République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



**Mémoire**

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Master Académique en Mathématiques**

Option : **Probabilités et applications**

Par :

**M**elle **Mekhania Nadjat**

**M**me **Bennour Amel**



## Intitulé

# Systèmes stochastiques d'ordres fractionnaires dans les espaces de Hilbert

Dirigé par : Dr.Debbouche Amar

Devant le jury

| | | | |
|---|---|---|---|
| PRESIDENT | Dr. A. Benchabane | MCB | Univ-Guelma |
| RAPPORTEUR | Dr. A. Debbouche | MCA | Univ-Guelma |
| EXAMINATEUR | Dr. A. Ezzebsa | MCB | Univ-Guelma |

Session Juin 2014

# Remerciement

Ce travail a été réalisé grâce D'ALLAH le tout puissant qui veille du haut du firmament.

Nos remerciements à notre encadreur en la personne de

Dr : DEBBOUCHE AMAR.

Pour ses précieux conseils, ses recommandations et ses orientations pour progresser dans un domaine clé du savoir.

Nous remercions également tous les enseignants de la Département pour l'œuvre accompli dans la transmission des savoirs, ainsi que à tous les personnes ayant contribuée à la réalisation de notre travail.

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Ce lui qui nous à quitté. Et qui restera toujours dans mon cœur à mon papa : *SALAH* à celle qui à porte dans son ventre et qui ma toujours soutenu. A maman : *HABBIBA* Que dieu leur procure bonne santé et longue vie. A celui que j'aime beaucoup et qui m'a soutenue tout au long de vit et bien sur

A mes frères BOUBAKAR et SALEM.

Ma sœur OUIAM (KOKA).

Sant oblier a toute ma famille, et mes amis Wassila, Sihem, Amel, Soussou, Asma. Et toute ma famille MEKHANIA.

Et à mon binôme Amel.

Et toute la promo de probabilités et applications 2014.

Et je tiens à remercier les membres de la commission présidée.

Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible, je vous dis merci.

NADJAT

# Dédicaces

Je remercie ALLAH qui ma donnée la bravoure et la force pour accomplissement mon mémoire.

Je dédie ce mémoire pour mes parent Tebani et Fariha ; mon marie Tarek à ce lui que j'âme beaucoup ; à mes frères : Abdelali, Yazid, Abdelatif et Rouchdi; à ma sœur Souria et leurs enfants :Manar,Uijden,Abderahim ; à mon binôme: Najet;pour mes amis : Rima,Sara,Amel ,Sousou, Ilhem et Asma qui m'ont soutenu tout au long de réalisation de ce mémoire et je remercie tous ceux qui ont contribué à cette élaboration et ceux qui ont porté leurs aide que ce soit finance ou psychologique et à cette occasion je tiens a remercier les membres de la commission présidées.

AMEL

# Table des matières

# Introduction

– **Historique de calcul fractionnaire**

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la $17^{ème}$ siècle, l'époque où **Newton** et **Leibniz** ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, **Leibniz** a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la $n^{ème}$ dérivée d'une fonction $f$. Quand il a annoncé dans une lettre à l'**Hôpital** (apparemment avec l'hypothèse implicite que n ), l'**Hôpital** a répondu :

Que signie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = 1/2$ ?

Cette lettre de **l'Hôpital**, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que **l'Hôpital** a demandé spécifiquement pour $n = 1/2$, c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) . Il y a beaucoup mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au caclul fractionnaire jusqu'au milieu du $20^{ème}$ siècle, inclut :**P.S. Laplace** (1812), **J.B.J. Fourier** (1822), **N.H. Abel** (1823-1826), **J. Liouville** (1832-1873), **B. Riemann** (1847), **H. Holmgren** (1865-67),...,**D.V. Widder** (1941), **M. Riesz** (1949). Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi, depuis seulement un peu plus de trente années elle a été objet de conférences spécialisées. Pour la premièr conférence, le mérite est attribué à **B. Ross** qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de **New Haven** en juin 1974, et il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué à **K.B. Oldham** et **J. Spanier**, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration commune, commencé en 1968. Une autre théorie se développe en parallèle de la dérivation fractionnaire telle est la théorie des systèmes dynamiques, qui a pour but l'étude des systèmes physiques, . . . , qui évoluent au cours du temps. Elle a son origine dans les travaux d'**Henri**

**Poincaré** (1854–1912), à la $19^{éme}$ siècle, sur le problème des trois corps. **Poincaré** a proposé, au lieu de s'intéresser à une solution particulière du système, d'utiliser des arguments topologiques et géométriques,..., pour déterminer les propriétés de l'ensemble de toutes les solutions.

– **Historique de calcul stochastique**

Le calcul stochastique est une branche des mathématiques qui fonctionne sur les processus stochastiques. Il permet une théorie cohérente de l'intégration à définir pour les intégrales de processus stochastiques par rapport aux processus stochastiques. Il est utilisé pour modéliser des systèmes qui se comportent de façon aléatoire. Le processus stochastique la plus connue à laquelle le calcul stochastique est appliqué est le processus de **Wiener** (nommé en l'honneur de **Norbert Wiener**), qui est utilisé pour modéliser le mouvement brownien comme décrit par **Louis Bachelier** en 1900 et par **Albert Einstein** en 1905 et d'autres processus de diffusion physique dans l'espace des particules soumises à des forces aléatoires. Depuis les années 1970, le processus de **Wiener** a largement appliquée en mathématiques financières et de l'économie de modéliser l'évolution dans le temps des prix des actions et les taux d'intérêt des obligations. Les principales saveurs de calcul stochastique sont le calcul d'**Itō** et son variationnelle rapport du calcul de **Malliavin.** Pour des raisons techniques l'intégrale **Itō** est le plus utile pour les classes générales de processus.

– Dans ce mémoire contient trois chapitres :

Tout d'abord, au **chapitre**1, nous fournissons des définitions et espace fondamental, lemmes et théorème et des notations nécessaires d'établir dans les deux chapitres suivante .

Au **chapitre**2, nous examiner le controlabilité approximative pour une classe d'équation différentielle stochastique fractionnaire non-local de la forme

$$\begin{aligned} {}^{c}D_t^q x(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \int_0^t f(s, x(s))\, ds + \sigma(t, x(t)) \frac{dw(t)}{dt}, t\epsilon J \\ x(0) + g(x) &= x_0 \end{aligned}$$

où $0 < q < 1$;${}^{c}D_t^q$ désigne l'opérateur de dérivé fractionnaire de **Caputo** d'ordre $q$, $x(.)$ prend ses valeurs dans l'espace de Hilbert $X$ ; $A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact des opérateurs linéaires uniformément bornés $\{Q(t), t \geqslant 0\}$, la fonction de contrôle $u(t)$ est donnée dans $L_\Gamma^2([0, b], U)$ ,qui est un espace de fonctions de contrôle admissible,$U$

est un espace de Hilbert, $B$ est un opérateur linéaire bornée de $U$ dans $X$, $f : J \times X \to X$ et $\sigma : J \times X \to L_2^0$ sont des fonctions appropriées, $x_0$ est $\Gamma_0-$mesurables $X-$valeurs de variable aléatoire indépendantes de $w$. et nous allons examiner la controlabilité et la contunuité, l'existence et l'unicité du solution mild et donnons un exemple.

Et **chapitre3**, nous allons examiner l'existence et l'unicité de solutions moyenne carrés presque asymptotiquement automorphe de l'équation stochastique fractionnaire sous la forme suivante

$$\begin{aligned} d\left[x(t) - f(t, x(t))\right] &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} A\left[x(s) - f(s, x(s))\right] \, ds \, dt \quad (1) \\ +g(t, x(t))\, dW_1(t), \quad t &\geq 0, \\ x(0) &= u_0 \frac{dW_2}{dt}, \end{aligned}$$

Où $1 < \alpha < 2$, $A : D(A) \subset L^2(P, H) \to L^2(P, H)$ est un opérateur linéaire densément défini de type sectoriel sur un espace de Hilbert $L^2(P, H)$, $W_1(t)$ et $W_2(t)$ sont deux mouvement brownien standard à une dimension définie sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$, Où $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_1(u) - W_1(v) ; \; u, v \leq t\}$, et $u_0$ est un $\mathcal{F}_0$-adapté, $H$-estimé variable aléatoire indépendant de la processus de **Wiener** $W_1$. On supose $f$ et $g$ sont des fonctions appropriés seront précisées ultérieurement. L'intégrale de convolution dans (1) est compris dans l'intégrale fractionnaire de **Riemann–Liouville**. Nous remarquons que l'ordre peut être fractionnée complexe de point de vue des mathématiques pures et il est beaucoup d'intérêt dans le développement de l'analyse théorique et la méthode numérique aux équations fractionnaires, parce qu'ils ont récemment avérée précieuse dans divers domaines de la science et génie.

Le concept de fonction est presque asymptotiquement automorphes tout d'abord introduit par **N'Guérékata**. Depuis lors ces fonctions sont devenues un grand intérêt pour plusieurs mathématiciens et beaucoup de développements et applications acquise.

# Chapitre 1

# Espace de base

## 1.1 Espace métrique

**Définition 1.1.1** *On appelle distance sur un ensemble $E$ tout application de $E \times E \to \mathbb{R}^+$ tq*

$d(x,y) = 0$ ssi $x = y$ .
$d(x,y) = d(y,x) \ \ \forall x,\, y \in E$ (symétrique) .
$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \ \ \forall x,\, y,\, z \in E$ (l'inégalité triangulaire) .

**Définition 1.1.2** *Soit $(E,d)$ un espace métrique une suite de* ***cauchy*** *dans $E$ est une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenne dans $E$ , et satisfaisant le critére* ***cauchy*** *:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall p,\ q > N,\ d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

**Définition 1.1.3** *Un espace métrique $E$ est dit complet si tout suite de* ***cauchy*** *est converge dans $E$ .*

**Définition 1.1.4** *Une partie $K$ d'un espace métrique $E$ est compact si et seulement si l'une des assertions cequivalentes suivantes vérifiée :*

Critére de **Berel–Lebesge** avec des ouverts **:** De tout recouvrement de $K$ par des ouverts on peut extraire un sous recouvrement fini cela signifie que si $K \subset \cup_{i\in I} U_i$, avec $U_i$ des ouverts , alors il existe une partie finie$J$ de $I$ tq $K \subset \cup_{i\in J} U_i$.

Critére de **Borel–Lebesque** avec des fermés **:** Si $\cap_{i\in I}, F_i \cap K = \phi$ pour des fermés $F_i$ alors il existe une partie finie $J$ de $I$ tq $\cap_{i\in J} K = \phi$ .

Critére de **Balzano–Weicntrasse :** De tout suite d'élèments de $K$ . On peut extraire une sous-suite qui converge vers un élèment de $K$ .

**Définition 1.1.5** *On appelle ouvert d'un espace métrique* $(X, d)$ *toute partie* $O$ *de* $X$ *qui est non vide est vérifie* :$\forall x \in O$, $\exists r > 0$, $B(x, r) \subset O$.

**Définition 1.1.6** *On appelle fermé toute partie de* $X$ *dans le complémentaire est ouvert.*

**Définition 1.1.7** *Une partie* $A$ *de* $X$ *est dite dense dans* $X$ *si* $\bar{A} = X$.

## 1.2 Espace de Banach

On appelle espace de **Banach** tout espace vectoriel normé complet .

### 1.2.1 Inégalité de Hölder :

Soient $(E, T, m)$ un espace mesuré et $p, q \in ]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Soient $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $g \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Alors, $f\ g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et

$$\|f\ g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Le même résultat est vrai avec $L^p, L^q$ et $L^1$au lieu de $\mathcal{L}^p, \mathcal{L}^q, \mathcal{L}^1$.

### 1.2.2 Théorème de convergence dominé de Lebesgue :

Soit $(S, T, m)$ un espace mesuré, et soit $(f_n)_{n \geq 1}$une suite d'applications mesurable $f_n : s \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ où $\mathbb{C}$, on suppose que :

1/ la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge p.p vers une fonction mesurable $f : s \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ où $\mathbb{C}$ (définie p.p) ;

2/ il existe une fonction intégrable $g : s \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ positive telle que l'on ait la condition de domination :

$$|f_n| \leq g \text{ p.p} \qquad \forall n \geq 1.$$

Alors, les fonction $f_n$ et $f$ sont intégrables et :

$$\int_s f dm = \lim_{n \to \infty} \int_s f_n dm$$

de même :

$$\lim_{n \to \infty} \int_s |f_n - f| \, dm = 0.$$

## 1.3 Espace séparable

Est un espace topologique contenant un sous-ensemble dénombrable et dense, c'est-à-dire si l'on peut trouver une suite dont l'adhérence est égale à l'espace topologique tout entier.

Tout espace métrisable séparable est un espace à base dénombrable et a donc au plus la puissance du continu. Sont de ce type la plupart des espaces usuels. Une base dénombrable est une propriété beaucoup plus forte, et bien plus intéressante, qu'est séparable.

## 1.4 Espace de Hilbert

**Définition 1.4.1** *Produit scalaire*

Soit $H$ un espace vectoriel normé, on appelle produit scalaire $\langle\rangle$ , toute application

$\{H \times H \rightarrow K,\ \ (x, y) \rightarrow \langle x, y\rangle\}$ , vérifiant

$(i)$ $\forall x \in H,\ \langle x, x\rangle \geq 0,$

$(ii)$ $\forall x, y \in H, \forall\lambda \in K,\ \underline{\langle x + \lambda y, z\rangle} = \langle x, y\rangle + \lambda\,\langle y, z\rangle$ ,

$(iii)$ $\forall x, y \in H,\ \langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ (La conjugué de $\langle x, y\rangle$),

$(iv)$ $[\langle x, x\rangle = 0] \Longleftrightarrow [x = 0]$ .

