

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

M1510.125

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



### Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
**Master Académique en Mathématiques**  
Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Par : Mellouki Nedjet

M<sup>r</sup>. Hitta Amara

### Intitulé

**Notion sur la stabilité des systèmes dynamiques des  
équations différentielles**

Dirigé par :

Devant le jury

**PRESIDENT  
RAPORTEUR  
EXAMINATEUR**

Dr.  
Dr.  
Dr.

F.Ellagoune  
A.Hitta  
Y.Bouatia

Univ-Guelma  
Univ-Guelma  
Univ-Guelma

Session Juin 2014



# Dédicace

*Je dédie ce travail à deux personnes que je l'âme beaucoup et qui ne jamais les oublies à l'âme mon père et ma grande mère maternelle.*

*A celle que soleil a brillé pour éclairer ses yeux, qui a offert la beauté aux fleurs et le charme a tout ce qui est beau pour la personne qui n'a jamais cessé de me porter aide et courage : à toi ma maman Razika.*

*A mon marié Ghazal et ma sœur hanen pour son soutient morale et ses encouragement*

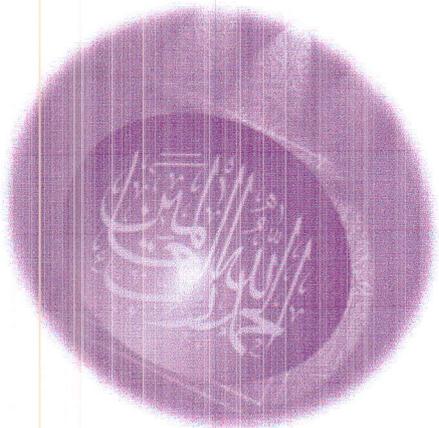
*A mes chere frères : Abda al Aziz, Abde Alhamide, Mourtar, et mon frère Mostapha qui à grâce à lui je survenue à ce niveau*

*A Dr<<Ahitta>> pour ses conseils et son orientation.*

*A mon bébé Mohamed Iyed qui j'aime*

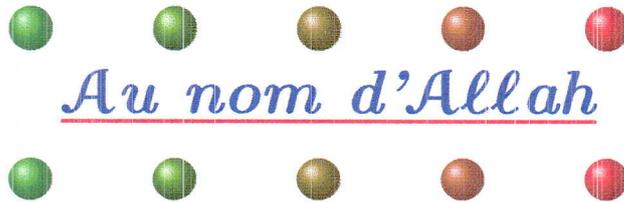
*A Nassima, imen, ahlem, et sehame.*

*Et tout la famille Mellouk et Dakkar.*



*« A toute personne qui m'aime »*

*Mellouki Nedjet*



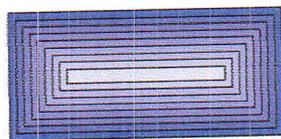
### Remerciements

- Je tiens, plus spécialement, à exprimer toutes mes reconnaissances à mon Encadreur, **Dr HITTA Amara**, pour avoir dirigé ce travail avec abnégation et disponibilité. Ses conseils et son soutien m'ont été d'un grand apport pour l'accomplissement de ce mémoire. Sans cela, ce mémoire n'aurait pas eu lieu.
- Je remercie, également, tous les **membres du Jury** pour avoir accepté d'en faire partie. Leurs critiques et leurs remarques me seront, dans l'avenir, un jalon dans ma carrière professionnelle.
- Je ne peux oublier de remercier **mes parents** pour leurs soutiens. Leurs aides et leurs patiences m'ont été, tout au long de ma vie et de mes études, un réconfort et un encouragement surtout dans les moments opportuns.
- Sans oublier aussi tous **les membres de ma famille** en particulier : mes sœurs, mes frères et tous mes proches.
- Enfin, j'adresse mes remerciements à tous **mes collègues** et tous les étudiants de ma promotion qui m'ont encouragé pour la réalisation de ce travail.

# Table des Matières

<b>1</b>	<b>Introduction sur les systèmes dynamiques</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Exemples de systèmes dynamiques</b>	<b>11</b>
2.1	Exemple 1 : Courant Circulaire . . . . .	12
2.2	Exemple 2 : Ligne de stagnation . . . . .	13
2.3	Exemple 3: Tourbillon creux de Karmen . . . . .	15
2.4	Exemple 4: Flux de chaleur dans un cube . . . . .	16
2.5	Exemple 5: Le problème des 2-corps . . . . .	18
2.6	Champs vectoriels et systèmes dynamiques . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Techniques et conceptions des systèmes dynamiques</b>	<b>25</b>
3.1	Techniques, Conceptions et Exemples . . . . .	25
3.2	La Méthode Numérique De Euler . . . . .	25
3.2.1	Le point de vue Géométrique . . . . .	26
3.2.2	Point de vue Analytique . . . . .	27

3.3	Exemple 1: Ligne de Vortices . . . . .	28
3.4	Champs de Vecteurs Gradients . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Points fixes et stabilité des systèmes dynamiques</b>	<b>33</b>
4.1	Points fixes et Stabilité . . . . .	33
4.2	Exemple 1 . . . . .	34
4.3	Exemple 2 . . . . .	35
4.4	Exemple 3 . . . . .	35
4.5	Points critiques et Stabilité . . . . .	36
4.6	Stabilité selon Lyapunov . . . . .	37
4.7	Cycles limites . . . . .	38





Ce mémoire est composé d'une introduction et de 3 chapitres :

- ① Introduction sur systèmes dynamiques.
- ② Exemples de systèmes dynamiques.
- ③ Technique et conception des systèmes dynamiques.
- ④ Points fixes et stabilité des systèmes dynamiques.



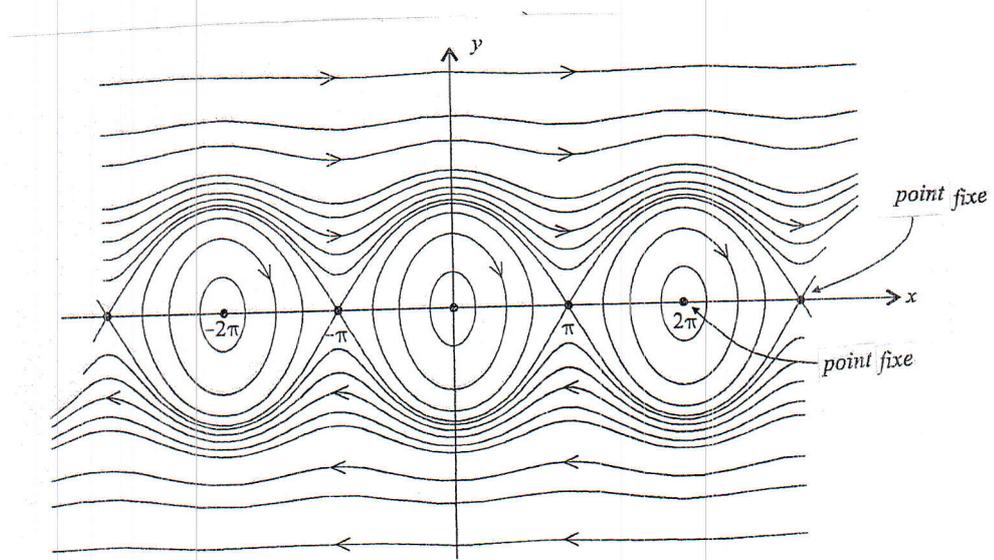


Figure 1 : courbe de système (2.2), page (14).

