))\,d\langle X,X\rangle(s). \end{aligned}$$

Exemple

Traitons le cas ou $f(x) = x^2$ et $X(t) = B(t)$, donc $a(t) = 0$ et $b(t) = 1$, et
$B^2(t) = 2\int_0^t B(s)dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t 2ds$ d'où $B^2(t) - t = 2\int_0^t B(s)dB(s)$.
Comme $\mathbb{E}\left\{\int_0^t B^2(s)ds\right\} < +\infty$, on retrouve le fait que $B^2(t) - t$ est une martingale.

PROPOSITION 2.3.1 ([Formule d'intégration par parties]) *Soient* $X = (X(t))_{t\geq 0}$ *et* $Y = (Y(t))_{t\geq 0}$ *deux processus de Itô :*

$$\begin{aligned} X(t) &= X(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dB(s), \\ Y(t) &= Y(0) + \int_0^t a'(s)ds + \int_0^t b'(s)dB(s) \end{aligned}$$

Alors

$$X(t)Y(t) = X(0)Y(0) + \int_0^t X(s)dY(s) + \int_0^t Y(s)dX(s) + \langle X,Y\rangle(t)$$

avec la convention $\langle X,Y\rangle(t) = \int_0^t b(s)b'(s)ds$.

THÉORÈME 2.3.1 *Soient* μ *et* σ^2 *deux nombres réels,* $B = (B(t))_{t\geq 0}$ *un MB,* T *un nombre réel positif. Il existe un processus de Itô unique* $S = (S(t))_{T\geq t\geq 0}$ *vérifiant*

$$S(t) = S(0) + \int_0^t S(s)(\mu ds + \sigma dB(s)).$$

Ce processus est donné par

$$S(t) = x(0)\exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)\right\}.$$

1. Lorsque $\mu = 0$, le processus S est une martingale (Voir chapitre 1), ce type de processus porte le nom de martingale exponentielle.
2. Soit Θ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $X = (X(t))_{T \geq t \geq 0}$ un processus de Itô qui vérifie $\forall t \leq T : X(t) \in \Theta$. Si de plus f est une fonction réelle de classe $C^{(2)}(\Theta)$ on peut justifier rigoureusement l'extension de la formule de Itô dans ce cas

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t f'(X(s))dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s))b^2(s)ds.$$

Ce résultat permet de justifier en particulier, l'application de la formule de Itô pour les processus positifs et les fonctions $\log$.

Chapitre 3

Intégration numérique des EDS

On va voir que l'on peut adapter les méthodes d'intégration des EDO pour le calcul numérique des EDS mais que l'ordre des méthodes (c'est a dire leur vitesse de convergence) pour un même type d'approche est plus faible que pour les EDO. On commencera par considérer la **méthode d'Euler** dont on comparera le comportement dans les cas déterministe et stochastique. On s'intéressera ensuite a la **méthode de Milstein**.

3.1 Rappels sur les équations différentielles stochastiques

Une équation différentielle stochastique peut être interprétée comme une équation ordinaire perturbuée par un bruit blanc dont l'intensité $a(t, X(t))$ dépend du temps t et de la position $X(t)$) : La diffrentielle de $X(t)$ s'écrit cependant sous la forme : $dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dB(t)$ où a et b deux fonctions données et $B(t)$ est un MB. Dans ce chapitre, nous voulons exposer la représentation de l'équation différentielle stochastique et les conditions assurant l'existence et l'unicité de solutions.

DÉFINITION 3.1.1 *Soient $B = (B(t))t \in [0,T]$ un MB défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni de la filtration $(\mathcal{F}^B(t))_{t\in R_+}$, $a(t,x), b(t,x)$ deux fonctions réelles, mesurables définies sur $[0,T] \times \mathbb{R}$ et $(X(t))_{t\in[0,T]}$ un processus. Alors $X(t)$ est une solution de l'équation différentielle stochastique suivante*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} dX(t) & = & a(t,X(t))dt + b(t,X(t))dB(t) \\ X(0) & = & X_0 \ \ p.s \end{array} \right. \tag{3.1}$$

où X_0 est une variable aléatoire, si

1. X_0 est $\mathcal{F}^B(0)-$mesurable.

2. $b(t,X(t)), |a(t,X(t))|^{\frac{1}{2}} \in C^{(1)}([0,T])$.

