République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8Mai 1945 – Guelma
Faculté des Mathématique et de L'Informatique
Département de Mathématique

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques

Option : **mathématiques appliquées (probabilités et statistiques)**

Présenté par :
M. LABRECHE Assma
FAIZI Souhila

Intitulé

Equation différentielles stochastiques : Théorème d'existence et d'unicité.

Dirigé de : **M^{me}. Sakrani samia**

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Ezzebsa.A	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Sekrani.S	MCA	Univ-Guelma
Examinateur	Dr. BENCHABANE.A	MCA	Univ-Guelma

Session juin 2014

Je dédie ce travail à :

Mes très chers parents, papa ABDLATIF et maman LATIFA, à qui je dois ce que je suis, qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance qu'ils trouvent dans ce mémoire, le fruit de leurs sacrifices consentis pour mon éducation, et l'expression de mon amour et de ma gratitude pour la bienveillance avec laquelle ils m'ont toujours entourée. Que dieu leur donne longue vie et bonne santé et me donne toute la force pour que je puisse toujours les honorer.

Mes chères sœurs NASSIMA, NADJLA, KHAWLA, KENZA et surtout les petits poussins YOUCEF et AYMEN et SELSA.

Mes très chères amies qui m'ont toujours soutenue, et surtout

WAFFA, CHOUCHOU, HOUDNA et SOUHAILA.

Aussi à tous mes oncles et tantes, cousins et cousines.

Et enfin à mon mari MAZOUZI AHMED RAMZI MEHDI qui m'a aidée à franchir les moments difficiles et m'a constamment rassurée sur mes possibilités, et à tata ZOHRA et oncle MILOU.

Au terme de ce travail,

On tient à remercier dieu pour le courage et la patience

qu'il nous a donné afin de mener à ce projet à terme.

On remercie vivement notre professeur consultant M.SEKRANI soumia
pour son aide précieuse et ses conseils judicieux
ainsi que tous les enseignants du département pour leur contribution à notre formation et leur disponibilité à orienter les étudiants.

On remercie également MR.BOUKARBOUAA, DIDA, AZZOUZA, EZZEBSA, BOUHAJADJAR et BEN CHAABAN.

On adresse nos vifs remerciements aux membres du jury pour avoir eu l'honneur d'évaluer notre travail.

Enfin on remercie toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Je dédie ce travail à :

Mes très chers parents, papa MESAOUD maman DJAMILA, à qui je dois ce que je suis, qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance qu'ils trouvent dans ce mémoire, le fruit de leurs sacrifices consentis pour mon éducation, et l'expression de mon amour et de ma gratitude pour la bienveillance avec laquelle ils m'ont toujours entourée.
Que dieu leur donne longue vie et bonne santé et me donne toute la force pour que je puisse toujours les honorer.

Mes chères sœurs SALIHA, FARIDA, SALAH, et ZAKARIYA, WASSIM et surtout les petits poussins AYMEN, IMED .

Mes très chères amies qui m'ont toujours soutenue, et surtout

AMEL, NADJET, HALLA, WAFFA, ASMA.

Aussi à tous mes oncles et tantes, cousins et cousines.

Et enfin à toute ma famille «grands et petits ».

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire, on a donné la première esquisse de la notion d'équation différentielle stochastique. On a démontré le théorème fondamental d'existence et d'unicité et quelques exemples ont été cités dont le modèle de Black et Scholes qui est une application à la finance.

La dernière partie du travail est consacré à une étude non exhaustive des équations différentielles stochastiques rétrogrades tout en insistant sur le cas non linéaire.

Introduction

Dans ce mémoire, on introduit les équations différentielles (EDS) qui sont une généralisation de la notion d'équations différentielles ordinaires prenant en compte une perturbation aléatoire. Celle ci est exprimée à l'aide d 'un mouvement brownien.

Ce document est composé de trois chapitres.

Le premier est consacré aux rappels des résultats importants en calcul stochastique concernant les processus stochastiques. On donnera les principales propriétés du mouvement brownien ainsi que celles des martingales, et on abordera la notion d'intégrale stochastique.

Dans le deuxième chapitre, on donnera une définition mathématique d'une équation différentielle accompagnée de quelques exemples. On citera ensuite l'un des théorèmes les plus importants, à savoir le théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une EDS. On finira ce chapitre par l'énoncé du théorème de Yamada et Watanabe.

Dans le dernier chapitre, on introduira la notion d'équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR). Il s'agit d'étudier une évolution de laquelle on connait l'issue et pas la situation initiale. Le dernier paragraphe est consacré à l'étude d'un cas particulier des EDSR à savoir le cas linéaire.

Chapitre 1

Rappels et Compléments

Dans ce chapitre ,nous rappelons quelques résultats de calcul stochastique utilisés le long de ce mémoire.

1.1 Processus stochastiques

Définition 1.1.1 *Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une suite croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$.*

Si $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration de $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ alors $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, p)$ est appelé espace de probabilité filtré.

Définition 1.1.2

- Si $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration alors on définit la filtration suivante

$$\mathcal{F}_{t^+} = (\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s)$$

- On dit qu'une filtration est continue à droite

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}.$$

- Soit N la classe des ensembles de $\mathcal{F}$ qui sont $P-$ négligeables. Si $N \subset F_0$, on dit que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est compléte.

- On dit qu'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfait les conditions habituelles si elle est à la fois continue à droite et compléte.

Définition 1.1.3 *Soit T un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^+$.*

- Un processus stochastique $(X_t)_{t\in T}$ dans $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ est une famille de variables aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ indexée par T .
- Pour $w \in \Omega$ fixé, la fonction $t \longmapsto X_t(w)$ est appelée trajectoire.

Définition 1.1.4 *Un processus X est progressivement mesurable par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si pour tout $t \geq 0$, l'application $(s,w) \longmapsto X_s(w)$ de $[0,t]\times\Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est messurable par rapport à $B([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$ et $B(\mathbb{R}^d)$.*

Définition 1.1.5 *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est mesurable si l'application $(t,w) \longmapsto X_t(w)$ de $\mathbb{R}^+\times\Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport aux tribus $B(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{F}$ et $B(\mathbb{R}^d)$.*

Définition 1.1.6 *Soit (X_t) un processus et $(\mathcal{F}_t)$ une filtration de $(\Omega,\mathcal{F},p)$. On dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si*

$$\forall t \geq 0, \qquad X_t \text{ est } \mathcal{F}_t - \text{mesurable}.$$

Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.
A présent, nous donnons trois critères pour comparer deux processus stochastiques.

Définition 1.1.7 *Soit $X = (X_t)_{t\in T}$ un processus stochastiques. Les lois de dimension finie du processus X sont les lois des vecteurs du type $(X_{t_1},...,X_{t_n})$ où $n \geq 1$ et $t_1,...,t_n \in T$.*

On dit que deux processus $(X_t)_{t\in T}$ et $(Y_t)_{t\in T}$ ont même lois s'ils ont les même lois en dimension finie.

Définition 1.1.8 *Un processus (X_t) est appelé un processus à trajectoires continues (ou simplement processus continu) si*

$$p\left(\{w\in\Omega : t \longmapsto X_t(w) \text{ est continu}\}\right) = 1$$

Définition 1.1.9 *Soient $X = (X_t)_{t\in T}$, $Y = (Y_t)_{t\in T}$ deux processus stochastiques.*

1.On dit que Y est une modification de X si

$$\forall t \in T, \quad p(X_t = Y_t) = 1.$$

2.On dit que les processus X et Y sont indistinguables si

$$p(\forall t \in T, X_t = Y_t) = 1, \qquad \textit{on note} \qquad X \equiv Y.$$

Proposition 1.1.1 *Soient T un intervalle de $\mathbb{R}^+$, $X = (X_t)_{t\in T}$ et*

$Y = (Y_t)_{t\in T}$ deux processus stochastiques continus alors :

$$X \text{ et } Y \text{ sont indistinguables} \Longleftrightarrow X \text{ est une modification de } Y.$$

- On dit que le processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est à accroissements indépendants si

$$\forall n \geq 1, \forall t_1 < t_2 < ..., t_n \in T, \ X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \textit{sont indèpendantes.}$$

- On dit que le processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est à accroissements stationnaires si

$$X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0, \qquad \forall t > s \geq 0.$$

Pour de tels processus, donner la loi de $X_t - X_0, \forall t > 0$, ainsi que celle de X_0 suffit à caractériser entièrement le processus.

Nous pouvons à présent définir le processus le plus important en calcul stochastique, à savoir le mouvement brownien appelé aussi processus de wiener.

Le mouvement brownien, qui tient son nom de Richard Brown, botaniste écossais du 19 éme siécle, est considéré comme un phénoméne naturel d'une part, et un objet mathématique d'autre part.