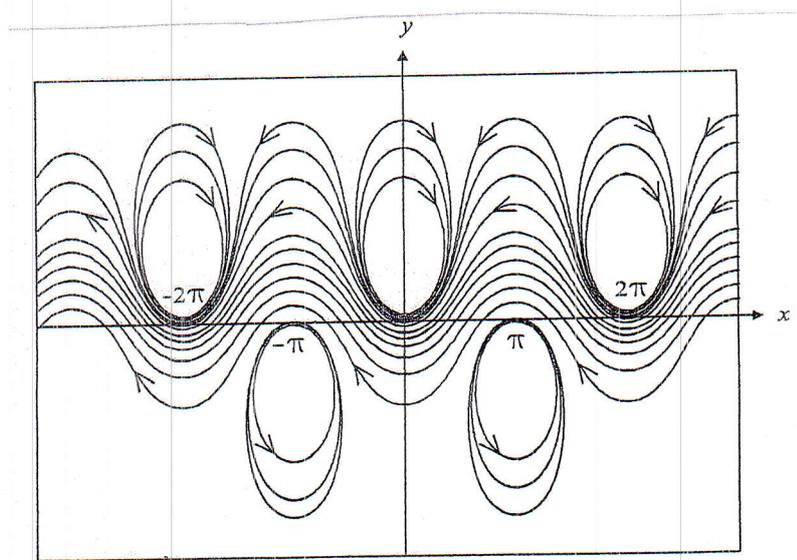


Figure 2 : courbe de système (2.3), page (15).

# Chapitre

# 1

## Introduction sur les systèmes dynamiques

---

“**Élémentaire** ne veut pas dire facile à comprendre. **Élémentaire** veut dire qu'on n'a pas besoin de connaître grand chose à l'avance pour [...] comprendre.”

[Richard Feynman 13 mars 1964](#)

---

En mathématiques, en physique théorique et en ingénierie, un système dynamique est un système classique qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

- ① **Causale**, c'est-à-dire que son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent ;
- ② **Déterministe**, c'est-à-dire qu'à une “condition initiale” donnée à l'instant “présent” va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état “futur” possible.

L'évolution déterministe du système dynamique peut alors se modéliser de deux façons distinctes :

- Une évolution continue dans le temps, représentée par une équation différentielle ordinaire. C'est a priori la plus naturelle physiquement, puisque le paramètre temps nous semble continu.
- Une évolution discontinue dans le temps.

Ce second cas est souvent le plus simple à décrire mathématiquement, même s'il peut sembler a priori moins réaliste physiquement. Cependant, l'étude théorique de ces modèles discrets est fondamentale, car elle permet de mettre en évidence des résultats importants, qui se généralisent souvent aux évolutions dynamiques continues.

L'étude du comportement des équations différentielles est à l'origine des systèmes dynamiques. Les questions qui surgissent sont de plusieurs natures. Elles concernent :

- le comportement limite des solutions
- la stabilité des solutions par rapport aux conditions initiales
- la stabilité des solutions par rapport à des perturbations portant sur l'équation différentielle.

En apparence, le cas particulier des équations différentielles homogènes d'ordre 1 semble être relativement simple. Elles se résument à la donnée d'un champ de vecteurs sur un ouvert d'un espace vectoriel réel, dont on cherche les courbes dites intégrales. L'étude des champs de vecteurs a un impact en géométrie différentielle.

En fait, la théorie des systèmes dynamiques désigne couramment la branche des mathématiques qui s'efforce d'étudier les propriétés d'un système dynamique. Cette recherche active se développe à la frontière de la topologie, de l'analyse,

# Chapitre 2

## Exemples de systèmes dynamiques

Méthématiquement parlant, un système dynamique  $u$  sur  $\mathbb{R}^n$  est une application  $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que

- ①  $u(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
- ②  $u(\cdot, t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
- ③  $u(x, 0) = x$
- ④  $u(x, t + s) = u(x, t) + u(x, s)$  pour tous  $t, s \in \mathbb{R}$ , et tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Les systèmes dynamiques sont engendrés par des systèmes différentiels sur  $\mathbb{R}^n$  formé par  $n$  équations différentielles du première ordre

$$\frac{dx}{dt} = f$$

avec

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

où l'on suppose que les  $f_i$  sont de classe  $\mathcal{C}^n$ . Le système est dit **non-autonôme** lorsque les  $f_i$  dépendent de  $x$  et de  $t$ . Dans le cas où elles ne dépendent que de  $x \in \mathbb{R}^n$ , le système est dit **autonôme**.

Pratiquement, la plupart des exemples présentés ici proviennent, en majorité, de la mécanique des fluides ou la mécanique Newtonienne. Ces deux domaines, présentent à eux seuls, un riche fournisseur de systèmes dynamiques. Donnons-en quelques exemples provenant de la vie courante et qui illustrent le phénomène de systèmes dynamiques.