3. $X(t)$ est différentiable vérifiant (3 :1) et on peut écrire

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s,X(s))ds + \int_0^t b(s,X(s))dB(s), \qquad t \in]0;T].$$

REMARQUE 3.1.1 *Si $b(t,X(t)) = 0$ dans (3.1) alors $X(t) = X(0) + \int_0^t a(s,X(s))ds$ est une équation différentielle stochastique ordinaire car pour tout $\omega \in \Omega : a(t,X(t,\omega) : [0;T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle mais $X(0)$ est une variable aléatoire.*

3.1.1 L'existence et l'unicité de la solution des équations différentielles stochastiques

Théorème d'existence et d'unicité Si les conditions suivantes sont satisfaites

1. **Condition de Lipschitz locale** : Pour tout $t \in [0,T]$ et tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq k^* |x-y|$$

où k^* est une constante positive.

2. Pour tout $t \in [0,T]$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$|a(t,x)| \leq \lambda(1+|x|), \qquad |b(t,x)| \leq \beta(1+|x|)$$

(où λ, β sont deux constantes positives).

3. $\mathbb{E}\left(|X_0|^2\right) < \infty$.

4. X_0 est indépendant de $\mathcal{F}^B(t)$.

alors, il existe une solution unique $(X(t))_{t\in[0,T]}$ de (3,1) telle que :

- $(X(t))_{t\in[0,T]}$ est continu p.s.
- $(X(t))_{t\in[0,T]} \in C([0,T])$.

REMARQUE 3.1.2 *Si $(X_1(t))_{t\in[0,T]}, (X_2(t))_{t\in[0,T]}$ sont deux solutions de l'équation (3.1) alors*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X_1(t)-X_2(t)|=0\right)=1.$$

DÉFINITION 3.1.2 *1. Une solution $(X(t))_{t\in[0,T]}$ de l'équation (3.1) est dite forte sur l'espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ relativement au mouvement brownien $(B(t))_{t\geq 0}$ avec la condition initiale $X(0)=X_0$ si elle est indépendante du mouvement brownien $B=(B(t))_{t\geq 0}$ et si $(X(t))_{t\in[0,T]}$ est à trajectoire p.s. continue et $\mathcal{F}^B$ adaptée.*
2. Une solution $(X(t))_{t\in[0,T]}$ de l'équation (3.1) est dite faible sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ relativement au mouvement brownien si $(X(t))_{t\in[0,T]}$ est continue et $\mathcal{F}^B$ adaptée et des fonctions $a(t,x)$ et $b(t,x)$ de L^1 et de L^2 respectivement.

THÉORÈME 3.1.1 *Soient a et b deux fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$ telles que*

$$|a(x)-a(y)|+|b(x)-b(y)|\leq k\,|x-y| \quad \textit{pour tout } k>0,\ x,y\in\mathbb{R}$$

alors pour tout $X(0)\in L^2(\Omega,\mathcal{F}(0),\mathbb{P})$ indépendant de $\mathcal{F}(t)$, il existe une solution unique $(X(t))_{t\in[0,T]}$ de

$$\begin{cases} dX(t) &= a\,(X(t))\,dt+b\,(X(t))\,dB(t)\\ X\,(0) &= X_0,\end{cases}$$

tel que $(X(t))_{t\in[0,T]}$ est p.s. continu et $(X(t))_{t\in[0,T]}\in C([0,T])$.

3.1.2 Exemples

Exemple 1 On suppose que : $a\equiv 0$ et $b(t,X(t))=g(t)X(t)$ dans l'equation (3.1) alors, le système s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} dX(t) &= g(t)X(t)dB(t)\\ X\,(0) &= X_0,\end{cases}$$

admet une solution donnée par

$$X(t)=X_0\exp\left\{\int_0^t g(s)dB(s)-\frac{1}{2}\int_0^t g^2(s)ds\right\}.$$

Preuve. Posons

$$X(t) = \int_0^t g(s)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t g^2(s)ds$$

et $y(t) = \exp\{X(t)\} = f(X(t))$, alors $X(t) = X_0 y(t)$, on peut montrer que $X_0 dy(t) = g(t)X(t)dB(t)$ car

$$dX(t) = \frac{-1}{2}g^2(t)dt + g(t)dB(t)$$

En utilisant la formule de Itô, on trouve

$$\begin{aligned} dy(t) &= \left(\frac{-1}{2}(g(t))^2 \exp\{X(t)\} + \frac{1}{2}(g(t))^2 \exp\{X(t)\}\right) dt \\ &\quad + g(t)\exp\{X(t)\}\, dB(t)dy(t) \\ &= y(t)g(t)dB(t). \end{aligned}$$

Exemple 2 Le mouvement brownien arithmétique

$$\begin{cases} dX(t) &= adt + bdB(t) \\ X(0) &= X_0 \end{cases}$$

une intégration directe du système d'équation conduit $X(t) = X_0 + a(t - t_0) + bB(t)$.

