République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Probabilité et application**

Par :

Mlle Boudema Moufida et Benamrane Ilham

Intitulé

Mouvement Brownien Et Théorème De Girsanov

Dirigé par : Mme SAKRANI Samia

Devant le jury

PRESIDENT	Rebai.G	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.Sekrani.S	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Karboua.	Univ-Guelma

Session Juin 2014

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier tout premièrement ALLAH الله le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il nous a donné durant toutes ces longues années.

Ainsi, nous tenons également à exprimer nos vifs remerciements à notre encadreur Dr .SEKRANI S

Nous tenons à remercier vivement

toutes personnes qui nous ont aidés

à élaborer et réaliser ce mémoire

ainsi à tous ceux qui nous ont aidés

de prés ou de loin à accomplir ce travail.

Moufida * Ilham

Table des matières

Résumé

Dans ce Mémoire, nous présentons une introduction à le Mouvement Brownien et Théorème de Girsanov.

Tout d'abord, dans le **chapitre1** : nous présentons des rappelles de probabilité et quelques définitions de calcul stochastique.

Au **chapitre2** : on étude le Mouvement Brownien.

Enfin, on présente la sujet central du mémoire, à savoir, Changement de probabilité Théorème de Girsanov.

Introduction

Le mouvement brownien désigne à la fois un phénomène naturel et un objet mathématique.

L'adjectif brownien associé au nom du botaniste écossais Richard Brown (1773-1858), qui observa en 1827, dans le fluide situé à l'intérieur de grains de pollen de très petites particules en suspension, agitées de mouvements incessants et apparemment chaotiques.

Des résultats de changement de probabilité ont été prouvés pour la première fois dans les années 1940

par Cameron-Cartin puis en 1960 par Girsanov. par la suite ils ont été étendus à des classes plus vastes de processus allant en 1977 jusqu'à la forme générale de Lenglart.

Chapitre 1

Quelque défintions

Le but de ce premier chapitre est d'exposer les notations de base utilisées le long de ce mémoire.

Nous commençons par définir : une rappele de probabilité...Nous rappelons aussi les définitions principale de calcul stochastique.

1.1 Tribu

Définition 1.1.1 *Une tribu (σ-algebra en Anglais) sur Ω est une famille de parties de Ω, contenant l'ensemble vide, stable par passage au complémentaire, union dénombrable et intersection dénombrable.*

Une tribu contient donc l'espace Ω.
Un espace mesurable est un espace muni d'une tribu.

Proposition 1.1.1 *Une intersection de tribus est une tribu.*

Attention : ce n'est pas vrai pour la réunion : une réunion de tribus n'est pas une tribu.

Soit $\mathcal{F}$ une tribu. Une sous-tribu de $\mathcal{F}$ est une tribu G telle que $G \subset \mathcal{F}$, soit $A \in G$ implique $A \in \mathcal{F}$.

La plus petite tribu contenant une famille d'ensembles est l'intersection de toutes les tribus qui contiennent cette famille. Elle est en général difficile (voire impossible) à décrire plus précisément.

exemple 1.1.1 *Soit* $\Omega = \{1, ..., 6\}$. *On peut définir plusieurs tribus sur* Ω : $\mathcal{F} = P(\Omega) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, ..., \{1,2\}, ..., \Omega\}$ = *tribu complète (la plus grande)* $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$ = *tribu triviale (la plus petite)* (ϕ = *évén.impossible* , Ω = *évén.arbitraire*),$\mathcal{F}_1 = \{\phi, \{1\}, \{2, ..., 6\}, \Omega\}$, $\mathcal{F}_2 = \{\Omega, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \Omega\}$, *etc.- Soit* $\Omega = [0,1]$ *et* $I_1, ..., I_n$ *une famille d'intervalles formant une partition de* Ω. *La famille de sous-ensembles définie par* $G = \{\phi, I_1, I_2, ..., I_1 \cup I_{2,...,} I_1 \cup I_2 \cup I_{3,...,} \Omega\}$ *est une tribu sur* Ω. *Soit* $A = \{A_i, i \in I\}$ *une famille de sous−ensembles de* Ω. *Alors la tribu engendrée par* A *est la plus petite tribu sur* Ω *qui contient tous les sous-ensembles* A_i, $i \in I$. *Elle est notée* $\sigma(A)$. *(NB : l'ensemble* I *n'est pas forcément dénombrable.)*

Définition 1.1.2 *Une sous-tribu de* $\mathcal{F}$ *est une tribu* G *telle que si* $A \in G$ *alors* $A \in \mathcal{F}$. *On note* $G \subset \mathcal{F}$.

exemple 1.1.2 *Reprenons l'exemple 1.1.2.On a* $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$, *mais pas* $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, *ni* $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$

.Remarque importante :

Il est toujours vrai que $A \in G$ *et* $G \subset \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{F}$.

Mais il est faux de dire que $A \subset B$ et $B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{F}$.

Contre-exemple :

$\{1\} \subset \{1,3,5\}$, $\{1,3,5\} \in \mathcal{F}_2$, mais $\{1\} \notin \mathcal{F}_2$.

1.1.1 Mesurabilité

Définition 1.1.3 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *et* (E, ξ) *deux espaces mesurables. Une application* f *de* Ω *dans* E *est dite* $(\mathcal{F}, \xi)$ *mesurable si* $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, $\forall A \in \xi$, *où* $f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \backslash f(\omega) \in A\}$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les tribus employées, on dit simplement que f *est mesurable.*

Une fonction f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est borélienne si elle est* $(B_{\mathbb{R}}, B_{\mathbb{R}})$*−mesurable, soit* $f^{-1}(A) \in B_{\mathbb{R}}, \forall A \in B_{\mathbb{R}}$.*Il suffit que cette propriété soit vérifiée pour les intervalles* A.

Les fonctions continues sont boréliennes.

Définition 1.1.4 *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Une variable aléatoire réelle (v. a. r.) X est une application mesurable de$(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}$ (donc telle que $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \forall A \in B_{\mathbb{R}}$).*

Une constante est une v. a. de même qu'une fonction indicatrice d'ensemble de la tribu $\mathcal{F}$.

X est aussi dite une fonction (ou v. a) *alors X est toujours $\mathcal{F}$-mesurable.*
- Si $\mathcal{F} = P(\Omega)$,
- Si $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = B(\mathbb{R})$,
Alors X est dite une fonction borélienne.
Pour $A \subset \Omega$, on pose

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A, \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On vérifie que la v.a.1_Aest $\mathcal{F}$−mesurable ssi $A \in \mathcal{F}$.

exemple 1.1.3 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace de probabilité du d'équilibré .*

$X_1(\omega) = \omega : P(\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) = i\}) = P(\{i\}) = \frac{1}{6}$.

$X_2(\omega) = 1_{\{1,3,5\}}(\omega) : P(\{\omega \in \Omega : X_2(\omega) = 1\}) = P(\{1, 3, 5\}) = \frac{1}{2}$.