Un espace $H$ muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien (réel ou complexe) . Si $\dim(H) < \infty$ , on dit que $H$ est un espace euclidien (si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$) oú si $H$ est un espace préhilbertien, il est normé par $x \rightarrow \|x\| = \langle x, x\rangle$ .

**Définition 1.4.2** *Espace de Hilbert H*

Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet .

**Définition 1.4.3** *Systémes orthonormé*

Soit $E$ un espace préhilbertien. Soit $(u_n)$ une famille finie $(0 \leq n)$ où infinie ($n \in \mathbb{N}$ ou $n \in \mathbb{Z}$) de vecteurs de $E$. on dit que $(u_n)$ est un systéme orthonormé dans $E$ si on a, pour tout $p, q$ : $\langle u_p, u_q\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p = q \\ 0 & \text{si} \quad p \neq q \end{cases}$

**Définition 1.4.4** *L'orthogonalité*

i) On dira que $u$ est orthogonal à $v$ si et seulement si $\langle u, v\rangle = 0$,

ii) Si $F$ est un sous-ensemble de $H$ on dira qu'un élément $u$ de $H$ est orthogonale à $F$ s'il est orthogonal à tous ses éléments :

$$\forall v \in F,\ \ \langle u, v\rangle = 0.$$

ii) On appelle orthogonal de $F$ L'ensemble noté $F^{\perp}$

$$F^{\perp} = \{u \in H.\ \langle u, v\rangle = 0 \qquad \forall v \in F\}.$$

## 1.5 Espace $L^p$

Dans la partie suivante, on note par $\Omega$ un overt de $\mathbb{R}^d$.

**Définition 1.5.1** *Soit $f$ et $g$ deux fonctions mesurables. On dit que $f$ et $g$ sont égales presque partout si $\{x \in \Omega,\ /f(x) \neq g(x)\ \}$ est un ensemble négligeable.*

### Espace $L^1(\Omega)$

La relation "$f = g \quad pp$" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^1(\Omega)$. On peut

donc considérer l'espace quotient, qui est l'ensemble des classes d'équivalence.

**Définition 1.5.2** *$L^1(\Omega)$ est le quotient de $\mathcal{L}^1(\Omega)$ par la relation d'équivalence*

"égalité presque partout dans $\Omega$"

Autrement dit , par la

$$L^1(\Omega) = \{f \text{ définie sur } \Omega \text{ à un ensemble négligable prés}; \int_\Omega |f(x)|\, dx < +\infty\}.$$

### Espace $L^2(\Omega)$

De méme que pour $L^1(\Omega)$, on quotiente $\mathcal{L}^2(\Omega)$ par la relation d'équivalence "égalité presque partout dans $\Omega$"

Autrement dit,

$$L^2(\Omega) = \{f \text{ définie sur } \Omega \text{ à un ensemble négligeable prés } \left(\int_\Omega |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} < +\infty\}.$$

### Espace $L^p(\Omega)$

L'espace vectoriel $L^P(\Omega)$ est le quotient de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ par la relation d'équivalence "égalité presque partout dans $\Omega$" Autrement dit, on a

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &= \{\text{définie sur } \Omega \text{ à un ensemble négligeable prés,} \\ \text{telle que } \left(\int_\Omega |f(x)|^P dx\right)^{1/p} &< +\infty\}. \end{aligned}$$

### Espace $L^\infty(\Omega)$

On dit qu'une fonction $f$ est essentiellement bornée sur $\Omega$ si il existe un réel positif $M$ telle que

$$\mu(\{x \in \Omega;\ |f(x)| \geq M\}) = 0$$

**Définition 1.5.3** *$L^\infty(\Omega)$ est le quotient de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ par la relation d'équivalence*

"égalité presque partout"
Autrement dit,

$$\begin{aligned} L^\infty(\Omega) &= \{f \text{ définie sur } \Omega \text{ à un ensemble négligeable prés;} \\ &\quad f \text{ est essentiellement bornée}\} \end{aligned}$$

La norme définie par

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{M \geq 0; (\{x \in \Omega;\ |f(x)| \geq M\}) = 0\}.$$

## 1.6 Espace de probabilité

**Définition 1.6.1** *Tribu*

Soit $\Omega$ un ensemble, une famille non vide $\mathcal{F}$ de sous ensemble de $\Omega$ s'appelle une tribu (où $\sigma-$algébre) si :
1) $\Omega \in \mathcal{F}$;
2) Pour tout $A \in \mathcal{F}$, on à $A^c \in \mathcal{F}$;
3) Pour tout famille $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$d'éléments de $\mathcal{F}$, on a $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

**Définition 1.6.2** *Une filtration* $(F_t)_{t\geq 0}$ *est une suite croissante de sous tribus de* $F$.

Si $(F_t)_{t\geq 0}$ est une filtration de $(\Omega, F, p)$ alors$(\Omega, F, (F_t)_{t\geq 0}, p)$ est appelé espace de probabilité filtré.

**Définition 1.6.3** *Mesure de probabilité*

Une mesure sur un tribu $\mathcal{F}$ est une application $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ telle que :
1) $\mu(\phi) = 0$,
2) $\sigma-$addivité : pour tout famille $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$, disjoints deux à deux $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$,
si de plus $\mu(\Omega) = 1$, $\mu$ est une mesure de probabilité, et on notra $P$.

**Définition 1.6.4** *Espace probobilisé*

Si $\mathcal{F}$ est une tribu sur $\Omega$ , $(\Omega, \mathcal{F})$ est appelé espace mesurable et les élèment de $\mathcal{F}$ sonts dits mesurable .
Si $\mu$ est une mesure, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est appelé un espace mesuré .
Si $P$ est une probabilité, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est une espace probabilisé .
Si $\mathcal{F}_t$ est une filtration, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t,\ P)$ est une espace de probabilité filtré
.

## 1.7 Semigroupes

### 1.7.1 Semigroupe uniformement continue d'opérateurs linéaire bornée

**Définition 1.7.1** *Soit* $X$ *est un espace de Banach. Le paramétre de famille* $T$, $0 \leq t \leq \infty$, *d'opérateur linéaire bornée de* $X$ *dans* $X$ *est un semigroups d'opérateur linéaire bornée sur* $X$ *si :*

$(i)$ $T(0) = I$, ($I$ est l'opérateur identité sur $X$) .
$(ii)$ $T(t+s) = T(t)T(s)$ pour tout $t, s \geq 0$ (propriété de semigroups).
Le semigroupe d'opérateur linéaire bornée, $T(t)$ , est uniformement continue

$$\lim_{t\downarrow 0} \|T(t) - I\| = 0.$$

L'opérateur linénaire $A$ définie par

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ exists} \right\}$$

et

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^{+}T(t)x}{dt}|_{t=0} \text{ pour } x \in D(A)$$

est le générateur infinitesimal de semigroupe $T(t)$, $D(A)$ est le domaine de $A$. Cet section dévoué d'étudier le semigroupe uniformement continue d'opérateurs linéaires bornés. D'aprés la définition, il est clair que si $T(t)$ semigroupe uniformement continue d'opérateur linéair bornée alors

$$\lim_{s \to t} \|T(s) - T(t)\| = 0$$

**Théorème 1.7.1** *L'opérateur linéaire $A$ est un générateur infinitesimal du semigroupe uniformement continue si et seulement si $A$ est l'opérateur linéaire bornée .*

### 1.7.2 Semigroupe fortement continue d'opérateurs linéaires bornés

Dans cet section $X$ est un espace de Banach.

**Définition 1.7.2** *Le semigroupe $T(t)$. $0 \leq t \leq \infty$; d'opérateur linéaire borné sur $X$ est un semigroupe fortement continue d'opérateur linéaire borné si*

$$\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x \quad \textit{pour tout } x \in X.$$

Le semigroupe fortement continue d'opérateur linéaire borné sur $X$ est appellée le semigroupe de class $C_0$ où simplement $C_0$-semigroupe.

### 1.7.3 Semigroupe campact

**Définition 1.7.3** *$T(t)$ est $C_0-$semigroupe est noté campact pour $t > t_0$ si pour tout $t > t_0 \geq 0$ , $T(t)$ est campact . $T(t)$ est noté campact si il est campact pour $t > 0$.*

### Dérivée fractionnaire de Riemann–Liouville

La dérivée fractionnaire au sense de **Riemann–Liouville** de la fonction $f$ d'ordre $0 < \alpha < 1$ est :

$$_{\alpha}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{t} f(s)(t-s)^{-\alpha} ds$$

où $f$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.

### Dérivée fractionnaire de Caputo

La dérivée fractionnaire de **Caputo** d'ordre $r > 0$ de $f \in L^1$ est :

$$D_c^r = D_l^r (f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0)$$

où $f$ est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.

## 1.9 Les opérateurs

Soient $H_1$ et $H_2$ deux espaces de banach.

**Définition 1.9.1** *Soit $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$. $A$ est dit borné si il existe une constante $C > 0$ telle que $\|Au\| \leq C\|u\| \quad \forall u \in H_1$.*

**Définition 1.9.2** *Soit $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ On dit que $A$ est un opérateur non borné s'il existe une suite $(u_n) \subset D(A)$ tq : $\|u_n\|_{H_1} = 1$ et $\|Au_n\|_{H_2} \longrightarrow \infty$.*

## 1.10 Théorème du point fixe de Banach

**Définition 1.10.1** *Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I$.*

On dit que $\alpha$ est un point fixe de $g$ lorsque $g(\alpha) = \alpha$.
En d'autres termes, les points fixes de $g$ sont les solutions, lorsqu'elles existent de l'equation $g(\alpha) = \alpha$.

**Définition 1.10.2** *application contractante*

Soit $A$ une application de $V$ dans $V$ . On dit que$A$ est contractante s'il existe un réel $\alpha$ strictement inférieur à 1 tel que

$$\forall u, w \in V : \|A(u) - A(v)\|_v \leq \alpha \|u - w\|_v$$

**Théorème 1.10.1** *Soient $E$ un Banach et $f : E \to E$ une application $K$ contractante Alors :*

la fonction $f$ admet un point fixe $t$ sur $E$ (c'est-à-dire $\exists! t \in E$, $f(t) = t$, $t$ est la limite de toute suite $(U_n)$ de $E$ définie par $u_0 \in E$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ .Contractante (c'est-à-dire lipschtzienne avec $K < 1$).

# 1.11 Analyse stochastique

## 1.11.1 Processus stochastiques

**Définition 1.11.1** *Soit $T$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.*

Un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ dans $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ est une famille de variables aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ indexée par $T$ .

Pour $w \in \Omega$ fixé, $t \to X_t(w)$ est appelée trajectoire.

**Définition 1.11.2** *Soit $(X_t)$ un processus et $(F_t)$ une filtration de $(\Omega, F, p)$.*

On dit que $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est adapté à la filtration $(F_t)_{t \geq 0}$ si

$$\forall t \geq 0, X_t \text{ est } F_t - mesurable.$$

**Définition 1.11.3** *Un processus $(X_t)$ est appelé un processus à trajectoires continues (où simplement processus continu) si*

$$p\left(\{w \in \Omega : t \to X_t(w) \text{ est continu}\}\right) = 1$$

**Définition 1.11.4** *Un processus $X = (X_t)_{t \in T}$ est un processus gaussien si toutes ses lois de dimension finie sont gaussiennes i.e.*

$$\forall n \geq 1, \quad \forall t_1 < t_2 < \; ..., t_n \in T, \; (X_{t_1}, ..., X_{t_n}) \text{ est un vecteur}$$

gaussien.

**Proposition 1.11.2** *Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien définie sur un espace de probabilité $(\Omega, F, P)$ alors*

*a) Symétrie.*
Le processus $(-B) = (-B_t)_{t\geq 0}$ est encore un mouvement brownien.
*b) Changement d'échelle (scaling).*
Soit $\lambda > 0$, le processus $B^\lambda = (B_t^\lambda)_{t\geq 0}$ avec $B_t^\lambda = (1/\lambda)B_{\lambda^2 t}$ est encore un mouvement brownien .
*c) Propriété de Markov simple.*
Pour $s \geq 0$, posons $F_s := \sigma(B_u, u \leq s)$ et $B_t^{(s)} = B_{t+s} - B_s$.
alors $B^{(s)} = (B_t^s)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $F_s$.

**Définition 1.11.8** *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique*

1. On dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable si :

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \sup_{t\geq 0} \int_{(|X_t|>\alpha)} |X_t|\, dp = 0$$

2. Si $p \geq 1$,on dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est borné dans $L^p$ si :

$$\sup_{t\geq 0} E[|X_t|^p] < \infty.$$

**Proposition 1.11.3** *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique :*

1) S'il existe une variable aléatoire réel positive et intégrable $Z$ telle que $|X_t| \leq Z, \forall t \geq 0$, alors
$X = (X_t)_{t\geq 0}$est uniformément intégrable.
2) Si soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est borné dans $L^p$ ,$(p > 1)$, alors $X = (X_t)_{t\geq 0}$est uniformément intégrable.