Exemple 3 Le mouvement brownien géométrique

$$\begin{cases} dX(t) &= aX(t)dt + bX(t)dB(t) \\ X(0) &= X_0 \end{cases}$$

On calcule la différentielle stochastique $d(\ln(X(t)))$ par la formule d'Itô, soit $d(\ln(X(t))) = \left(a - \frac{1}{2}b^2\right) dt + bdB(t)$. En faisant une intégration directe, on trouve

$$\ln(X(t)) = \ln(X_0) + \left(a - \frac{1}{2}b^2\right)(t - t_0) + bB(t)$$

i.e., $X(t) = X_0 \exp\left\{\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)(t - t_0) + bB(t)\right\}$. Ce processus est caractérisé par des accroissements indépendants et multiplicatifs, et définit comme une fonction de MB

$$X(t) = X_0 \exp\left\{\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)(t - t_0) + bB(t)\right\}, \quad t > 0$$

avec $X(0) = X_0,\ X_0 \in \mathbb{R}$, et $b > 0$ et a est une constante.

Exemple 4 Le processus de Oinstein-Uhlenbeck (OU)

$$\begin{cases} dX(t) &= (a - bX(t))\, dt + cdB(t) \\ X(0) &= X_0 \end{cases}$$

On considère le facteur $\phi = \exp\{bt\}$, alors

$d((X(t))) = \phi(bX(t) + dX(t)) = \phi(at + cdB(t))$ d'où

$$X(t) = \frac{a}{b}\exp\{bt_0\} + X_0 \exp\{-b(t-t_0)\} + c\int_{t_0}^{t} \exp\{-b(t-s)\}\, dB(s).$$

3.2 Intégration numérique des EDS par la méthode d'Euler

3.2.1 Schéma d'Euler

On s'intérèsse au shéma d'Euler appliqué à l'intégration numérique de l'EDS

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dB(t), \quad X(0) = X_0 = x \in \mathbb{R}^d. \tag{3.1}$$

En général, la solution de (3.1) n'a pas une forme aussi simple et l'on est obligé de recourir à une approximation de X qui correspond à une discrétisation en temps de l'équation (3.1).

On se donne une subdivision de $[0, T]$

$$\pi^n = (t_0, ..., t_k, ..., t_n) \quad \text{avec} \quad t_k = kT/n.$$

On notera $\Delta^n t = T/n$ et $\Delta^n B_{k+1} = B(t_{k+1}) - B(t_k)$. L'idée de la discrétisation d'Euler est très simple. Pour tout $k = 1, ..., n$, on a :

$$\begin{aligned} X(t_k) &= X(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} a(X(s))\, ds + \int_{t_{k-1}}^{t_k} b(X(s))\, dB(s) \\ &\simeq X(t_{k-1}) + a(X(t_{k-1}))\, \Delta^n t + b(X(t_{k-1}))\, \Delta^n B_k \end{aligned}$$

ce qui conduit à la construction du schéma

$$\begin{cases} \overline{X}^n(0) &= X_0 \\ \overline{X}^n(t_k) &= \overline{X}^n(t_{k-1}) + a\left(\overline{X}^n(t_{k-1})\right)\Delta^n t + b\left(\overline{X}^n(t_{k-1})\right)\Delta^n B_k, \quad k = 1, ..., n. \end{cases} \tag{3.2}$$

C'est l'équivalent stochastique du schéma d'Euler utilisé pour les équations différentielles ordinaires.
La simulation de $\overline{X}_n$ se ramène à la simulation des accroissements de B, où $\Delta^n B_k \sim \mathcal{N}(0, \Delta^n t I_d)$ pour tout $i = 1, ..., n$.
On introduit maintenant un schéma d'Euler "continu" de ce schéma discret

$$\overline{X}^n(t) = \overline{X}^n(t_k) + a\left(\overline{X}^n(t_k)\right)(t - t_k) + b\left(\overline{X}^n(t_k)\right)(B(t) - B(t_k)), \quad \text{pour } t \in [t_{k-1}, t_k]$$

ce que l'on peut réécrire sous forme intégrale

$$\overline{X}^n(t) = X_0 + \int_0^t a\left(\overline{X}^n(t_s)\right) ds + \int_0^t b\left(\overline{X}^n(t_s)\right) dB(s). \tag{3.3}$$