Soit $\mathcal{F} = P(\Omega)$. X_1et X_2 sont toutes deux $\mathcal{F}$−mesurables.

Soit $\mathcal{F}_2 = \{\phi, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$.

Seule X_2 est $\mathcal{F}_2$−mesurable, X_1 ne l'est pas.

En effet :

$\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) = 1\} \{1, 3, 5\} \in \mathcal{F}_2$ et $\{\omega \in \Omega : X_2(\omega) = 0\} = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{F}_2$, *tandis que* $\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) = 1\} = \{1, 3, 5\} \in \mathcal{F}_2$ *et* $\{\omega \in \Omega : X_2(\omega) = 0\} = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{F}_2$,

La tribu engendrée par une famille de v. a. $\{X_i \,, i \in I, t \in \mathbb{R}\}$*sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *est définie par*

$$\sigma(X_i, i \in I) = \sigma(\{X_i \in B\}, i \in I, B \in B(\mathbb{R})) = \sigma(\{X_i \leq t\}, i \in I, t \in \mathbb{R}).$$

Reprenons l'exemple précédent : $\sigma(X_1) = \mathcal{F} = P(\Omega)$, $\sigma(X_2) = \mathcal{F}_2 \neq P(\Omega)$.

1.2 Espace de probabilité

Un espace de probabilité est un triplet $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ où :
- Ω est un ensemble,
- $\mathcal{F}$ est une tribu (ou $\sigma-$algèbre) sur Ω,
- P est une (mesure de) probabilité sur $(\Omega,\ \mathcal{F})$

1.3 Espace de probabilité filtré ou base stochastique

Un espace de probabilité filtré ou une base stochastique est $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ où :

- Ω est un ensemble,

- $\mathcal{F}$ est une tribu (ou $\sigma -$ a lg èbre) sur Ω,

- $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une filtration,

- P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

1.3.1 Filtration

Une filtration est une famille $(\mathcal{F}_T, T \in \mathbb{R}_+)$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ tq

$$\mathcal{F}s \subset \mathcal{F}t, \forall t \geq s \geq 0.$$

par convention, on pose $\mathcal{F}_\infty = V_{t \geq 0}\, \mathcal{F}_t$ (= la plus petite contenant toutes les $\mathcal{F}_t$).

On pose aussi $\mathcal{F}_{t_+} = \cap_{s \geq t} \mathcal{F}_s$.

1.3.2 Filtration naturelle

La filtration naturelle d'un processus $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ notée par $\mathcal{F}_t^X$, est définie par

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t).$$

1.4 Probabilités équivalentes

Définition 1.4.1 *Deux probabilité P et Q définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F})$ sont dites équivalentes si elles ont mêmes ensembles négligeables, c'est à dire si :*

$$P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0$$

Une proprété vraie P p. s. est alors vraie Q p. s.

Si P et Q sont équivalentes, il existe une variable Y, strictement positive, $\mathcal{F}$-mesurable, d'espérance densité de Radon-Nikodym telle que $dQ = YdP$ ou encore $Q(A) = \int_A YdP$. On écrit également cette relation sous la fourme $\frac{dQ}{dP} = Y$

Réciproquement, si Y est une v. a. strictement positive, $\mathcal{F}$-mesurable, d'espérance 1 sous P, la relation $E_Q(Z) = E_P(ZY)$ définit une probabilité Q équivalente à P. Elle est facile à mémoriser par la règle de calcul formel suivante :

Définition 1.7.1 *Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que $E(|X|) < \infty$.*

On appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{F}_1$, et on note $E(X/\mathcal{F}_1)$, toute variable aléatoire Y satisfaisant les deux conditions :

1. $Y \subseteq \mathcal{F}_1$, c'est-à-dire Y est $\mathcal{F}_1$-mesurable,

2. pour tout $A \in \mathcal{F}_1$, on a

$$\int_A X dP = \int_A Y dP.$$

si Z une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, nous abrégeons $E(X/\sigma(Z))$ par $E(X/Z)$.

Théorème 1.7.1 *1. L'espérance conditionnelle $E(X/\mathcal{F}_1)$ existe.*

2. L'espérance conditionnelle est unique dans le sens que si Y et Y' sont deux versions de $E(X/\mathcal{F}_1)$, alors $Y = Y'$ presque sûrement.

3. On a $E(E(X/\mathcal{F}_1)) = E(X)$ et $E(|E(X/\mathcal{F}_1)|) \leq E(|X|)$.

Propriétés de l'espérance conditionnelle

Soient X, Y deux v. a. intégrables.

- **Linéarité** : $E(cX + Y/G) = cE(X/G) + E(Y/G)$ p. s.

- **Positivité-monotonie** : $X \geq Y$ p. s. $\Rightarrow E(X/G) \geq E(Y/G)$ p. s.

- Si $X \perp G$ alors $E(X/G) = E(X)$ p. s.

- Si X est $G-$mesurable, alors $E(X/G) = X$ p. s.

- Si Y est $G-$mesurable et bornée, alors $E(XY/G) = E(X/G)Y$ p. s.
- Si $H \subset G \subset \mathcal{F}$ alors $E(E(X/H)/G) = E(X/H) = E(E(X/G)/H)$ p. s.

1.8 Processus stochastique

Un processus stochastique est un phénomène dans le temps d'une manière aléatoire.

La vie quotidienne et la science nous donnent beaucoup d'exemples de ce genre de phénomène, où en tout cas des phénomènes qui peuvent être compris de cette façon.

La météo, la population d'une ville, le nombre de personnes dans une file d'attente et la position d'une particule de pollen dans un fluide, sont des exemples de processus stochastiques.

Dans toute la suite, on considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ supposé complet de plus nous adaptons les définitions et les notations suivants :

Définition 1.8.1 *Un processus stochastique est un famille de variable aléatoire* $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ *définie sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *et à valeurs dans un espace mesurable* (E, ξ) .

Dans la plus part des cas étudiés dans ce mémoire, l'espace (E, ξ) *sera* $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ *ou* $(\mathbb{R}_n, B_{\mathbb{R}_n})$.

Définition 1.8.2 *Soit* X_t, $t \in \mathbb{R}$ *un processus stochastique :*

1. Les v.a. $X_t - X_s$, *pour* $t > s \geq 0$, *sont appelles des accroissements du processus* $(X_t)_{t \geq 0}$.

2. Un processus $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ *est à accroissements indépendants si pour toute suite* $0 < t_1 < ... < t_n$, *les variables aléatoires* $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *sont indépendantes.*

3. Un processus $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ *est à accroissements stationnaires si, la distribution de la variable* $X_{t+s} - X_t$ *ne dépend pas de* t.

En d'autre termes pour tout $t \geq 0$, $h > 0$, *la loi de* $X_{t-h} - X_t$ *et égale la loi de* $X_h - X_0$.

