République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : Probabilités et Applications

Par :

BENALIA Amina et REDJIMI Sana

Intitulé

Fiabilité des Systèmes « Parallèle-Série »

Dirigé par : S.BOUHADJAR

Devant le jury

PRESIDENT	A. BENCHAABANE	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	S. BOUHADJAR	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	I. OTMANI	MAA	Univ-Guelma

Session Juin 2014

Remerciement

Tout d'abord nous exprimons nos remerciements sincères à Monsieur Bouhadjar Slimane

Notre encadreur qui a dirigé notre travail et nous a conseillé Judicieusement

Nous exprimons aussi nos remerciements à tous les enseignants du département de la science exacte qui ont contribué à notre formation pour avoir le Diplôme de master académique en mathématiques appliquées

Nous exprimons également nos remerciements les plus chaleureux au membre des jurys honorables pour m'avoir fait le plaisir de jury mon soutenance

Enfin nous remercions tous ceux qui de loin ou de prés ont contribué à l'élaboration et l'aboutissement de ce travaille

Dédicace

Notre dédions a modeste travail à deux personnes qui sont les plus chères au monde qui nous ont comblé de leurs amours et leurs affections

A nos mères qui nous ont toujours soutenues depuis premier pas jusqu'à ce jour et qui on toujours sous trouver les mots qu'il fallait pour nous encourager.

A nos pères qui ont tout fait pour que nous ne manquions de rien.

A tous nos enseignants qui ont contribué à notre formation.

A tous nos enseignants qui ont contribué à notre formation.

A toutes les familles : **BENALIA-REDJIMI**.

A tout les collègues et amies

A la promotion 2013-2014

Table des matières

0.1 Introduction

Dans la théorie de la fiabilité, l'étude d'un système, consiste soit à calculer (ou approximer) sa fiabilité (ou sa probabilité de panne) par des techniques probabilistes, ou algorithmiques ou bien à trouver un encadrement de celle-ci lorsque la configuration du système est trop compliquée. On s'intéresse également au calcul de la limite (lorsque la taille du système augmente indéfiniment) de la fiabilité, ce qui pourrait être aussi utilisé comme approximation de la fiabilité du système quand sa taille est suffisamment grande.

Pour des systèmes dont la configuration est en série ou en parallèle des travaux approfondis ont donné lieu à des résultats très développés (voir [1]).

Dans ce travail, nous nous intéressons à des systèmes dont la configuration est compliquée ; un montage en parallèle de blocs constitués d'élément disposés linéairement et qui opèrent selon un système en série. Nous les appelons systèmes parallèle-série.

Donc un système parallèle-série tombe en panne si et seulement si tous les blocs sont panne, et chaque bloc tombe en panne si au moins un parmi ses composant est en panne. Dans le cas où les composants sont indépendants et identiquement distribués, Krzysztof Kolowrocki en 1991 [3] a montré que pour des systèmes en parallèle-série il n'existe que trois types de lois asymptotiques possibles pour leur fiabilité. Puis en 1993 [4] , il a généralisé les résultats obtenus au ca où les composants ne sont pas identiques.

Plus précisément, nous allons d'abord présenter quelques propriétés déterministes de ce système, ensuite nous allons établir un résultat asymptotique concernant la fiabilité du système.

Le mémoire est composé de deux chapitres :

1) Notions générales sur la fiabilité ; on donne les notions de base qu'on utilisera dans le chapitre 2

2) Fiabilité des systèmes parallèle-série ; on présente, d'une manière claire, les résultats obtenus par Krzysztof Kolowrocki.

Chapitre 1

Notions générales sur la fiabilité

Dans ce chapitre, on donne les notions de base de la fiabilité et les définitions de ses caractéristiques qu'on utilisera par la suite, et on rappelle brièvement quelques résultats sur les systèmes en série et les systèmes en parallèle.

1.1 Définitions

La fiabilité est l'aptitude d'un système à accomplir une fonction (ou mission) donnée durant une période déterminée dans des conditions spécifiées d'exploitation.

1.1.1 Durée de vie d'un système

Le terme de système au sens large, il peut n'avoir qu'un composant. Ce système est mis en marche à la date $t = 0$ et il s'agit d'évaluer la date de première défaillance que nous noterons, dans la suite,"T".C'est une variable aléatoire positive de fonction de répartition F.

La variable T est appelée la durée de vie (life time) du système (ou bien le temps de défaillance du système).

On a :

$$F(t) = \mathbb{P}(T \leq t)$$

1.1.2 Fiabilité d'un système

La fiabilité (reliabiliy) d'un système est notée "R". C'est la probabilité de la durée de vie de bon fonctionnement du système.

$$\begin{aligned} R(t) &= \mathbb{P}(T > t) \\ &= 1 - F(t). \end{aligned}$$

Remarque 1.1.2.1 La fonction de fiabilité R est une fonction décroissante continue à droite en tout point de $\mathbb{R}_+$. De plus, on a :

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \mathbb{R}(x) = 0.$$

1.1.3 Durée de survie

Lorsqu'un système a bien fonctionné jusqu'à la date t, le temps d'attente de la panne est appelé la durée de survie du système au temps t (ou encore durée de vie résiduelle). Donne la durée de survie représente la variable aléatoire $T - t$ conditionnée par l'événement $\{T > t\}$.