### 1.11.3 l'intégrale stochastique

Soit $B_t$ un mouvement brownien sur $(\Omega, F, P), (F_t)_{t\geq 0}$ sa fitration naturelle , et $\sigma$ processus adapté à $\mathcal{F}$ on suppose $\sigma$ vérifie:

$$E\left(\int_0^T \sigma_s^2 ds\right) < \infty.$$

Alors, l'intégrale stochastique de $\sigma$ par rapport à $B_t$ et la variable aléatoire :

$$\int_0^T \sigma_s dB_s = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \sigma_{n-1}\left(B_n - B_{n-1}\right).$$

**Proposition 1.11.4** *On à les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned} E\left[\langle H, B\rangle\right] &= 0, \\ E\left[\langle H, B\rangle_T^2\right] &= E\left[\int_0^T H_s^2 ds\right] \end{aligned}$$

La seconde égalité ci dessus est appellée **L'isometrie d'Ito.**

**Propriétés de l'intégrale stochastique :**

1. Linéarité :

$$\langle (cH + K), B\rangle_t = c\langle H, B\rangle_t + \langle K, B\rangle_t, \quad \text{ps}$$

2. Espérance nulle et isométrie :

$$\begin{aligned} E\langle H, B\rangle &= 0, \\ E\left(\langle H, B\rangle_t\right)^2 &= E\left(\int_0^t H_t^2 ds\right). \end{aligned}$$

# Chapitre 2

# Contrôlabilité approximative d'équations fractionnaire d'evolution stochastique

## 2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'examiner la controlabilité approximative pour une classe d'équation différentielle stochastique fractionnaire non-local de la forme

$$\begin{aligned} {}^{c}D_{t}^{q}x(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \int_{0}^{t} f(s, x(s)) .ds \\ &\quad + \sigma(t, x(t)) \frac{dw(t)}{dt}, \ t \epsilon J \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

$$x(0) + g(x) = x_0 \tag{2.1.2}$$

où $0 < q < 1; {}^{c}D_{t}^{q}$ désigne l'opérateur de dérivé fractionnaire de **Caputo** d'ordre $q$, $x(.)$ prend ses valeurs dans l'espace de Hilbert $X$ ; $A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact des opérateurs linéaires uniformément bornés $\{Q(t), t \geqslant 0\}$ , la fonction de contrôle $u(t)$ est donnée dans $L_{\Gamma}^{2}([0, b], U)$ ,qui est un espace de fonctions de contrôle admissible, $U$ est un espace de Hilbert, $B$ est un opérateur linéaire bornée de $U$ dans $X$, $f : J \times X \to X$ et $\sigma : J \times X \to L_{2}^{0}$ sont des fonctions appropriées, $x_0$ est $\Gamma_0-$mesurables $X-$valeurs de variable aléatoire indépendantes de $w$.

## 2.2 Préliminaires

Dans cette section, nous fournissons des définitions, lemmes et des notations nécessaires d'établir nos résultats principaux. Partout dans ce chapitre, nous utilisons les notations suivantes. Soit $(\Omega, \Gamma_b, P)$ Un espace de probabilité complet est équipé d'une filtration normale $\Gamma_t, t \in J = [0, b]$ vérifier des conditions normale (c'est -à-dire, continue à droite et $\Gamma_0$ contient tous les ensembles de P-nul).

Nous considérons les trois espaces séparables réels $X$, $E$ et $U$, et le processus $Q_1-$**wiener** sur $(\Omega, \Gamma_b, P)$ avec l'opérateur covariance borné $Q_1$ tel que $trQ_1 < \infty$. On suppose qu'il existe un système orthonormé complet $\{e_n\}_{n\geq 1}$ dans $E$ une suite de nombre réels non-négatifs $\{\lambda_n\}$ tel que $Q_1 e_n = \lambda_n e_n, n = 1, 2, ...$, et une suite $\{\beta_n\}_{n,\ 1}$de mouvements brownien indépendents tel que

$$\langle w(t).e\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \langle e_n.e\rangle \beta_n(t).\ e \in E, t \in [0, b] = J$$

et $\Gamma_t = \Gamma_t^w$, et $\Gamma_t$ est le sigma d'algébre engendrée par $\{w(s) : 0 \leq s \leq t\}$.

Soit $L_2^0 = L_2\left(Q_1^{\frac{1}{2}} E; X\right)$ l'espace de tout les opérateurs de **Hilbert–schmidt** de $Q_1^{\frac{1}{2}} E$ à $X$ avec le produit scalaire $\langle \psi, \pi\rangle\, L_2^0 = tr\left[\psi Q_1 \pi^*\right]$. Soit $L^2(\Gamma_b, X)$ l'espace de Banach de tous les $\Gamma_b-$mesurable de variable aléatoite carrés intégrables avec des valeurs dans l'espace de Hilbert $X$.

Soit $E(.)$ désigne l'espérance de l'espace de Banach de tous les variables aléatoires carrés intégrables par rapport à la mesure $P$.

Soit $C([0, b]; L^2(\Gamma, X))$ l'espace de Banach des applications continues de $[0, b]$ dans $L^2(\Gamma, X)$ satisfaisant $\sup_{t\epsilon J} E\|x(t)\|^2 < \infty$. Soit $H_2([0, b]; X)$ un sous-espace fermé de $C([0, b]; L^2(\Gamma, X))$ contient les $X-$valeur processus mesurables et $\Gamma_t-$adapter $x \in C([0, b]; L^2(\Gamma, X))$ muni de la norme

$$\|x\|_{H_2} = \left(\sup_{t\epsilon J} E\|x(t)\|_X^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

**Définition 2.2.1** *L'intégrale fractionnaire d'ordre $\beta$ avec la limite inférieure de 0 pour une fonction $f$ est définie comme*

$$I^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\beta}} ds, \quad t > 0, \beta > 0$$

*à condition que la droite est ponctuelle définie sur $[0,\infty)$, où $\Gamma(.)$ est la fonction de gamma.*

**Définition 2.2.2** *La dérivée d'ordre $\beta$ de* ***Riemann–Liouville*** *avec la limite inférieure de zéro pour une fonction $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ peut être écrit*

$$^{L}D^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dt^n} \int\limits_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\beta+1-n}} ds, \quad t > 0, n-1 < \beta < 1.$$

**Définition 2.2.3** *La dérivée de* ***Caputo*** *d'ordre $\beta$ pour une fonction $f$ : $[0,\infty) \to \mathbb{R}$ peut être écrit comme*

$$^{c}D^{\beta} f(t) =^{L} D^{\beta}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0)\right), \quad t > 0, n-1 < \beta < n.$$

**Remarque 2.2.1** *(a) si $f(t) \in C^n[0,\infty)$ alors*

$$\begin{aligned} ^{c}D^{\beta} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int\limits_0^t \frac{f^n(s)}{(t-s)^{\beta+1-n}} ds = I^{n-\beta} f^n(s), t > 0, \\ 0 &\leq n-1 < \beta < n. \end{aligned}$$

*(b) la dérivée de* ***Caputo*** *d'un constants est égale a zéro.*

**Lemme 2.2.1** *Soit $G : [0,b] \times \Omega \to L_2^0$ une application fortement mesurable telle que*

$$\int\limits_0^b E \|G(t)\|_{L_2^0}^p dt < \infty$$

*alors*

$$E \left\| \int\limits_0^t G(s) dw(s) \right\|^2 \leqslant L_G \int\limits_0^t E \|G(s)\|_{L_2^0}^p ds$$

*Pour tous $0 \leq t \leq b$ et $p \geq 2$ où $L_G$ est la constante impliquant $p$ et $b$.*

Maintenant, nous présentons la solution mild du problème, (2.1.1)-(2.1.2) .

**Définition 2.2.4** *Un processus stochastique $x \in H_2([0,b],X)$ est une solution mild de (2.1.1)-(2.1.2) si pour chaque $u \in L_\Gamma^2([0,b],U)$, il satisfait l'équation intégrale suivante :*

$$\begin{aligned} x(t) &= T(t)(x_0 - g(t)) + \int_0^t (t-s)^{q-1} S(t-s) \left[ Bu(s) + \int_0^s f(\tau, x(\tau))\, d\tau \right] ds \\ &+ \int_0^t (t-s)^{q-1} S(t-s) \sigma(s, x(s))\, dw(s), \end{aligned}$$

*tels que*

$$\begin{aligned} T(t) &= \int_0^\infty \xi_q(\theta) Q(t^q\theta)\, d\theta \\ S(t) &= q\int_0^\infty \theta\xi_q(\theta) Q(t^q\theta)\, d\theta \end{aligned}$$

*$Q(t)$ est $C_0$-semi groupe produit par l'opérateur linéaire $A$ sur $X$, $\xi_q$ est une fonction de densité de probabilité est définie sur $(0;\infty)$, qui est $\xi_q(\theta) \geqslant 0$, $\theta \in (0,\infty)$ et $\int_0^\infty \xi_q(\theta)\, d\theta = 1$.*

**Lemme 2.2.2** *les opérateurs $\{T(t)\}_{t\, 0}$ et $\{S(t)\}_{t\, 0}$sont fortement continus, c-à-d pour $x \in X$ et $0 \leq t_1 < t_2 \leqslant b$, nous avons $\|T(t_2)x - T(t_1)x\| \to 0$ et $\|S(t_2)x - S(t_1)x\| \to 0$ comme $t_1 \to t_2$ .*

On pose les conditions suivantes aux données du probléme :

- i) Pour tout $t \geqslant 0, S(t)$ et $T(t)$ sont des opérateurs linéaire bornés, c'est-à-dire $x \in X$,

$$\|T(t)x\| \leqslant M\|x\| \quad , \|S(t)x\| \leqslant \frac{M_q}{\Gamma(q+1)}\|x\|.$$

- ii) Les fonctions $f : J \times X \to X$ et $\sigma : J \times X \to L_2^0$ vérifie les conditions, ils existent des constantes positives $N > 0$, $\tilde{N} > 0$, $\tilde{L} > 0$, $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$ tels que :
$\|f(t,x) - f(t,y)\|^2 \leq N\|x-y\|^2, \quad \|f(t,x)\|^2 \leq \tilde{N}\left(1 + \|x\|^2\right).$
$\|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\|_{L_2^0}^2 \leq L\|x-y\|^2, \quad \|\sigma(t,x)\|_{L_2^0}^2 \leq \tilde{L}\left(1 + \|x\|^2\right).$
$\|g(t,x) - g(t,y)\|^2 \leq K_1\|x-y\|^2, \quad \|g(t,x)\|^2 \leq K_2\left(1 + \|x\|^2\right).$

- iii) Le système stochastique linéaire est approximativement contrôlable sur $[0, b]$.

Pour chaque $0 \leq t < b$, l'opérateur $\alpha \left(\alpha I + \Psi_0^b\right)^{-1} \to 0$ au sens de la topologie d'opérateur forte quand $\alpha \to 0^+$, tel que

$\Psi_0^b = \int_0^b (b-s)^{2(q-1)} S(b-s) BB^* S^*(b-s)\, ds$

est le contrôllabilité de **Gramian**, ici $B^*$ désigne l'adjoint de $B$ et $S^*(t)$ l'adjoint de $S(t)$. Observez que le système de commande déterministe fractionnaire linéaire

$$\begin{aligned} D_t^q x(t) &= Ax(t) + (Bu)(t), \quad t \in [0, b], \\ x(0) &= x_0 - g(x) \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

correspondant à (2.1.1)-(2.1.2) est approximativement contrôlable sur $[0, b]$ si et seulement si l'opérateur $\alpha \left(\alpha I + \Psi_0^b\right)^{-1} \to 0$ fortement quand $\alpha \to 0^+$. La contrôlabilité approximative pour le système linéaire de contrôle fractinnaire déterministe (2.2.3) est une généralisation naturelle d'approximation de contrôlabilité de système de contrôle linéaire du premier ordre.

**Définition 2.2.5** *Le système (2.1.1)-(2.1.2) est approximatievment contrôlable sur* $[0, b]$ *si* $\bar{\Re}(b) = L^2(\Omega, \Gamma, X)$ *où*

$\Re(b) = \{x(b) = x(b, u) : u \in L_\Omega^2([0, b]), U\}$,

ici $L_\Gamma^2([0, b], U)$, est le sous espace fermé de $L_\Gamma^2([0, b] \times \Omega; U)$, contient tout $\Gamma_t$-adaptée, $U$-valeurs de pocessus stochastique.

Le lemme suivant est nécessaire pour définir la fonction de contrôle.

**Lemme 2.2.3** *Pour n'importe quel* $\tilde{x}_b \in L^2(\Gamma_b, X)$, *il existe*

$\tilde{\phi} \in L_\Gamma^2(\Omega; L^2(0, b; L_2^0))$ tel que $\tilde{x}_b = E\tilde{x}_b + \int_0^b \tilde{\phi}(s)\, dw(s)$.

Maintenant pour tout $\alpha > 0$ et $\tilde{x}_b \in L^2(\Gamma_b, X)$, nous définissons la fonction de contrôle dans la forme ci-dessous

$$\begin{aligned} U^\alpha(t, x) &= B^*(b-t)^{q-1} S^*(b-t) \\ &\left[\left(\alpha I + \Psi_0^b\right)^{-1} \left(E\tilde{x}_b - T(b)(x_0 - g(x))\right) + \int_0^t \left(\alpha I + \Psi_0^b\right)^{-1} \tilde{\phi}(s)\, dw(s)\right] \\ &- B^*(b-t)^{q-1} S^*(b-t) \int_0^t \left(\alpha I + \Psi_0^b\right)^{-1} (b-s)^{q-1} S(b-s) \left(\int_0^s f(\tau, x(\tau))\, d\tau\right) ds \\ &- B^*(b-t)^{q-1} S^*(b-t) \int_0^t \left(\alpha I + \Psi_0^b\right)^{-1} (b-s)^{q-1} S(b-s)\, \sigma(s, x(x))\, dw(s). \end{aligned}$$

**Lemme 2.2.4** *Il existe un réel $\hat{M}$ constante positive telle que pour tout $x$, $y$ $\epsilon$ $H_2$ , nous avons*

$$E \left\| u^{\alpha}(t,x) - u^{\alpha}(t,y) \right\|^2 \leq \frac{\hat{M}}{\alpha^2} \int_0^t E \left\| x(t) - y(t) \right\|^2 ds \tag{2.2.4}$$

$$E \left\| u^{\alpha}(t,x) \right\|^2 \leq \frac{\hat{M}}{\alpha^2} \left( 1 + \int_0^t E \left\| x(s) \right\|^2 ds \right) \tag{2.2.5}$$