Définition 1.8.3 *Un processus* $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ *est appelé un processus à trajectoires continues (ou simplement processus continu) si*

$$P(\{\omega \in \Omega : t \to X_t(\omega) \text{ est continue}\}) = 1.$$

Attention : ne pas confondre “processus à temps continu” (= notion générale) et “processus continu ” (= processus à trajectoires continues).

1.8.1 Vecteur aléatoire gaussien

Définition 1.8.4 *Un vecteur aléatoire (de dimension $n \geq 1$) est une application*

$$X : \begin{cases} \Omega \to \mathbb{R}^n \\ \omega \to X(\omega) = (X_1(\omega), ..., X_n(\omega)) \end{cases}$$

telle que

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}, \forall B \in B(\mathbb{R}^n).$$

1.8.2 Processus gaussien

Définition 1.8.5 *Un prossus gaussien est un processus $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ tel que $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ est vecteur aléatoire goussien $\forall n \geq 1$ et $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$. Ceci revient à dire que $c_1 X_{t_1} + ... + c_n X_{t_n}$ est une v.a gaussienne*

$$\forall n \geq 1, t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+, c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$$

pour un vecteur aléatoire (pas forcement gaussienne) en défini encore :

(1) *La fonction $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ donné*

$$m(t) = E(X_t)$$

est appelée la moyenne du processus .

(2) La *fonction $K : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$*

$$K(t,s) = cov(X_t, X_s)$$

est applé la covariance d'un prossus.

1.9 Processus de Markov

Dans ce paragraphe, nous abordons une notion importante dans la théorie de processus stochastique : le processus de Markov, nous y montrons en particulier que le mouvement brownien est un processus de Markov ainsi que le processus (B_t, S_t).

Définition 1.9.1 *Un processus de Markov est un Processus $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ tel que pour tout $t > s \geq 0$ et pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne et bornée (NB :$\mathcal{F}_s^X = \sigma(X_r, r \leq s)$).*

$$E(f(X_t)/\mathcal{F}_s^X) = E(f(X_t)/X_s) p.s.$$

En particulier, si $f(x) = 1_B(x)$ avec $B \in B(\mathbb{R})$, alors $P(X_t \in B/\mathcal{F}_s^X) = P(X_t \in B/X_s)$.

1.10 Martingale

Définition 1.10.1 *soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ une base stochastique*
** un processus (M_t) adapté à $\mathcal{F}_t$ tel que :*

$$\begin{cases} (i)\, E(|M_t|) < \infty \text{ , } M_t \in L^1 \\ (ii)\, E(M_t/\mathcal{F}_t) = M_s \text{ , } \forall t > s \geq 0 \end{cases}$$

est appellé une martingale.

Définition 1.10.2 *Une famille de variable aléatoires $(X_t, t \in [0, \infty[)$ est une sur martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable et intégrable pour tout t.*

$$E(X_t/\mathcal{F}_t) \leq Xs \ , \forall s \leq t.$$

Définition 1.10.3 *Une famille de variable aléatoire $(X_t, t \in [0, \infty[)$ est une sou martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$ si X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable et intégrable pour tout t*

$$E(X_t/\mathcal{F}_s) \geq X_s, \forall s \leq t$$

Définition 1.10.4 *Si M est une martingale locale continue, on note par $L^2_{loc}(M)$ l'espace des classes de processus progressivement mesurable K tel qu'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêts croissants vers l'infini et tel que*

$$\forall n \geq 1, \ E\left[\int_0^{T_n} K_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right] < +\infty$$

1.10.1 Martingale exponentielle

Définition 1.10.5 . *Soit M une martingale continue de carré intégrable telle que $M_0 = 0$ et $\langle M\rangle_t \leq Kt$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On définit la martingale exponentielle Y associée à M par*

$$Y_t = exp\left(M_t - \frac{\langle M\rangle_t}{2}\right), \ t \in \mathbb{R}_+.$$

Chapitre 2

Mouvement brownien

Le botaniste Robert Brown observe en 1828 le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau. En 1877, Delsaux explique les changements incessants de direction de trajectoire par les chocs entre les particules de pollen et les molécules d'eau. Un mouvement de ce type est qualifié de "mouvement au hasard".

En 1900, Bachelier, en vue d'étudier les cours de la Bourse met en évidence le caractère "markovien" du mouvement Brownien : la position d'une particule à l'instant $t+s$ dépend de sa position en t, et ne dépend pas de sa position avant t. Il convient d'insister sur le caractère précurseur de Bachelier et le fait que la théorie du mouvement Brownien a été développée pour la Bourse, avant de l'être pour la Physique.

En 1905, Einstein détermine la densité de transition du mouvement Brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur et relie ainsi le mouvement Brownien et les équations aux dérivées partielles de type parabolique. La même année, Smoluchowski décrit le mouvement Brownien comme une limite de promenades aléatoires.

La première étude mathématique rigoureuse est faite par N. Wiener (1923) qui exhibe également une démonstration de l'existence du Brownien. P. Lévy (1948) s'intéresse aux propriétés fines des trajectoires du Brownien. Depuis, le mouvement Brownien continue de passionner les probabilistes, aussi bien pour l'étude de ses trajectoires que pour la théorie de l'intégration stochastique (Wiener, Itô,Watanabe, Meyer, Yor, LeGall, Salminen, Durrett, Chung, Williams, Knight, Pitman,...).

2.1 Processus aléatoire à temps continu

Définition 2.1.1 *Un processus aléatoire à temps continu est une famille de v. a. $(X_t, t \in R_+)$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On peut également le voir comme une fonction aléatoire :*

$$X \begin{cases} \Omega \rightarrow \{ \text{ fonctions de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } \mathbb{R}\} \\ \qquad \omega \rightarrow \{t \rightarrow X_t(\omega)\} \end{cases}$$

2.2 Mouvement brownien standard$(M.B.S)$

2.2.1 Première caractérisation du $(M.B.S)$

Un mouvement brownien standard (abrégé m. b. s.) est un processus aléatoire à temps continu
$(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ tel que

$$\begin{cases} i)B_0 = 0 \text{ p. s.} \\ ii)(B_t) \text{ est à accroissements indépendants et stationnaires,} \\ iii)B_t \sim N(0,t), \forall t > 0, \\ iiii)(B_t) \text{ est à trajectoires continues.} \end{cases}$$

Remarque 2.2.1 *De cette dfinition, il suit que pour $t > s > 0, B_t - B_s \sim B_{t-s} \sim N(0; t-s)$, i. e. $E(B_t - B_s) = 0$ et $E((B_t - B_s)^2) = t-s$.En appliquant la loi des grands nombres, on trouve en core que $\frac{B_t}{t} \rightarrow 0$ p. s. lorsque $t \rightarrow \infty$. De plus, ona $\frac{B_t}{\sqrt{t}} \sim N(0,1)$, pour tout $t > 0$ (pas besoin par contre du TCL pour le prouver!). On voit donc que le m. b. s. est bienune généralisation à temps continu de la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$. Il existe plusieurs manières de construire un mouvement brownien standard. Citonstrois d'entre elles.*

Théorème d'existence et d'unicité du mouvement brownien

Il y a existence et unicité du mouvement brownien, c'est à dire qu'il existe un espace de probabilité convenable et un processus $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ sur cet espace qui vérifie les conditions de la définition.