3.2.2 Ordre du schéma d'Euler

On donne les résultats de convergence connus pour le schéma d'Euler

THÉORÈME 3.2.1 *(Convergence forte). Sous l'hypothèse du théorème 3.1.1, pour tout $p \geq 1$*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq T} \left|\overline{X}^n(t) - X(t)\right|^{2p}\right] \leq \frac{C}{n^p}$$

De plus, pour tous $\alpha < 1/2$, presque sûrement

$$\lim_{n \to \infty} n^\alpha \sup_{t \leq T} \left|\overline{X}^n(t) - X(t)\right| = 0.$$

3.3 Intégration numérique des EDS par la méthode de Milstein

3.3.1 Schéma de Milstein

Dans la présentation du schéma d'Euler, on a utilisé l'approximation

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} b(X(s))dB(s) \sim b(X(t_{k-1}))(B(t_k) - B(t_{k-1}))$$

mais on aurait pû utiliser une approximation d'ordre supérieur. Pour fixer les idées, on se place en dimension 1 et on suppose que $b = 0$. Alors, pour $s \in (t_{k-1}, t_k]$

$$\begin{aligned} b(X(s)) &= b\left(X(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{s} b(X(t))dB(t)\right) \\ &\sim b\left(X(t_{k-1}) + b(X(t_{k-1}))\left(B(s) - B(t_{k-1})\right)\right) \\ &\quad \text{utilisons une formule de Taylor à l'ordre 1} \\ &\sim b(X(t_{k-1})) + b'(X(t_{k-1}))b(X(t_{k-1}))\left(B(s) - B(t_{k-1})\right) \end{aligned}$$

On utilise maintenant la formule d'Itô appliquée à $(B(s) - B(t_{k-1}))^2$, on obtient

$$(B(s) - B(t_{k-1}))^2 = 2\int_{t_{k-1}}^{t_k} (B(s) - B(t_{k-1}))dB(s) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} ds;$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{t_{k-1}}^{t_k} b(X(s))dB(s) &\sim b(X(t_{k-1}))\left(B(t_k) - B(t_{k-1})\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}b'(X(t_{k-1}))b(X(t_{k-1}))\left[(B(t_k) - B(t_{k-1}))^2 - \Delta^n t\right] \end{aligned}$$

Le terme de dérive a ayant une contribution inférieure dans l'erreur d'approximation par rapport au terme de diffusion, il n'est pas nécessaire de le corriger. Pour $d = 1$, on obtient donc le schéma d'approximation suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} \widetilde{X}^n(0) &= X_0 \\ \widetilde{X}^n(t_k) &= \widetilde{X}^n(t_{k-1}) + a\left(\widetilde{X}^n(t_{k-1})\right)\Delta^n t + b(\widetilde{X}^n(t_{k-1}))\left(B(t_k) - B(t_{k-1})\right) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}b'(X(t_{k-1}))b(X(t_{k-1}))\left[(B(t_k) - B(t_{k-1}))^2 - \Delta^n t\right], \quad k = 1, ..., n. \end{aligned} \right. \tag{3.4}$$

Le schéma défini par (3.4) est connu sous le nom de schéma de Milshtein.

En dimension d quelconque, le même raisonnement conduit à consider le shéma suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} \widetilde{X}^n(0) &= X_0 \\ \widetilde{X}^n(t_k) &= \widetilde{X}^n(t_{k-1}) + a\left(\widetilde{X}^n(t_{k-1})\right)\Delta^n t + b(\widetilde{X}^n(t_{k-1}))\left(B(t_k) - B(t_{k-1})\right) \\ &\quad +_{j,l}^{d}\left(\nabla b^{\cdot j} b^{\cdot l}\right)\left(\widetilde{X}^n(t_{k-1})\right)\int_{t_{k-1}}^{t_k}(B^j(s) - B^j(t_k))dB^l(s), \quad k = 1, ..., n. \end{aligned} \right. \tag{3.5}$$

Avec quelques hypothèses sur la régularité des coefficients b et a, ont peut annoncer des résultats quant à la convergence forte du schéma.