**Preuve.** D'abord, nous fournirons la preuve de l'inégalité (2.2.4) peut étre établi d'une façon similaire. Soit $x$ , $y$ $\epsilon$ $H_2$ d'aprés l'inégalité d'**Hölder**, le lemme (2.2.5) et l'hypothèse sur les données, on obtient :

$$\begin{aligned}
&E \left\| u^{\alpha}(t,x) - u^{\alpha}(t,y) \right\|^2 \leq \\
&3E \left\| B^*(b-t)^{q-1} S^*(b-t) \left(\alpha I + \Psi_0^b\right)^{-1} T(b) \left[ g(x(t)) - g(y(t)) \right] \right\|^2 \\
&+3E \left\| \begin{array}{c} B^*(b-t)^{q-1} S^*(b-t) \int_0^t \left(\alpha I + \Psi_0^b\right)^{-1} (b-s)^{q-1} S(b-s) \\ \left[ \int_0^s f(\tau, x(\tau)) d\tau - \int_0^s f(\tau, y(\tau)) d\tau \right] ds \end{array} \right\|^2 \\
&+3E \left\| \begin{array}{c} B^*(b-t)^{q-1} S^*(b-t) \int_0^t \left(\alpha I + \Psi_0^b\right)^{-1} (b-s)^{q-1} S(b-s) \\ \left[ \sigma(s, x(s)) - \sigma(s, y(s)) \right] dw(s) \end{array} \right\|^2 \\
&\leq \tfrac{3}{\alpha^2} \left\| B \right\|^2 (b)^{2q-2} M^2 \left( \tfrac{M_q}{\Gamma(q+1)} \right)^2 K_1 E \left\| x(t) - y(t) \right\|^2 \\
&+ \tfrac{3}{\alpha^2} \left\| B \right\|^2 (b)^{2q-2} \left( \tfrac{M_q}{\Gamma(q+1)} \right)^4 \tfrac{b^{2q-1}}{(2q-1)} \left[ bN + L \right] \int_0^t E \left\| x(s) - y(s) \right\|^2 ds \\
&\leq \tfrac{3}{\alpha^2} \left\| B \right\|^2 (b)^{2q-2} M^2 \left( \tfrac{M_q}{\Gamma(q+1)} \right)^2 K_1 E \left\| x(t) - y(t) \right\|^2 \\
&+ \tfrac{3}{\alpha^2} B^2 (b)^{2q-2} \left( \tfrac{M_q}{\Gamma(q+1)} \right)^4 \tfrac{b^{2q-1}}{(2q-1)} \left[ bN + L \right] \int_0^t E \left\| x(s) - y(s) \right\|^2 ds. \\
&\leq \tfrac{\hat{M}}{\alpha^2} \int_0^t E \left\| x(s) - y(s) \right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

on a

$$\hat{M} = 3 \left\| B \right\|^2 (b)^{2q-3} M^2 \left( \tfrac{M_q}{\Gamma(q-1)} \right)^2 K_1 + 3 \left\| B \right\|^2 (b)^{2q-2} \left( \tfrac{M_q}{\Gamma(q+1)} \right)^4 \tfrac{b^{2q-1}}{(2q-1)} \left[ bN + L \right].$$

La preuve de l'inégalité (2.2.5) est similaire à celle de (2.2.4) et, par conséquent, il est omise ■

## 2.3 Résultats de contrôllabilités

Maintenant, nous présentons le résultat principale de cette chapitre. Dans cette section, nous formulons et prouvons des conditions pour la conrôllabilité approximative du système de contrôle dynamique fractionnaire stochastique (2.1.1)–(2.1.2), en utilisant l'application de contraction principale, particulièrement nous établissons la contrôllabilité approximative de systéme de contrôle stochastique fractionnaire non-linéaire (2.1.1)–(2.1.2) conformément aux suppositions que le système linéaire correspondans est approximativement contrôlable, pour tout $\alpha > 0$.On définie l'opérateur $F_\alpha : H_2 \longrightarrow H_2$ par

$$\begin{aligned} F_\alpha x(t) &= T(t)(x_0 - g(x)) + \int_0^t (t-s)^{q-1} S(t-s) \\ &\left[\int_0^s f(\tau, x(\tau))\, d\tau + Bu^\alpha(s,x)\right] ds \\ &+ \int_0^t (t-s)^{q-1} S(t-s)\, \sigma(s, x(s))\, dw(s). \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Maintenant, nous exposons et prouvons le lemme suivant, qui sera utilisé dans la preuve du résultat principal.

**Lemme 2.3.1** *Pour tout $x \in H_2$, $F_\alpha(x)(t)$ est continue sur $[0,b]$ au sens dans $L_2$.*

***Preuve.*** *Soit $0 \le t_1 \le t_2 \le b$. Alors pour tout $x$ fixer tel que $x \in H_2$, à partir de l'équation (2.3.6), nous avons*

$$E\left\|(F_\alpha x)(t_2) - (F_\alpha x)(t_1)\right\|^2 \le$$

$$4\left[E\left\|(T(t_2) - T(t_1))(x_0 - g(x))\right\|^2 + \sum_{i=1}^{3} E\left\|\prod_i^x (t_2) - \prod_i^x (t_1)\right\|^2\right]$$

*le premier terme*

$$E\left\|(T(t_2) - T(t_1))(x_0 - g(x))\right\|^2$$

$$\le \left[\|x_0\|^2 + K_2\left(1 + \|x\|^2\right)\right] \times E\left\|T(t_2) - T(t_1)\right\|^2$$

*pour la continuité forte de $T(t)$, le premier terme tend vers zéro quand $t_2 - t_1 \longrightarrow 0$. Ensuite, il suit de l'inégalité d'**Hölder** et les hypothèse du théorème suivant*

$$E\left\|\prod_1^x(t_2)-\prod_1^x(t_1)\right\|^2\leq$$
$$3E\left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)\left(\int_0^s f(\tau,x(\tau))\,d\tau\right)ds\right\|^2$$
$$+\,3E\left\|\int_0^{t_1}\left((t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}\right)S(t_2-s)\left(\int_0^s f(\tau,x(\tau))\,d\tau\right)ds\right\|^2$$
$$+\,3E\left\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}S(t_2-s)\left(\int_0^s f(\tau,x(\tau))\,d\tau\right)ds\right\|^2$$
$$\leq 3\tfrac{t_1^{2q-1}}{1-2q}\int_0^{t_1}E\left\|\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)\left(\int_0^s f(\tau,x(\tau))\,d\tau\right)ds\right\|^2$$
$$+\,3\left(\tfrac{M_q}{\Gamma(1+q)}\right)^2\left(\int_0^{t_1}\left((t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}\right)^2ds\right)$$
$$\times\left(\int_0^{t_1}E\left\|\int_0^s f(\tau,x(\tau))\,d\tau\right\|^2ds\right)$$
$$+\,3\tfrac{(t_2-t_1)^{2q-1}}{1-2q}\left(\tfrac{M_q}{\Gamma(1+q)}\right)^2\int_{t_1}^{t_2}E\left\|\int_0^s f(\tau,x(\tau))\,d\tau\right\|^2ds.$$

*De plus, nous obtenons*

$$
\begin{aligned}
&E\left\|\prod_2^x(t_2)-\prod_2^x(t_1)\right\|^2 \leq \\
&E\left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)Bu^\alpha(s,x)\,ds\right\|^2 \\
&+\quad 3E\left\|\int_0^{t_1}\left((t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}\right)S(t_2-s)\,Bu^\alpha(s,x)\,ds\right\|^2 \\
&+3E\left\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}S(t_2-s)\,Bu^\alpha(s,x)\,ds\right\|^2 \\
&\leq 3\frac{t_1^{2q-1}}{1-2q}\int_0^{t_1}E\left\|\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)Bu^\alpha(s;x)\right\|^2 ds \\
&+3\left(\frac{M_q}{\Gamma(1+q)}\right)^2\|B\|^2\times\left(\int_0^{t_1}\left((t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}\right)^2 ds\right)\times\left(\int_0^{t_1}E\left\|u^\alpha(s;x)\right\|^2 ds\right) \\
&+\quad 3\frac{(t_2-t_1)^{2q-1}}{1-2q}\left(\frac{M_q}{\Gamma(1+q)}\right)^2\|B\|^2\int_{t_1}^{t_2}E\left\|u^\alpha(s,x)\right\|^2 ds.
\end{aligned}
$$

*D'oú l'utilisation le lemme (2.2.1) et le suppositions sur le théorème nous arrivons*

$$
\begin{aligned}
&E\left\|\prod_3^x(t_2)-\prod_3^x(t_1)\right\|^2 \\
&\leq 3E\left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)\sigma(s,x(s))\,dw(s)\right\|^2 \\
&+3E\left\|\int_0^{t_1}\left((t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}\right)\times S(t_2-s)\,\sigma(s,x(s))\,dw(s)\right\|^2 \\
&+3E\left\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}S(t_2-s)\,\sigma(s,x(s))\,dw(s)\right\|^2 \\
&\leq 3L_\sigma\frac{t_1^{2q-1}}{1-2q}\int_0^{t_1}E\left\|\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)\sigma(s,x(s))\right\|^2 ds \\
&+3L_\sigma\left(\int_0^{t_1}\left((t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}\right)^2 ds\right)\times\left(\int_0^{t_1}\left\|S(t_2-s)\,\sigma(s,x(s))\right\|^2 ds\right) \\
&+3L_\sigma\frac{(t_2-t_1)^{2q-1}}{1-2q}\left(\frac{M_q}{\Gamma(1+q)}\right)^2\int_{t_1}^{t_2}E\left\|S(t_2-s)\,\sigma(s,x(s))\right\|^2 ds.
\end{aligned}
$$

*D'oú, l'utilisation de la continuité fort de $S(t)$ et le théorème de convergence dominé de* ***Lebesgue****, nous concluons que le côté droit au-dessus de l'inégalités tend vers zéro quand $t_2-t_1 \to 0$ ainsi nous concluons que $F_\alpha(x)(t)$ est continue à droit dans $[0,b]$ .*

*Un argument similaire montre qu'il est aussi continue à gauche dans $[0,b]$.*

*Ceci complete la preuve de ce lemme.* ■

**Théorème 2.3.1** *Supposons les hypothèses (i) et (ii) sont satisfaites. Alors, le système* (2.1.1)–(2.1.2) *admet une solution mild sur* $[0, b]$.

**Preuve.** Nous montrons l'existance d'un point fixe d'opérateur $F_\alpha$ en utilisant l'application de contraction principal.Tout d'abord, nous montrons que $F_\alpha(H_2) \subset H_2$. Soit $x \in H_2$. De (2.3.6), on obtient

$$E\|F_\alpha x\|_{H_2}^2 \leq 4[\sup_{0\leq t\leq b} E\|T(t)[x_0 - g(x)]\|^2 + \sup_{0\leq t\leq b}\sum_{i=1}^{3} E\|\Pi_i^x(t)\|^2]. \quad (2.3.7)$$

En utilisant les hypothèses $(i)$ et $(ii)$ et le lemme (2.2.4 ) et les calculs standards, on obtient :

$$E\|T(t)[x_0 - g(x)]\|^2 \leq M^2\left[\|x_0\|^2 + k_2\left(1 + \|x\|^2\right)\right] \quad (2.3.8)$$

et

$$\begin{aligned}
&\sup\nolimits_{0\leq t\leq b}\sum_{i=1}^{3} E\|\Pi_i^x(t)\|^2 \\
&\leq 3\left(\tfrac{M_q}{\Gamma(q+1)}\right)^2 [\tfrac{b^{2q}}{2q-1}\tilde{N} + \tfrac{b^{2q-1}}{2q-1}\tilde{L}L_\sigma]\left(1 + \|x\|_{H_2}^2\right) \quad (2.3.9)\\
&+3\left(\tfrac{M_q}{\Gamma(q+1)}\right)^2 \tfrac{b^{2q}}{2q-1}\|B\|^2\tfrac{\hat{M}}{\alpha^2}(1 + b\|x\|_{H_2}^2)
\end{aligned}$$

Par conséquent (2.3.8) et (2.3.9) impliquent ensemble que $E\|F_\alpha x\|_{H_2}^2 < \infty$. D'après le lemme (2.3.1), $F_\alpha x \in H_2$. Ainsi, pour chaque $\alpha > 0$, l'opérateur $F_\alpha$ de $H_2$ dans lui-même. Ensuite, nous utilisons le théorème du point fixe de **Banach** pour prouver que $F_\alpha$ admet un point fixe unique dans $H_2$. Nous affirmons que il existe un $n$ naturel tel que $F_\alpha^n$ est une contraction de $H_2$. Pour le voir, soit $x, y \in H_2$ et nous avons

$$\begin{aligned}
&E\|(F_\alpha x)(t) - (F_\alpha y)(t)\|^2 \leq 4E\sum_{i=1}^{4}\|\Pi_i^x(t) - \Pi_i^y(t)\|^2 \\
&\leq 4k_1M^2E\|x(t) - y(t)\|^2 \\
&+4\left[\left(\tfrac{M_q}{\Gamma(q+1)}\right)^2\tfrac{\hat{M}}{\alpha^2}\|B\|^2\tfrac{b^{2q+2}}{2q-1} + \left(\tfrac{M_q}{\Gamma(q+1)}\right)^2\tfrac{b^{2q+1}}{2q-1}N + \left(\tfrac{M_q}{\Gamma(q-1)}\right)^2\tfrac{b^{2q}}{2q-1}LL_\sigma\right] \\
&E\|x(t) - y(t)\|^2 \\
&\leq 4k_1M^2E\|x(t) - y(t)\|^2 + 4\left(\tfrac{M_q}{\Gamma(q+1)}\right)^2 \\
&\left[\tfrac{\hat{M}}{\alpha^2}\|B\|^2\tfrac{b^{2q+2}}{2q-1} + \tfrac{b^{2q+1}}{2q-1}N + \tfrac{b^{2q}}{2q-1}LL_\sigma\right]E\|x(t) - y(t)\|^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient un réel $\gamma(\alpha)$ constante positive tel que

$$E\left\|(F_\alpha x)(t)-(F_\alpha y)(t)\right\|^2 \leq \gamma(\alpha) E\left\|x(t)-y(t)\right\|^2 \qquad (2.3.10)$$

Pour tout $t \in J$ et pour tout $x, y \in H_2$. Pour tout nombre entier naturel $n$, il résulte que l'itération successive d'inégalité ci-dessus par prenant le supremum sur $[0,b]$,

$$\left\|(F_\alpha^n x)(t)-(F_\alpha^n y)(t)\right\|_{H_2}^2 \leq \frac{(b\gamma(\alpha))^n}{n!}\left\|x-y\right\|_{H_2}^2. \qquad (2.3.11)$$

Pour tout $\alpha > 0$ fixé, pour $n$ suffisamment grand, $\frac{(b\gamma(\alpha))^n}{n!} < 1$. Il résulte de (2.3.11) que $F_\alpha^n$ est un application de contraction, de telle sorte que le principe de contraction assure que l'opérateur $F_\alpha$ admet une solution unique $x_\alpha$ qui est un point fixe dans $H_2$, qui est une solution mild de (2.1.1) et (2.1.2). ■

**Théorème 2.3.2** *Supposons que les hypothèses* $(i)$ *et* $(iii)$ *vérifier. En autre, si les fonctions* $f$ , $g$ *et* $\sigma$ *sont uniformément bornées et* $\{S(t) : t \geq 0\}$ *est compact, alors le système* (2.1.1) *et* (2.1.2) *est approximativement contrôlable sur* $[0,b]$.