2.2.2 Desiéme caractérisation du $(M.B.S)$

Un mouvement brownien standard $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est un processus à trajectoires continues et gaussien avec moyenne $m(t) = 0$ et covariance $K(t,s) = t \wedge s = min(t,s)$.

Démonstration. Il fau drait vérifier que $c_1 B_{t_1} + ... + c_n B_{t_n}$ est une v. a. gaussienne.

Vérifions seulement que $B_t + B_s$est gaussienne : $B_t + B_s = (B_t - B_s) + 2B_s$, c'est donc une v.a. gaussienne, car la somme de deux v. a. gaussiennes indépendantes est encore gaussienne.

Soit maintenant $t \geq s \geq 0$:
$m(t) = E(Bt) = 0$,
$K(t,s) = Cov(B_t, B_s) = E(B_t B_s) = E((B_t - B_s + B_s)B_s)$
$= E((B_t - B_s)B_s) + E(B_s^2) = 0 + s$,
$car (B_t - B_s) \perp B_s$.
On a donc $K(t,s) = min(t,s)$.

Proposition 2.2.1 *Le mouvement brownien standard $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est un processus de Markov.*

Démonstration. En utilisant le fait que $(B_t - B_s) \perp B_s$, B_s est $\mathcal{F}_s^B$-mesurable, on obtient

$$E(f(B_t)/\mathcal{F}_s^B) = E(f(B_t - B_s + B_s) - \mathcal{F}_s^B) = \Psi(B_s) \text{ p. s.},$$

où $\Psi(y) = E(f(B_t - B_s + y))$. Un calcul identique montre que $E(f(B_t)/B_s) = \Psi(B_s)$ p. s.et

donc la propriété de Markov est démontrée.

Remarque 2.2.2 *De la démonstration ci-dessus, on déduit que*

$$E(f(B_t)/\mathcal{F}_s^B) = \Psi(B_s) p.s., \text{où } \Psi(y) = E(f(X+y)),$$

avec $X \sim N(0, t-s)$. *Ceci montrequ'une expression apriori compliquée faisant intervenir*

une espérance conditionnelle d'une fonction du mouvement brownien peut seréduire à une simple espérance d'une fonction d'une loi gaussienne.

Proposition 2.2.2 *Le mouvement brownien standard $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^B, t \in \mathbb{R}_+)$.*

Démonstration.

i) Par Cauchy-Schwarz, on a $E(|B_t|) \leq \sqrt{E(B_t^2)} = \sqrt{t} < \infty$, $\forall t \geq 0$.

ii) $\forall t > s \geq 0$, on a $E(B_t/\mathcal{F}_s^B) = E(B_t - B_s/\mathcal{F}_s^B) + E(B_s/\mathcal{F}_s^B) = E(B_t - B_s) + B_s = B_s$.

Remarque 2.2.3 *Pour desraisons techniques, on a par fois besoins "d'augmenter" la filtration naturelle* $(\mathcal{F}_t^B)$. *On ne rentrera pas dans ces détails .Les processus suivants sont des martingales par rapport à* $(\mathcal{F}_t^B)$:

$$\begin{cases} i)M_t = B_t^2 - t, \\ ii)N_t = exp(B_t - \frac{t}{2}). \end{cases}$$

2.2.3 Troisième caractérisation du $(M.B.S)$ (Théorème de Lévy)

Soit (X_t) un processus à trajectoires continues, adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t)$ et tel que

$$\begin{cases} i)(X_t) \text{ est une martingale par rapport à } (\mathcal{F}_t), \\ ii)(X_t^2 - t)\text{est une martingale par rapport à } (\mathcal{F}_t) \end{cases}$$

Alors (X_t) est un mouvement brownien standard.

2.3 Généralisation.

Le processus Z défini par $Z_t = a + B_t$ est un Brownien issu de a.

On dit que X est un MB de drift μ et de coefficient de diffusion σ si

$$X_t = x + \mu t + \sigma B_t$$

Où Best un mouvement Brownien. La v. a X_t est un v. a gaussienne d'espérance $x + \mu t$ et de variance $\sigma^2 t$.

$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_u, u \leq s)$.

2.4 Propriétés De Mouvement brownien

Soit W un mouvement brownien. Alors,

• **Symétrie** : Le processus$(-W_t)_{t\geq 0}$est aussi un mouvement brownien.
• **Rugosité** : Les trajectoires $t \longrightarrow W_t(\omega)$ sont nulle part dérivables.
• **Propriété de Markov** : Pour tout $u > 0$, le processus $(W_{u+t} - W_u)_{t\geq 0}$ est aussi un mouvement brownien, indépendant de $\mathcal{F}_u$

2.4.1 Variation quadratique

Variation quadratique du mouvement brownien standard

Soit $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un mouvement brownien standard (par convenance, on notera parfois

$B_t = B(t))$. Pour $t > 0$, on définit

$$\langle B\rangle_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{2^n} \left(B\left(\frac{it}{2^n}\right) - B\left(\frac{(i-1)\,t}{2^n}\right)\right)^2$$

Proposition 2.4.1 *Pour $t > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \langle B\rangle_t^{(n)} = t \; p.s.$$

et on définit la variation quadratique du mouvement brownien standard $\langle B\rangle_t$comme étant donnée par cette limite (par convention,on pose également $\langle B\rangle_0 = 0$).

Démonstration. Soient $X_i = B\left(\frac{it}{2^n}\right) - B(\frac{(i-1)t}{2^n}), 1 \leq i \leq 2^n$ (t et n fixés).

Les v.a. X_i sont i.i.d. $\sim N(0, t/2^n)$ et $\langle B\rangle_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{2^n} X_i^2$. De plus, on a

$$E(\langle B\rangle_t^{(n)}) = \sum_{i=1}^{2^n} E(X_i^2) = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{t}{2^n} = t,$$

$$Var(\langle B\rangle_t^{(n)}) = \sum_{i=1}^{2^n} Var(X_i^2) = \sum_{i=1}^{2^n} (E(X_i^4) - E(X_i^2)^2) = \sum_{i=1}^{2^n} \left(3\frac{t^2}{4^n} - \frac{t^2}{4^n}\right) = \frac{t^2}{2^{n-1}}.$$

En conséquence,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\left|\langle B\rangle_t^{(n)} - t\right| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty} Var(\langle B\rangle_t^{(n)}) = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^2}{2^{n-1}} < \infty.$$

Par le lemme de Borel-Cantelli et le critère donné pour la convergence presque sûre,on
a donc

$$\langle B\rangle_t^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} t \;\; p.s.$$

Corollaire 2.4.1

$$\underset{n\to\infty}{lim} \sum_{i=1}^{2^n} \left| B\left(\frac{it}{2^n}\right) - B\left(\frac{(i-1)t}{2^n}\right)\right| = \infty \;\; p.s.$$

donc le processus (B_t) n'est pas à variation bornée.
Démonstration. Supposons par l'absurde que

$$P\left(lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left| B\left(\frac{it}{2^n}\right) - B(\frac{(i-1)\,t}{2^n})\right| < \infty\right) > 0$$

.