## 2.1 Exemple 1 : Courant Circulaire

Soit le système d'équations différentielle :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x. \end{cases}$$

Les inconnues  $x = x(t)$  et  $y = y(t)$  dépendent d'un paramètre appelé temps  $t$ , et les positions principales pour le temps dérivé:

$$x' = \frac{\partial x}{\partial t} \text{ et } y' = \frac{\partial y}{\partial t}.$$

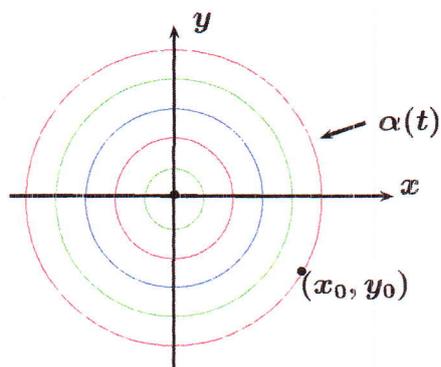
Une solution de ce système consiste en une paire de fonctions  $x, y$  qui satisfait les équations simultanément. La paire de telles fonctions est  $x = \sin t, y = \cos t$  qui vérifie facilement :

$$(\sin t)' = \cos t \text{ et } (\cos t)' = -\sin t.$$

Une telle solution peut être considérée comme un courbe

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (\sin t, \cos t).$$

dans le plan  $\mathbb{R}^2$  :



Courbes solution du système  $x' = y$  et  $y' = -x$  représentant le flux circulaire dans  $\mathbb{R}^2$

En fait, la "solution générale" de ce système est donnée par :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t) \\ y(t) &= x_0 \cos(t) - y_0 \sin(t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

La solution générale s'écrit

$$\alpha(t) = (x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t), x_0 \cos(t) - y_0 \sin(t))$$

où les  $x_0, y_0$  sont des constantes. Il est facile à vérifier que le couple  $(x, y)$  est une solution du système. On vérifie que  $\alpha(0) = (x_0, y_0)$  où  $x_0$  et  $y_0$  sont les coordonnées du point  $\alpha(0)$  en  $t = 0$ . Ainsi,

$$x(t)^2 + y(t)^2 = x_0^2 + y_0^2, \quad \forall t.$$

Donc  $\alpha$  décrit le cercle  $x^2 + y^2 = r^2$  où  $r^2 = x_0^2 + y_0^2$ . Donc, toutes les solutions de ce système sont des courbes paramétrisant des cercles de rayons variables et centré à l'origine.

## 2.2 Exemple 2 : Ligne de stagnation

Cet exemple provient de la mécanique des fluides. Il est représenté par un système non linéaire :

$$\begin{aligned}x' &= \sinh(y) \\y' &= -\sin(x)\end{aligned}\tag{2.2}$$

où  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  sont les inconnues. La solution peut être considérée comme une courbe dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)).$$

D'autre part, au voisinage de 0 on a  $\sinh y \equiv y$  et  $-\sin x \equiv -x$ . Ceci peut-être interprété comme suit : le comportement de la solution de ce système est identique à celui de la solution du système précédent, à savoir que la solution décrit un cercle de centre 0. Mais, en s'éloignant de voisinage de l'origine, le comportement des deux solutions différent. En effet, la quantité  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$  représente la vitesse d'une particule fluide à l'instant  $t$ . Il serait alors utile d'étudier la solution de ce système en des points spécifiques. Ainsi, ce système admet des points fixes, dits **points de stagnation** lorsque la vitesse est nulle c'est à dire  $x'(t) = 0$  et  $y'(t) = 0$  donc aux points  $(x, y)$  tels que

$$\sinh y = 0 \quad \text{et} \quad \sin x = 0.$$

Ce qui donne une infinité de points de la forme  $(k\pi, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . L'interprétation de ce phénomène consiste à dire que le flux du fluide va de gauche à droite avant les points de stagnation et de droite à gauche après les points de stagnation. La vitesse se calcule comme suit

$$v \equiv \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}.$$

Or,  $\sin x$  est borné entre  $-1$  et  $1$  par contre  $\sinh y$  tend vers  $\pm\infty$  lorsque  $y$  tend vers  $\pm\infty$ .

## 2.4 Exemple 4: Flux de chaleur dans un cube

Soit  $b = 2\pi / \sinh(2\sqrt{2}\pi)$ . Cet exemple traite d'un système à trois équations différentielles :

$$\begin{aligned}x' &= b \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \sinh(2\sqrt{2}\pi z) \\y' &= b \cos(2\pi x) \sin(2\pi y) \sinh(2\sqrt{2}\pi z) \\z' &= -1 - \sqrt{2}b \cos(2\pi x) \cos(2\pi y) \cosh(2\sqrt{2}\pi z).\end{aligned}\quad (2.4)$$

Il décrit le courant de chaleur dans le cube unité  $U = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ . Bien que le système est défini sur  $\mathbb{R}^3$ , on cherche seulement les courbes solution  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  dans  $U$ . Visualiser une courbe en trois dimensions est difficile, surtout si la courbe est compliquée en visualiser plusieurs et simultanément relèvera de l'impossible.

Le problème, ainsi décrit, provient d'une certaine distribution de températures  $S(x, y, z)$  dans un cube au point  $(x, y, z)$ . Le champ vectoriel du flux de la chaleur est :  $-\nabla S$  et  $-\nabla S(x, y, z)$  représente la direction de la plus grande diminution de  $S$  au point  $(x, y, z)$ . En théorie, les flux de la chaleur dans cette direction et en chaque point sont les courbe  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  qui satisfasse

$$\alpha'(t) = -\nabla S(\alpha(t)).$$

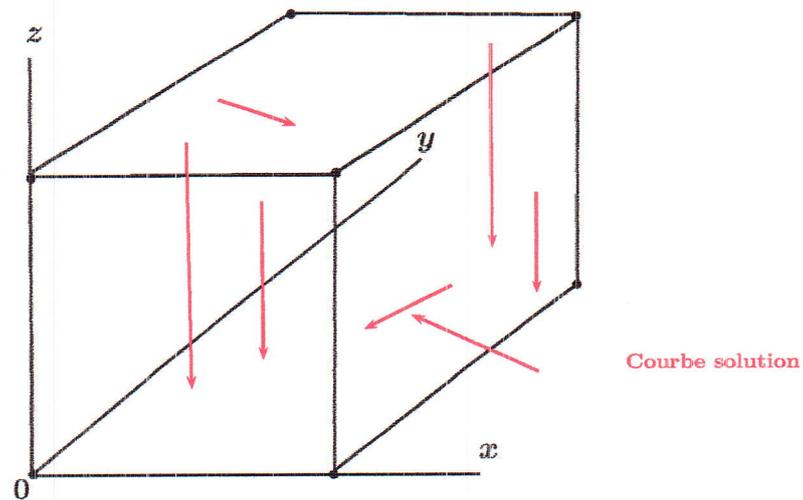
Les termes de cette équation forment le système :

$$\begin{aligned}x' &= -S_x(x, y, z) \\y' &= -S_y(x, y, z) \\z' &= -S_z(x, y, z)\end{aligned}\quad (2.5)$$

On obtient le système précédent en considérant :

$$S(x, y, z) = z + (\cos(2\pi x) \cos(2\pi y) \sinh(2\sqrt{2}\pi x)) / \sinh(2\sqrt{2}\pi) \quad (2.6)$$

qui est la solution de l'EDP  $S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} = 0$ . Les courbes solutions sont représentées dans la figure suivante :



Cette solution doit vérifier certaines conditions aux limites, à savoir :

- ① Les côtés verticaux sont isolés
- ② Le bas est tenu à 0 degré
- ③ Le sommet est tenu à une température qui est  $S(x, y, 1) = 1 + \cos(2\pi x) \cos(2\pi y)$  degrés au point  $(x, y, 1)$ .