Observant le mouvement irrégulier et incessant des particules de pollen en suspension dans l'eau, Richard brown effectua des expériences avec des particules inorganiques en suspension dans un liquide.

Le phénoméne qui paraissait à priori vital fut alors écarté de la biologie.

De ce fait des chercheurs comme Einstein, Wiener et levy s'intéressérent à ce phénoméne d'un point de vue autre que le point de vue naturel en lui donnant une forme mathématique qui n'est en vérité qu'une idéalisation mathématique du mouvement brownien est alors présenté comme :

Définition 1.1.10 *(Le mouvement brownien) .*

Le mouvement brownien standard est un processus stochastique réel $B = (B_t)_{t\geq 0}$ vérifiant :

$i)$ $B_0 = 0$ $\quad \mathbf{P}-$ p.s.

$ii)\forall s \in [0,t],\ \ B_t - B_s \sim N(0, t-s).$

$iii)\forall n \geq 1, \forall t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n;\quad B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

$iv)$ $\mathbf{P}-$ p.s, l'application $t \longmapsto B_t$ est continue.

Pour cette derniére définition, on peut remplacer les propriétés $ii)$ et $iii)$ par d'autres propriétés comme le montre la proposition suivante :

Proposition 1.1.2 *Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes*

$$\begin{cases} ii)\ \forall 0 \leq s < t,\ \ B_t - B_s \ \text{ suit une loi normale } N(0, t-s) \\ iii)\ (B_t; t \in \mathbb{R}_+)\ \text{ est à accroissements indépendants} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ii')\ \forall t \geq 0, B_t \ \text{ suit une loi normale } N(0,t), \\ iii')\ \forall 0 < s \leq t,\ \ B_t - B_s \ \text{ est indépendant de } \mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ii'')\ (B_t)_{t\geq 0} \ \text{ est un processus gaussien, centré.} \\ iii'')\ \forall s,t \in \mathbb{R}_+\ cov(B_t, B_s) = E[B_t B_s] = s \wedge t \end{cases}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$, un mouvement brownien issu de x ; $B^x = (B_t^x)_{t\geq 0}$ est un processus qui vérifie $ii)$, $iii)$ et $iv)$ et $B_0 = x$, $\mathbf{P}-$ p.s.

- Un mouvement standard dans $\mathbb{R}^d$ noté BM^d est un processus $B = (B_t)_{t\geq 0}$ où $B_t = (B_t^1, ..., B_t^d)$ avec $\{(B_t^i), 1 \leq i \leq d$ des mouvements brownien standards indépendants.

Le mouvement brownien posséde de nombreuses bonnes propriétés, en effet :

Proposition 1.1.3 *Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ alors*

a) *Symétrie.*

Le processus $(-B) = (-B_t)_{t\geq 0}$ est encore un mouvement brownien.

b) *Changement d'échelle (scaling).*

Soit $\lambda > 0$. Le processus $B^{\lambda} = (B_t^{\lambda})_{t\geq 0}$ avec $B_t^{\lambda} = (1/\lambda)B_{\lambda^2 t}$ est encore un mouvement brownien.

c) *Propriété de Markov simple.*

Pour $s \geq 0$, posons $\mathcal{F}_s := \sigma(B_u, u \leq s)$ et $B_t^{(s)} = B_{t+s} - B_s$.

Alors $B^{(s)} = (B_t^s)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$.

Définition 1.1.11 *Soit $(\mathcal{F}_t)$ une filtration et $T : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ une application. On dit que T est un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Définition 1.1.12 *Soit T un temps d'arrêt, posons $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$. On appelle tribu des événements antérieurs à T et on note $\mathcal{F}_T$ la tribu*

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty, \ \ \forall t \geq 0 \ \ , A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

On vérifie facilement que $\mathcal{F}_T$ est une tribu et que, si T est constant et égal à t alors T est un temps d'arrêt et $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$.

Théorème 1.1.1 *(Propriété de Markov forte.)*

Soient $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien, T un temps d'arrêt. Posons pour $t \geq 0$

$$Y_t = B_{T+t} - B_T.$$

Alors sur $\{T < \infty\}$, le processus$(Y_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$.

1.2 Martingales à temps continu

On suppose donné un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$

Définition 1.2.1 *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté et intégrable, on dit que X est*

1. Une martingale si

$$\forall 0 \leq s \leq t, \qquad E(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s.$$

2. Une surmartingale si

$$\forall 0 \leq s \leq t, \qquad E(X_t/\mathcal{F}_s) \leq X_s$$

3. Une sousmartingale si

$$\forall 0 \leq s \leq t, \qquad E(X_t/\mathcal{F}_s) \geq X_s.$$

Définition 1.2.2 *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique*

1) On dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable si :

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \sup_{t\geq 0} \int_{(|X_t|>\alpha)} |X_t|\, dp = 0$$

2) Si $p \geq 1$,on dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est borné dans L^p si :

$$\sup_{t\geq 0} E[|X_t|^p] < \infty.$$

Proposition 1.2.1 *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique :*

1) S'il existe une v.a.r positive et intégrable Z telle que $|X_t| \leq Z$, $\forall t \geq 0$,alors $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable.

2) Si soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est borné dans L^p, $(p > 1)$, alors $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable.

Théorème 1.2.1 *(Inégalité maximale de doob)*

Si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue à droite, alors

$$\forall p > 1 \quad , \left(E\left[\left| \sup_{0\leq s\leq t} X_s \right|^p \right] \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \sup_{0\leq s\leq t} \left(E\left[|X_s|^p \right] \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Corollaire 1.2.1 *(Martingale arrêtée)*

Si $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale et T un temps d'arrêt alors

$$M^T = (M_t^T)_{t\geq 0} = (M_{T\wedge t})_{t\geq 0} \qquad \textit{est encore une martingale.}$$

Elle est appelée martingale arrêtée.

Proposition 1.2.2 *Soient B une sous-tribu de $\mathcal{F}$, Y un vecteur aléatoire B-mesurable et X une variable aléatoire insdépendante de B. Alors*

pour toute fonction mesurable h

$$E[h(Y, X)/B] = \phi(Y), \qquad \mathbf{P} - p.s,$$

où

$$\phi(t) = E(h(t, X)).$$

1.3 L'intégrale stochastique

Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa fitration naturelle i.e : $\mathcal{F}_t := \sigma(B_u, u \leq t)$. Le mouvement brownien n'étant pas à variation bornée, on ne peut pas s'appuyer sur la théorie de l'intégration classique de Riemann-stieljes afin de denner un sens à la quantité $\int_0^t H_s dB_s$,où H est un processus stochastique continu .

C'est pour cette raison qu'on construit une nouvelle intégrale , appelée l'intégrale d'itô.

Soit $A = (A_t)_{t\geq 0}$ un processus continu et adapté

1. On dit que A est croissant, si pour tout $w \in \Omega$

$$t \to A_t(w) \ \textit{est croissante}$$

2. On dit que A est à variation bornée, si pour $w \in \Omega$

$$t \to A_t(w) \ \textit{est variation borné}$$

Définition 1.3.1

Soit $(\triangle_n = \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < ... < t_{p_n-1}^{(n)} < t_{p_n}^{(n)} = t\})_{n \geq 0}$ une suite de subdivisions de $[0, t]$ telle que $|\triangle_n| \overset{n \to \infty}{\to} 0$ et $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus continu.

Posons

$$T_t^{\triangle_n}(X) = \sum_{i=1}^{p_n-1} (X_{t_{i+1}^{(n)}} - X_{t_i^{(n)}})^2$$

On dit que le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est à variation quadratique finie sur $[0, t]$ si $T_t^{\triangle_n}(X)$ converge en probabilité .

Cette limite est alors notée $< X, X >_t$i.e

$$< X, X >_t = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{p_n-1} (X_{t_{i+1}^{(n)}} - X_{t_i^{(n)}})^2 \qquad \textit{en probabilité.}$$

Si $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard et $t > 0$, alors on a

$$< B, B >_t = t \qquad et \qquad V_0^t(B) = \infty \qquad P - p.s$$

Définition 1.3.2 (Martingale locale)

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré , $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus continu.

On dit que X est une $(\mathcal{F}_t, p)$-martingale locale, s'il existe une famille de temps d'arrêt $\{T_n, n \geq 1\}$ telle que :

i) La suit ($T_n)_{n \geq 1}$ est croissant et $\lim_{n \to \infty} T_n = +\infty$ p.s.

ii) Pour tout n ,le processus $X^{T_n} 1_{\{T_n > 0\}} = (X_t^{T_n} 1_{\{T_n > 0\}})_{t \geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t, p)$ martingales continues ,cependant on a :

- Toute martingale continue est une martingale locale.
- Une martingale locale positive est une surmartingale.
- Une martingale locale bornée est une martingale.