Alors en reprenant la notation de la démonstration précédente, on a

$$\langle B\rangle_t = \lim_{n\to\infty} \langle B\rangle_t^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} X_i^2 \le \left(\lim_{n\to\infty} \max_{1\le i\le 2^n} |X_i|\right)\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} |X_i|\right).$$

Vu que le processus(B_t) est continu , il est uniformément continu sur $[0, t]$,
et donc

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le i\le 2^n} |X_i| = 0 \; p.s.$$

D'un autre côté, on a supposé que

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} |X_i| < \infty\right) > 0\ .$$

De la première inégalité,on conclut donc que

$$P(\langle B\rangle_t = 0) > 0,$$

cequi est clairement en contradiction avec le fait que
$\langle B\rangle_t = t$ p. s.

Remarque 2.4.1 *Le fait que le processus (B_t) n'est pas à variation bornée implique que ses trajectoires ne sont pas dérivables.*

Remarque 2.4.2 *En appliquant la premiére caractérisation $(M.B.S)$ (i), on remarque que le processus$(B_t^2 - \langle B\rangle_t, t \in R_+)$est une martingale. Ceci n'est pas un hasard. Cette propriété va même nous servir à définir la variation quadratique d'une martingale continue de carré intégrable.*

exemple 2.4.1 *On a vu que $\langle B\rangle_t = t$. Noter que dans ce cas, la variation quadratique est un processus déterministe.*

2.4.2 Le Brownien géométrique

Définition 2.4.1 *Soit B un mouvement Brownien, b et σ deux constantes. Le processus*

$$X_t = X_0 \exp\{(b - \frac{1}{2}\sigma^2\}t + \sigma B_t + \ln x$$

et la variable qui est à droite suit une loi normale.

Propriétés

• Le processus $X_t e^{-bt}$ est une martigale.

• En notant G une variable aléatoire de loi $N(0,1)$

$$\begin{aligned} E(f(X_t)/\mathcal{F}_s) &= E(f(X_t)/X_s) = E(f(x \exp\{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s) + \sigma(B_t - B_s)\})_{x=X_s}) \\ &= E(f(x \exp\{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s) + \sigma G\sqrt{t-s}\})_{x=X_s} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(X_s \exp\{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s) + \sigma y\sqrt{t-s}\})q(1,0,y)dy. \end{aligned}$$

Ce processus est appelé le modéle Black Scholes, il est utilisé pour modéliser le prix d'un actif financier. Le rendement de l'actif entre deux dates est mesuré par la différence des logarithmes des cours et donné par la variable gaussienne $\{b - \frac{1}{2}\sigma^2\}(t-s) + \sigma(B_t - B_s)$

2.5 Mouvement Brownien Dimension d

Définition 2.5.1 *On appelle mouvement brownien dimension d, tout processus* $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *à valeurs dans* $(\mathbb{R}^d, B_{\mathbb{R}^d})$ *défini sur un espace probabilisé*$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *tel que :*

1. le processus $(B_t)_t$ *est à accroissements indépendants, et* $B_0 = 0$ *p. s. (on dit qu'il s'agit du mouvement brownien issu de 0),*

2. pour tout $0 \leq s \leq t, B_t - B_s \sim N_d(0, (t-s)I_d)$*,*

3. le processus (B_t) *est à trajectoires p. s. continues.*

2.6 L'intégrale stochastique (ou l'Intégrale d'Itô)

Soit $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un mouvement brownien standard par rapport à $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+)$.

Soit $T > 0$ fixé ($\neq$ temps d'arrêt), notre but est de construire l'intégrale stochastique :

$$\int_0^t H_s dB_s, t \in [0, T]$$

Définition 2.6.1 *(et théorème) –Intégrale d'Itô–*

.Soit H *un processus* $\mathcal{F}_t$*–adapté, continu à gauche et vérifiant* $\int_0^t H_s^2 ds < \infty$ *pour tout* $t > 0$.

Alors, il existe un processus continu $\left(\int_0^t H_s dW_s\right)_{t\geq 0}$ *tel que*

$$\sum_{i=1}^{n} H_{(i-1)t/n}\left(W_{it/n} - W_{(i-1)t/n}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t H_s dW_s \qquad \text{pour tout } t > 0,$$

où la convergence a lieu"en probabilité" .

Pour tout $t \geq 0$*, ce processus vérifie l'égalité*

$$E\left(\left(\int_0^t H_s dW_s\right)^2\right) = \int_0^t E\left(H_s^2\right) ds,$$

cette dernière quantité pouvant être infinie.

Dans le cas où $\int_0^t E\left(H_s^2\right) ds < +\infty$ pour tout $t > 0$, le processus $\left(\int_0^t H_s dW_s\right)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$−martingale.

2.7 Formules d'Itô

2.7.1 Formules de base

Jusqu'à présent, on a défini l'intégrale stochastique, mais il nous manque encore des règles de calcul. La première règle de calcul est la suivante.

Théorème 2.7.1 *Soit $(B_t, t \in \mathbb{R}^+)$ un mouvement brownien stantard par rapport à $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}^+)$ et $f \in C^2(\mathbb{R})$ (i.e. f, f' et f'' sont des fonctions continues) . On suppose de plus que*

$$E\left(\int_0^t (f'(B_s))^2\right) ds < \infty, \forall t > 0. \tag{1}$$

Alors pour tout $t > 0$,

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s) ds \text{ p.s.} \tag{2}$$

Remarque 2.7.1 - *Vu que $(f'(B_t), t \geq 0)$ est un processus continuet adapté à $(\mathcal{F}_t)$et que la condition (1) est vérifiée, $\int_0^t f'(B_s) dB_s$ est bien définie (et $\int_0^t f''(B_s) ds$ l'est également car l'application $s \longrightarrow f''(B_s)$ est continue).*

- Le second terme du membre de droite dans (2)(absent dans les règles de calcul différentiel "classique") est appelé terme d'Itô, il résulte la variation quadratique non-nulle du mouvement brownien.

Démonstration.(idée principale)

$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=1}^{n} (f(B_{t_i(n)}) - f(B_{t_{i-1}(n)}))$,

où $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} = t$ est une suite de partitions de $[0, t]$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq i\leq n} \left|t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}\right| = 0.$$

Par un développement de Taylor classique,on a

$$f(y) - f(x) = f'(x)(y-x) + \frac{1}{2}f''(x)(y-x)^2 + r(y-x),$$

où $lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^2} = 0$ (on note aussi $r(h) = o(h^2)$).