Notons que la température varie de 0 à 2 degrés du bas vers le sommet. En utilisant le principe qui dit que

La température va des endroits chauds vers ceux qui sont froids,

nous escomptant que le flux de la température va ainsi du sommet du cube et atteint le fond comme désigné dans la figure. En plus Ce système n'admet pas de points fixes.

## 2.5 Exemple 5: Le problème des 2-corps

Un des plus anciens exemples d'un système dynamique est le **système des deux corps**. Deux corps de masses  $m_1, m_2$ , s'attirent mutuellement l'un l'autre avec une force d'attraction le long de la ligne les joignant et de magnitude réciproquement le carré de la distance. Suivant la deuxième loi de Newton dynamique [accélération  $\times$  masse=force], le modèle pour ce système est représenté par le système de deux équations de second ordre suivant :

$$\begin{aligned} m_1 r_1'' &= Gm_1 m_2 (r_2 - r_1) / r_{12}^3 \\ m_2 r_2'' &= Gm_1 m_2 (r_1 - r_2) / r_{12}^3 \end{aligned}$$

où

$$r_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)) \quad \text{et} \quad r_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$$

représente la position des deux corps. Par commodité, on adopte la notation

$$r_{12}(t) \equiv | r_1(t) - r_2(t) |$$

pour la distance entre les corps à l'instant  $t$ . Ce qui nous fournit un système à 12 équations de première ordre, à savoir :

$$\begin{aligned} x_1' &= u_1 \\ y_1' &= v_1 \\ z_1' &= w_1 \\ x_2' &= u_2 \\ y_2' &= v_2 \\ z_2' &= w_2 \\ u_1' &= Gm_2(x_2 - x_1) / r_{12}^3 \\ v_1' &= Gm_2(y_2 - y_1) / r_{12}^3 \\ w_1' &= Gm_2(z_2 - z_1) / r_{12}^3 \\ u_2' &= Gm_1(x_1 - x_2) / r_{12}^3 \\ v_2' &= Gm_1(y_1 - y_2) / r_{12}^3 \\ w_2' &= Gm_1(z_1 - z_2) / r_{12}^3 \end{aligned}$$

En plus des six fonctions inconnues  $x_i, y_i, z_i, i = 1, 2$ , le système précité met en exergue, implique les six fonctions  $u_i, v_i, w_i, i = 1, 2$ , qui représente les composantes des vecteurs vitesse pour les deux corps:

$$V_i \equiv (u_i, v_i, w_i) = r_i'.$$

La solution est alors une courbe dans  $\mathbb{R}^{12} \cong \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$  de la forme

$$\alpha(t) = (r_1(t), r_2(t), V_1(t), V_2(t)),$$

où  $t$  est dans un certain intervalle  $I$ . Plus précisément, la courbe solution est définie dans le 12-sous-variété  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^{12}$  où :

$$\mathcal{O} \equiv U \times \mathbb{R}^6,$$

avec

$$U \equiv \{(r_1, r_2) \mid r_1 \neq r_2\}.$$

L'espace  $\mathcal{O}$  est dit **espace des phases** du système dynamique.

## 2.6 Champs vectoriels et systèmes dynamiques

Nous aborderons la notion de champ vectoriel sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Ceci nous permettra de considérer le côté géométrique des systèmes d'équations différentielles de première ordre.

**Définition 2.6.1** Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Un champ vectoriel sur  $\mathcal{O}$  est une application

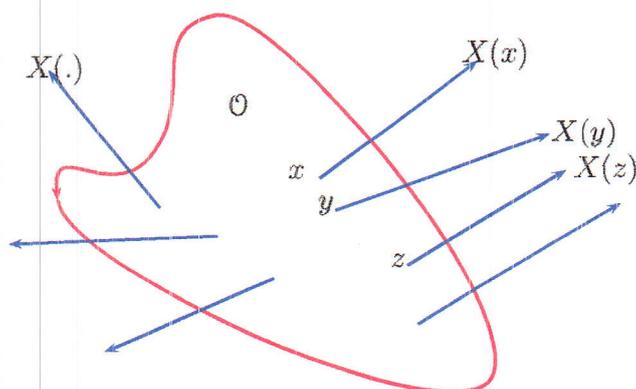
$$X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

définie par

$$X(x) = (X^1(x), \dots, X^n(x)) \quad x \in \mathcal{O}$$

et  $X^i : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$  sont les composantes de  $X$ .

Les champs vectoriels ont une interprétation géométrique importante : Pour un point  $x \in \mathcal{O}$ , on interprète  $X(x)$  comme un vecteur attaché au point  $x$ . Ainsi, au lieu de dessiner le vecteur  $X(x)$  avec comme point initial l'origine, on dessine ce point en partant de  $x$ . En dessinant ces vecteurs en des points  $x, y, z, \dots$  de  $\mathcal{O}$ , on obtient une figure géométrique de champs de vecteurs. La figure géométrique ainsi obtenue explique en plus l'origine du mot champ vectoriel voir figure ci-dessous :



**Définition 2.6.2** On aborde, maintenant, la notion de solution d'un système autonome :

- ① Une **courbe** dans  $\mathbb{R}^n$  est une application  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Si  $\alpha$  est différentiable, la courbe est dite **différentiable**.
- ② Si  $X$  est un **champ de vecteurs** sur  $\mathcal{O}$ , alors la solution du système

$$x' = X(x)$$

est une courbe différentiable  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  vérifiant les propriétés suivantes :

- a)  $\alpha(t) \in \mathcal{O}$ , pour tous  $t \in I$ .

$$\text{b) } \alpha'(t) = X(\alpha(t)), \text{ pour tous } t \in I.$$

Une telle courbe est dit **courbe solution du système** où **courbe intégrale du champ vectoriel  $X$**  :

Interprétation géométrique :

- La propriété a) dit que la courbe  $\alpha$  reste dans  $\mathcal{O}$  pour que  $X(x)$  soit définie en chaque point  $x \in \mathcal{O}$ .
- La propriété b) dit que  $\alpha$  vérifie le système dont les composantes sont

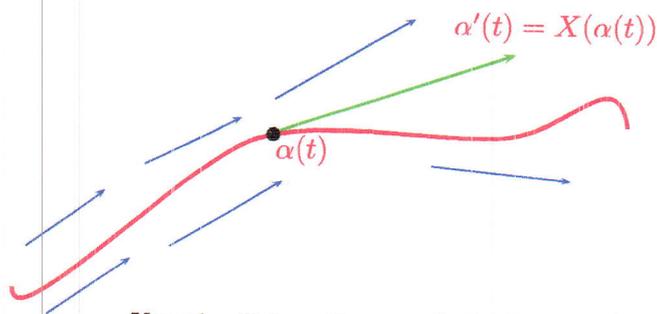
$$\begin{aligned}\alpha'_1(t) &= X^1(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) \\ \alpha'_2(t) &= X^2(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) \\ &\vdots \\ \alpha'_n(t) &= X^n(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))\end{aligned}$$

pour tout  $t \in I$ .