Nous la notons "T_t"

La distribution de T_t est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_t > x) &= \mathbb{P}(T - t > x / T > t) \\ &= \frac{R(t+x)}{R(t)}, \text{ pour } x \geq 0. \end{aligned}$$

C'est à partir de cette notion que nous allons introduire les principales autres caractéristiques de fiabilité.

Commençons par examiner le comportement de la fonction de répartition de T_t lorsque la variable tend vers zéro.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_t \leq x) &= \frac{R(t) - R(t+x)}{R(t)} \\ &= x\frac{f(t)}{R(t)} + 0(x).\end{aligned}$$

C'est une fonction de x, presque linéaire, dont le coefficient proportionnalité est $\frac{f(t)}{R(t)}$.

1.1.4 Taux de défaillance

Le coefficient $\frac{f(t)}{R(t)}$ est appelé de défaillance (ou hasard rate) et on le note h ou $h(t)$, il est donc défini par :

$$\begin{aligned}h(t) &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{R(t) - R(t+x)}{x.R(t)} \\ &= -[\log R(t)]'.\end{aligned}$$

Le terme " **taux de défaillance** " sous-entend une grandeur permettant de mesurer la vitesse d'apparition des pannes. Il est possible, en effet, d'interpréter $h(t)$ comme le pourcentage moyen de panne par unité de temps, qui apparaissent à la date t. Ceci apparait clairement à l'occasion d'un test de production. A la date $t = 0$, un groupe de N éléments indépendants et identiques sont mis en fonctionnement. Ces éléments tombent en panne, il reste $N(t)$ éléments en bon état. La loi de $N(t)$ est binomiale (N essais avec probabilité $R(t)$ de réussite de chaque essai),

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{N!}{(N-k)!\,k!}(R(t))^k(1 - R(t))^{N-k}.$$

Le nombre moyen d'éléments en fonctionnement à la date t est donc :

$$\mathbb{E}(N(t)) = N.R(t).$$

Le taux de défaillance d'un élément peut donc être traduit en termes d'espérances :

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{N.R(t) - N.R(t+x)}{x.N.R(t)} \\ &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(N(t)) - \mathbb{E}(N(t+x))}{x.\mathbb{E}(N(t))}. \end{aligned}$$

C'est le rapport entre le nombre moyen de pannes par unité de temps et le nombre moyen d'éléments en bon fonctionnement. Il traduit bien une **"vitesse"** de dégradation.

La notion de **"taux de défaillance"** est, pour le fiabiliste, une caractéristique importante.

Sa connaissance suffit à déterminer la fiabilité grâce à la relation suivante :

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t h(u)\, du\right).$$

La primitive H de h s'annulant en 0 est appelée la fonction de risque (ou hazard function).

Elle est donc définie par :

$$H(t) = \log\left(\frac{1}{R(t)}\right).$$

Dans les applications concrètes, il est très fréquent de supposer le taux de défaillance constant.

Il faut dire que les calculs s'en trouvent grandement simplifiés. Dans ce cas, la fonction H est linéaire et la distribution est exponentielle.

Proposition 1.1.4.1 La seule distribution de durée de vie vérifiant $R(0)$=1, et dont le taux de défaillance est constant, égal à a est la loi exponentielle de paramètre a avec :

$$F(x) = 1 - e^{-ax}$$

Preuve : Supposons que la durée de vie T a une densité de la forme :

$$f(x) = a.e^{-ax}$$

La fiabilité s'écrit alors :

$$R(t) = \exp(-at)$$

Le taux de défaillance est donc :

$$\begin{aligned} h(t) &= -\left[\log(R(t))\right]' \\ &= \frac{f(t)}{R(t)} \\ &= a. \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que $h(t)$ est constante et vaut a. Alors :

$$\begin{aligned} R(t) &= \exp\left(-\int_0^t h(x)dx\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^t a.dx\right) \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$R(t) = \exp\left(-at\right),$$

c'est-à-dire :

$$F(t) = 1 - \exp(-at).$$

Donc la loi est exponentielle.

1.1.5 Temps moyens

L'espérance de la durée de vie T joue un grand rôle en fiabilité; c'est le **"temps moyen de panne"** ou $M.T.T.F.$(mean time to failure). Nous le notons "m" :

$$\begin{aligned} m &= MTTF \\ &= \mathbb{E}(T). \end{aligned}$$

C'est une mesure importante de la qualité d'un système. Pour la calculer, il préférable d'utiliser la formule d'intégration suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \int_0^{+\infty} (1 - F(u))\, du \\ &= \int_0^{+\infty} R(u)\, du. \end{aligned}$$

L'espérance de survie à la date t est appelée **" durée moyenne de vie résiduelle de panne"** ($M.R.T.F.$Mean Residual Time to Failure). Elle est notée "$m(t)$".