3.3.2 Ordre du schéma de Milstein

Théorème 3.3.1 *(Convergence forte). Supposons que b et a sont deux fonctions continûment dérivables de dérivées $1^{ère}$ et 2^{nde} bornées, alors*

$$\forall p \geq 1, \quad \max_{k \leq n} \mathbb{E}\left[\left|\widetilde{X}^n(t_k) - X(t_k)\right|^{2p}\right] \leq \frac{C}{n^{2p}}$$

De plus, pour tous $\alpha < 1$, presque sûrement $\lim_{n\to\infty} n^\alpha \max_{k\leq n}\left|\widetilde{X}^n(t_k) - X(t_k)\right| = 0$.

3.4 Applications en Finance

3.4.1 Schéma d'Euler

Exemple 1 *On se place dans le modèle de Black-Scholes :*

$$\begin{cases} dX(t) &= \tau X(t)\,dt + \sigma X(t)\,dB(t), \\ X_0 &= x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $\tau > 0$ et $\sigma > 0$. Si on considère une subdivision de pas $h = \frac{T}{n}$, le schéma d'Euler de la diffusion $X(t)$ s'écrit

$$\overline{X}^n(0) = 0, \quad \overline{X}^n((k+1)h) = \overline{X}^n(kh)\{1 + \tau h + \sigma(B((k+1)h) - B(kh))\}.$$

Pour cette diffusion, on préférera en fait résoudre l'EDS et simuler directement $(X(t_1), ..., X(t_n))$. En effet cette dernière simulation n'engendre pas d'erreur de discrétisation contrairement à l'utilisation des schémas.

Exemple 2 *On considère un processus d'Ornstein Uhlenbeck*

$$\begin{cases} dX(t) &= cX(t)\,dt + \sigma dB(t), \\ X_0 &= x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $c > 0$ et $\sigma > 0$. Ecrire le schéma d'Euler en temps continu $\overline{X}^n(t)$ de $X(t)$ sur une discrétisation de pas $h = \frac{T}{n}$. Calculer la loi de $\overline{X}^n(t) - X(t)$ pour t fixé et montrer que $\mathbb{E}\left|\overline{X}^n(t) - X(t)\right|^2 = \mathcal{O}(h^2)$.

Solution. *Le schéma d'Euler $X^n(kh)$ du processus $X(t)$ s'écrit*

$$\overline{X}^n((k+1)h) = \overline{X}^n(kh)(1 + ch) + \sigma(B((k+1)h) - B(kh))$$

Ainsi

$$\overline{X}^n(kh) = (1+ch)^k x + \sigma\sum_{i=1}^{k}(1+ch)^{k-i}(B(ih) - B((i-1)h)).$$

Pour $t \in [kh,(k+1)h]$, la version en temps continu du schéma d'Euler s'écrit

$$\begin{aligned}\overline{X}^n(t) &= (1+c(t-kh))(1+ch)^k x + \sigma(B(t) - B(kh))\\ &+ \sigma\sum_{i=1}^{k}(1+c(t-kh))(1+ch)^{k-i}(B(ih) - B((i-1)h)).\end{aligned}$$

On sait que $X(t)$ s'écrit

$$X(t) = xe^{ct} + \sigma\int_0^t e^{c(t-u)}dB_u.$$

On peut donc calculer la différence $\left|\overline{X}^n(t) - X(t)\right|$ pour $t \in [kh,(k+1)h]$.

$$\begin{aligned}\left|\overline{X}^n(t) - X(t)\right| &\leq x\left|(1+c(t-kh))(1+ch)^k - e^{ct}\right| +\\ &\sigma\left|\int_0^t (1+c(t-kh))(1+ch)^{(k-i)}\mathbf{I}_{\{i\leq u<i+1\leq k\}} - e^{c(t-u)}dB_u\right|\end{aligned}$$

d'où en prenant l'espérance du carré

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\overline{X}^n(t) - X(t)\right|^2 &\leq 2x^2\left|(1+c(t-kh))(1+ch)^k - e^{ct}\right|^2 +\\ &2\sigma^2\int_0^t\left((1+c(t-kh))(1+ch)^{(k-i)}\mathbf{I}_{\{i\leq u<i+1\leq k\}} - e^{c(t-u)}\right)^2 du\end{aligned}$$