En fait,

$$\alpha'(t) = X(\alpha(t)),$$

signifie que  $\alpha$  est une courbe dont le vecteur tangent à la courbe au point  $\alpha(t)$  coïncide avec le vecteur  $X(\alpha(t))$  au même point (la figure ci-dessous).



Vue géométrique d'une courbe intégrale  $\alpha$  de  $X$

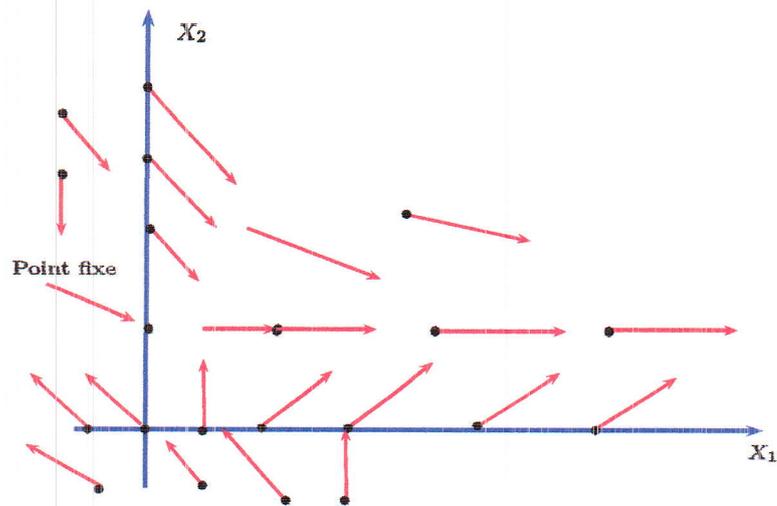
⇒ **Exemple 2.6.1** Le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x_1' = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ x_2' = -\frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

est associé au champ de vecteurs  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donné par

$$X(x_1, x_2) = \left( \frac{1}{2}(x_1 + x_2), -\frac{1}{2}x_2 \right).$$

Il est très facile de dessiner le vecteur  $X(x)$  en différents points  $x$  de  $\mathbb{R}^2$ . Le dessin de ce champ de vecteurs est visible dans la figure suivante et donne une idée une certaine idée de ce que peut être  $X$ .



Dessin de  $X(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), -\frac{1}{2}x_2\right)$

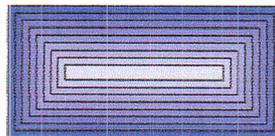
**Analytiquement** : En résolvant la deuxième équation, on obtient  $x_2 = b_2 e^{-t/2}$  ou  $b_2$  est une constante. En remplaçant dans la première équation, on obtient  $x_1 = b_1 e^{t/2} - \frac{1}{2} b_2 e^{-t/2}$ . Donc, la courbe solution (ou intégrale) est

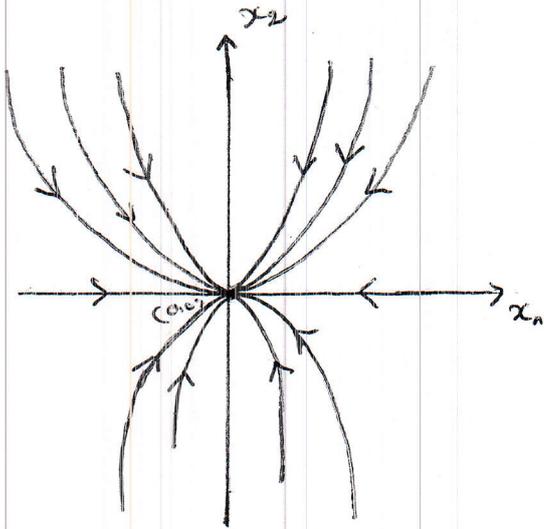
$$\alpha(t) = \left( b_1 e^{t/2} - \frac{1}{2} b_2 e^{-t/2}, b_2 e^{-t/2} \right). \blacksquare$$

Enfin, les systèmes dynamiques non-autonomes sont représentés par l'équation :

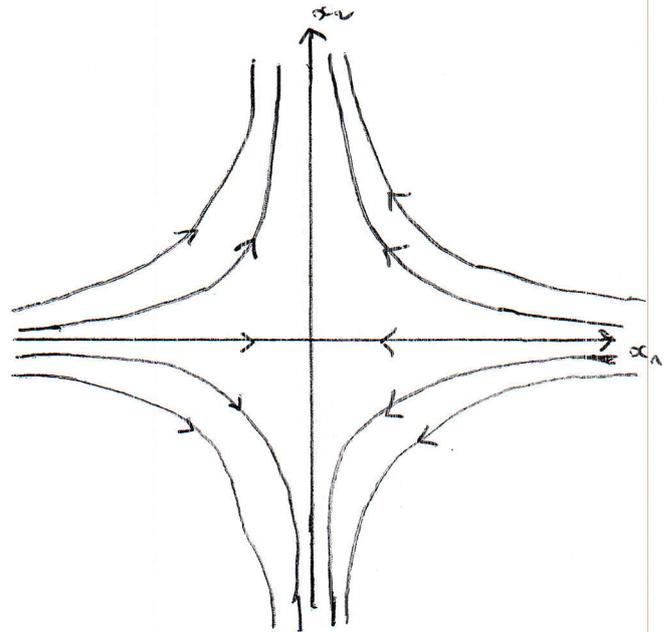
$$x' = X(t, x).$$

C'est à dire lorsque le champ vectoriel  $X$  dépend du temps  $t$ .