Si $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale alors il existe un "unique" processus continu, adapté, croissant et issu de 0 noté $(< M, M >_t)_{t\geq 0}$ tel que :

$$(M_t^2 - < M, M >_t)_{t\geq 0}$$

Soit une martingale locale (continue).

De plus , pour tout $t > 0$, toute suite $(\triangle_n)_{n\geq 0}$ de subdivisions de $[0, t]$ avec $|\triangle_n| \to 0$

$$\sup_{s\leq t}(T_s^{\triangle_n}(M) - < M, M >_s) \xrightarrow{p} 0$$

Si $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale, on a vu que le processus $< M, M >_t$est bien défini, de plus $t \longmapsto < M, M >_t$est une processus positife croissant, ainsi on peut poser pour $\omega \in \Omega$

$$< M, M >_\infty (\omega) = \lim_{t\to\infty} < M, M >_t (\omega).$$

Théorème 1.3.1 *Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale issue de* 0.

1. Si M est une martingale bornée dans L^2 alors $E(< M, M >_\infty) < \infty$ et $(M_t^2 - < M, M >_t)_{t\geq 0}$ est une martingale uniformément intégrable.

2. Si $E(< M, M >_\infty) < \infty$ alors M est une martingale bornée dans L^2.

3. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) M est une martingale de L^2.

ii) $\forall t \geq 0$ $E(< M, M >_t) < \infty$.

Si ces deux conditions sont vérifiées alors $(M_t^2 - < M, M >_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.

Définition 1.3.3 *(Semimartingale).*

a) Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu, on dit que X est une semimartingale s'il s'écrit

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

où $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale continue issue de 0 et $(A_t)_{t\geq 0}$ est un processus continu à variation bornée issu de 0.

b) Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale issue de 0. On note par $L^2_{loc}(M)$ l'espace des processus progressivement mesurables $H = (H_t)_{t\geq 0}$ vérifiant :

$$\forall t \geq 0, \qquad \int_0^t H_s^2 d < M, M >_s < \infty \qquad \mathbf{P} - p.s.$$

Théorème

1. Si $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale continue et $A = (A_t)_{t\geq 0}$ un processus continu à variation bornée , alors

$$< A, A > \equiv 0 \equiv < M, A >$$

2. Si $X_t = X_0 + M_t + A_t$ et $Y_t = Y_0 + N_t + H_t$ sont deux semimartingales, alors

$$< X, Y > \equiv < M, N > .$$

où

$$< M, N >_t = \lim_{n\rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{p_n - 1} (M_{t^n_{i+1}} - M_{t^n_i})(N_{t^n_{i+1}} - N_{t^n_i}).$$

* Théorème :

Si $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale issue de 0 et $H = (H_t)_{t\geq 0}$ $\in L^2_{loc}(M)$ alors il existe un "unique" processus noté $((H.M)_t)_{t\geq 0}$ tel que $((H.M)_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale issue de 0.

Pour toute martingale locale $N = (N_t)_{t\geq 0}$

$$< H.M, N > = H. < M, N >$$

On note aussi

$$(H.M)_t = \int_0^t H_s dM_s.$$

Passons à présent à l'intégrale stochastique par rapport aux semimartingales. Soient $H = (H_t)_{t\geq 0}$ un processus continu et adapté, $X = (X_t)_{t\geq 0}$ une semimartingale continue i.e.

$$X_t = X_0 + M_t + V$$

où $M = (M_t)_t \geq 0$ est une martingale locale issue de 0 et $V = (V_t)_{t\geq 0}$ est un processus à variation bornée, continu et issu de 0.

On note

$$(H.X)_t = \int_0^t H_s dX_s.$$

× Définition

Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ une semimartingale continue qui se décompose $X_t = X_0 + M_t + V_t$. Si $H = (H_t)_{t\geq 0}$ est un processus continue et adapté alors l'intégrale stochastique de H par rapport à X est définie par

$$H.X = H.M + H.V.$$

Remarque 1.3.1 *Si $H = (H_t)_{t\geq 0}$ est un processus continu et $V = (V_t)_{t\geq 0}$ un processus à variation bornée. Alors*

$$(H.V)_t = \int_0^s H_s dV_s \text{ est bien définie (au sens de Riemann Stieljes)}$$

Propriétés :

- Soient $K = (K_t)_{t\geq 0}$, $H = (H_t)_{t\geq 0}$ deux processus progressivement mesurable et $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard.

1/ Si X est une martingale locale continue alors $H.X$ est une martingale locale continue.

2/ Si X est une martingale continue, bornée dans L_2 alors $H.X$ l'est aussi.

3/ Si X est un processus continu à variation bornée alors $H.X$ est un processus à variation bornée.

4/ Si X est une semimartingale continue alors $H.X$ l'est aussi.

5/ Si H et K sont $L^2_{loc}(B)$ alors, pour tout $t \geq 0$

$$E[(H.B)_t(K.B)_t] = \int_0^t H_s K_s ds$$

- Soit $M = (M_t, t \geq 0)$ une martingale.

6/ Si

$$E(\int_0^t H_s^2 d < M, M >_s) < \infty \qquad \forall t \geq 0$$

Alors $H.M$ est une martingale. De plus

$$E[(\int_0^t H_s dM_s)^2] = E(\int_0^t H_s^2 d < M, M >_s)$$

En particulier, si $H = (H_t)_{t \geq 0}$ un processus de $L^2_{loc}(B)$.

Alors $(M_t = \int_0^t H_s dB_s, t \geq 0)$ L'intégrale stochastique possède une formule de changement de variables semblable à la formule du changement de variable classique mais qui fait apparaître la dérivée de second ordre inexistante dans la théorie de l'intégrale de Riemann, ceci découle du fait que la variation quadratique est nulle pour les fonctions à variation bornée. Le résultat suivant établit cette formule :

Théorème 1.3.2 *(Formule d'Itô.)*

Si $X_1, ..., X_d$ sont des semimartingales continues et $\mathcal{F} : \mathbb{R}_d \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, alors $(F(X_t^1, ..., X_t^d))_{t \geq 0}$ est une semimartingale, de plus pour tout $t \geq 0$:

$$F(X_t^1, ..., X_t^d) = F(X_0^1, ..., X_0^d) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t (\frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s^1, ..., X_s^d) dX_s^i$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t (\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s^1, ..., X_s^d) d < X_i, X_j >_s$$

Cette formule est souvent utilisée pour les semimartingales de dimension 2 et dont l'une des composantes est un processus à variation bornée. Dans ce cas on a :

X **Lemme 1.3.1** *Soit $A = (A_t)_{t \geq 0}$ un processus à variations bornée ,*

généralisation

$X = (X_t)_{t\geq 0}$ une semimartingale continue et g une fonction C^2.
On a alors :

$$g(A_t, X_t) = g(A_0, X_0) + \int_0^t (\frac{\partial g}{\partial u}(A_r, X_r)dA_r + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial v}(A_r, X_r)dX_r + \frac{1}{2}\int_0^t (\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(A_r, X_r)d < X, X >_r$$

Dans le cas où $f(x, y) = xy$, on a :

Théorème 1.3.3 *(Formule d'intégration par parties).*

Soient X et Y deux semimartingales. On a pour tout $t \geq 0$

$$dX_tY_t = X_t dY_t + Y_t dX_t + d < X, Y >_t$$

Lorsque la formule d'Itô est appliquée à une fonction vérifiant l'équation de la chaleur.

On a vu dans la remarque (1.3.1) que la variation quadratique du mouvement brownien sur $[0, t]$ vaut t, le résultat suivant montre que la réciproque aussi est vraie :

Théorème 1.3.4 *(Caractérisation de Levy.)*

Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu, adapté et issu de 0. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. X est un mouvement brownien.
2. X est une martingale locale et $< X, X >_t = t$.