Proposition 1.1.5.1 La formule de la durée de vie résiduelle est donnée par :

$$m(t) = \frac{1}{R(t)} \int_t^{+\infty} R(u)\, du.$$

1.1.6 Fonction de structure

Considérons maintenant un système de n éléments (composant), en supposant que tous les composants sont indépendants. On précise qu'un composant ne possède que deux états ; il fonctionne ou il est en panne.

Si X_i est l'état du composant i, on pose :

$$X_i = \begin{cases} 1, & si\ le\ i^{eme} \text{ composant fonctionne} \\ 0, & si\ le\ i^{\ eme} \text{ composant est en panne.} \end{cases}$$

Cette dichotomie est valable aussi pour le système :

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, & si\ le \text{ système fonctionne} \\ 0, & si\ le \text{ système est en panne.} \end{cases}$$

La fonction Φ est appelée la fonction de structure du système. Alors, on déduit que la fiabilité du système peut s'écrire :

$$R = P(\Phi(x) = 1) = \mathbb{E}(\Phi(x)).$$

1.2 Système en série

Un système en série est un système composé de n composants disposés linéairement. Ce système tombe en panne si au moins un composant est en panne.

La fonction de structure du système est donnée par :

On note par :

$$E = \{E_{ij} : i = 1, 2, ..., k \text{ et } j = 1, 2, ..., l_i\},$$

l'ensemble des composants d'un système parallèle-série S, et par X_{ij} la durée de vie du composant E_{ij}. Dans tous ce chapitre, on considère que toutes les variables aléatoires X_{ij} sont indépendantes.

Définition 2.1.2 Un système parallèle-série S, est dit régulier si :

$$l_1 = l_2 = ... = l_k = l$$

Définition 2.1.3 Un système parallèle-série régulier est dit homogène si toutes les variables aléatoires X_{ij} où $i = 1, 2, ..., k$ et $j = 1, 2, ..., l_i$, ont la même fonction de répartition $F(x)$, c'est à dire tous les composants E_{ij} ont la même fonction de fiabilité :

$$R(x) = 1 - F(x), x \in \mathbb{R}$$

2.2 Système "parallèle-série" homogène

2.2.1 Durée de vie

On note les blocs du système parallèle par B_i ; $i = 1, 2, ..., k$, et on note par Y_i la durée de vie de chaque bloc numéro i. Donc le système S tombe en panne si tous les blocs B_i sont en panne.

Si on note par X la durée de vie du système S, on déduit que :

$$X = \max_{1 \leq i \leq k} Y_i.$$

Maintenant, le bloc B_i tombe en panne si au moins un parmi ses composants E_{ij} ; $j = 1, 2, ..., l$ est en panne, donc :

$$Y_i = \min_{1 \le j \le l} X_{ij}.$$

Alors :

$$X = \max_{1 \le i \le k} \left\{ \min_{1 \le j \le l} \{X_{ij}\} \right\}.$$

2.2.2 Fiabilité du système

Considérons un système S, parallèle-série régulier et homogène et supposons que $k = k_n$ et $l = l_n$ tels que k_n ou l_n tend vers l'infini avec n.

Théorème 2.2.2.1 La fiabilité d'un système parallèle-série régulier et homogène, est donnée

par :

$$R_n = 1 - \left[1 - (R(x))^{l_n}\right]^{k_n}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

où R est la fiabilité de chaque composant.

Preuve : Soit R^i la fiabilité du bloc i, donc :

$$\begin{aligned} R^i(x) &= \prod_{i=1}^{l_n} R(x) \\ &= (R(x))^{l_n}, \end{aligned}$$

puisque les composants de chaque bloc sont identiques et en série.
D'autre part, la fiabilité du système est donnée par :

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{k_n} (1 - R^i(t)),$$

car les blocs du système sont mis en parallèle

Et comme le système est régulier et homogène, on déduit que :

$$R_n(x) = 1 - \left[\left(1 - (R(x))^{l_n} \right)^{k_n} \right].$$

Dans la suite on remplace n par un nombre réel positif t et on suppose que k_t et l_t des réels positifs. On obtient alors, une famille des systemès correspondants au couple (k_t, l_t) ; donc une famille des fonctions de fiabilité.

$$R_t(x) = 1 - \left[1 - (R(x))^{l_t} \right]^{k_t}, x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

D'après ce qui précède, on trouve une relation explicite entre la fonction de fiabilité $R(x)$ et la fonction de distribution $F(x)$ donné par :

$$R(x) = 1 - F(x), x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Définition 2.2.2.1 La fonction de fiabilité $R(x)$ est dite dégénérée s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$; tel que

$$R(x) = \begin{cases} 1, & x < x_0 \\ 0, & x \geq x_0 \end{cases}$$

Corollaire 2.2.2.1 La fonction

$$R(x) = 1 - \exp(-V(x)), x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

est une fonction de fiabilité si et seulement la fonction V est non négative, non décroissante et continue à droite.