***Preuve.*** *Soit* $x_\alpha$*est un point fixe de* $F_\alpha$. *En utilisant le théorème de* ***Fubini*** *stochastique, il peut être facilement vu que*

$$\begin{aligned}
x_\alpha(b) &= \tilde{x}_b-\alpha(\alpha I+\Psi)^{-1}(E\tilde{x}_b-T(b)[x_0-g(x)]) \\
&\quad+\alpha\int_0^b\left(\alpha I+\Psi_s^b\right)^{-1}(b-s)^{q-1}S(b-s)[\int_0^s f(\tau,x_\alpha(\tau))d\tau]ds \\
&\quad+\alpha\int_0^b\left(\alpha I+\Psi_s^b\right)^{-1}\left[(b-s)^{q-1}S(b-s)\sigma(s,x_\alpha(s))-\tilde{\phi}(s)\right]dw(s).
\end{aligned}$$

*Il résulte de l'hypothèse sur* $f$ , $g$ *et* $\sigma$ *qu'il existe* $\hat{D}>0$ *tel que*

$$\left\|f(s,x_\alpha(s))\right\|^2+\left\|g(x_\alpha(s))\right\|^2+\left\|\sigma(s,x_\alpha(s))\right\|^2 \leq \hat{D} \qquad (2.3.12)$$

*Pour tout* $(s,\omega)\in[0,b]\times\Omega$. *Alors, il ya une sous suite encore noté* $\{f(s,x_\alpha(s)),g(x_\alpha(s)),\sigma(s,x_\alpha(s))\}$*qui converge faiblement vers,* $\{f(s),g(s),\sigma(s)\}$ *dans* $X\times L_2^0$.*De l'équation ci-dessus, nous avons*

$$
\begin{aligned}
&E\left\|x_\alpha(b)-\tilde{x}_b\right\|^2 \leq 8E\left\|\alpha\left(\alpha I+\psi_0^b\right)^{-1}\left(E\tilde{x}_b-T(b)\,x_0\right)\right\|^2 \\
&+8E\left\|\alpha\left(\alpha I+\psi_0^b\right)^{-1}\right\|^2\left\|T(b)\left(g\left(x_\alpha(s)\right)-g(s)\right)\right\|^2 \\
&+8E\left\|\alpha\left(\alpha I+\psi_0^b\right)^{-1}\right\|^2\left\|T(b)\,g(s)\right\|^2 \\
&+8E\left(\int_0^b(b-s)^{q-1}\left\|\alpha\left(\alpha I+\Psi_s^b\right)^{-1}\tilde{\phi}(s)\right\|_{L_2^0}^2 ds\right) \\
&+8E\left(\begin{array}{c}\int_0^b(b-s)^{q-1}\left\|\alpha\left(\alpha I+\Psi_s^b\right)^{-1}\right\| \\ \times\left\|S(b-s)\left(\int_0^s f\left(\tau,x_\alpha(\tau)\right)d\tau-\int_0^s f(\tau)\,d\tau\right)\right\|ds\end{array}\right)^2 \\
&+8E\left(\int_0^b(b-s)^{q-1}\left\|\alpha\left(\alpha I+\Psi_s^b\right)^{-1}S(b-s)\int_0^s f(\tau)\,d\tau\right\|ds\right)^2 \\
&+8E\left(\int_0^b(b-s)^{q-1}\left\|\alpha\left(\alpha I+\Psi_s^b\right)^{-1}\right\|\left\|S(b-s)\left(\sigma\left(s,x_\alpha(s)\right)-\sigma(s)\right)\right\|_{L_2^0}^2 ds\right) \\
&+8E\int_0^b(b-s)^{q-1}\left\|\alpha\left(\alpha I+\Psi_s^b\right)^{-1}S(b-s)\,\sigma(s)\right\|_{L_2^0}^2 ds.
\end{aligned}
$$

*D'autre part, par hypothèse (iii), pour tous $0<s<b$ l'opérateur $\alpha\left(\alpha I+\Psi_s^b\right)^{-1}\to 0$ fortement, quand $\alpha\to 0^+$ et en autre $\left\|\alpha\left(\alpha I+\Psi_s^b\right)^{-1}\right\|\leq 1$. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée de* ***Lebesgue*** *et la compacité de $S(t)$ implique que $E\left\|x_\alpha(b)-\tilde{x}_b\right\|^2\to 0$ quand $\alpha\to 0^+$. Cela donne la possibilité de la contrôlabilité approximative de (2.1.1)-(2.1.2).* ■

**exemple 2.3.1** *Pour illustrer le résultat théorique établi dans le théorème précédent, nous considérons ce qui suit un système fractionnaire de contrôle stochastique de la forme*

$$
\begin{aligned}
&{}^cD_t^q x(t,z)=\frac{\partial^2 x(t,z)}{\partial z^2}+\mu(t,z)+\int_0^t\hat{f}\left(s,x(s,z)\right)ds+\hat{\sigma}\left(t,x(t,z)\right)\frac{d\hat{\omega}(t)}{dt}, \\
&x(t,0)=x(t,1)=0,\quad t\in[0,b], \\
&x(0,z)=x_0(z),\quad z\in[0,1],
\end{aligned}
\tag{2.3.13}
$$

Où $b>0, 0<q<1$ ; $\hat{\omega}(t)$ est un mouvement brownien à deux faces et norme dimentionnelle définie sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega,\Gamma,p)$. Pour écrire le système ci-dessus dans la forme abstraite de (2.1.1), soit $X = E = U = L^2[0,1]$. Définir l'opérateur $A : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ par $A\omega = \omega''$ avec le domaine

$$D(A) = \begin{array}{l} \{\omega \in X;\ \omega,\ \omega' \text{ sont absolument continue}, \omega'' \in X \text{ et} \\ \omega(0) = \omega(1) = 0\} \end{array}.$$

$$A\omega = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\omega, \omega_n)\, \omega_n,\ \omega \in D(A),$$

où $\omega_n(s) = \sqrt{2}\sin(ns)$, $n = 1, 2, \ldots,$ est l'ensemble orthogonal de vecteur propre de $A$. Il est bien connu que $A$ engendre un semi-groupe analytique compact $\{S(t), t \geq 0\}$ Dans $X$ et

$$S(t)\,\omega = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} (\omega, \omega_n)\, \omega_n,\ \ \|S(t)\| \leq e^{-t}$$

pour tout $t \geq 0$. Sur tout, l'opérateur $A^{\frac{1}{2}}$est donnée par

$$A^{\frac{1}{2}}\omega = \sum_{n=1}^{\infty} n (\omega, \omega_n)\, \omega_n$$

Avec le domaine

$$D\left(A^{\frac{1}{2}}\right) = \{\omega \in X : \sum_{n=1}^{\infty} n (\omega, \omega_n)\, \omega_n\}.$$

Définir $x(t)(z) = x(t,z)$, $\int_0^t f(s, x(s,z))\, ds = \int_0^t \hat{f}(s, x(s,z))\, ds$ ,

$\sigma(t, x(t,z)) = \hat{\sigma}(t, x(t,z))$ et $g(x(t))(z) = \sum_{k=1}^{m} c_k x(z, t_k)$. Définir l'opérateur linéaire bornée $B : U \to X$ par $Bu(t)(z) = \mu(t,z)$, $0 \leq z \leq 1, u \in U$. D'autre part, il peut être facilement vu que le système déterministe de contrôle fractionnaire linéaire correspondant à (2.3.13) est d'environ contrôlable sur $[0,1]$. Par conséquent, avec les choix ci-dessus, le système (2.3.13) peut être écrite de la forme abstraite (2.1.1)–(2.1.2) et toutes les conditions du théorème (2.3.2) sont remplies. Ainsi d'après le théorème (2.3.2), le système fractionnaire de contrôle stochastique (2.3.13) est contrôlable aproximative sur $[0,1]$ .

**Remarque 2.3.1** *La théorie et l'application d'équations différentielles à retard forment une partie importante du dynamique non linéaire modernes.*

*Au cours des dernières années l'équations différentielles fonctionnelles ont utilisées pour modéliser les processus dans divers domaines tels que la population dynamique et l'écologie, la physiologie et du médecine, de l'économie et les autre sciences naturelles. Cependant, dans les domaines appliqués, le systèmes déterministes ne parviennent pas à capturer l'essence des fluctuations du situation réelle, et il faut plutôt envisager les modèles des processus stochastiques. Dans la plupart des modèles de données et des paramètres initiaux sont soumis à des perturbations aléatoires,où les systèmes dynamiques elles-mêmes représentent des processus stochastiques. Cela conduit à l'examen de retard d'équations différentielles stochastique. Ainsi, dans les problèmes concrets, des modèles stochastiques avec des retards sont importants. Cependant, pour les meilleurs à notre connaissance, aucun résultat existent encore sur le contrôlabilité approximative pour les équations différentielles à retard stochastique fractionnaires. Après avoir effectué quelques hypothèses appropriées, en utilisant les idées et les techniques dans cette chapitre, on peut établir les résultats de contrôlabilité pour une classe d'équations différentielles à retard stochastique fractionnaires.*

# Chapitre 3

# Comportement asymptotique des solutions d'équations stochastiques intégro-fractionnaire abstraites

## 3.1 Introduction

Ce chapitre est concerné avec l'existence et l'unicité de solution moyenne carré presque asymptotiquement automorphe d'équation stochastique fractionnaire sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
&d\left[x(t)-f(t,x(t))\right]=\int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} A\left[x(s)-f(s,x(s))\right]\, ds\, dt \\
&+g(t,x(t))\, dW_1(t), \qquad t\geq 0, \\
&x(0)=u_0\tfrac{dW_2}{dt},
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Où $1<\alpha<2$, $A: D(A)\subset L^2(P,H)\rightarrow L^2(P,H)$ est un opérateur linéaire densément défini de type sectoriel sur un espace de Hilbert $L^2(P,H)$, $W_1(t)$ et $W_2(t)$ sont deux mouvements browniens standards à une dimension définie sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathcal{F}_t)$, Où $\mathcal{F}_t=\sigma\{W_1(u)-W_1(v);\ u,v\leq t\}$, et $u_0$ est un $\mathcal{F}_0$-adapté, $H$-estimé variable aléatoire indépendant du processus de **Wiener** $W_1$. On suppose $f$ et

$g$ sont des fonctions appropriés seront précisées ultérieurement. L'intégrale de convolution dans (3.1.1) est compris dans l'intégrale fractionnaire de **Riemann–Liouville**. Nous remarquons que l'ordre peut être fractionnée complexe de point de vue des mathématiques pures et il est beaucoup d'intérêt dans le développement de l'analyse théorique et du méthode numérique aux équations fractionnaires, parce qu'ils ont récemment avérée précieuse dans divers domaines du science et génie.

Le concept de fonction est presque asymptotiquement automorphes tout d'abord introduit par **N'Guérékata**. Depuis lors ces fonctions sont devenues un grand intérêt pour plusieurs mathématiciens et beaucoup de développements et applications acquise.

## 3.2 Préliminaires

Dans cette section, nous introduisons quelques définitions de base, les notations, et les faits préliminaires qui seront utilisées dans la suite.

Tout au long de cette chapitre, $(H, \|.\|, \langle .,. \rangle)$ représente un espace de Hilbert réel séparable. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désigne un espace de probabilité complet, et $L^2(P, H)$ représente l'espace de tous les $H$-valeurs $x$ variables aléatoires tel que

$$E\|x\|^2 = \int_\Omega \|x\|^2 dP < \infty. \tag{3.2.2}$$

Notons que $L^2(P, H)$ est un espace de Hilbert équipé de la norme

$$\|x\|_2 := \left(\int_\Omega \|x\|^2 dP\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ pour chaque } x \in L^2(P, H). \tag{3.2.3}$$

On note $C_0(\mathbb{R}^+; L^2(P, H))$ la collection de tous processus stochastiques continue délimitée $\varphi$ de $\mathbb{R}^+$ dans $L^2(P, H)$ telle que $\lim_{t\to+\infty} E\|\varphi(t)\|^2 = 0$. De même, $C_0(\mathbb{R}^+ \times L^2(P, H); L^2(P, H))$ représente l'espace continue de processus stochastique $f : \mathbb{R}^+ \times L^2(P, H) \to L^2(P, H)$ tel que

$$\lim_{t\to+\infty} E\|f(t, x)\|^2 = 0 \tag{3.2.4}$$

uniformément pour $x \in K$,où $K \subset L^2(P, H)$ est tout sous-ensemble borné. De plus, $W_1(t), W_2(t)$ sont des mouvement brownien unidimensionnel défini sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$, où
$\mathcal{F}_t = \sigma\{W_1(u) - W_1(v) + W_2(u) - W_2(v); u, v \leq t\}$.