Donc $f(B_t) - f(B_0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \Big(f'(B_{t_{i-1}}(n))(B_{t_i}(n) - B_{t_{i-1}}(n)) + \frac{1}{2}f''(B_{t_{i-1}}(n))(B_{t_i}(n) - B_{t_{i-1}}(n))^2 + r_i^{(}$

$\underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)d\langle B\rangle_s + 0,$

ce qui permet de conclure, vu que $\langle B\rangle_s = s$.

exemple 2.7.1 *Soit $f(x) = x$, la formule (2) s'écrit alors*

$$B_t - B_0 = \int_0^t 1dB_s + 0,$$

exemple 2.7.2 *Soit $f(x) = x^2$, on a d'après(2) :*

$$B_t^2 - B_0^2 = \int_0^t 2B_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2ds = 2\int_0^t B_s dB_s + t,$$

autrement dit : $B_t^2 - t = 2\int_0^t B_s dB_s$ est une martingale,ce qu'o na vait déjà montré d'une autre manière (noter que la condition (1) est vérifiée car $E(\int_0^t (2B_s)^2 ds) = \int_0^t 4sds = 2t^2 < \infty$).

exemple 2.7.3 *Soit $f(x) = e^x$: $f'(x) = f''(x) = e^x$, et donc*

$$e^{B_t} - 1 = \int_0^t e^{B_s}dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t e^{B_s}ds.$$

Noter qu'ici aussi la condition (1)est vérifiée,car

$$E\left(\int_0^t (e^{B_s})^2 ds\right) = \int_0^t E(e^{2B_s})ds = \int_0^t e^{2s}ds = \frac{e^{2t}-1}{2} < \infty.$$

Si on pose $X_t = e^{B_t}$, alors la formule ci-dessus devient :

$$X_t - 1 = \int_0^t X_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t X_s ds.$$

Autrement dit, on a trouvé une équation (intégrale) pour le processus (X_t). Sous forme difféntielle, celle-ci s'écrit

$$dX_t = X_t dB_t + \frac{1}{2}X_t dt \text{ et } X_0 = 1.$$

Vu que $\frac{dB_t}{dt}$ n'existe pas,"on ne divise pas par dt". Noter que la forme différentielle ci-dessus n'a aucun sens entant que telle et ne constitue qu'une notation pour la forme intégrale donnée plus haut. L'esprit humain cependant a plus defacilité à raisonner avec des différentielles, c'est pour quoi celle-ci est largement répandue.

Sous une forme ou l'autre,équation ci-dessus est notre premier exemple d'équation différ en-tielle stochastique. Il se trouve que c'est aussi un cas particulier de l'équation de Black&Scholes, largement utilisée en mathématiques financières pour décrire l'évolution du prix d'un actif (noter que la solution $X_t = e^{B_t}$suit une loi log-normale et est toujours à valeurs positives).Voyons maintenant une version légèrement plus élaborée de la formule (2).

Théorème 2.7.2 *Soient (B_t) un mouvement brownien standard et $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ (i.e f, $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$sont continues) telle que*

$$E\left(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)\right)^2 < \infty, \forall t > 0.$$

Alors pour tout $t > 0$,
$f(t, B_t) - f(0, B_0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s)ds$ p.s.

Démonstration Le développement de Taylor utilisé est : $f(u,y) - f(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)(u-t) + \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)(y-x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)(y-x)^2 + r(u-t, y-x)$.
ce qui explique l'apparition du terme supplémentaire dans la formule.

Remarque 2.7.2 *Vu que la fonction $t \to t$ est une fonction à variation bornée, il n'ya pas besoin d'effectuer un développement de la fonction f à l'ordre 2 en t.*

exemple 2.7.4 *Soit $f(t,x) = x^2 - t$:*

$\frac{\partial f}{\partial t} = -1, \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$ *,donc*
$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ *et*

$$B_t^2 - t = \int_0^t 2B_s dB_s.$$

On retrouve donc la même formule que ci-dessus.

exemple 2.7.5 - *Soit $f(t,x) = e^{x-\frac{t}{2}}, \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}f, \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f$, donc à nouveau $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ et*

$$e^{B_t - \frac{t}{2}} - 1 = \int_0^t e^{B_s - \frac{s}{2}} dB_s$$

Le processus $(Z_t = e^{B_t - \frac{t}{2}})$ est donc une martingale (appelée la martingale exponentielle associée au mouvement brownien standard). De plus, il satisfait l'équation différentielle stochastique :

$Z_t - 1 = \int_0^t Z_s dB_s$, *i.e.* $dZ_t = Z_t dB_t$ *et* $Z_0 = 1$.

2.7.2 Processus d'Itô (ou"semi-martingale continue")

Définition 2.7.1 *Un processus d'Itô est un processus (X_t) pouvant se décomposer comme $(X_t = M_t + V_t)$, où :*

$$\begin{cases} (M_t) \text{ est une martingale continue de carré intégrable (p.r.à une filtration } (\mathcal{F}_t)), \\ (V_t) \text{ est un processus continu à variation bornée,adapté à } (\mathcal{F}_t) \text{ et tel que } V_0 = 0. \end{cases}$$

exemple 2.7.6 *Soit (X_t) le processus défini par*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t K_s ds.$$

Le mouvement brownien est un des processus de base pour la modélisation en temps continu. Nous en verrons ici la définition ainsi que les propriétés fondamentales. Comme aucune preuve ne sera donnée, nous suggérons au lecteur intéressé de consulter [2] pour plus de détails.où (H_t) est continu adapté et tel que $E(\int_0^t H_s^2 dB_s) < \infty$ pour tout $t \geq 0$ et (K_t) est continu et adapté.(X_t) un processus d'Itô .

2.7.3 Formules d'Itô généralisées

Les deux formulesqui suivent sont des généralisations des théorèmes2.5.1et2.5.7, respectivement.

Théorème 2.7.3 *.Soit (M_t) une martingale continue de carré intégrable et $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que*

$$E\int_0^t (f'(M_s))^2 d\left\langle M\right\rangle_s < \infty; \forall t > 0 :$$

Alors

$$f(M_t) - f(M_0) = \int_0^t f'(M_s)dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(M_s)d\left\langle M\right\rangle_s \ p.s.$$

Remarquer que seul le terme ds de la formule (2) a été remplacé par le terme $d\left\langle M\right\rangle_s$ pour tenir compte de la variation quadratique de la martingale M.