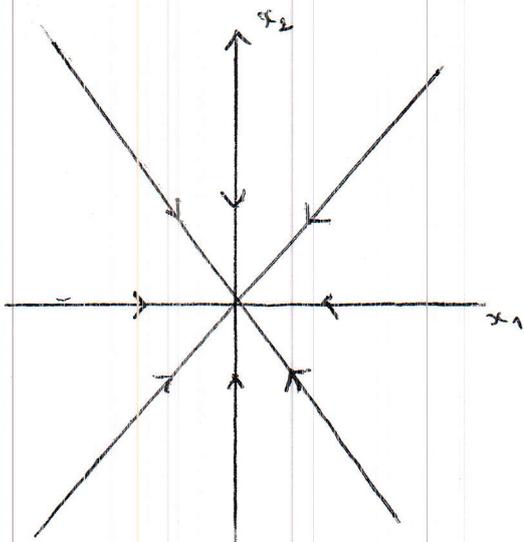




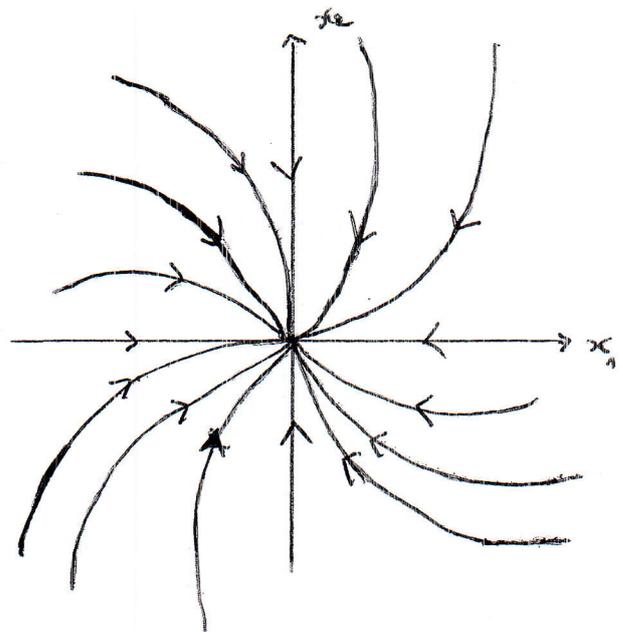
Nœud impropre asymp-stable



Selle instable



Nœud propre asymp-stable



Nœud exceptionnel asymp-stable

# Chapitre 3

## Techniques et conceptions des systèmes dynamiques

### 3.1 Techniques, Conceptions et Exemples

Dans ce chapitre nous traiterons plusieurs exemples de systèmes dynamiques en détail. Ça sera une occasion d'introduire d'autres concepts tels que **les champs de vecteur gradients**. On étudiera brièvement la méthode d'Euler pour résoudre numériquement les systèmes dynamiques. La meilleure façon, est d'utiliser le logiciel Maple qui est un langage adéquat pour obtenir plus de précision sur la nature de la solution.

### 3.2 La Méthode Numérique De Euler

Pour simplicité, nous limiterons notre discussion aux systèmes autonomes

$$x' = X(x),$$

Avec  $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  comme champ du vecteurs sur  $\mathcal{O}$ .

nous pouvons traiter de plusieurs manière la méthode numérique d'Euler en commençant par la méthode géométrique.

### 3.2.1 Le point de vue Géométrique

Supposons que nous voulons déterminer une approximation de la courbe intégrale  $\gamma$  qui commence au point  $c \in \mathcal{O}$  en  $t = 0$ , c-à-d, la courbe  $\gamma$  qui vérifie

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= X(\gamma(t)) \\ \gamma(0) &= c\end{aligned}\tag{3.1}$$

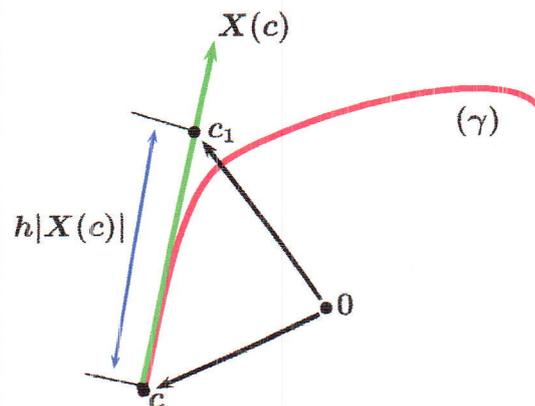
En dessinant le vecteur  $X(c)$  au point  $c$  nous obtenons la direction de la courbe intégrale qui ira loin de  $c$ , puisque

$$X(c) = X(\gamma(0)) = \gamma'(0)$$

est la tangente de  $\gamma$  en  $c = \gamma(0)$ .

On construit un approximation polygonale comme suit :

Fixons  $h$  un nombre positive. faisons bouger le point  $c$  le long de la tangente d'une distance égale  $h|X(c)|$  (voir figure ci-dessous),



pour arriver au point

$$c_1 \equiv c + hX(c).$$

Si le vecteur tangent  $X(c)$  n'est pas de magnitude trop grande, le point  $c_1$  sera presque sur la courbe intégrale  $\gamma$ . En joignant  $c$  et  $c_1$  nous obtenons un premier côté de l'approximation polygonale de  $\gamma$ . En partant de  $c_1$  long de la ligne tangente avec une distance de  $h|X(c_1)|$ , on arrive au point

$$c_2 \equiv c_1 + hX(c_1).$$

En faisant la même méthode qu'auparavant entre  $c_1$  à  $c_2$ , on obtient le deuxième côté de notre approximation polygonale de  $\gamma$ . En répétant le processus  $N$  fois, nous obtenons une approximation polygonale avec des sommets  $c_0 = c, c_1, c_2, \dots, c_N$  qui sont calculés successivement par la

**La Méthode d'Euler :**

$$c_{j+1} = c_j + hX(c_j),$$

pour  $j = 0, 1, \dots, N - 1$ .

L'approximation polygonale de  $\gamma$  se fait dans l'intervalle  $[0, T]$  où  $T = Nh$ ,  $h$  est dit **pas temporel**,  $N$  est dit le **nombre de pas temporel**. La longueur entre  $c_j$  à  $c_{j+1}$  est

$$|c_{j+1} - c_j| = h|X(c_j)|.$$

Lorsque le pas  $h$  est suffisamment grand, la méthode d'Euler donne une approximation non concise.