### 3.2.1 Opérateurs linéaires sectorielles

Un opérateur linéaire fermé $A$ est dit sectorielle du type de $\omega$ et l'angle $\theta$ s'il existe $0 < \theta < \pi/2$, $M > 0$, et $\omega \in \mathbb{R}$ telle que sa existe résolvant en dehors du secteur

$$\omega + S_\theta := \{\omega + \lambda : \lambda \in \mathbb{C}, |\arg(-\lambda)| < \theta\}$$

et

$$\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq M/|\lambda - \omega|, \lambda \notin \omega + S_\theta.$$

**Définition 3.2.1** *Soit $A$ un opérateur fermé et linéaire avec le domaine $D(A)$ définie sur un espace de Banach $X$. Nous appelons $A$ le générateur d'un opérateur de solution s'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et une fonction fortement continue $S_\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ tel que $\{\lambda^\alpha :\ \mathrm{Re}(\lambda) > \omega\} \subset \rho(A)$ et $\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_\alpha(t)\, x dt$, $\mathrm{Re}(\lambda) > \omega$, $x \in X$. Dans ce cas, $S_\alpha(.)$ est appelée l'opérateur de la solution générée par $A$. Nous notons que si $A$ est sectorielle du type de $\omega$ avec $0 \leq \theta < \pi(1 - \alpha/2)$, puis $A$ est le générateur d'un opérateur de la solution proposée par*

$$S_\alpha(t) : = (1/2\pi i) \int_\gamma e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - A)^{-1} d\lambda,\ t \geq 0,$$

*où $\gamma$ est un chemin approprié situé à l'extérieur du secteur $\omega + S_\theta$. Récemment, il est prouvé que si $A$ est un opérateur de type sectoriel de $\omega < 0$ pour certains $M > 0$ et $0 \leq \theta < \pi(1 - \alpha/2)$, alors il existe un $C > 0$ constante tel que*

$$\|S_\alpha(t)\| \leq \frac{CM}{1 + |\omega|\, t^\alpha},\ t \geq 0. \tag{3.2.5}$$

### 3.2.2 Moyenne-quadratique de processus presque asymptotiquement automorphes.

Nous rappelons quelques faits de base pour un processus presque asymptotiquement automorphes qui seront utilisées dans la suite.

**Définition 3.2.2** *Un processus stochastique $x : \mathbb{R} \to L^2(P, H)$ est dite stochastiquement continue si*

$$\lim_{t \to s} E\, \|x(t) - x(s)\|^2 = 0 \tag{3.2.6}$$

***Définition 3.2.3*** *Un processus stochastique stochastiquement continue $x$ :*

$\mathbb{R} \to L^2(P,H)$ est dite moyenne carrée presque automorphe si, pour chaque suite de nombres réels$\{S_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une sous suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et un processus stochastique $y : \mathbb{R} \to L^2(P,H)$ telle que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} E\left\|x(t+s_n) - y(t)\right\|^2 &= 0, \qquad (3.2.7) \\ \lim_{n\to\infty} E\left\|y(t-s_n) - x(t)\right\|^2 &= 0. \end{aligned}$$

est vérifier pour chaque $t \in \mathbb{R}$. Le collection de tous les moyenne carrés de processus stochastiques presque automorphes $x : \mathbb{R} \to L^2(P,H)$ est désigné par $AA(\mathbb{R}; L^2(P,H))$.

**Définition 3.2.4** *Une fonction $f : \mathbb{R} \times L^2(P,H) \to L^2(P,H), (t,x) \to f(t,x)$ , qui est conjointement continue, est dit moyen carré presque automorphe si $f(t,x)$ est une moyen carré presque automorphe dans $t \in \mathbb{R}$ uniformément pour tous $x \in \mathbb{k}$ , où $\mathbb{k}$ est une partie bornée de $L^2(P,H)$. C'est-à-dire, pour chaque suite de nombres réels $\{S_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une sous-suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \times L^2(P,H) \to L^2(P,H)$ telle que*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} E\left\|f(t+s_n,x) - \tilde{f}(t,s)\right\|^2 &= 0, \qquad (3.2.8) \\ \lim_{n\to\infty} E\left\|\tilde{f}(t-s_n,x) - f(t,x)\right\|^2 &= 0 \end{aligned}$$

*pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et chaque $x \in \mathbb{k}$. On note par $AA(\mathbb{R}; L^2(P,H); L^2(P,H))$ l'ensemble de toutes les fonctions.*

**Lemme 3.2.1** *$(AA(\mathbb{R}; L^2(P,H)), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach équipé par la norme*

$$\|x\|_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_2 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(E\|x(t)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.2.9)$$

*pour $x \in AA(\mathbb{R}; L^2(P,H))$.*

**Lemme 3.2.2** *Soit $f : \mathbb{R} \times L^2(P,H) \to L^2(P,H), (t,x) \to f(t,x)$ est un moyenne carrée presque automorphe, et supposons que $f(t,.)$ est uniformément continue sur chaque sous-ensemple borné $\mathbb{k} \subset L^2(P,H)$ uniformément pour $t \in \mathbb{R}$ ; c'est-à-dire pour tous $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $x$, $y \in \mathbb{k}$ et $E\|x-y\|^2 < 0$ impliquent que $E\|f(t,x) - f(t,y)\|^2 < \varepsilon$ pour tout*

$t \in \mathbb{R}$. *Alors pour tout moyenne quadratique de processus presque automorphe* $x : \mathbb{R} \to L^2(P, H)$, *le processus stochastique* $F : \mathbb{R} \to L^2(P, H)$ *donné par* $F(.) := f(., x(.))$ *est un moyenne carrée presque automorphe.*

**Définition 3.2.5** *Un processus stochastique continue* $f : \mathbb{R}^+ \to L^2(P, H)$ *est dite moyenne carrée presque asymptotiquement automorphe si elle peut être décomposée comme* $f = g + h$, *où* $g \in AA(\mathbb{R}^+; L^2(P, H))$ *et* $h \in C_0(\mathbb{R}^+; L^2(P, H))$. *Notons par* $AAA(\mathbb{R}^+; L^2(P, H))$ *la collection de toutes les moyennes carrées de processus presque asymptotiquement automorphes* $f : \mathbb{R}^+ \to L^2(P, H)$.

**Définition 3.2.6** *Une fonction* $f : \mathbb{R}^+ \times L^2(P, H) \to L^2(P, H), (t, x) \to f(t, x)$, *qui est conjointement continue, est dit moyen carrée presque asymptotiquement automorphe si elle peut être décomposée comme* $f = g + h$, *où* $g \in AA(\mathbb{R}; L^2(P, H); L^2(P, H))$ *et* $h \in C_0(\mathbb{R}^+ \times L^2(P, H); L^2(P, H))$. *Notons par* $AAA(\mathbb{R}^+ \times L^2(P, H); L^2(P, H))$, *l' ensemble de tous ces fonctions.*

***Lemme 3.2.3*** *Si* $f$, $f_1$, *et* $f_2$ *sont tous moyennes carrés de processus stochastiques presque asymptotiquement automorphes, alors :*

(I) $f_1 + f_2$ est un moyen carré presque asymptotiquement automorphe ;

(II) $\lambda f$ est un moyen carrée presque asymptotiquement automorphe pour tout scalaire $\lambda$ ;

(III) Il existe une constante $M > 0$ tel que $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} E \|f(t)\|^2 \leq M$.

**Lemme 3.2.4** *Supposons que* $f \in AAA(\mathbb{R}^+; L^2(P, H))$ *admet la décomposition* $f = g + h$, *où* $g \in AA(\mathbb{R}; L^2(P, H))$ *et* $h \in C_0(\mathbb{R}^+; L^2(P, H))$. *Alors* $\{g(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \overline{\{f(t) : t \in \mathbb{R}^+\}}$.

**Corollaire 3.2.1** *La décomposition d'un moyen carré de processus presque asymptotiquement automorphe est unique.*

**Lemme 3.2.5** $AAA(\mathbb{R}^+; L^2(P, H))$ *est un espace de Banach quant il est équipé de la norme*

$$\|f\|_{AAA(\mathbb{R}^+;L^2P,Hl)} := \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|g(t)\|_2 + \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|h(t)\|_2, \tag{3.2.10}$$

*où* $f = g + h \in AAA(\mathbb{R}^+; L^2(P, H))$ *avec* $g \in AA(\mathbb{R}; L^2(P, H))$ *et* $h \in C_0(\mathbb{R}^+; L^2(P, H))$.

**Lemme 3.2.6** *$AAA(\mathbb{R}^+; L^2(P,H))$ est un espace de Banach avec la norme*

$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|f(t)\|_2 + \sup_{t\in\mathbb{R}^+} (E\|f(t)\|.^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.2.11}$$

**Lemme 3.2.7** *Soit $f \in AA(\mathbb{R}\times L^2(P,H); L^2(P,H))$ et soit $f(t,x)$ est uniformément continue dans toute sous ensemble bornée $\mathbb{k} \subset L^2(P,H)$ uniformément pour $t \in \mathbb{R}^+$. Puis $f(t,x)$ est uniformément continue dans tout sous-ensemble borné $\mathbb{k} \subset L^2(P,H)$ uniformément pour $t \in \mathbb{R}$.*

**Lemme 3.2.8** *Soit $f \in AAA(\mathbb{R}^+ \times L^2(P,H); L^2(P,H))$ et supposons que $f(t,x)$ est uniformément continue dans toute borné $\mathbb{k} \subset L^2(P,H)$ uniformément pour $t \in \mathbb{R}^+$. Si $u(t) \in AAA(\mathbb{R}^+; L^2(P,H))$, alors $f(.,(.)) \in AAA(\mathbb{R}^+; L^2(P,H))$.*

Nous donnons maintenant la solution mild de concept suivante (3.1.1).

**Définition 3.2.7** *Soit $S_\alpha(t)$ est un opérateur de solution intégrable sur*

$L^2(P,H)$ avec générateur $A$. Un processus stochastique $\mathcal{F}_t$-adapté $x : [0,+\infty) \to L^2(P,H)$ est appelé une solution mild du problème (3.1.1) si $x(0) = u_0\frac{dW_2}{dt}$ est $\mathcal{F}_0$-mesurable et $x(t)$ satisfait l'équation intégrale stochastique correspondante :

$$\begin{aligned} x(t) &= S_\alpha(t)\left[u_0\tfrac{dW_2}{dt} - f\left(0, u_0\tfrac{dW_2}{dt}\right)\right] + f(t,x(t)) \\ &+ \int_0^t S_\alpha(t-s)\, g(s,x(s))\, dW_1(s), \qquad t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

## 3.3 Résultats principales

Dans cette section, nous établissons l'existence de moyenne carrés de solution mild presque asymptotiquement automorphes du problème (3.1.1). Pour cela, nous avons besoin des résultats techniques suivants.

Tout d'abord, nous listons les hypothèses de base.

(H1) L'opérateur $A$ est un opérateur sectoriel de type $\omega < 0$ pour certains $M > 0$ et $0 \leq \theta < \pi(1-\alpha/2)$, et ensuite il existe $C > 0$ tel que

$$\|S_\alpha(t)\| \leq \frac{CM}{1+|\omega|\, t^\alpha}, \quad t \geq 0, \tag{3.3.13}$$

où $S_\alpha(t)$ est l'opérateur solution engendré par $A$.

(H2) La fonction $f \in AAA(\mathbb{R}^+ \times L^2(P,H); L^2(P,H))$ et il existe une fonction continue et décroissante $L_f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ telle que, pour chaque $r \geq 0$ et pour tous $E\|x\|^2 \leq r$, $E\|y\|^2 \leq r$,

$$E\|f(t,x) - f(t,y)\|^2 \leq L_f(r) E\|x-y\|^2 \tag{3.3.14}$$

pour tous $t \in \mathbb{R}^+$.

(H3) La fonction $g \in AAA(\mathbb{R}^+ \times L^2(P,H); L^2(P,H))$ et il existe une fonction continue et non décroissante $L_g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ telle que pour chaque $r \geq 0$ et pour tous $E\|x\|^2 \leq r$, $E\|y\|^2 \leq r$,

$$E\|g(t,x) - g(t,y)\|^2 \leq L_g(r) E\|x-y\|^2 \tag{3.3.15}$$

pour tous $t \in \mathbb{R}^+$.

(H4) Nous avons

$$\begin{array}{l} \sup_{r>0}\left[\frac{r}{6(CM)^2} - \frac{L_f(r)r}{(CM)^2} - \frac{|\omega|^{-1/\alpha}(1-1/\alpha)\pi L_g(r)r}{\alpha\sin(\pi/\alpha)} - \lambda r\right] \\ > \left(1+\frac{1}{(CM)^2}\right)M_f + \frac{|\omega|^{-1/\alpha}(1-1/\alpha)\pi}{\alpha\sin(\pi/\alpha)}M_g, \end{array} \tag{3.3.16}$$

où $M_f = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} E\|f(t,x(t))\|^2$ et $M_g = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} E\|g(t,x(t))\|^2$.

(H5) L'opérateur $A$ est un opérateur sectoriel de type $\omega$ avec $0 \leq \theta < \pi(1-\alpha/2)$, et il existe $\phi(.) \in L^1(\mathbb{R}^+)$ telle que

$$\|S_\alpha(t)\|^2 \leq \phi(t) \qquad \forall t \geq 0, \lim_{t\to+\infty}\phi(t) = 0, \tag{3.3.17}$$

où $S_\alpha(t)$ est l'opérateur solution engendré par $A$.

**Lemme 3.3.1** *Supposons que l'hypothèse (H1) est vérifier et soit*

$f \in AAA(\mathbb{R}^+ \times L^2(P,H); L^2(P,H))$. Si $F$ est la fonction définie par

$$F(t) := \int_0^t S_\alpha(t-s) f(s)\, dW_1(s), \qquad t \geq 0, \tag{3.3.18}$$

alors $F \in A(\mathbb{R}^+; L^2(P,H))$.