De plus on a :

$$\lim_{x \to -\infty} V(x) = +\infty \quad \text{et} \lim_{x \to +\infty} V(x) = 0$$

Définition 2.2.2.2 Une fonction V définie sur $\mathbb{R}$, positive, croissante et continue à droite telle que :

$$\lim_{x \to -\infty} V(x) = +\infty \quad \text{et} \lim_{x \to +\infty} V(x) = 0,$$

est dite dégénérée s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$,tel que :

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < x_0 \\ 0, & x \geq x_0 \end{cases}$$

Corollaire 2.2.2.2 La fonction de fiabilité R donnée par l'équation (4) est dégénérée si et seulement si la fonction V est dégénérée.

2.2.3 Lois asymptotiques du système.

Définition 2.2.3.1 Une fonction de fiabilité R est dite fonction de fiabilité asymptotique d'un système parallèle-série régulier homogène, s'ils existent des constantes $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$, telles que :

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(a_n x + b_n) = R(x),$$

pour tout x où R est continue.

La suite $(a_n, b_n)_n$ est appelée suite des constantes de normalisation.

Définition 2.2.3.2 Une fonction de fiabilité R est dite fonction de fiabilité asymptotique de la famille $R_t(x)$, s'il existe des fonctions $a_t = a(t) > 0$ et

$b_t = b(t) \in \mathbb{R}$, telles que :

$$\lim_{t \to +\infty} R_t(a_t x + b_t) = R(x),$$

pour tout x où R est continue.

Le coupe $(a_t; b_t)$ est appelé couple de normalisation de la fonction.

Lemme 2.2.3.1 Soit données :

1) R la fonction de fiabilité donnée par (4) :

2) R_t est donnée par (2)

3) $k_t \to +\infty$ avec $t \to +\infty$

4) $a_t > 0, b_t \in \mathbb{R}$ sont des fonctions.

Alors les deux expressions :

$$\lim_{t\to+\infty} R_t\left(a_t x + b_t\right) = R\left(x\right), x \in C_R \tag{5}$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} k_t \left(R\left(a_t x + b_t\right)\right)^{l_t} = V\left(x\right), x \in C_V$$

sont équivalentes.

Preuve : Daprès (2), on a :

$$R_t(x) = 1 - \left[1 - \left(R\left(x\right)\right)^{l_n}\right]^{k_t} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } t \in \mathbb{R}_+,$$

donc,

$$R_t\left(a_t x + b_t\right) = 1 - \left[1 - \left(R\left(a_t x + b_t\right)\right)^{l_n}\right]^{k_t}$$

Et on a :

$$\lim_{t\to+\infty} R_t\left(a_t x + b_t\right) = R\left(x\right); R\left(x\right) = 1 - \exp\left(-V\left(x\right)\right)$$

ça équivaut

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\left[1-\left(R\left(a_tx+b_t\right)\right)^{l_n}\right]^{k_t} &= \exp\left(-V\left(x\right)\right)\\ &\Leftrightarrow\\ \ln\left\{\lim_{t\to+\infty}\left[1-\left(R\left(a_tx+b_t\right)\right)^{l_n}\right]^{k_t}\right\} &= -V\left(x\right)\\ &\Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\left(k_t\ln\left[1-\left(R\left(a_tx+b_t\right)\right)^{l_n}\right]\right) &= -V\left(x\right)\\ &\Leftrightarrow\\ \lim_{t\to+\infty}k_t\left(R\left(a_tx+b_t\right)\right)^{l_n} &= V\left(x\right)\end{aligned}$$

Lemme 2.2.3.2 Si $R_t(x) : t \in \mathbb{R}_+$, est une famille des fonctions de fiabilité telle que pour toute fonction $a_t > 0\,;\, b_t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t\to+\infty} R_t\left(a_tx+b_t\right) = R_0\left(x\right), \quad x \in C_{R_0}, \tag{6}$$

où R_0 est une fonction de fiabilité non dégenerée

Alors l'expression :

$$\lim_{t\to+\infty} R_t\left(\alpha_tx+\beta_t\right) = G_0\left(x\right) \qquad x \in C_{G_0}, \tag{7}$$

où G_0 est une fonction de fiabilité non dégénérée et $\alpha_t > 0\,;\, \beta_t \in \mathbb{R}$ sont des fonctions. est vérifié si et seulement s'il existent des constantes a > 0, b$\in \mathbb{R}$

telles que :

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\alpha_t}{a_t} = a \quad et\frac{\beta_t - b_t}{a_t} = b. \tag{8}$$

De plus, on a,

$$G_0(x) = R_0(ax+b), x \in \mathbb{R} \tag{9}$$

Lemme 2.2.3.3 Si,

1) $k_t \to \infty$ quand $t \to +\infty$.

2) a_t et b_t sont deux fonctions vérifient $\mathrm{a}_t > 0$ et $\mathrm{b}_t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{t \to +\infty} k_t \left(R\left(a_t x + b_t\right)\right)^{l_t} = V(x), \text{ pour tout } x \in C_V, \tag{10}$$

3) pour tout $v \geq 2$ et tout $x \in C_{V_0}$

$$\lim_{t \to +\infty} k_t \left(R\left(a_{\tau_V} x + b_{\tau_V}\right)\right)^{l_t} = V_0(x), \text{ où} \tag{11}$$

$\tau_v = \tau_v(t), t \in \mathbb{R}_+$, $\tau_v \in \mathbb{R}_+$ et $R(x)$ est une fonction de fiabilité d'un composant quelconque d'un systeme parallèle-série régulier homogène.