2.7.4 Formule d'intégration par parties(IPP)

Soient $(X_t), (Y_t)$ deux processus d'Itô.Alors pour tout $t \geq 0$ on a $X_tY_t - X_0Y_0 = \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t$ p.s., qu'on écrit encore sous forme différentielle

$$d(X_tY_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\left\langle X, Y\right\rangle_t.$$

Démonstration. En utilisant la formule d'Itô généralisée ci-dessus, on trouve $(X_t + Y_t)^2 - (X_0 + Y_0)^2 = 2\int_0^t (X_s + Y_s)d(X_s + Y_s) + \left\langle X + Y\right\rangle_t,$

$$(X_t - Y_t)^2 - (X_0 - Y_0)^2 = 2 \int_0^t (X_s - Y_s) d(X_s - Y_s) + \langle X - Y \rangle_t ;$$

En sous trayant les deux égalités ci-dessous, on obtient

$$4(X_t Y_t - X_0 Y_0) = 4 \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X + Y \rangle_t - \langle X - Y \rangle_t .$$

Combiné avec la définition de covariation quadratique, ce ci donne finalement le résultat.

exemple 2.7.7 *Soient* $X_t = e^{B_t}$ *et* $Y_t = e^{-\frac{t}{2}}$.

On a vu que $dX_t = \frac{1}{2} X_t dt + X_t dB_t$, *d'autre part, on a* $dY_t = -\frac{1}{2} Y_t dt$. *Posons maintenant* $Z_t = X_t Y_t = e^{B_t - \frac{t}{2}}$. *Par la formule d'intégration par parties, on obtient :*

$$Z_t - 1 = \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + 0$$

car $\langle X, Y \rangle_t = 0((Y_t)$ *est à variation bornée).On a donc*

$$Z_t - 1 = \int_0^t X_s(-\frac{1}{2} Y_s) ds + \int_0^t Y_s(\frac{1}{2} X_s) ds + \int_0^t Y_s X_s dB_s = \int_0^t Z_s dB_s,$$

i.e. $dZ_t = Z_t dB_t$ *et* $Z_0 = 1$, *qui est l'équation qu'on avait trouvée plus haut.*

Chapitre 3

Changement De Probabilité Théorème de Girsanov

3.1 Généralités

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et Z une v. a. $\mathcal{F}-$mesurable positive d'espérance 1. On définit une nouvelle probabilité Q sur $\mathcal{F}$ par $Q(A) = E(Z1_A)$. On a, pour toute v. a. Q intégrable $E_Q(X) = E_P(ZX)$.

Si l'espace de probabilité est muni d'une filtration, et si Z_T est une v. a. $\mathcal{F}_T-$mesurable positive d'espérance 1, on définit Q sur $\mathcal{F}_T$ par $Q(A) = E(Z_T 1_A)$. La probabilité Q est équivalente à P sur $\mathcal{F}_T$ si la v. a. Z_T est strictement positive. Enfin, pour tout $t < T$ et tout $A \in \mathcal{F}_t$ on a

$$Q_T[A] = E[E_P[Z_T|\mathcal{F}_t]1_A] = E_P[Z_t 1_A],$$

en posant $Z_t = E_P[Z_T|\mathcal{F}_t]$ et

$$dQ|\mathcal{F}_t = Z_t dP|\mathcal{F}_t.$$

Lemme 3.1.1 *Un processus $\{M_t,\, t \geq 0\}$ est une $(\mathcal{F}_t)-$martingale sous Q si et seulement si le processus $(Z_t M_t,\, t \geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t)-$martingale sous P.*

$$(X_1, ..., X_n) \sim N(\mu, Id),$$

où $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$.

3.2.2 Cas Brownien

Soit $\{W_t, t \geq 0\}$ un MB et $\{\mathcal{F}_t^W, t \geq 0\}$ sa filtration naturelle complétée. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, le processus

$$t \to Z_t^m = exp[mW_t - \frac{m^2 t}{2}]$$

est une $(\mathcal{F}_t^W)$−martingale positive.
On fixe alors un horizon $T > 0$. La mesure Q_T^m définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ par

$$Q_T^m[A] = E_P[Z_T^m 1_A]$$

est une probabilité équivalente à P sur $\mathcal{F}_T^W$.

Théorème 3.2.1 *[Formule de Cameron-Martin] Sous la mesure Q_T^m, le processus*

$$\tilde{W} : t \to W_t - mt, \ t \leq T$$

est un mouvement brownien.

3.3 Les deux théorèmes de Girsanov

Soit $\{W_t, t \geq 0\}$ un MB sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et $\{\mathcal{F}_t^W, t \geq 0\}$ sa filtration naturelle complétée. Soit $\{\theta_t, t \geq 0\}$ un bon processus local vérifiant la condition de Novikov. on sait que l'unique solution de l'EDS

$$Z_t^\theta = 1 + \int_0^t \theta_s Z_s^\theta dW_s$$

s'écrit

$$Z_t^\theta = exp \int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds$$

et que Z^θ est une $(\mathcal{F}_t^W)$−martingale. On définit la mesure

$$Q_T^\theta(d\omega) = Z_T(\omega)P(d\omega)$$

sur $(\Omega, \mathcal{F}_T^W)$, qui est une probabilité équivalente à P sur $\mathcal{F}_T^W$.

Théorème 3.3.1 *[Théorème de Girsanov] Sous la mesure Q_T^θ, le processus*

$$W : t \longrightarrow W_t - \int_0^t \theta_s d_s, t \leq T$$

est un mouvement brownien.

Théorème 3.3.2 *[Théorème de Girsanov abstrait] Soit P et Q deux mesures de probabilité équivalentes sur un espace filtré $(\Omega, \{\mathcal{F}_t,\ t \leq T\})$. On suppose que toutes les $(\mathcal{F}_t)$−martingales sont continues. Alors sous P il existe L une $(\mathcal{F}_t)$−martingale continue telle que pour tout $t \leq T$ et tout $A \in \mathcal{F}_t$,*

$$Q[A] = E_P[exp[L_t - \langle L \rangle_t /2]1_A]$$

De plus, si M une martingale locale continue sous P, alors le processus

$$\tilde{M} : t \longrightarrow M_t - \langle M, L \rangle_t$$

est une martingale locale continue sous Q.