Théorème 1.3.5 *(Représentation des martingales browniennes).*

Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale (cadlàg) de carré intégrable pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, la filtration d'un mouvement brownien $B = (B_t)_{t\geq 0}$. Alors il existe un unique processus $H = (H_t)_{t\geq 0}$ de $M^2(\mathbb{R}^k)$, tel que

$$\forall t \geq 0\,, \qquad M_t = M_0 + \int_0^t H_s.dB_s. \qquad \mathbf{P} - p.s.$$

Théorème 1.3.6 *(Inégalités de Burkholder, Davis et Gundy (BDG).*

Soit $p > 0$. Il existe deux constantes c_p et C_p telles que, pour toute martingale locale X continue et issue de 0,

$$c_p E[< X, X >_T^{p/2}] \leq E[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^p] \leq C_p E[< X, X >_T^{p/2}]$$

On note par sgn la fonction signe définie dans $\mathbb{R}$ par

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \succeq 0 \\ -1 & \text{si} \quad x \prec 0 \end{cases}$$

Proposition 1.3.1 *(Formule de Tanaka.)*

$$|B_t| = \int_0^t sgn(B_s) dB_s + L_t$$

Où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard et L_t le temps local en 0 du mouvement brownien B (le temps local passé par B en 0 jusqu'au temps t)

(L_t) est un processus adapté à $(\mathcal{F}_t)$ (la filtration canonique du mouvement brownien)

Nous terminons ce chapitre par un résultat classique en théorie des équations différentielles :

Lemme 1.3.2 *(Lemme de Grönwall)*

Soit $g : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout t,

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s) ds \qquad a \in \mathbb{R}, \qquad b \geq 0$$

Alors$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad g(t) \leq a e^{bt}.$

Chapitre 2

Equations Différentielles Stochastiques

2.1 Définitions-Exemples.

Le but des équations différentielles stochastiques est d'étudier l'évolution d'un sysytème physique perturbé par un bruit aléatoire. Partons d'une équation différentielle ordinaire de la forme

$$dy_t = b(y_t)dt$$

On rajoute, pour exprimer ce bruit et définir son intensité un terme qui sera de la forme σdB_t où B est un mouvement brownien et σ une constante, on obtient une équation différentielle stochastique de la forme

$$dy_t = b(y_t)dt + \sigma dB_t.$$

On généralise cette équation en permettant à σ de dépendre de l'état de y à l'instant t :

$$dy_t = b(y_t)dt + \sigma(y_t)dB_t.$$

On peut encore généraliser cette équation en permettant à b et σ de dépendre aussi du temps t pour avoir enfin une équation différentielle stochastique de la forme

$$dy_t = b(t, y_t)dt + \sigma(t, y_t)dB_t$$

Cela conduit à la définition suivante.

On note par $(M)_{d\times m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $d \times m$ à coefficients réels.

(une solution d'une EDS)

Définition 2.1.1 *Soient d et m deux entiers positifs et soient σ et b des fonctions mesurables localement bornées définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et à valeurs respectivement dans $(M)_{d\times m}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^d$. On note $\sigma = (\sigma_{ij})_{1\leq i\leq d, 1\leq j\leq m}$ et $b = (b_i)_{1\leq i\leq d}$.*

Une solution de l'équation :

$E(\sigma, b)$: $$dX_t = \sigma(t, X_t)\, dB_t + b(t, X_t)\, dt$$

est la donnée de :

- Un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ satisfaisant les conditions habituelles.

- Un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien défini sur cet espace et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $B = (B^1, ..., B^m)$.

- Un processus $(\mathcal{F}_t)-$ adapté continu $X = (X^1, ..., X^d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s + \int_0^t b(s, X_s)\, ds$$

(différents types d'unicité)

Définition 2.1.2 *Pour l'équation $E(\sigma, b)$, on dit qu'il y a*

. Existence faible si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ il existe une solution de $E_x(\sigma, b)$.

. Existence et unicité faibles si de plus toutes les solutions de $E_x(\sigma, b)$ ont même loi.

. Unicité trajectorielle si l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ et le mouvement brownien B étant fixés, deux solutions X et X' telles que

$$X_0 = X_0' \ \mathbf{P} - p.s. sont\ indistinguables.$$

On dit de plus qu'une solution X de $E_x(\sigma, b)$ est une solution forte si X est adapté par rapport à la filtration canonique de B.

remarque : l'existence faible est appelée aussi unicité en loi

2.2 Exemples

La solution d'une équation différentielle stochastique, si elle existe, n'est pas forcément unique et si elle l'est dans un sens, elle ne l'est pas forcément dans l'autre.

Quelques exemples pour illustrer ceci sont donnés suivis d'un théorème qui assure, sous certaines conditions sur b et σ, l'existence d'une unique solution forte.

2.2.1 Unicité faible mais pas trajectorielle.

Soit B un mouvement brownien standard
On pose

$$W_t = \int_0^t sgn(B_s)dB_s.$$

On a alors :

$$B_t = \int_0^t sgn(B_s)dW_s.$$

En effet :

$$\begin{aligned}\int_0^t sgn(B_s)dW_s &= \int_0^t sgn(B_s)sgn(B_s)dB_s \\ &= \int_0^t dB_s \\ &= B_t\end{aligned}$$

W est une martingale issue de 0 telle que $< W, W >_t = t$ ainsi, par la caractérisation de Levy (théorème 1.3.4), W est aussi un mouvement brownien. On voit alors que

B est solution de l'EDS

$$dX_t = sgn(X_t)dW_t, \qquad X_0 = 0$$

On a l'unicité faible. Par la caractérisation Levy, toute solution doit être un mouvement brownien .

Par contre, on n'a pas d'unicité trajectorielle pour cette équation. En effet, B et $-B$ sont toutes les deux des solutions correspondant au même mouvement brownien.

Aussi, B n'est pas solution forte : par la formule de Tanaka, la filtration canonique de W coïncide avec la filtration canonique de $|B|$ qui est strictement plus petite que celle de B. En effet, l'événement $\{B_t < 0\}$ appartient à $\mathcal{F}^B$ mais pas à $\mathcal{F}^{|B|}$.

2.2.2 Une infinité de solutions fortes et pas d'unicité faible

Considérons l'EDS :

$$dX_t = 3X_t^{1/3}dt + 3X_t^{2/3}dB_t, \qquad X_0 = 0$$

et le temps d'arrêt

$$\tau_\alpha = \inf\{s \geq \alpha, B_s = 0\}, \qquad \alpha \geq 0$$

où B est un mouvement brownien standard.
Cette équation a une infinité de solutions fortes de la forme :

$$X_s^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq \tau_\alpha \\ B_t^3 \;\; si & \tau_\alpha \leq t \prec \infty \end{cases}$$

En effet

$$3\int_0^t (X_s^{(\alpha)})^{1/3}ds + 3\int_0^t (X_s^{(\alpha)})^{2/3}dBs = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq \tau_\alpha \\ 3\int_{\tau_\alpha}^t B_s ds \; + \; 3\int_{\tau_\alpha}^t B_s^2 dB_s & \text{sinon} \end{cases}$$

En appliquant la formule d'Itô (1.3.2) pour $f(x) = x^3$, on a pour tout $t \succeq \tau_\alpha$:

$$\begin{aligned} f(B_t) &= B_t^3 = B_{\tau_\alpha}^3 + 3\int_{\tau_\alpha}^t B_s^2 dB_s + 3\int_{\tau_\alpha}^t B_s ds \\ &= 3\int_{\tau_\alpha}^t B_s^2 dB_s + 3\int_{\tau_\alpha}^t B_s ds \end{aligned}$$

En effet, comme le mouvement brownien est continu, même si cet inf n'est pas atteint, on aura quand même $B_{\tau_\alpha} = 0$

D'où

$$\begin{aligned} 3\int_0^t X_s^{(\alpha)1/3}ds + 3\int_0^t X_s^{(\alpha)2/3}dBs &= \begin{cases} 0 & si \quad t \leq \tau_\alpha \\ B_t^3 & \text{sin} on \end{cases} \\ &= X_t^{(\alpha)} \end{aligned}$$

Passons à présent au théorème d'existence et d'unicité de la solution de $E_x(b, \sigma)$.

On désigne par $|.|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$.

2.3 Théorème d'existence et d'unicité

Théorème 2.3.1 *(Existence et unicité)*

On suppose qu'il existe une constante K positive telle que pour tout $t \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$

1. Condition de Lipschitz

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq k\,|x-y|$$

2. Croissance linéaire

$$|b(t,x)| \leq k(1+|x|)\ ; \qquad |\sigma(t,x)| \leq k(1+|x|)$$

Alors il y a unicité trajectorielle pour $E(\sigma, b)$.

De plus, pour tout espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ et tout $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$- mouvement brownien, il existe pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$, une (unique) solution forte pour $E_x(\sigma, b)$.

preuve

Afin d'alléger les notations, on traitera uniquement le cas $d = m = 1$.

Commençons par établir l'unicité trajectorielle. Sur le même espace et avec le même mouvement brownien B, on se donne deux solutions X et X' telles que $X_0 = X_0'$.