### 3.2.2 Point de vue Analytique

L'exactitude de la méthode d'Euler est basée sur le développement de la série de Taylor de  $\gamma$  :

$$\gamma(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^{(k)}(t)}{k!} h^k$$

$$= \gamma(t) + h\gamma'(t) + \frac{h^2}{2}\gamma''(t) + \dots$$

En prenant juste les deux premiers termes la série Taylor et le fait que  $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \gamma(t+h) &\approx \gamma(t) + h\gamma'(t) \\ &= \gamma(t) + hX(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Ainsi, en commençant à l'instant  $t = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= c \\ \gamma(h) &\approx \gamma(0) + hX(\gamma(0)) \\ &= c + hX(c) = c_1 \\ \gamma(2h) &\approx \gamma(h) + hX(\gamma(h)) \\ &\approx c_1 + hX(c_1) = c_2. \end{aligned}$$

Ici,  $c_1$  évoque une approximation pendant que  $c_2$  évoque deux approximations. De la même façon, les approximations à  $\gamma(3h) \dots \gamma(Nh)$  évoque l'approximation de la série de Taylor et les approximations provenant des pas antérieurs. Vous pouvez imaginer comment sont les erreurs accumulées sur un grand intervalle de temps. Ceci nous amène à dire combien est cruciale le contrôle du pas  $h$ .

### 3.3 Exemple 1: Ligne de Vortices

Le système de Edo-s est

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\sinh(y)}{M(x,y)} \\ y' &= \frac{-\sin(x)}{M(x,y)}, \end{aligned}$$

où

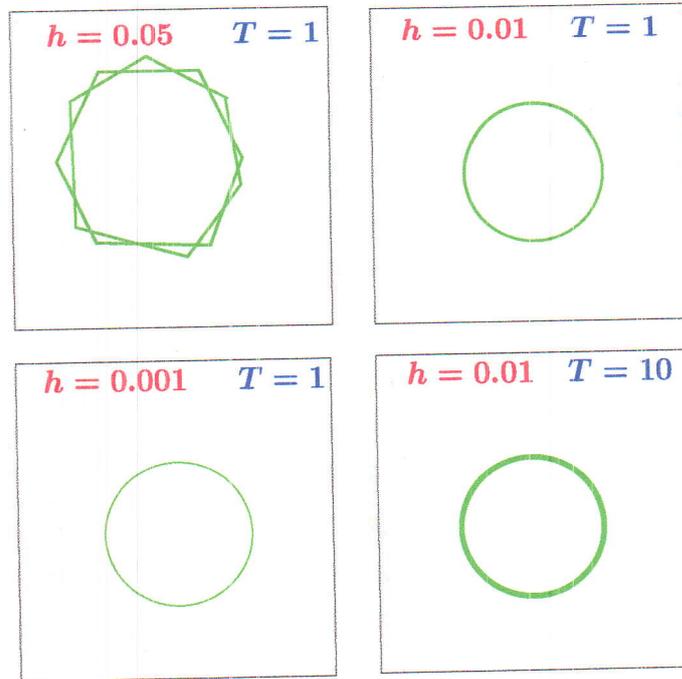
$$M(x,y) = \cosh(y) - \cos(x).$$

Le champ vectoriel pour le système est

$$X(x, y) = \left( \frac{\sinh(y)}{M(x, y)}, \frac{-\sin(x)}{M(x, y)} \right)$$

Et cela devient infini si  $M(x, y) = 0$  (c-à-d, aux centres du tourbillon). Considérons le dessin de la courbe intégrale près du centre du tourbillon  $(0, 0)$  : Si nous choisissons un point  $c$  près de  $(0, 0)$ , par exemple  $c = (0, 0.1)$ , alors la courbe intégrale  $\gamma$  qui commence au zéro-temps,  $\gamma(0) = c$ , est un fermé circulaire comme une courbe. Comme la vitesse du courant le long d'une courbe intégrale est grande près du centre du tourbillon, les approximations numériques de  $\gamma$  seront pauvres à moins que le longueur du saut soit petite. Comme le montre les cas suivant la valeur de  $h$  :

- ① Si  $h = 0,05$  où  $t \in [0, 1]$ . Alors  $N = T/h = 1/0.05 = 20$  sous-intervalles de  $[0, 1]$ . L'approximation numérique, qui est un polygone avec 20 côtés, serait plus intéressante. Cependant dû à la grande vitesse, l'actuelle courbe intégrale  $\gamma$  tourne autour du center du tourbillon 3 fois en une seconde. Les 20 étapes ne sont pas assez nombreuses pour donner une bonne approximation.
- ② Si  $h = 0,01$  et  $t \in [0, 1]$ . Alors  $N = T/h = 1/0.01 = 100$  sous-intervalles de  $[0, 1]$ , l'approximation serait un cercle. Ceci reste inexacte
- ③ Si  $h = 0,001$  l'approximation serait meilleure.
- ④ Si  $t \in [0, 10]$  et  $h = 0.01$  alors  $T = 10$ , la courbe  $\gamma$  tourne plusieurs fois autour du centre du tourbillon (voir figure). Bien que l'approximation ait la bonne forme, son épaisseur indique l'inexactitude de l'approximation.



### 3.4 Champs de Vecteurs Gradients

Beaucoup de systèmes  $x' = X(x)$  proviennent de champ de vecteur  $X$  qui sont des gradients de champs scalaire  $X = \nabla F$ . Tous les systèmes du courant de la chaleur et quelques systèmes de courants fluides sont de ce type. Ces systèmes sont spéciaux et l'information supplémentaire que nous obtenons sur le système que nous obtenons de  $F$  est souvent très utile.

**Définition 3.4.1** Un champ du vecteur  $X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  sur un ensemble ouvert  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  est appelé un **champ du vecteur gradient** s'il y a une fonction réelle  $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ , tel que

$$\nabla F(x) = X(x),$$

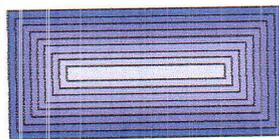
intégrale de  $X$  a une intersection avec chaque ensemble de niveau de  $F$  d'une manière orthogonale. En dimensions  $n = 2$  et  $n = 3$  cette information utile est souvent très utile comme le montre le prochain exemple.