Démonstration

Expliquons d'abord la première partie de ce théorème concernant l'existence de la martingale L. Elle repose sur le théorème de Radon-Nikodym, qui assure l'existence d'un processus densité $\{D_t, t \geq 0\}$ de P par rapport à Q, au sens où pour tout $t \leq T$ et tout $A \in \mathcal{F}_t$,

$$Q[A] = E_P[D_t 1_A].$$

Comme $A \in \mathcal{F}_T$, on a aussi

$$Q[A] = E_P[D_T 1_A] = E_P[E_P[D_T|\mathcal{F}_t]1_A]$$

de sorte, par identification, que

$$D_t = E_P[D_T|\mathcal{F}_t]$$

pour tout $t \leq T$. On en déduit que D est une martingale UI continue sous P. De plus elle est strictement positive, par équivalence entre P et Q. On peut alors (on peut effectivement définir une intégrale stochastique par rapport à une martingale continue) définir le processus

$$L_t = log D_0 + \int_0^t \frac{dD_s}{D_s}$$

et on applique la formule d'Itô à

$$\begin{aligned} R_t &= exp[L_t - \langle L \rangle_t /2] = D_0 + \int_0^t R_s dL_s - \frac{1}{2}\int_0^t R_s d\langle L \rangle_s + \frac{1}{2}\int_0^t R_s d\langle L \rangle_s \\ &= D_0 + \int_0^t R_s dL_s. \end{aligned}$$

Mais par définition de L, on a aussi

$$D_t = D_0 + \int_0^t D_s dL_s,$$

de sorte que D et R sont solutions fortes de la même EDS. Par unicité, on en déduit que $R \equiv D$, d'où

$$D_t = exp[L_t - \langle L \rangle_t /2].$$

Ceci entraîne finalement que pour tout $t \leq T$ et tout $A \in \mathcal{F}_t$,

$$Q[A] = E_P[exp[L_t - \langle L \rangle_t /2]1_A].$$

On voit enfin facilement comment le théorème 3.3.2 entraîne le théorème 3.3.1.

La martingale L du théorème 3.3.2 est ici

$$L_t = \int_0^t \theta_s dB_s$$

et on a donc

$$\langle B, L\rangle_t = \int_0^t \theta_s ds.$$

Comme B est une martingale locale continue sous P, $\tilde{B}$ est une martingale locale continue sous Q_T^θ. On démontre comme ci-dessus que son crochet est $\tilde{B}_t = t$, et l'on en déduit que $\tilde{B}$ est un mouvement brownien sous Q_T^θ.

3.4 Théorème de représentation prévisible

Soit B un mouvement brownien et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle, soit $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$.

3.4.1 Représentation prévisible

Théorème 3.4.1 *Soit B un mouvement Brownien et $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration naturelle. Soit M une $(\mathcal{F}_t)$−martingale, telle que $sup_{t\leq T}$ $E[M_t^2] < \infty$. Il existe un unique processus prévisible H vérifiant $E(\int_0^T H_s^2 ds) < \infty$, tel que $\forall t \in [0,T]$, $M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s$.Si M est une $(\mathcal{F}_t)$−martingale locale, il existe un unique processus prévisible H tel que $\forall t$ $M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s$.Ce résultat est important en finance pour exhiber un portefeuille de couverture.*

Corollaire 3.4.1 *Toutes les $(\mathcal{F}_t^B)$−martingales locales sont continues.*

3.5 Applications

3.5.1 Calcul d'espérances

Calcul de

$$E[B_t exp[\int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds]].$$

pour $t < T$ et θ fonction déterministe. On effectue un changement de probabilité

$$L_t = exp[\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds].$$

et on calcule

$$\begin{aligned} E_P[B_t L_T] &= E_P[B_t L_t] = E_Q[B_t] \\ &= E_Q[\tilde{B}_t + \int_0^t \theta_s ds] \\ &= E_Q[\int_0^t \theta_s ds] \\ &= \int_0^t \theta_s ds. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$E[B_t exp[\int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds]] = \int_0^t \theta_s ds.$$

Calcul de

$$I = E[exp - [\alpha B_t^2 + \frac{\beta^2}{2}\int_0^t B_s^2 ds]]$$

où B est un brownien issu de a. On pose $x = a^2$ et on effectue un changement de probabilité $P \to P^\beta$ avec densité sur $\mathcal{F}_t^W$

$$\frac{dP^\beta}{dP} = L_t^\beta = exp[-\beta \int_0^t B_s dB_s - \frac{\beta^2}{2} \int_0^t B_s^2 ds].$$

En utilisant la formule d'intégration par parties,

$$L\beta_t = exp - [\frac{\beta}{2}(B_t^2 - x - t) + \frac{\beta^2}{2} \int_0^t B_s^2 ds]$$

Sous P^β,

$$B_t = a + W_t - \beta \int_0^t B_s ds$$

avec W P^β–Brownien. Donc B est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck sous P^β, et B_t une v. a. gaussienne d'espérance $ae^{-\beta t}$ et de variance $\frac{1}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t})$. On en déduit que

$$\begin{aligned} I &= E^\beta[L_t^{-1} exp - [\alpha B_t^2 + \frac{\beta^2}{2} \int_0^t B_s^2 ds]] \\ &= E^\beta[exp[-\alpha B_t^2 + \frac{\beta}{2}(B_t^2 - x - t)]]. \end{aligned}$$

Aprés quelques calculs simples et longs, on obtient

$$I = (cosh\beta_t + 2\alpha sinh\beta_t/\beta)^{-1/2} exp[-\frac{x\beta(1 + 2\alpha coth\beta t/\beta)}{2(coth\beta t + 2\alpha/\beta)}]$$

En faisant $a = \alpha = 0$et $\beta = \sqrt{2\lambda}$, cette formule donne la transformée de Laplace de la norme L^2 du Brownien :

$$E[exp - \lambda \int_0^t B_s^2 ds] = \left(cosh\sqrt{2\lambda t}\right)^{-1/2}.$$

Conclusion

Dans la théorie des probabilités, le théorème de Girsanov indique comment un processus stochastique change si l'on change de mesure. Ce théorème est particulièrement important dans la théorie des mathématiques financière.

Bibliographie

1)Quelques définitions

•N.Bouleau,\Probabilitès de l'ingènieur",Hermann,1986.

•S.M.Ross,\Initiationaux probabilitès",PPUR,1987.

•D.Lamberton, B.Lapeyre,\Introductionau calcul stochastique appliquè à la finance, Ellipses,1997.

•Th.Mikosch,\Elementary stochastic calcul uswith financein view",World Scientific,1998.

• J. Azèma and M. Yor. Etude d'une martingale remarquable. In J. Azèma and M. Yor, editors,Sèminaire de Probabilitès XXIII, volume 1557 of Lecture Notes in Maths.

• P. Devolder.Finance Stochastique. Presses de l'universitè de Bruxelles, Bruxelles, 1991.

2)Mouvement Brownien

•Par Jean-Francois Le Gall Mouvement Brownien,martingale et calcul stochastique

•AIMÉ, F, DOMINIQUE, F, Processus stochastiques. Dunod, Paris, 2002.

• JACOD, J, Mouvement brownien et calcul stochastique, cours de Master de Mathématiques. Université Pierre et Marie Curie. 2007-2008.

•REVUZ, D, YOR, M, Continuous martingales and Brownian motion.

•R.M. Dudley. Wiener functionals as Itô integrals.The Annals of Prob.

3)Changement De Probabilité Théorème de Girsanov

•E. langlat,≪transformation des Martingales locales par changement absolument continu de probabilities ≫ .

•C.Dellacherie et P-A.Meyer,probabilités et potentiel-Théorie des martingales,Hermann,1980

• Jordanie4