Pour $M \geq 0$ fixé, posons

$$\tau = \inf\left\{t \succeq 0, |X_t| \succeq M \quad \text{ou} \quad \left|X_t^{'}\right| \succeq M\right\}$$

On a alors, pour tout $t \geq 0$,

$$X_{t\wedge\tau} = X_0 + \int_0^{t\wedge\tau} \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^{t\wedge\tau} b(s, X_s)ds$$

Vu que X' est aussi une solution, nous avons l'équation analologue

$$X_{t\wedge\tau}^{'} = X_0^{'} + \int_0^{t\wedge\tau} \sigma(s, X_s^{'})dB_s + \int_0^{t\wedge\tau} b(s, X_s^{'})ds$$

Remarquons que X et X' sont bornées par M sur l'intervalle $[0, \tau]$. En faisant la différence membre à membre de ces deux équations et par passage à l'espérance,
on aura :

$$\begin{aligned} h(t) \quad : &= E[(X_{t\wedge\tau} - X_{t\wedge\tau}^{'})^2] \\ &= E[(\int_0^{t\wedge\tau} (\sigma\ (s, X_s) - \sigma(s, X_s^{'})dB_s + \int_0^{t\wedge\tau} b(s, X_s) - b(s, X_s^{'})ds)^2] \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, on aura :

$$h(t) \leq 2E[(\int_0^{t\wedge\tau} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X_s^{'})dB_s)^2] + 2E[(\int_0^{t\wedge\tau} b(s, X_s) - b(s, X_s^{'})ds)^2]$$

Par la propriété 6 , on a

$$2E[(\int_0^{t\wedge\tau} (\sigma\ (s, X_s) - \sigma(s, X_s^{'})dB_s)^2] = 2E[\int_0^{t\wedge\tau} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X_s^{'}))^2 ds]$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et en majorant $t \wedge \tau$ par T, on trouve

$$2E[(\int_0^{t\wedge\tau} b(s,X_s) - b(s,X_s^{'})ds)^2] \leq 2TE[\int_0^{t\wedge\tau} (b(s,X_s) - b(s,X_s^{'}))^2 ds]$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} h(t) &\leq 2E[\int_0^{t\wedge\tau} (\sigma\,(s,X_s) - \sigma(s,X_s^{'}))^2 ds] + 2TE[\int_0^{t\wedge\tau} (b(s,X_s) - b(s,X_s^{'}))^2 ds] \\ &\leq 2E[\int_0^{t\wedge\tau} k^2 \left|X_s - X_s^{'}\right|^2 ds] + 2TE[\int_0^{t\wedge\tau} k^2 \left|X_s - X_s^{'}\right|^2 ds] \\ &\leq 2k^2\,(1+T)\,[\int_0^{t\wedge\tau} \left|X_{s\wedge\tau} - X_{t\wedge\tau}^{'}\right|^2 ds], \end{aligned}$$

où l'avant dernière inégalité provient du fait que b et σ soient lipschitziennes.

La fonction h vérifie

$$h(t) \leq C \int_0^t h(s)\,ds$$

avec $C = 2K^2(1+T^2)$.

h est bornée par $4M^2$ et vérifie les conditions du lemme de Grönwall (Lemme 1.3.2) avec $a = 0$ et $b = C$, ce qui donne alors $h = 0$ donc $\mathbf{P}-$ p.s. $X_{t\wedge\tau} = X_{t\wedge\tau}^{'}$.

En faisant tendre M vers $+\infty$, on aura $X_t = X_t^{'}$ pour tout t.

X est alors une modification de $X^{'}$, mais comme ces processus sont continus, alors ils sont indistinguables. Ce qui achève la preuve de l'unicité trajectorielle.

Passons à présent au deuxième point.

On construit la solution par la méthode d'approximation de Picard. On pose

$$
\begin{aligned}
X_t^0 &= x, \\
X_t^1 &= x + \int_0^t \sigma\,(s,x)dB_s + \int_0^t b(s,x)ds, \\
X_t^n &= x + \int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})dB_s + \int_0^t b\,(s, X_s^{n-1})ds
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Par récurrence pour chaque n, X_t^n est continu et adapté, donc le processus $\sigma(t, X_t^n)$ l'est aussi. Fixons $T > 0$ et raisonnons sur $[0,T]$.

Vérifions d'abord par récurrence sur n que

$$
\exists C_n : \forall t \in [0,T] \qquad E[(X_t^n)^2] \leq C_n. \tag{2.2}
$$

Pour $n = 0$, il n'y a rien à montrer.

Supposons à présent que ceci est vrai à l'ordre $n-1$ et vérifions que cela reste vrai à l'ordre n.

Le calcul du moment d'ordre deux de l'intégrale stochastique se justifie par le fait que $E\left[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds\right] < \infty$, ce qui découle de la croissance linéaire et de l'hypothèse de récurrence.

En utilisant encore la croissance linéaire, on écrit

$$\begin{aligned}
E\left[(X_t^n)^2\right] &\leq 3\left(x^2 + E\left[\left(\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})dB_s\right)^2\right] + E\left[\left(\int_0^t b(s, X_s^{n-1})ds\right)^2\right]\right) \\
&\leq 3\left(x^2 + E\left[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds\right] + tE\left[\left(\int_0^t b(s, X_s^{n-1})^2 ds\right)\right]\right) \\
&\leq 3\left(x^2 + E\left[\int_0^t \left(K + K\ \left|X_s^{n-1}\right|\right)^2 ds\right] + tE\left[\int_0^t \left(K + K\ \left|X_s^{n-1}\right|\right)^2 ds\right]\right) \\
&\leq 3\left(x^2 + (1+t)\,E\left[\int_0^t \left(K + K\ \left|X_s^{n-1}\right|\right)^2 ds\right]\right) \\
&\leq 3x^2 + 3\,(1+t)\,E\left[\int_0^t \left(2K^2 + \left(2K\ X_s^{n-1}\right)^2\right) ds\right] \\
&\leq 3x^2 + 6T\,(1+T)\left(K^2 + 4C_{n-1}\right) := C_n.
\end{aligned}$$

La majoration (2.2) et l'hypothèse de croissance linéaire sur σ entrainent que la martingale locale $\left(\int_0^t \sigma(s, X_s^n)dB_s\right)$ est une vraie martingale bornée dans L^2 pour tout n. On utilisera ceci pour majorer par récurrence

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right]$$

On a

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t \left(\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})\right) dB_s + \int_0^t \left(b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1})\right) ds$$

d'où

$$
\begin{aligned}
& E\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2\right] \\
\leq\ & 2E\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s \left(\sigma\left(u,X_u^n\right)-\sigma\left(u,X_u^{n-1}\right)\right)dB_u\right|^2+\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s \left(b\left(u,X_u^n\right)-b\left(u,X_u^{n-1}\right)\right)du\right|^2\right] \\
\leq\ & 2\left(4E\left[\left(\int_0^t \left(\sigma\left(u,X_u^n\right)-\sigma\left(u,X_u^{n-1}\right)\right)dB_u\right)^2\right]+E\left[\left(\int_0^t \left|b\left(u,X_u^n\right)-b\left(u,X_u^{n-1}\right)\right|du\right)^2\right]\right) \\
\leq\ & 2\left(4E\left[\left(\sigma\left(u,X_u^n\right)-\sigma\left(u,X_u^{n-1}\right)\right)^2du\right]+TE\left[\int_0^t \left(b\left(u,X_u^n\right)-b\left(u,X_u^{n-1}\right)\right)^2du\right]\right) \\
\leq\ & 2\left(4+T\right)K^2E\left[\int_0^t \left|X_u^n-X_u^{n-1}\right|^2du\right] \\
\leq\ & C_TE\left[\int_0^t \sup_{0\leq r\leq u}\left|X_r^n-X_r^{n-1}\right|^2du\right].
\end{aligned}
$$

Avec $C_T=2(4+T)K^2$, posons

$$g_n(u):=E\left[\sup_{0\leq r\leq u}\left|X_u^n-X_u^{n-1}\right|^2\right].$$

Ainsi on vient de montrer que

$$g_{n+1}(t)\leq C_T\int_0^t g_n(u)du \qquad (I)$$

D'autre part, $\forall n$, g_n est bornée sur $[0,T]$

En effet, pour $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} g_n(u) &\leq 2(4+T)K^2 E\left[\int_0^t \left|X_u^n - X_u^{n-1}\right|^2 du\right] \\ &\leq 2(4+T)K^2 E\left[\int_0^t \left(2\left(X_u^n\right)^2 + 2\left(X_u^{n-1}\right)^2\right) du\right] \\ &\leq 4T\left(4+T\right)\left(C_n^2 + C_{n-1}^2\right) \end{aligned}$$

$g_0(t) = x^2$ qu'on appelle C'_T
Une récurrence simple sur (I) donne :

$$g_n(t) \leq C'_T\left(C_T\right)^n \frac{t^n}{n!}.$$

Et, en vertu du critère de D'alembert, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(T)^{1/2} \prec \infty$$

comme ma nomre de L^1est dominée par la norme de L^2, on aura

$$\sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|\right] \prec \infty$$

Le théorème de la convergence monotone nous permet de dire que

$$E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|\right] \prec \infty$$

Ce qui entraîne que p.s.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right| \prec \infty$$

Mais si $n, m \in N$ avec $n < m$:

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^m - X_t^n\right| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{k+1} - X_t^k\right| \to 0 \qquad \textit{quand} \;\; n, m \to \infty.$$

Par suite, p.s. La suite $(X_t^n, 0 \leq t \leq T)_n$ converge uniformément sur $[0, T]$ vers un processus limite $X = (X_t)_{t \geq 0}$ qui est continu et adapté. En effet , on vérifie par récurrence que chaque processus X^n est adapté par rapport à la filtration canonique de B, et donc X l'est aussi.