Remarquons que $(1+c(t-kh))(1+ch)^{(k-i)}\mathbf{I}_{\{i\leq u<i+1\leq k\}}$ peut se réécrire $(1+c(t-\lfloor\frac{t}{h}\rfloor h))(1+ch)^{\lceil\frac{t-u}{h}\rceil}$. De plus $\lceil\frac{t-u}{h}\rceil = \frac{t-u}{h} + \epsilon$ où $\epsilon < 1$. Un développement limité au premier ordre permet de trouve

$$\begin{aligned}(1+c(t-\lfloor\frac{t}{h}\rfloor h))(1+ch)^{\lceil\frac{t-u}{h}\rceil} &= (1+\mathcal{O}(h))e^{c(\frac{t-u}{h}+\epsilon)(ch+\mathcal{O}(h^2))}\\ &= e^{c(t-u)}(1+\mathcal{O}(h)).\end{aligned}$$

On montre ainsi que $\mathbb{E}\left|\overline{X}^n(t) - X(t)\right|^2 = \mathcal{O}(h^2)$.

3.4.2 Schéma de Milstein

Exemple 3 Dans le modèle de Black-Scholes en dimension 1, définie par

$$\begin{cases} dX(t) &= X(t)(\tau dt + \sigma dB(t)),\\ X_0 &= x \in \mathbb{R}\end{cases}$$

Le schéma de Milstein s'écrit

$$\begin{cases} \widetilde{X}^n(0) &= X_0 \\ \widetilde{X}^n(t_k) &= \widetilde{X}^n(t_{k-1})\left\{1+(\tau-\sigma^2/2)\,\Delta^n t+\sigma\left(B(t_k)-B(t_{k-1})\right)+\frac{1}{2}\sigma^2\left(B(t_k)-B(t_{k-1})\right)^2\right\}. \end{cases}$$

Conclusion

Comme pour les EDO classiques, on ne sait pas en général intégrer de manière exacte les EDS, les méthodes numériques (Euler, Milstein) permettent d'obtenir des approximations numériques des trajectoires des EDS. Appliquées à la finance, ces méthodes permettent de calculer les prix des divers actifs financiers, qu'on ne peut pas expliciter de façon analytique.

Chapitre 4

Annexe

4.1 Modèle de Black et Scholes

4.1.1 Définition du modèle

Pour pouvoir calculer ou estimer le prix des options, il faut évidemment construire un modèle pour le prix de l'actif $(S_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Les prix des divers actifs sur un marché sont des processus aléatoires définis sur l'espace de probabilité filtré

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P}\right)$$

où $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est la filtration naturelle d'un mouvement brownien $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ standard (sous $\mathbb{P}$).

On peut dans un premier temps imaginer que le prix $(S_t)_{t\in[0,T]}$ d'un actif satisfait une équation du type

$$dS_t = \mu dt + \sigma dB_t.$$

Mais, la solution de cette équation différentielle stochastique prend des valeurs négatives, ce qui n'est pas cohérent pour modéliser un prix ! Par ailleurs, σ qui représente la variance des accroissements est constante alors qu'en pratique on observe que, lorsque le prix d'un actif augmente, la variabilité augmente également.

Le **modèle de Black et Scholes** suppose que le logarithme de S_t satisfait l'E.D.S

$$d\log(S_t) = adt + \sigma dB_t.$$

En appliquant la formule d'Itô à la fonction exponentielle, on constate que

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \tag{4.1}$$

où $\mu = a + \sigma^2/2$. Ainsi, le prix $(S_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un brownien géométrique donné par

$$S_t = \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right] = \exp[at + \sigma B_t].$$

Remarque 4.1.1 *La filtration engendrée par $(S_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est en fait la filtration naturelle du mouvement brownien $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Par ailleurs, $(S_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est bien un processus de Markov.*

On note S_t^0 la valeur en t d'un actif sans risque (capitalisation à la banque) avec rendement τ. Alors,

$$dS_t^0 = \tau S_t^0 dt.$$

Si $\sigma = 0$ un raisonnement d'arbitrage permet de montrer que $\mu = \tau$. Dans le cas général (a priori $\sigma \neq 0$), il existe une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à la probabilité historique $\mathbb{P}$ (probabilité qui nous a permis de modéliser le prix de l'actif risqué) sous

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

avec $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard sous $\mathbb{Q}$. Ainsi, pour tout $t \in [0, T]$,

$$S_t = \exp\left[\left(\tau - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right].$$

La probabilité $\mathbb{Q}$ est appelée **probabilité risque-neutre** ou **mesure martingale**. Le théorème de Girsanov permet sa construction ainsi que celle de $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. .