$V(x)$; $V_0(x)$ sont deux fonctions non dégénérées (Déf. 2.2.2.2).

Alors, il existe $\alpha_v > 0$; $\beta_v \in \mathrm{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$;

$$V_0(x) = V(\alpha_v x + \beta_v). \tag{12}$$

Preuve : Soit R_t la famille de fiabilité d'un système parallèle-série régulier homogène.

Donc,

$$R_t = 1 - \left[1 - (R(x))^{l_t}\right]^{k_t},$$

ce qui donne

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} R_t\left(a_t x+b_t\right) &= \lim_{t\to+\infty} 1-\left[1-\left(R_t\left(a_t x+b_t\right)\right)^{l_t}\right]^{k_t} \\
&= 1-\lim_{t\to+\infty}\left[1-\left(R_t\left(a_t x+b_t\right)\right)^{l_t}\right]^{k_t} \\
&= 1-\lim_{t\to+\infty}\exp(\ln\left[1-\left(R_t\left(a_t x+b_t\right)\right)^{l_t}\right]^{k_t}) \\
&= 1-\exp(\lim_{t\to+\infty}\ln\left[1-\left(R_t\left(a_t x+b_t\right)\right)^{l_t}\right]^{k_t}) \\
&= R\left(x\right)
\end{aligned}
$$

où

$$R\left(x\right) \;= 1-\exp\left(-V\left(x\right)\right)$$

On a :

$$R_t\left(x\right)=1-\left[1-\left(R\left(x\right)\right)^{l_t}\right]^{k_t}$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} k_t\left(R_t\left(a_{t_{\tau_0}}x+b_{t\tau_0}\right)\right)^{l_t}=V_0\left(x\right)$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} R_t\left(a_{t_{\tau_0}}x+b_{t_{\tau_0}}\right)^{l_t} &= 1-\lim_{t\to+\infty}\left[1-\left(R_t\left(a_{t_{\tau_0}}x+b_{t_{\tau_0}}\right)\right)^{l_t}\right]^{k_t} \\
&= 1-\lim_{t\to+\infty}\exp\left(k_t\ln 1-R_t\left(a_{t_{\tau_0}}x+b_{t\tau_0}\right)\right)^{l_t} \\
&= 1-\exp\left(-\lim_{t\to+\infty}\left(k_t R_t\left(a_{t_{\tau_0}}x+b_{t\tau_0}\right)\right)\right)^{l_t} \\
&= R_0\left(x\right)
\end{aligned}
$$

où

$$R_0(x) = 1 - \exp(-V_0(x)) \ , \tag{13}$$

et lemme 2 permet de prouver la relation (12) .

Définition 2.2.3.3 Les fonctions de fiabilités $R_0(x)$ et $R(x)$ sont dites de même type s'il existe $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $R_0(x) = R(ax + b)$; pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Définition 2.2.3.4 Les fonctions $V_0(x)$ et $V(x)$ avec les propriétés de la définition 5 sont dites de même type s'il existe $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que, $V_0(x) = V(ax + b)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Lemme 2.2.3.4 Si :

1) $k_t \to \infty$ quand $t \to +\infty$.

2) $a_t > 0, b_t \in \mathbb{R}$ sont des fonctions.

Alors d'après l'expression :

$$\lim_{t \to +\infty} R_t(a_t x + b_t) = R(x), \qquad x \in C_R. \tag{14}$$

(où $R(x)$ est une fonction de fiabilité non dégénérée donnée par l'équation(4) il s'ensuit que pour tout naturel $v \geq 2$ et tout $x \in C_V$), on a :

$$\lim_{t \to +\infty} k_{t_\tau} k_t^{-(l_{t_\tau}/l_t)} \left[k_t \left(R(a_{t_\tau} x + b_{t_\tau})\right)^{l_t}\right]^{(l_{t_\tau}/l_t)} = V(x) \tag{15}$$

où $\tau_v = \tau_v(t)\,, t \in \mathbb{R}_+, \tau_v \in \mathbb{R}_+, \tau_v \to \infty$ quand $t \to +\infty$, et $V(x)$ est une fonction non dégénérée dans le sens de la définition 5.