On a $\mathbf{P}-$p.s.

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s - X_s^n| &= \lim_{m \to \infty} \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^m - X_s^n| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^k - X_s^{k-1}| . \end{aligned}$$

En introduisant la norme L^2, on trouve que

$$E\left[\sup_{0 \leq s \leq T} |X_s - X_s^n|^2\right] \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} g_k (T)^{1/2}\right)^2 \to 0 \qquad \text{quand } n \to \infty$$

et on en déduit que

$$\int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s = \lim_{n \to +\infty} \int_0^t \sigma(s, X_s^n) dB_s \qquad \text{dans } L^2$$

et

$$\int_0^t b(s, X_s) ds = \lim_{n \to +\infty} \int_0^t b(s, X_s^n) ds \qquad \text{dans } L^2$$

En effet

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X_s^n)) \, dB_s\right)^2\right] &= E\left(\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X_s^n))^2 \, ds\right) \\ &\leq E\left(K^2 \int_0^t |X_s - X_s^n|^2 \, ds\right) \\ &\leq T^2 K^2 E\left[\sup_{0 \leq s \leq T} |X_s - X_s^n|^2\right] \to 0 \end{aligned}$$

et on procède de la même manière pour b.

En passant à la limite dans l'équation de récurrence pour X^n (2.3), on trouve que X est une solution (forte) de $E_x(\sigma, b)$ sur $[0, T]$.

2.4 Exemples

Dans cette section, on donne trois exemples de résolution d'EDS

exemple 2.4.1

Soit l'EDS suivante :

$$dX_t = -X_t dt + e^{-t} dB_t, \qquad X_0 = x$$

Les conditions du théorème d'existence et d'unicité sont vérifiées, on cherche alors l'unique solution de cette EDS.

On a

$$e^t dX_t = -e^t X_t dt + dB_t$$

ou encore

$$e^t dX_t + e^t X_t dt = dB_t$$

D'un autre côté, la formule d'intégration par parties assure que :

$$d\left(e^t X_t\right) = e^t dX_t + X_t e^t dt$$

Ce qui donne :

$$d\left(e^t X_t\right) = dB_t$$

et donc, la solution s'écrit :

$$X_t = x + e^t B_t$$

exemple 2.4.2

Equation d'Ornstein Uhlenbeck

On cherche à résoudre l'EDS suivante :

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t \qquad X_0 = x.$$

où μ et σ sont deux réels.

Le théorème d'existence et d'unicité assure qu'il existe une unique solution.

On multiplie les deux côtés de cette équation par $e^{-\mu t}$ on obtient :

$$e^{-\mu t} dX_t = \mu X_t e^{-\mu t} dt + \sigma e^{-\mu t} dB_t,$$

ou encore

$$e^{-\mu t}dX_t - \mu X_t e^{-\mu t}dt = \sigma e^{-\mu t}dB_t$$

D'un autre côté, la formule d'intégration par parties donne :

$$d\left(X_t e^{-\mu t}\right) = e^{-\mu t}dX_t - \mu X_t e^{-\mu t}dt$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on trouve :

$$d\left(X_t e^{-\mu t}\right) = \sigma e^{-\mu t}dB_t$$

d'où, la solution

$$X_t = x + \sigma e^{\mu t}\int_0^t e^{-\mu s}dB_s$$

exemple 2.4.3

Modèle de Black et Scholes

Le modèle de Black et Scholes est, à l'origine, un modèle à deux actifs : l'un risqué et l'autre pas. Dans cet exemple, on traite le cas de l'actif risqué, à savoir le prix d'une action à l'instant t. Il vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S_t\left(\mu dt + \sigma dB_t\right), \qquad S_0 = x$$

La solution est

$$S_t = xe^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t}e^{\mu t}$$

En effet, il suffit d'écrire $\sigma(t,x) = \sigma x$ et $b(t,x) = bx$ pour voir qu'elles vérifient les conditions du théorème (2.3.1). On applique ensuite la formule d'Itô à :

$$f(t,x) = xe^{\sigma x - \frac{\sigma^2}{2}t}e^{\mu t}$$

on aura

$$\begin{aligned} S_t &= f(t, B_t) \\ &= f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s)\, ds \\ &= \int_0^t \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right) S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dB_s + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t S_s ds. \end{aligned}$$

d'où

$$dS_t = S_t\left(\mu dt + \sigma dB_t\right), \qquad S_0 = x$$

2.5 Théorème de Yamada-Watanabe

Les conditions du théorème d'existence et d'unicité ne sont pas optimales. Toshio YAMADA et Shinzo WATANABE ont montré qu'on peut les affaiblir dans le théorème suivant :

Théorème de YAMADA-WATANABE II

Soit $d = m = 1$

Supposons que b et σ sont à croissance linéaire, que b vérifie la condition de Lipschitz locale et $|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \leq \rho|x-y|$ pour tout $t \geq 0$, où ρ est une fonction borélienne de $]0,+\infty[$ dans lui même telle que :

$$\int\limits_{|z|\prec\epsilon} \frac{1}{\rho^2(z)} dz = +\infty \qquad \forall\epsilon \succ 0$$

Alors $E_x(b,\sigma)$ admet une unique solution forte.

En effet, les conditions du théorème de Yamada et Watanabe sont plus faible que la condition de Lipschitz. Si σ est lipschitzienne, alors on a pour tous x et y réels, si

$$\left|\sigma(x) - \sigma(y)\right| \leq c\left|x - y\right|,$$

alors

$$\left|\sigma(x) - \sigma(y)\right|^2 \leq c^2\left|x - y\right|^2.$$

Il suffit alors de prendre $\rho(x) = x^2$. On a bien

$$\int\limits_{|z|\prec\epsilon} \frac{1}{\rho^2(z)} dz = +\infty \qquad \forall\epsilon \succ 0$$

exemple 2.5.1 *Soit $a \in \mathbb{R}$.*

On considère l'EDS

$$dX_t = aX_t dt + \sqrt{X_t} dB_t \qquad X_0 = 0$$

$f(x) = sqrt(x)$ n'est pas lipschitzienne mais elle vérifie la condition du théorème de Yamada et Watanabe. La solution (unique) de cette équation est appelée processus de Feller.

Chapitre 3

Equations différentielles stochastiques rétrogrades

3.1 Introduction

Construction

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, $T > 0$, $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien de $\mathbb{R}^d$, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sa filtration naturelle et $\xi \in \mathcal{F}_T$. Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{-dY_t}{dt} = f(Y_t), t \in [0, T], \; avec, Y_T = \xi$$

En imposant que la solution au moment t ne dépende que du passé, c'est à dire que le processus Y soit adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

Prenons pour commencer le cas où $f \equiv 0$. On est tenté de donner comme solution $Y_t = \xi$ qui n'est adaptée que si ξ est déterministe. Nous n'avons qu'une approximation (dans L^2) qui soit adaptée et qui est la martingale $Y_t = E(\xi / \mathcal{F}_t)$.

Si $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est la filtration du mouvement brownien, on peut construire par le théorème de representation des martingales(Théorème 1.3.5) un processus Z adapté de carré intégrable tel que :

$$Y_t = E(\xi/\mathcal{F}_t) = E[\xi] + \int_0^t Z_s dB_s.$$

On peut écrire ceci autrement, on a :

$$Y_t = E[\xi] + \int_0^t Z_s dB_s \quad , \quad \forall t \in [0,T]$$

d'où

$$Y_T = E[\xi] + \int_0^T Z_s dB_s$$

$$\xi = E[\xi] + \int_0^t Z_s dB_s + \int_0^T Z_s dB_s$$

$$\xi = Y_t + \int_t^T Z_s dB_s$$

On a alors

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dB_s \text{ i.e. } -dY_t = -Z_t dB_t \text{ , avec, } Y_T = \xi.$$

On voit donc apparaître le processus Z qui a pour rôle de rendre le porcessus Y adapté.