Proposition 4.1.1 *Pour tout $t \in [0, T]$, notons*

$$L_t = \exp\left(-\frac{\mu - \tau}{\sigma}B_t - \frac{(\mu-\tau)^2}{\sigma^2}\right).$$

Alors, $(L_t)_{t\in[0,T]}$ est une matingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, i.e que *(i) pour tout t, L_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable intégrable,*

(ii) et pour tout $s < t$, $\mathbb{E}(L_t|\mathcal{F}_s) = M_s$.

Par ailleurs, sous la probabilité $\mathbb{Q}$ de densité L_T par rapport à $\mathbb{P}$, le processus W défini par

$$\forall t \in [0,T],\ W_t = B_t + \frac{\mu - \tau}{\sigma} t$$

est un mouvement brownien standard.

REMARQUE 4.1.2 *Les filtrations engendrées par $(B_t)_{t\in[0,T]}$, $(W_t)_{t\in[0,T]}$ ou $(S_t)_{t\in[0,T]}$ sont les mêmes.*

REMARQUE 4.1.3 *Notons que*

$$dW_t = dB_t + \frac{\mu - \tau}{\sigma} dt$$

et donc que S vérifie bien l'E.D.S. suivante

$$dS_t = S_t(\tau dt + \sigma dW_t).$$

PROPOSITION 4.1.2 *Sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$ définie par la proposition 5.2.1, le prix actualisé $\widetilde{S}$ défini par*

$$\forall t \in [0,T],\ \widetilde{S}_t = S_t e^{-\tau t}$$

est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-martingale.

REMARQUE 4.1.4 *W et $\mathbb{Q}$ sont tels que*

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t \sigma dW_t.$$

Bibliographie

[1] N. Bouleau et D. Lepingle. Numerical methods for stochastic processes, Wiley Series in Probability and Mathematical statistics 1994.

[2] F. Comets et T. Meyre. Calcul stochastique et modèles de diffusion.Dunod, 2006.

[3] O. Faure. Simulation du Mouvement Brownien et des Diffusions. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1992.

[4] D. Foata et A. Fuchs. Processus stochastiques, Dunod 2004.

[5] P. Glasserman. Monte Carlo methods in financial engineering.Springer, 2003.

[6] P.W. Glynn. Optimization of stochastic systems via simulation. InProceedings of the 1989 Winter simulation Conference, pages 90–105. San Diego, Society for Computer Simulation, 1989.

[7] I. Karatzas et S.E. Shreve. Methods of mathematical finance, Applications of Mathematics, Stochastic Modelling and Applied Probability, 39, Springer-Verlag, New York, 1999.

[8] I. KARATZAS ET S.E. SHREVE. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Graduate Texts in Mathematics, 113, Springer-Verlag, New York, 1998.

[9] P.E. KLOEDEN AND E. PLATEN. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer Verlag, 1992.

[10] D. LAMBERTON AND B. LAPEYRE. Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance. Ellipses Édition Marketing, Paris, second edition, 1997. ISBN2-7298-4782-0.

[11] B. LAPEYRE AND E. PARDOUX AND R. SENTIS. Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et diffusion. Springer-Verlag, 1998.

[12] M. LEFEBVRE. Applied stochastic processes, Springer, 2000.

[13] N.J. NEWTON. Variance reduction for simulated diffusions. SIAM J. Appl. Math., 54(6) :1780–1805, 1994.

[14] B. OKSENDAL. Stochastic Differential Equations, Springer, 2005.

[15] P. PROTTER. Stochastic Integration and Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[16] D. REVUZ AND M. YOR. Continuous Martingales and Brownian Motion. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[17] R. Y. RUBINSTEIN. Simulation and the Monte Carlo Method. John Wiley and Sons, 1981.

[18] D. TALAY. Simulation and numerical analysis of stochastic differential systems : a review. In P. Krée and W. Wedig, editors, Probabilistic Methods in Applied Physics, volume 451 of Lecture Notes in Physics, chapter 3, pages 54–96. Springer-Verlag, 1995.

[19] D. TALAY. Discrétisation d'une équation différentielle stochastique et calcul approché d'espérances de fonctionnelles de la solution, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 20, 141-179, 1986.