Preuve : D'après l'équation (14) on a :

$$\lim_{t \to +\infty} R_t(a_t x + b_t) = R(x)\,,\ x \in C_R$$

et d'après le lemme (2.2.3.1) on a :

$$\lim_{t \to +\infty} k_t \left(R(a_t x + b_t)\right)^{l_t} = V(x)\,,$$

d'où, pour $v \geq 2$,on déduit que :

$$\lim_{t\to+\infty} k_{t_\tau}\left(R(a_{t_\tau}x+b_{t\tau})\right)^{l_{t_\tau}} = V(x).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
k_{t_\tau}\left(R(a_{t_\tau}x+b_{t\tau})\right)^{l_{t_\tau}} &= k_{t_\tau}\left[\left(R\left(a_{t_\tau}x+b_{t_\tau}\right)\right)^{l_t(l\tau_v/l_t)}\right] \\
&= k_{t_\tau}\left[\left(R\left(a_{t_\tau}x+b_{t_\tau}\right)\right)^{l_t}\right]^{(l_{t_\tau}/l_t)} \\
&= k_{t_\tau}k_t^{-(l_{t_\tau}/l_t)}k_t^{l_{t_\tau}/l_t}\left[\left(R\left(a_{t_\tau}x+b_{t_\tau}\right)\right)^{l_t}\right]^{(l_{t_\tau}/l_t)} \\
&= k_{t_\tau}k_t^{-(l_{t_\tau}/l_t)}\left[k_t\left(R\left(a_{t_\tau}x+b_{t_\tau}\right)\right)^{l_t}\right]^{(l_{t_\tau}/l_t)}.
\end{aligned}$$

Alors ,

$$\lim_{t\to+\infty} k_{t_\tau}k_t^{-(l_{t_\tau}/l_t)}\left[k_t\left(R\left(a_{t_\tau}x+b_{t_\tau}\right)\right)^{l_t}\right]^{(l_{t_\tau}/l_t)} = V(x).$$

Lemme 2.2.3.5 Si :

1) $k_t = t, l_t \sim c(\ln t)^\rho$, ou $c > 0, 0 \leq \rho \leq 1, t \in \mathbb{R}_+$,

2) la fonction de fiabilité non dégénérée $R(x)$ donnée par l'équation (3) est la limite d'un système parallèle-série régulier homogène.

Alors, pour tout $v \geq 2$, il existe des $\alpha_v > 0, \beta_v \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, :

$$v^{1-\rho}V(\alpha_v x+\beta_v) = V(x). \tag{16}$$

Lemme 2.2.3.6 Les seules possibles formes pour que la fonction non dégénérée $V(x)$ soit la solution de l'équation (16) sont :

$$V_1(x) = \begin{cases} \infty, & x < x_0 \\ w_1(x),\ 0 < w_1(x) < \infty, x > x_0, \text{ où } & x_0 = \dfrac{\beta_v}{1-\alpha_v} \end{cases}$$

$$V_2(x) = \begin{cases} w_2(x), & 0 < w_2(x) < \infty, x < x_0. \text{ où } \quad x_0 = \dfrac{\beta_v}{1-\alpha_v} \\ 0, & x > x_0 \end{cases}$$

et

$$V_3(x) = w_3(x), \text{où } 0 < w_3(x) < \infty, \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

où $w_1(x), w_2(x), w_3(x)$ sont des fonctions décroissantes et continues à droite. En outre, une fonction de la forme $V_1(x)$ est une solution de l'équation (16) si et seulement si $\alpha_v > 1$,pour tout $v \geq 2$; une fonction de la forme $V_2(x)$ est une solution de l'équation (16) si et seulement si $\alpha_v < 1$,pour tout $v \geq 2$; et une fonction de la forme $V_3(x)$ est une solution de l'équation (16) si et seulement si $\alpha_v = 1$,pour tout $v \geq 2$.

Définition 2.2.3.5 Une fonction positive $u(x)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$; varie régulièrement à l'infini s'il existe $r \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{u(tx)}{u(t)} = x^r.$$

Le nombre r est appelé la puissance de la variation régulière de $u(x)$.

Lemme 2.2.3.7 Une fonction monotone positive $u(x)$ définie pour $x \in \mathbb{R}_+$, varie régulièrèment si et seulement s'il existe des suites de termes positifs d_v et c_v avec :

$$\lim_{v \to +\infty} \frac{d_{v+1}}{d_v} = 1. \tag{17}$$

$$\lim_{v \to +\infty} c_v = \infty. \tag{18}$$

telles que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{v \to +\infty} d_v u(c_v x) = f(x).$$

En outre,

$$\frac{f(x)}{f(1)} = x^r$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, où $r \in \mathbb{R}$, r est la puissance de la variation réguliére de $u(x)$.

Théorème 2.2.3.1 Si :

$$k_t = t, l_t \sim c\,(\ln t)^{\rho}\,, \text{où } c > 0, 0 \leq \rho \leq 1, t \in \mathbb{R}_+ \tag{19}$$

Alors, les seules fonctions limites possibles de la fiabilité d'un système parallèle-série régulier homogène sont :

$$R_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \leq 0 \\ 1 - \exp\left[-x^{-\alpha}\right] & \text{pour } x > 0, \text{où } \alpha > 0 \end{cases} \tag{20}$$

$$R_2(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-(-x)^{\alpha}\right] & \text{pour } x < 0, \text{où } \alpha > 0 \\ 0 & \text{pour } x \geq 0 \end{cases} \tag{21}$$

et

$$R_3(x) = 1 - \exp\left[-\exp(-x)\right], \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \tag{22}$$

Preuve : Considérons que $k_t = t$, $l_t \sim c(\ln t)^{\rho}$, où $c > 0$, $0 \leq \rho \leq 1$, $t \in (0, +\infty)$, et que :

$$R(x) = 1 - \exp(-V(x)) \tag{23}$$

est la limite de la fiabilité d'un système parallèle-série.