Par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f de dépendre du processus Z. L'équation devient donc :

$$-dY_t = f(y, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, \text{ avec } Y_T = \xi.$$

- $S_2(\mathbb{R}^k)$ désigne l'espace vectoriel formé par des processus Y, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, tels que :

$$\| Y \|_{S^2}^2 := E\left[\sup_{0 \geq 0} |Yt|^2\right] < \infty$$

et S_c^2 $(\mathbb{R}^k)$ le sous espace formé par les processus continus .

- $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ désigne l'espace vectoriel formé par des processus Z ,progressivement mesurables, à valeurs dans $(\mathbb{R}^{k\times d})$, tels que :

$$\| Z \|_{M^2}^2 := E\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 \, dt\right] < \infty$$

où si

$$z \in \mathbb{R}^{k\times d}, \quad \|z\|^2 = trace(zz^*)$$

- $f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ t.q. $\forall (y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, $(f(.,t,y,z))_{0\leq t\leq T}$ est progressivement mesurable.
- ξ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^k$ $\mathcal{F}_T-$ mesurable.
Soit l'EDSR

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t 0 \leq t \leq T, Y_T = \xi. \tag{3.1}$$

ou sous la forme intégrale :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)d_r - \int_t^T Z_r dB_r \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Définition 3.1.1 *Une solution de l'EDSR (3.1) est un couple de processus* $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *vérifiant :*

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$ respectivement.

2. $\mathbf{P}-$ p.s. $\displaystyle\int_0^T (|f(r, Y_r, Z_r)| + ||Z_r||2)dr < \infty.$

3. $\mathbb{P}-$ p.s. , on a : $Y_t = \xi + \int_0^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r, \quad 0 \le t \le T.$

La proposition suivante montre, que sous une hypothèse relativement faible sur f, le processus Y appartient à S^2.

Proposition 3.1.1 *Supposons qu'il existe un processus $(f_t)_{0\le t\le T}$, positif, appartenant à $M^2(\mathbb{R}^k)$ et une constante positive λ tels que*

$$\forall (t, y, z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}, \qquad |f(t,y,z)| \le f_t + \lambda(|y| + \| z \|).$$

Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\le t\le T}$ est une solution de l'EDSR (3.1) telle que $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ alors Y appartient à S^2.

preuve

On a pour tout $t \in [0,T]$,

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f(r, Y_r, Z_r)\, dr + \int_0^t Z_r dB_r,$$

En utilisant l'hypothèse sur f,

$$\begin{aligned} |Y_t| &\le |Y_0| + \int_0^t |f(r, Y_r, Z_r)\, dr| + \left| \int_0^t Z_r dB_r \right| \\ &\le |Y_0| + \int_0^T (f_r + \lambda \|Z_r\|) dr + \sup_{0\le t\le T} \left| \int_0^t Z_r dB_r \right| + \lambda \int_0^t |Y_r|\, dr. \end{aligned}$$

Posons

$$\xi = |Y_0| + \int_0^T (f_r + \lambda \|Z_r\|) dr + \sup_{0\le t\le T} \left| \int_0^t Z_r dB_r \right|.$$

Y_0 est une constante, donc elle est de carré intégrable, $\{f_t\}_{0\le t\le T}$ appartient à M^2 par hypothèse et $\mathbb{Z}$ appartient à $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ par hypothèse et donc, par l'inégalité de Doob, $\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_r dB_r\right|$ est de carré intégrable. Il s'en suit que ξ est de carré intégrable. Y est un processus continu qui vérifie

$$|Y_t| \leq \xi + \lambda \int_0^t |Y_r|\, dr.$$

Par le lemme de Grönwall, on aura

$$|Y_t| \leq \xi e^{\lambda t}$$

et donc

$$\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t| \leq \xi e^{\lambda t}$$

comme ξ est de carré intégrable, alors Y appartient à S^2.

3.2 EDSR linéaires

Dans ce dernier paragraphe nous étudions le cas particulier des EDSR linéaires pour lesquelles nous allons donner une formule explicite. On se place dans le cas $k=1$; Y est donc un réel et $\mathbb{Z}$ est une matrice de dimension $1\times d$ c'est à dire un vecteur ligne de dimension d.

Proposition 3.2.1

Soit $\{(a_t, b_t)\}_{t\in[0,T]}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, progressivement mesurable et borné. Soient $\{c_t\}_{t\in[0,T]}$ un élément de $M^2(\mathbb{R})$ et ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T-$ mesurable, de carré intégrable et à valeurs réelles.

L'EDSR linéaire :

$$Y_t = \xi + \int_t^T (a_r Y_r + Z_r b_r + c_r)\, dr - \int_t^T Z_r dB_r$$

possède une unique solution qui vérifie :

$$\forall t \in [0,T], \qquad Y_t = \Gamma_t^{-1} E\left(\xi\Gamma_t + \int_t^T c_r\Gamma_r dr / F_t\right)$$

avec, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\Gamma_t = \exp\left\{ \int_0^t b_r dB_r - \frac{1}{2}\int_0^t |b_r|^2 dr + \int_0^t a_r dr \right\}.$$

Remarquons d'abord que Γ vérifie :

$$d\Gamma_t = \Gamma_t \left(a_t dt + b_t dB_t\right), \qquad \Gamma_0 = 1$$

En effet, Soient $G = (G_t)_{t\in[0,T]}$ et $H = (H_t)_{t\in[0,T]}$ deux processus définis par

$$G_t = \int_0^t b_r dB_r \quad \text{et} \quad H_t = \int_0^t \left(a_r - \frac{1}{2}|b_r|^2\right) dr$$

Γ s'exprime alors comme : $\Gamma_t = exp(G_t + H_t)$
On applique la formule d'Itô pour $h(x,y) = e^{x+y}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\Gamma_t &= 1 + \int_0^t \Gamma_r b_r dB_r + \int_0^t \Gamma_r \left(a_r - \frac{1}{2}|b_r|^2\right) dr + \frac{1}{2}\int_0^t \Gamma_r |b_r|^2 dr \\
&= 1 + \int_0^t \Gamma_r b_r dB_r + \int_0^t \Gamma_r a_r dr
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

D'autre part, Γ est de carré intégrable. En effet, comme a et b sont bornés, alors $\exists\ \alpha, \beta$ des réels positifs tels que

$$\forall t \in [0,T], e^{\int_0^t a_r dr} < \alpha \qquad et \qquad e^{\int_0^t |b_r|^2 dr} < \beta.$$

utilisera dans le calcul suivant l'inégalité de Doob à la troisième ligne pour $\{\exp(\int_0^t b_r dB_r - \frac{1}{2}\int_0^t |b_r|^2 dr)\}_{0\leq t\leq T}$ qui est une martingale locale d'après le corrolaire suivant :

Si $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors $\varepsilon^{\lambda}(M) = (\varepsilon^{\lambda}(M)_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale , avec

$$\varepsilon^{\lambda}(M)_t = e^{\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} < M,M >_t}$$

Preuve de corrolaire :
Posons

$$F(s,x) = e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2} s}$$

F vérifie l'équation de la chaleur i.e.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial s} = 0$$

donc, par la formule d'Itô,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\lambda}(M)_t &= F(< M, M >_t, M_t) \\ &= F(0, M_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(< M, M >_s, M_s) dM_s \end{aligned}$$

d'où $\varepsilon^{\lambda}(M)$ est une martingale locale.

mais comme b est borné, alors c'est une vraie martingale.

On pose $M_t = \int_0^t b_r dB_r$ et donc $< M, M >_t = \int_0^t |b_r|^2 dr$

$$E(\sup_{0\leq t\leq T}) |\Gamma_t|^2 = [(\sup_{0\leq t\leq T} \exp\{\int_0^t b_r dB_r - \frac{1}{2}\int_0^t |b_r|^2 dr + \int_0^t a_r dr\})^2]$$

$$\leq \alpha^2 E[(\sup_{0\leq t\leq T} \exp\{M_t - \frac{1}{2} < M, M >_t\})^2]$$

$$\leq 4\alpha^2 \sup_{0\leq t\leq T} E \exp\{M_t - \frac{1}{2} < M, M >_t\})^2]$$

$$\begin{aligned}
&\leq \; 4\alpha^2 \sup_{0\leq t\leq T} E[\exp(2M_t - \frac{1}{2} < 2M, 2M >_t)] \\
&\leq \; 4\alpha^2\beta \exp(2M_0 - \frac{1}{2} < 2M, 2M >_0) \\
&\leq \; 4\alpha^2\beta
\end{aligned}$$

où l'avant dernière ligne vient du fait que

$$\{\exp(2M_t - \frac{1}{2} < 2M, 2M >_t)\}_{t\in[0,T]}$$

soit aussi une martingale, d'où la constance de son espérance. Donc le processus Γ appartient bien à S_2.