**Preuve.** Depuis $f \in AAA(\mathbb{R}^+; L^2(P,H))$, nous avons, par définition, que $f = g + h$, où $g \in AAA(\mathbb{R}^+; L^2(P,H))$ et $h \in C_0(\mathbb{R}^+; L^2(P,H))$. Alors

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t S_\alpha(t-s)\, g(s)\, dW_1(s) + \int_0^t S_\alpha(t-s)\, h(s)\, dW_1(s) \qquad (3.3.19)\\ &= \int_{-\infty}^t S_\alpha(t-s)\, g(s)\, dW_1(s) - \int_{-\infty}^0 S_\alpha(t-s)\, g(s)\, dW_1(s) \\ &\quad + \int_0^t S_\alpha(t-s)\, h(s)\, dW_1(s) \\ &= G(t) + H(t), \end{aligned}$$

où

$$G(t) = \int_{-\infty}^t S_\alpha(t-s)\, g(s)\, dW_1(s)$$

et

$$H(t) = -\int_{-\infty}^0 S_\alpha(t-s)\, g(s)\, dW_1(s) + \int_0^t S_\alpha(t-s)\, h(s)\, dW_1(S)$$

D'abord, nous montrons que $G(t) \in AA(\mathbb{R}; L^2(P,H))$. Soit $\{s\prime_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arbitraire des nombres réels. Alors $g \in AA(\mathbb{R}; L^2(P,H))$, il existe une sous-suite $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$de $\{s\prime_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que pour un certain processus stochastique $\tilde{g}$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} E\left\|g(t+s_n) - \tilde{g}(t)\right\|^2 &= 0, \qquad (3.3.20)\\ \lim_{n\to\infty} E\left\|\tilde{g}(t-s_n) - g(t)\right\|^2 &= 0 \end{aligned}$$

vérifier pour tous $t \in \mathbb{R}$. Maintenant, soit $\bar{W}_1(\sigma) = W_1(\sigma + s_n) - W_1(s_n)$ pour chaque $\sigma \in \mathbb{R}$. Notez que $\bar{W}_1$ est aussi un mouvement brownien et à la même distribution que $W_1$. En autre, si on suppose

$$\bar{G}(t) = \int_{-\infty}^t S_\alpha(t-s)\, \tilde{g}(s)\, dW_1(s),$$

alors d'aprés un changement de variables $\sigma = s - s_n$ , on obtient

$$\begin{aligned} & E\left\|G(t+s_n)-\tilde{G}(t)\right\|^2 \\ = \; & E\left\|\int_{-\infty}^{t+s_n} S_\alpha(t+s_n-s)\,g(s)\,dW_1(s)-\int_{-\infty}^{t} S_\alpha(t-s)\,\tilde{g}(s)\,dW_1(s)\right\|^2 \\ = \; & E\left\|\int_{-\infty}^{t} S_\alpha(t-\sigma)\left[g(\sigma+s_n)-\tilde{g}(\sigma)\right]d\tilde{W}_1(\sigma)\right\|^2 \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Et, donc l'utilisation de la propriété isométrique d'intégrale stochastique d'Ito, on a les estimations suivantes

$$\begin{aligned} & E\left\|G(t+s_n)-\tilde{G}(t)\right\|^2 \\ \leq \; & E\left(\int_{-\infty}^{t}\left\|S_\alpha(t-\sigma)\left[g(\sigma+s_n)-\tilde{g}(\sigma)\right]\right\|^2 d\sigma\right) \\ \leq \; & \int_{-\infty}^{t}\left\|S_\alpha(t-\sigma)\right\|^2 E\left\|g(\sigma+s_n)-\tilde{g}(\sigma)\right\|^2 d\sigma \\ \leq \; & \sup_{t\in\mathbb{R}} E\left\|g(t+s_n)-\tilde{g}(t)\right\|^2 \int_{-\infty}^{t}\left(\frac{CM}{1+|\varpi|(t-\sigma)^\alpha}\right)^2 d\sigma \\ \leq \; & (CM)^2 \sup_{t\in\mathbb{R}} E\left\|g(t+s_n)-\tilde{g}(t)\right\|^2 \int_{0}^{t}\frac{1}{(1+|\varpi|\,s^\alpha)^2}ds \\ \leq \; & \frac{(CM)^2|\varpi|^{\frac{-1}{\alpha}}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\pi}{\alpha\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}\sup_{t\in\mathbb{R}} E\left\|g(t+s_n)-\tilde{g}(t)\right\|^2 \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

puis par (3.3.20), on obtient que $\lim_{n\to\infty} E\left\|G(t+s_n)-\tilde{G}(t)\right\|^2 = 0$ pour chaque $t\in\mathbb{R}$. De la même manière, nous pouvons montrer que $\lim_{n\to\infty} E\left\|\tilde{G}(t-s_n)-G(t)\right\|^2 = 0$ pour chaque $t\in\mathbb{R}$. Ainsi, nous concluons que $G(.)\in AA\left(\mathbb{R};L^2(P,H)\right)$. Ensuite, nous montrons que $H(.)\in C_0\left(\mathbb{R}^+;L^2(P,H)\right)$. Depuis $h\in C_0\left(\mathbb{R}^+;L^2(P,H)\right)$

et $1/(1+|\varpi| s^{\alpha})^2$ est intégrable sur $[0,\infty)$, pour tout $\varepsilon>0$ suffisamment petit, il existe une constante $T>0$ de telle sorte que $E\|h(s)\|^2 \leq \varepsilon$ et $\int_T^{\infty}(1/(1+|\varpi| s^{\alpha})^2)\,ds \leq \varepsilon$ pour tous $s \geq T$. Alors, pour tous $t \geq 2T$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&E\|H(t)\|^2 \\
&= E\left\| \begin{array}{c} \int_0^{\frac{t}{2}} S_\alpha(t-s)h(s)\,dW_1(s) + \int_{\frac{t}{2}}^{t} S_\alpha(t-s)h(s)\,dW_1(s) \\ -\int_{-\infty}^{0} S_\alpha(t-s)g(s)\,dW_1(s) \end{array} \right\|^2 \\
&\leq 3E\left(\int_0^{\frac{t}{2}} \|S_\alpha(t-s)h(s)\|^2 ds\right) + 3E\left(\int_{\frac{t}{2}}^{t} \|S_\alpha(t-s)h(s)\|^2 ds\right) \\
&+3E\left(\int_{-\infty}^{0} \|S_\alpha(t-s)g(s)\|^2 ds\right) \\
&\leq 3\int_0^{\frac{t}{2}} \left(\frac{CM}{1+|\varpi|(t-s)^{\alpha}}\right)^2 E\|h(s)\|^2 ds + 3E\int_{\frac{t}{2}}^{t}\left(\frac{CM}{1+|\varpi|(t-s)^{\alpha}}\right) E\|h(s)\|^2 ds \\
&+3\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{CM}{1+|\varpi|(t-s)^{\alpha}}\right)^2 E\|g(s)\|^2 ds \\
&\leq 3(CM)^2 \sup_{t\in\mathbb{R}^+} E\|h(t)\|^2 \int_t^{\infty} \frac{1}{(1+|\varpi| s^{\alpha})^2} ds + 3(CM)^2 \varepsilon \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{1}{(1+|\varpi| s^{\alpha})^2} ds \\
&+3(CM)^2 \sup_{t\in\mathbb{R}} E\|g(t)\|^2 \int_t^{\infty} \frac{1}{(1+(\varpi) s^{\alpha})^2} ds \\
&\leq 3(CM)^2 \sup_{t\in\mathbb{R}^+} E\|h(t)\|^2 \int_T^{\infty} \frac{1}{(1+|\varpi| s^{\alpha})^2} ds + 3(CM)^2 \varepsilon \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+|\varpi| s^{\alpha})^2} ds \\
&+3(CM)^2 \sup_{t\in\mathbb{R}} E\|g(t)\|^2 \int_T^{\infty} \frac{1}{(1+|\varpi| s^{\alpha})^2} ds \\
&\leq 3(CM)^2 \varepsilon \left(\sup_{t\in\mathbb{R}^+} E\|h(t)\|^2 + \frac{|\varpi|^{\frac{-1}{\alpha}}(1-1/\alpha)\pi}{\alpha\sin(\pi/\alpha)} + \sup_{t\in\mathbb{R}} E\|g(t)\|^2\right).
\end{aligned} \tag{3.3.23}$$

Cette inégalité démontre l'assertion puisque $\varepsilon$ est arbitraire. Rappelens que $F(t) = G(t) + H(t)$ pour tous $t \geq 0$, nous obtenons $F(t) \in AAA(\mathbb{R}^+; L^2(P,H))$. La preuve est terminée. ∎

Il est facile de voire que, par des arguments similaires à ceux de la preuve du lemme(3.3.1), nous avons le résultat suivant.

**Lemme 3.3.2** *supposons que l' hypothése (H5) est vérifié et soit*

$f \in AAA(\mathbb{R}^+; L^2(P,H))$. Si $F$ est la fonction définie par

$$F(t) = \int_0^t S_\alpha(t-s) f(s)\,dW_1(s), \qquad t \geq 0, \tag{3.3.24}$$

Alors $F \in AAA(\mathbb{R}^+; L^2(P,H))$.

Maintenant, nous sommes prêts à établir nos résultats principals.

**Théorème 3.3.1** *Supposons que (H1)–(H4) sont vérifié. Alors il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que pour chaque*

$$u_0 \frac{dW_2}{dt} \in B_\varepsilon \left(0, L^2 \left(P, H\right)\right),$$

*il existe une solution mild moyen carré unique, presque asymptotiquemet auomorphe* $x\left(., u_0 \frac{dW_2}{dt}\right)$ *du probléme (3.1.1) sur* $[0, \infty)$ *de sorte que* $x\left(., u_0 \frac{dW_2}{dt}\right) = u_0 \frac{dW_2}{dt}$

**Preuve.** Nous définissons un opérateur non linéaire $Y$ par

$$\begin{aligned}(Yx)(t) = S_\alpha(t)\left[u_0 \tfrac{dW_2}{dt} - f\left(0, u_0 \tfrac{dW_2}{dt}\right)\right] + f\left(t, x(t)\right) + \\ \textstyle\int_0^t S_\alpha(t-s)\, g\left(s, x(s)\right) dW_1(s) \quad t \geq 0 .\end{aligned} \tag{3.3.25}$$

D'abord, nous montrons que $Y\left(AAA\left(\mathbb{R}^+; L^2\left(P, H\right)\right)\right) \subset AAA\left(\mathbb{R}^+; L^2\left(P, H\right)\right)$. compte tenu $x \in AAA\left(\mathbb{R}^+, L^2\left(P, H\right)\right)$, à partir des propriétés de $\{S_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$, $f$ et $g$, nous en déduisons que $Yx$ est bien défini et continue. Depuis $x(t)$ est borné, nous pouvons choisire un sous-ensemble bornée $\mathbb{k}$ de $L^2(P, H)$ tel que $x(t) \in \mathbb{k}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Il résulte de (H2)–(H3) que les deux $f(t, x)$ et $g(t, x)$ sont uniformément continue sur le sous-ensemble bornée $\mathbb{k}$ uniformement pour $t \in \mathbb{R}^+$. En autre, de Lemmes (3.2.8) et (3.3.1) et on tenant compte (H1), il s'ensuit que $Yx \in AAA\left(\mathbb{R}^+; L^2\left(P, H\right)\right)$. Maintenant par (H4), il existe une constante $r > 0$ tel que

$$\begin{aligned}\tfrac{r}{6(CM)^2} - \tfrac{L_f(r) r}{(CM)^2} - \tfrac{|\varpi|^{-1/\alpha}(1-1/\alpha)\pi L_g(r) r}{\alpha \sin(\pi/\alpha)} - \lambda r \\ > \left(1 + \tfrac{1}{(CM)^2}\right) M_j + \tfrac{|\varpi|^{-1/\alpha}(1-1/\alpha)\pi}{\alpha \sin(\pi/\alpha)} M_g\end{aligned} \tag{3.3.26}$$

soit $0 < \lambda < 1$. Nous affirmont que l'affirmation est valable pour $\varepsilon = \lambda r$ en fait, soit $u_0 \frac{dW_2}{dt} \in B_\varepsilon\left(0; L^2\left(P, H\right)\right)$. Définir l'espace

$$D = \left\{x \in AAA\left(\mathbb{R}^+; L^2\left(P, H\right)\right) : x(0) = u_0 \tfrac{dW_2}{dt}, E\left\|x(t)\right\|^2 \leq r, t \geq 0\right\}$$

Puis $D$ est un sous-espace fermé de $AAA\left(\mathbb{R}^+; L^2\left(P, H\right)\right)$. De plus

$YD \sqsubseteq D$. Si $x \in D$ et $t \in \mathbb{R}^+$, nous avons que

$$\begin{aligned}
& E \left\| (Yx)(t) \right\| \\
& \leq 3E \left\| S_\alpha(t) \left[ u_0 \tfrac{dW_2}{dt} - f\left(0, u_0 \tfrac{dW_2}{dt}\right) \right] \right\|^2 + 3E \left\| f(t, x(t)) \right\|^2 \\
& +3E \left\| \int_0^t S_\alpha(t-s)\, g(s, x(s))\, dW_1(s) \right\|^2 \\
& \leq 6 (CM)^2 \left[ E \left\| u_0 \tfrac{dW_2}{dt} \right\|^2 + E \left\| f\left(0, u_0 \tfrac{dW_2}{dt}\right) \right\|^2 \right] \\
& +3E \left\| f(t, x(t)) - f(t, 0) + f(t, 0) \right\|^2 \\
& +3E \left( \int_0^t \left\| S_\alpha(t-s)\, g(s, x(s)) \right\|^2 ds \right) \\
& \leq 6 (CM)^2 \lambda r + 6 (CM)^2 E \left\| f\left(0, u_0 \tfrac{dW_2}{dt}\right) \right\|^2 \\
& +6L_f(r)\, r + 6 \sup\nolimits_{t \in \mathbb{R}^+} E \left\| f(t, 0) \right\|^2 + 6 (CM)^2 \\
& \times \left[ \int_0^t \left( \tfrac{1}{1 + |\varpi| (t-s)^\alpha} \right)^2 L_g(r)\, r ds + \int_0^t \left( \tfrac{1}{1 + |\varpi| (t-s)^\alpha} \right)^2 E \left\| g(s, 0) \right\|^2 ds \right] \\
& \leq 6 (CM)^2 \lambda r + 6 (CM)^2 M_f + 6L_f(r)\, r + 6M_f \\
& + \tfrac{6 (CM)^2 |\varpi|^{-1/\alpha} (1 - 1/\alpha) \pi}{\alpha \sin(\pi/\alpha)} \left[ L_g(r)\, r + M_g \right]
\end{aligned} \tag{3.3.27}$$