D'après le lemme 5, on a :

$$v^{1-\rho} V(\alpha_v x + \beta_v) = V(x), \text{ pour tout } v \geq 2 \text{ et } x \in \mathbb{R} \tag{24}$$

V est de la forme V_1 si $\alpha > 1 (\forall v \geq 2)$,ou de la forme V_2 si $\alpha < 1 (\forall v \geq 2)$, ou de la forme V_3 si $\alpha < 1 (\forall v \geq 2)$.

1er cas : Si $\alpha > 1$ $(\forall v \geq 2)$, d'après (23) et l'équation (17) on a :

$$v^{1-\rho} V(\alpha_v x + \beta_v) = w_1(x), \text{ pour } v \geq 2 \text{ et } x > x_0,$$

si on prend $\beta_v = 0$,on trouve que $x_0 = 0$,et que :

$$v^{1-\rho} w_1(\alpha_v x) = w_1(x) \tag{25}$$

$$V_1(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ w_1(x), & x > 0, 0 < w_1(x) < +\infty. \end{cases} \tag{26}$$

Alors, on déduit que $w_1$est décroissante, positive et que :

$$w_1(\infty) = 0 \text{ et } \lim_{v \to +\infty} v^{1-\rho} = +\infty.$$

D'après (25) $(v^{1-\rho} w_1(\alpha_v x) = w_1(x))$,

on déduit que :

$$w_1(\alpha_v x) = \frac{w_1(x)}{v^{1-\rho}}$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} \lim_{v \to +\infty} w_1(\alpha_v x) &= \lim_{v \to +\infty} \frac{w_1(x)}{v^{1-\rho}} \\ &= \frac{w_1(x)}{\lim_{v \to +\infty} v^{1-\rho}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} (\lim_{v \to +\infty} w_1(\alpha_v x) &= 0) \iff w_1(\lim_{v \to +\infty} \alpha_v x) = 0 \\ &\Longrightarrow \lim_{v \to +\infty} \alpha_v x = +\infty \\ &\Longrightarrow x \lim_{v \to +\infty} \alpha_v = +\infty \\ &\Longrightarrow \lim_{v \to +\infty} \alpha_v = +\infty. \end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{v \to +\infty} \alpha_v = +\infty.$$

De plus, on a :

$$(v^{1-\rho} w_1(\alpha_v x) = w_1(x))$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\lim_{v \to +\infty} v^{1-\rho} w_1(\alpha_v x) &= \lim_{v \to +\infty} w_1(x) \\
&= w_1(x).
\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\lim_{v \to +\infty} (v+1)^{1-\rho} w_1(\alpha_v x) = 1$$

et

$$\left(\frac{v+1}{v}\right)^{1-\rho} \longrightarrow 1 \text{ quand } \ v \to +\infty.$$

On pose $c_v = \alpha_v$ et $d_v = v^{1-\rho}$, d'après le lemme (2.2.3.3), on déduit que $w_1(x)$ est varie régulièrement, puisque on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{v \to +\infty} d_v w_1(c_v x) &= \lim_{v \to +\infty} v^{1-\rho} w_1(\alpha_v x) \\
&= w_1(x).
\end{aligned}$$

Comme w_1 varie régulièrement (d'après la définition 2.2.3.5), on déduit qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{v \to +\infty} \frac{w_1(\alpha_v x)}{w_1(\alpha_v)} = x^r,$$

donc

$$\begin{aligned} x^r &= \lim_{\alpha_v \to +\infty} \frac{w_1(\alpha_v x)}{w_1(\alpha_v)} \\ &= \lim_{v \to +\infty} \frac{w_1(\alpha_v x)}{w_1(\alpha_v)}, \end{aligned}$$

puisqu'on a :

$$v \longrightarrow +\infty \quad \Longrightarrow \quad \alpha_v \longrightarrow +\infty.$$

Alors :

$$\begin{aligned} x^r &= \lim_{v \to +\infty} \frac{v^{1-\rho}}{v^{1-\rho}} \frac{w_1(\alpha_v x)}{w_1(\alpha_v)} \\ &= \frac{w_1(x)}{w_1(1)}, \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} w_1(x) &= x^r.w_1(1) \\ &= ax^r. \end{aligned}$$

D'après (26) on a :

$$w_1(x) = a.x^r > 0$$

comme $w_1$décroissante, on déduit que $r = -\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R}_+)$, donc :

$$w_1(x) = a.x^{-\alpha}, \alpha > 0, a > 0$$

En fin, d'après le résultat de l'équation (26) et la définition (2.2.3.1), on trouve que :

$$V_1(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ x^{-\alpha} & x > 0, \alpha > 0 \end{cases}$$

En utilisant les lemmes précédents, on peut démontrer les deux autres cas.