De plus, en posant $f(t, y, z) = a_t y + b_t z + c_t$, la condition (L) est satisfaite. Y appartient à S^2 par la proposition (3.2.1).

La formule d'intégration par parties donne

$$d\Gamma_t Y_t = \Gamma_t dY_t + Y_t d\Gamma_t + d < \Gamma, Y >_t = -\Gamma_t c_t dt + \Gamma_t Z_t dB_t + \Gamma_t Y_t b_t . dB_t$$

Ce qui montre que le processus $(\Gamma_t Y_t + \int_0^t c_r \Gamma_r dr)$ est une martingale locale qui est en fait une vraie martingale car $c \in M^2$ et Γ, Y sont dans S^2.

Par suite

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t c_r \Gamma_r dr = E(\Gamma_t Y_T + \int_0^T c_r \Gamma_r dr / F_t)$$

Ce qui donne

$$\Gamma_t Y_t = E\left(\Gamma_T \xi + \int_0^T c_r \Gamma_r dr / F_t\right)$$

Ce qui donne la formule annoncée

3.3 Application en finance

3.3.1 Le probléme des options

Définition :

Une option est un titre donnant à son détenteur le droit, et non l'obligation d'acheter ou de vendre (selon qu'il s'agit d'une option d'achat ou de vente) une certaine quantité d'un active financier à une date convenue et à un prix fixé d'avance.

La description précise d'une optin se fait à partir des élément suivantes :

- *La nature de l'option :*

On parle suivante le terminologie anglo-saxonne de call pour une option d'achat et de put pour une option de vente.

- *L'actif Sous-Jacent :*

Sur le quel porte l'option dans la paratique, il peut s'agir d'une action, d'une obligation, d'une derivise etc , ...

Le montant, c'est à dire la quantité d'actif Sous-Jacent à cheter où devendre

- *L'échéance ou date d'expiration,*

Qui limite la durée devie del'option, Si l'option peut-être. Exerceé à n'importe quel instant précédant l'echeance, On parle d'option américaine, Si l'option ne peut-être exercée qui à l'échéance, on parle d'option européenne.

3.3.2 Le prix d'exercice qui est le prix

(Fixé d'avance) auquel se fait la transaction en cas d'exercice de l'option.

L'option,elle même,ou un prix appelé la prime.

Lorsque l'option est cotée sur un marché organisé,la prime est donnée par le marchée. En l'absence de cotation, le probléme du calcul de la prime supose. Et même une option cotée, il peut-être intéressant de disposer d'une formule ou d'un modèle parmettant de détecter d'eventuelles anomalies de marché

Examinôus, pour fixer les idées, le cas d'un call européen d'échéance T sur une action dont le cours à la date t est donnée par S_t.

Soit K le prix d'exercice. Il est claire que si a l'echéance T, le prix K est supérieur au cours $S_T(K > S_T)$.

Le détenteur de l'option n'a pas intérêt à exercer, par contre si $S_T > K$ l'exercice de l'option permet à son détenteur de réaliser un profit égal à

$S_T - K$,en la revendant sur le marché aucours S_T.

On voit qu'à l'echéance, la valeur du call est donné par la quantité $(S_T - K)_+ = \max(S_T - K, 0)$.

Pour le vendeur de l'option, il s'agit, en cas d'exercice, d'être en mesure de fournir une action au prix K , et par conséquent de pouvoire -produire à l'echeance une richesse égale à $(S_T - K)_+$

Au moment de la vente de l'option, qu'on pendra, pour origine des temps, le cours S_T est inconnu et deux questions se posent :

Comment évaluer à l'instant $t = 0$ une richesse $(S_T - K)_+$ dispoible à la date T ?

C'est le probléme de pricing 2 comment le vendeur, qui touche la prime à l'instant 0 parviendra t . Il à produire la richesse $(S_T - K)_+$ à la date T ?

C'est le probléme de couverture.

3.3.3 Modéle de Black - Scholes

*** Description du modéle :**

- *L'évolution des cours :*

Le modéle proposé par Black - Scholes pour d'écrire l'évolution des cours est un modéle à temps continu avec un actif risque (une action de prix S_t à l'instant t) et un actif sans risque (de prix S_t^0 à l'instant t).

On suppose l'evolution de S_t^0 régie par (EDO), suivante :

$$dS^0 = rS_t^0 dt (\frac{dS_t^0}{S_t^0} = rdt)$$

où r est une constante positive.

On posera $S_0^0 = 1$ de sorte que :

$S_t^0 = e^{rt}$ pour $t \geq 0$, en suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'EDS suivante :

$$dS_1 = S_t(\mu dt + \sigma dB_t) \rightarrow (2)$$

où μ et σ sont deux constantes et $(B_t)_{t\geq 0}$ un MBS.

Le modéle est étudie sur l'intervale $[0, T]$ où T est la date d'échéance de l'option à étudier l'equation (2) se résout explicitement :

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B_t)$$

où S_0 est le cours observé à la date "0" .

- *Stratégies autofinancées :*

Une stratégie sera définie par un processus $\phi = (\phi_t)_{0 \leq t \leq T} = (H_t^0, H_t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ adaptée à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$ du MB,les composantes H_t^0 et H_t de ϕ_t donnant à l'instant t les quantités d'actifs sans risque et d'actif risqué, respectivements détenus en portefeuille la valeurs portefeuille à l'instant t est alors donnée par :

$$V_t(\phi_t) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$$

La transposition de cette égalité à temps continu conduit à écrire la condition d'autofinacement sous la forme suivante :

$$dV_t(\phi) = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t$$

Pour que cette égalite ait un sens on imposera la condition :

$$\int_0^T |H_t^0|\, dt < +\infty \quad \text{p.s} \qquad (1)$$

$$\int_0^t |H_t|^2\, dS_t < +\infty \quad \text{p.s} \qquad (2)$$

Définition 3.3.1

Une Stratégie autofinancie ,est définie par un couple ϕ de processus adaptés $(H_t^0)_{0 \leq t \leq T}$ est $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ vérifiant :

$$1) \quad \int_0^T |H_t^0|\, dt + \int_0^t H_t^2 dt < +\infty \qquad \text{p.s.}$$

$$2) \quad H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = H_0^0 S_0^0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_u^0 dS_u^0 + \int_0^t H_u dS_u \qquad \text{p.s}$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Nous noterons : $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ le cours actualisé de l'actif risque.

Soit $\phi = (H_t^0, H_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\int_0^T \left|H_t^0\right| dt + \int_0^t H_t^2 dt < +\infty \qquad p.s.$$

On pose : $V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$ et $\widetilde{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi)$
Alors ϕ définit une stratégie autofinancée ssi :

$$\widetilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u d\widetilde{S}_u \qquad \text{p.s}$$

pour tout $t \in [0, T]$

Bibliographie

[1] [1] Briand, P.,Equations Différentielles Stochastiques Rétrograde, cours, Mars

2001.

[2] Godet, F. , Intégrale stochastique, présentation, 20 novembre 2006.

[3] Jeanblanc, M. , Exercices de calcul stochastique DESS IM Evry, option nance. Université d'EVRY octobre 2005.

[4] Jeanblanc, M. et Simon, T. , Eléments de calcul stochastique, cours, IRBID,

septembre 2005

[5] Kahane, J.P., Le mouvement brownien, Un essai sur les origines de la théorie

mathématique Société Mathématique de France 1998, p.123-155 .

[6] Karatzas, I. et Shreve, S.E., Brownian motion and stochastique calculus with

10 Illustrations , Springer-Verlag, New-york, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, 1988.

[7] Le Gall, J.F., Mouvement brownien et calcul stochastique. Notes de cours

de Master 2, 2008 - 2009, Université Paris-Sud, Master Probabilités et Statistiques, Octobre 2008.

[8] Lévêque, O., Cours de probabilités et calcul stochastique EPFL Semestre

d'hiver 2004 - 2005

[9] Malti, D.F., Les processus croissants dans l'ordre convexe, Mémoire de magister

en probabilités statistiques, octobre 2011.

[10] Öksendal, B. ,Stochastic Di erential Equations. An Introduction with Applications

Fifth Edition, Corrected Printing Springer-Verlag Heidelberg
New York
[11] REVUZ, D., YOR, M., Continuous martingales and Brownian motion, volume
293 de Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1999. MR 2000h : 60050.
[12] Rogers, L.C.G. et Williams, D. Diffusions, Markov Processes, and martingales
Volume 2 : Itô Calculus, 2nd edition, Cambridge University