à partir de (3.3.26) implique que $E \left\| (Yx)(t) \right\|^2 \leq r$ pour tous $t \geq 0$, de sorte que $YD \sqsubseteq D$. Ensuite, pour compléter la preuve, nous devons montrer que $Y(.)$ est une contraction de $D$ dans $D$. De (3.3.26), nous avons que

$$\frac{r}{6 (CM)^2} - \frac{L_f(r)\, r}{(CM)^2} - \frac{|\varpi|^{-1/\alpha} (1 - 1/\alpha)\, \pi L_g(r)\, r}{\alpha \sin(\pi/\alpha)} - \lambda r > 0. \tag{3.3.28}$$

Ensuite,

$$\frac{r}{6 (CM)^2} > \frac{L_f(r)\, r}{(CM)^2} + \frac{|\varpi|^{-1/\alpha} (1 - 1/\alpha)\, \pi L_g(r)\, r}{\alpha \sin(\pi/\alpha)} + \lambda r. \tag{3.3.29}$$

Autrement dit,

$$6L_f(r) + \frac{6 (CM)^2 |\varpi|^{-1/\alpha} (1 - 1/\alpha)\, \pi}{\alpha \sin(\pi/\alpha)} L_g(r) + 6\lambda (CM)^2 < 1 \tag{3.3.30}$$

Pour toute $x, y \in D$ et $t \geq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}
&E\left\|(Yx)(t)-(Yy)(t)\right\|^2\\
&\leq 2E\left\|f(t,x(t))-f(t,y(t))\right\|^2\\
&+2E\left\|\int_0^t S_\alpha(t-s)\left[g(s,x(s))-g(s,y(s))\right]dW_1(s)\right\|^2\\
&\leq 2L_f(r)\sup_{t\in\mathbb{R}^+}E\left\|x(t)-y(t)\right\|^2\\
&+2(CM)^2\int_0^t\left(\frac{1}{1+|\varpi|(t-s)^\alpha}\right)^2\times E\left\|g(s,x(s))-g(s,y(s))\right\|^2 ds\\
&\leq 2L_f(r)\sup_{t\in\mathbb{R}^+}E\left\|x(t)-y(t)\right\|^2\\
&+\frac{2(CM)^2|\varpi|^{-1/\alpha}(1-1/\alpha)\pi}{\alpha\sin(\pi/\alpha)}L_g(r)\times\sup_{t\in\mathbb{R}^+}E\left\|x(t)-y(t)\right\|^2\\
&\leq\left[2L_f(r)+\frac{2(CM)^2|\varpi|^{-1/\alpha}(1-1/\alpha)\pi}{\alpha\sin(\pi/\alpha)}L_g(r)\right]\times\sup_{t\in\mathbb{R}^+}E\left\|x(t)-y(t)\right\|^2.
\end{aligned}\tag{3.3.31}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\left\|Y_x-Y_y\right\|_\infty\\
=\;&\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\left(E\left\|(Yx)(t)-(Yy)(t)\right\|^2\right)^{1/2}\\
\leq\;&\sqrt{2L_f(r)+\frac{2(CM)^2|\varpi|^{1/\alpha}(1-1/\alpha)\pi}{\alpha\sin(\pi/\alpha)}L_g(r)}\left\|x-y\right\|_\infty
\end{aligned}\tag{3.3.32}$$

Il résulte de (3.3.30) que $Y$ est une application contractant de $D$. Donc, par le principe d'applications contractantes de **Banach**, nous attirons une conclusion qu'il existe un point fixe unique $x(.)$ pour $Y$ Dans $D$. Il est clair que $x$ est un moyen carré presque asymptotiquement automorphes de solution mild de (3.1.1). La preuve est terminée. ■

Le résultat suivant est prouvé à l'aide des étapes similaire à celles du la preuve du résultat précédent, alors on donne les détails.

**Théorème 3.3.2** *Supposons que (H1), (H3) sont vérifés. Si* $L_f(r) \equiv L_f$ *et* $L_g(r) \equiv L_g$ *pour tout* $r \geq 0$ *et* $L_f + (CM)^2 |\varpi|^{-1/\alpha}(1-1/\alpha)\pi L_g/\alpha\sin(\pi/\alpha) < 1/2$, *alors pour* $u_0\frac{dW_2}{dt} \in L^2(P,H)$ *il exite une solution mild moyen carré unique, presque asymptotiquement automorphe* $x\left(., u_0\frac{dW_2}{dt}\right)$ *du problème (3.1.1) sur* $[0,\infty)$ *de telle sorte* $x\left(0, u_0\frac{dW_2}{dt}\right) = u_0\frac{dW_2}{dt}$.

**Théorème 3.3.3** *Supposons que les hypothéses (H2), (H3) et (H5) vérifés. Si* $L_f(r) \equiv L_f$ *et* $L_g(r) \equiv L_g$ *pour tout* $r \geq 0$ *et* $L_f + L_g\|\phi\|_1 < 1/2$ *Alors pour tout* $u_0\frac{dW_2}{dt} \in L^2(P,H)$, *il existe une solution mild moyen carré unique* *presque asymptotiquement automorphe $x\left(., u_0\frac{dW_2}{dt}\right)$ du problème (3.1.1) sur $[0,\infty)$ de sorte que $x\left(0, u_0\frac{dW_2}{dt}\right) = u_0\frac{dW_2}{dt}$.*

**Preuve.** Considérons l'opérateur linéaire $Y$ définie par

$$\begin{array}{l}(Yx)(t) = S_\alpha(t)\left[u_0\frac{dW_2}{dt} - f\left(0, u_0\frac{dW_2}{dt}\right)\right] + f(t, x(t)) \\ +\int_0^t S_\alpha(t-s)\, g(s, x(s))\, dW_1(s) \qquad t \geq 0\,. \end{array} \tag{3.3.33}$$

D'abord, nous montrons que $Y$ associer $AAA(\mathbb{R}^+; L^2(P,H))$ vers lui méme

On donne $x \in AAA(\mathbb{R}^+; L^2(P,H))$ partir des propriétés de$\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$, $f$ et $g$ , nous déduire que $Yx$ est bien défini et continue. Depuis $x(t)$ est borné, nous pouvons choisir un sous-ensemble borné $\mathbb{k}$ de $L^2(P,H)$ tel que $x(t) \in \mathbb{k}$ pout tout $t \in \mathbb{R}^+$ Il résulte de conditions (H2)–(H3) que les deux $f(t,x)$ et $g(t,x)$ sont uniformement continue sur le sous-ensemble borné $\mathbb{k}$ uniformément pour $t \in \mathbb{R}^+$ . En autre, Les lemmes (3.2.8) et (3.3.2) et en tenant compte de (H5), il s'ensuit que $Yx \in AAA(\mathbb{R}^+; L^2(P,H))$. Ensuite, nous montrons que $Y$ est une contraction de $AAA(\mathbb{R}^+; L^2(P,H))$ dans lui-même. Notez que nous avons déjà prouvé $YAAA(\mathbb{R}^+; L^2(P,H)) \sqsubseteq AAA(\mathbb{R}^+; L^2(P,H))$, de plus $x, y \in AAA(\mathbb{R}^+; L^2(P,H))$ et $t \geq 0$ , nous avons

$$\begin{array}{l} E\left\|(Yx)(t) - (Yy)(t)\right\|^2 \\ \leq 2E\left\|f(t,x(t)) - f(t,y(t))\right\|^2 \\ +2E\left\|\int_0^t S_\alpha(t-s)\left[g(s,x(s)) - g(s,y(s))\right] dW_1(s)\right\|^2 \\ \leq 2L_f \sup_{t\in\mathbb{R}^+} E\left\|x(t) - y(t)\right\|^2 \\ +\int_0^t \phi(t-s)\, E\left\|g(s,x(s)) - g(s,y(s))\right\|^2 ds \\ \leq 2L_f \sup_{t\in\mathbb{R}^+} E\left\|x(t) - y(t)\right\|^2 \\ +2L_g \sup_{t\in\mathbb{R}^+} E\left\|x(t) - y(t)\right\|^2 \int_0^\infty \phi(s)\, ds \\ \leq \left[2L_f + 2L_g\left\|\phi\right\|_1\right] \sup_{t\in\mathbb{R}^+} E\left\|x(t) - y(t)\right\|^2 \end{array} \tag{3.3.34}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} \left\|Yx - Yy\right\|_\infty & = & \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+}\left(E\left\|(Yx)(t) - (Yy)(t)\right\|^2\right)^{1/2} \\ & \leq & \sqrt{2L_f + 2L_g\left\|\phi\right\|_1}\left\|x - y\right\|_\infty \end{array} \tag{3.3.35}$$

Ce qui signifie que $Y$ est une contraction sur $AAA(\mathbb{R}^+; L^2(P,H))$, par le principe d'applications contractantes de **Banach**, $Y$ admet un point fixe unique $x(t) \in AAA(\mathbb{R}^+; L^2(P,H))$. Il est clair que $x$ est un moyen carré presque asymptotiquement automorphe de solution mild de (3.1.1). La preuve est alors terminé. ∎

**exemple 3.3.1** *Dans cette section, nous appliquons les résultats obtenus précédemment d'enquêter sur l'existence de moyenne carré signifier presque asymptotiquement automorphe de solution mild pour le système stochastique différentiel partielle d'ordre fractionnel suivante :*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\left[u(t,\xi) - \int_{-\infty}^{t} a(t)\, a_1(t-s)\, u(s,\xi)\, ds\right] = \\ J_t^{\alpha-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - v\right)\left[u(t,\xi) - \int_{-\infty}^{t} a(t)\, a_1(t-s)\, u(s,\xi)\, ds\right] \\ + \int_{-\infty}^{t} a(t)\, a_2(t-s)\, u(s,\xi)\, ds dW(t), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \qquad t \geq 0, \\ u(0,\xi) = u_0(\xi), \qquad \xi \in I = [0,\pi], \end{cases} \tag{3.3.36}$$

*où $a \in AAA(\mathbb{R}^+;\mathbb{R})$, $a_1, a_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sont fonctions continues, et $v > 0$ est une constante fixe .*

Soit $H = L^2([0,\pi])$ avec la norme $\|.\|$ et $A : D(A) \sqsubseteq H \to H$ l'opérateur défini par $Ax = x'' - vx$, domaine $D(A) = \{x \in H : x'' \in H,\ x(0) = x(\pi) = 0\}$.

Il est bien connu que $\Delta x = x''$ est le générateure infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sur $H$. En autre, $A$ sectorielle du type $\varpi = -v < 0$.

Dans la suite, nous supposons

$$\begin{aligned} L_f &= \|a\|_\infty \left( \int_{-\infty}^{0} |a_1(-s)|^2\, ds \right)^{1/2} < \infty, \qquad (3.3.37) \\ L_g &= \|a\|_\infty \left( \int_{-\infty}^{0} |a_2(-s)|^2\, ds \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

Maintenant, on peut définir les fonctions $f, g : \mathbb{R}^+ \times L^2(P,H) \to L^2(P,H)$ par

$$f(t,x)(\xi) = a(t)\int_{-\infty}^{0} a_1(-s)\,x(s,\xi)\,ds, \tag{3.3.38}$$

$$g(t,x)(\xi) = a(t)\int_{-\infty}^{0} a_2(-s)\,x(s,\xi)\,ds,$$

$$J_t^{\alpha-1}h(t) = \int_{0}^{t} \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}h(s)\,ds,$$

qui permet de transformer le systéme (3.3.36) dans un systéme abstrait (3.1.1). Par ailleurs, il n'est pas difficile de voir que $f, g$ sont continues et Lipschitziennes dans le variable seconde avec les constantes de Lipschitz $L_f$ et $L_g$ respectivement .

Le résultat suivant est une conséquence du théorème (3.3.2).

**Théorème 3.3.4** *Sous les hypothéses précédentes, (3.3.36) admet une solution mild uniques* $x \in AAA(\mathbb{R}^+; L^2(P,H))$ *pour* $L_f$ *et* $L_g$ *sont assez petites.*

**Conclution** : Dans ce mémoire nous avons étudiés la contrôlabilité approximative pour une classe d'équation différentielle stochastique fractionnaire non-local (la continuité, l'existence et l'unicité de la solution mild et la contrôlabilité). Et étudiés l'existence et l'unicité de solutions moyenne carrés presque asymptotiquement automorphe de l'équation stochastique intégro-fractionnaire .

# Bibliographie


[1] Approximate controllability of fractional stochastic evolution equations R. Sakthivel $^{a*}$, S. Suganya$^{b}$, S.M. Anthoni$^{b}$.

[2] Asymptotic Behavior of Solutions to Abstract Stochastic Fractional Partial Integrodifferential Equations Zhi-Han Zhao[1], Yong-Kui Chang,[2] and Juan J. Nieto[3,4].

[3] Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles, Jean-Emile Rakotoson.

[4] Semigroups of linéaire operators and applications to partial diffirential equations .A.Pazy.

[5] Fractional diffirential equations . Igor Podluny.