2.3 Système "parallèle-série" non homogène

Dans ce paragraphe, on suppose que le système est régulier, mais il n'est pas homogène ; c'est-à-dire on suppose que les composants n'ont pas la même fonction de fiabilité. Soit S un de ce type de systèmes, contient k_n blocs disposés en parallèle ; chacun contenant l_n composants en série. On note c_j le composant j, $j = 1, 2, ..., k_n l_n$ ($k_n l_n$ est le nombre total de composant dans le système).

Théorème 2.3.1 La fonction de fiabilité $R_n(x)$ d'un système parallèle-série non homogène est donnée par

$$R_n\,(x) = 1 - \prod_{i=1}^{k_n}(1 - \prod_{j=(i-1)l_n+1}^{il_n} R_j\,(x))$$

où $R_j\,(x))$ est la fiabilité du composant c_j.

Preuve : Considérons R^i la fonction de fiabilité du bloc i, donc

$$R_n\,(x) = 1 - \prod_{i=1}^{k_n}(1 - R^i(t))$$

En effet, en posant T^i le temps de panne du composant i, $i = 1, 2, ..., k_n$, on a :

$$\begin{aligned} R_n\,(x) &= P\left(\max_{1\leq i\leq k_n}\left\{T^i > x\right\}\right) \\ &= 1 - P\left(\max_{1\leq i\leq k_n}\left\{T^i \leq x\right\}\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{k_n} P\left\{T^i \leq x\right\} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{k_n}(1 - R^i(t)) \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$R^i(x) = \prod_{j=(i-1)l_n+1}^{il_n} R_j(x), \text{ où } R_j \text{ est la fiabilité du composant } c_j.$$

En effet, comme les composants du blocs i $(i = 1, 2, ..., k_n)$ sont en série, on déduit que :

$$\begin{aligned} R^i(x) &= P\left(\min_{(i-1)l_n+1 \leq j \leq il_n} \{T_j > x\}\right), \text{où est le temps de panne du } c_j \\ &= \prod_{j=(i-1)l_n+1}^{il_n} P(T_j > x) \\ &= \prod_{j=(i-1)l_n+1}^{il_n} R_j(x) \end{aligned}$$

Alors :

$$R_n(x) = 1 - \prod_{i=1}^{k_n}(1 - \prod_{j=(i-1)l_n+1}^{il_n} R_j(x))$$

Maintenant, on pose :

$$k_n = k_t \text{ et } l_n = l_t$$

D'où la définition suivante :

Définition 2.3.1 Une fonction de fiabilité R est fonction de fiabilité asymptotique d'un système parallèle-série régulier non homogène, s'il existe $a_t > 0$, $b_t \in \mathbb{R}$, telles que :

$$\lim_{t \to +\infty} R_t(a_t x + b_t) = R(x), \text{ pour tout } x \text{ où } R \text{ est continue.}$$

Théorème 2.3.2 Si :

$$k_t = t, \text{ et } l_t = c(\ln t)^{\rho(t)}, t \in \mathbb{R}_+, c > 0$$

où $l_t << c\ln t$ et $|\rho(\tau_v) - \rho(t)| << \frac{\delta \ln v}{\ln t[\ln(\ln t)]}$, pour tout entier $v \geq 2$, où $0 < \delta \neq 1$ et $\tau_v = \tau_v(t), t \in \mathbb{R}_+$, est donnée par $\frac{\tau_v}{t} = \tau_v^{\frac{1}{1-\rho(t)}}$.

Et s'il existe une fonction non croissante d définie par

$$d(x) = \left\{ \lim_{t \to +\infty} \sum_{i=1}^{[k_t]} d_i (a_t x + b_t) \right.$$

où

$$d_i (a_t x + b_t) = \left(\frac{R^i (a_t x + b_t)}{R (a_t x + b_t)} \right)^{l_t}$$

Alors, les seules fonctions asymptotiques de la fiabilité d'un système parallèle-série régulier non homogène sont :

$$R_1(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 1 - \exp\left[-d(x) x^{-\alpha}\right], & x > 0, \text{ où } \alpha > 0, \end{cases}$$

$$R_2(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ 1 - \exp\left[-d(x) x^{-\alpha}\right], & x < 0, \text{ où } \alpha > 0, \end{cases}$$

et

$$R_2(x) = 1 - \exp\left[-d(x) \exp(-x)\right], \; x \in \mathbb{R}.$$

Bibliographie

[1] Barlow, R. F. and Proschan, F. "*Statistical theory of Reliability and life Testing. Probability Models*", Holt Rinehart and Winston, New York 1975.

[2] Jean-Louis BON, " *Fiabilité des Systèmes Méthodes Mathématiques* " Masson.

[3] Krzysztof Kolowrocki, " *On a class of limit reliability functions of some regular homogenous series-parallel systems* " Reliability Engineering and System Safety 39 (1993), 11 – 23.

[4] Krzysztof Kolowrocki, " *Limit reliability functions of some non-homogenous series-parallel* and parallel-series *systems* " Reliability Engineering and System Safety 46 (1994), 171 – 177.