☞ **Exemple 3.4.1 (Flux de chaleur dans une plaque carrée)** Tous les flux de chaleur proviennent des champs de vecteur gradient, car les lignes des flux sont les courbes intégrales du champs vectoriel du flux de la chaleur  $X$ . Par définition,  $X = -\nabla F$  où  $F$  est la fonction température. Comme exemple, considérons

$$F(x, y) = b \cos(2\pi x) \sinh(2\pi y) \quad \text{où } b := 1/\sinh(2\pi).$$

La distribution de température  $F$  provient des conditions aux bords où le bas du carré est laissé à  $0^\circ$ , le sommet est à une température variant suivant  $x$  et  $F(x, 1) \cos(2\pi x)$  et les côtés sont isolés (*i.e.* les champs de vecteurs de température  $X(0, y)$  et  $X(1, y)$  sont tangents à ces côtés, respectivement). Ainsi

$$X(x, y) = (2\pi b \sin(2\pi x)) \sinh(2\pi y), -2\pi b \cos(2\pi x) \cosh(2\pi y).$$



# Chapitre 4

## Points fixes et stabilité des systèmes dynamiques

### 4.1 Points fixes et Stabilité

Un nombre important de systèmes autonomes admettent des solutions très spéciales, appelés **points fixes**, lesquels sont importants pas parce qu'ils sont très simples, mais aussi parce qu'ils déterminent souvent le comportement des courbes intégrales gravitent autour d'eux.

**Définition 4.1.1 (Points Fixes)** *Un point  $c \in \mathcal{O}$  est appelé un point fixe du champ du vecteur*

$$X : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ si } X(c) = 0.$$

*Tout point fixe engendre une courbe intégrale très simple (aussi appelé un point fixe) du système autonome :*

$$x' = X(x).$$

*À savoir, définissons  $\alpha(t) = c$ , pour chaque  $t \in \mathbb{R}$ . Donc*

$$\alpha'(t) = 0 \text{ et } X(\alpha(t)) = X(c) = 0 \text{ pour chaque } t,$$

Il est clair que  $\alpha$  est une courbe intégrale. Les points fixes sont aussi appelés points d'équilibre.

Les systèmes dynamique n'ont pas tous des points fixes, mais leur existence donne un aperçu des autres solutions du système.

## 4.2 Exemple 1

Considérons le champ de vecteurs suivant

$$X(x, y) = \left( a + \frac{b(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2bxy}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

Les points fixes de  $X$  sont les solutions  $(x, y)$  de l'équation  $X(x, y) = 0$ , c-à-d, du système algébrique d'équations

$$\begin{aligned} a + \frac{b(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} &= 0 \\ \frac{-2bxy}{(x^2 + y^2)^2} &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

La deuxième équation donne  $x = 0$  ou  $y = 0$ . Si  $x = 0$  alors  $a + b/y^2 = 0$  qui ne donne aucune solution réelle. En revanche si  $y = 0$ , alors

$$x = \pm \sqrt{b/a} = \pm r.$$

Donc, il y a deux points fixes  $(\pm r, 0)$ , lesquels dans ce cas sont appelés points de la stagnation. Ces des points fixes instables.

### 4.3 Exemple 2

Un intéressant système abstrait ne représentant aucune situation physique particulière est donné par

$$\begin{aligned}x' &= (x^2 - 1)y \\ y' &= (x + 2)(y - 1)(y + 2).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Les points fixes de ce système sont les solutions vérifiant

$$\begin{aligned}(x^2 - 1)y &= 0 \\ (x + 2)(y - 1)(y + 2) &= 0.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Dans la première équation, nous obtenons  $x = \pm 1$  ou  $y = 0$  :

- ① si  $x = \pm 1$  nous obtenons quatre points fixes  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(1, -2)$  et  $(-1, -2)$ .
- ② Si  $y = 0$  cela donne le point fixe  $(-2, 0)$ . Donc, ce système admet cinq points fixes.

### 4.4 Exemple 3

Cet exemple illustre le besoin d'utiliser les méthodes numériques pour trouver les points fixes. Le système est

$$\begin{cases}x' = x^5 y^3 + x^2 + y^2 - 4 \\ y' = x^3 y + x^2 - y^2 + 1\end{cases}$$

Le système correspondant d'équations algébriques pour les points fixes de ce système est

$$\begin{cases}x^5 y^3 + x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ x^3 y + x^2 - y^2 + 1 = 0.\end{cases}$$

Ce système ne peut-être résolu algébriquement. Néanmoins, Maple peut nous aidé à trouver numériquement cette solution. En fait, il nous donne la seule solution qui est

$$(x, y) = (-0,7817431847, -1,530451384).$$

## 4.5 Points critiques et Stabilité

Soit donné le système linéaire à coefficients constants dans le plan

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \quad \text{et} \quad \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y$$

c'est-à-dire

$$\dot{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_A X$$

où  $\det A \neq 0$ . L'origine  $(0, 0)$  est le seul point critique pour ce système. Pour étudier le type du point critique  $(0, 0)$ , il faut chercher les valeurs propres de la matrice  $A$ . Les cas suivants peuvent se présenter :

① Valeurs propres de  $A$  réelles et distinctes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  :

- Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de signe strictement positif, le point  $(0, 0)$  est dit **noeud impropre instable**.
- Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de signe strictement négatif, le point  $(0, 0)$  est dit **noeud impropre asymptotiquement stable**.
- Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de signes différents, le point  $(0, 0)$  est dit **une selle instable**.

① Valeur propre réelles doubles de  $A$   $\lambda_1 = \lambda_2$  :

- Si  $A$  est diagonalisable : le point  $(0, 0)$  est dit **noeud propre**. Il est instable si  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$  et asymptotiquement stable si  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ .

- Si  $A$  est non diagonalisable : le point  $(0, 0)$  est dit **noeud exceptionnel**. Il est instable si  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$  et asymptôtiquement stable si  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ .

Lorsque les valeurs propres sont complexes et si  $\lambda_1 = p + iq$  et  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ , les cas suivants se présentent :

- ① Si  $p > 0$  et  $q \neq 0$ , le point  $(0, 0)$  est dit **foyer instable**.
- ② Si  $p < 0$  et  $q \neq 0$ , le point  $(0, 0)$  est dit **foyer asymptôtiquement stable**.
- ③ Si  $p = 0$  et  $q \neq 0$ , le point  $(0, 0)$  est dit **centre stable**.

Prière de consulter les schémas des divers points sur les pages ci-joints.

⇒ **Exemple 4.5.1** La matrice du système différentiel suivant

$$\dot{x} = y \quad \text{et} \quad \dot{y} = -x$$

admet pour valeur  $\lambda_1 = i$  et  $\lambda_2 = -i$ . Donc le point  $(0, 0)$  est un centre stable. Par contre,

La matrice du système différentiel suivant

$$\dot{x} = x - y \quad \text{et} \quad \dot{y} = -xy$$

admet pour valeur  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 1$ . Donc le point  $(0, 0)$  est un point selle instable. ■

## 4.6 Stabilité selon Lyapunov

Considérons le système différentiel  $(S)$  non linéaire sur  $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f = (f_1, \dots, f_n).$$

Soit  $V$  une fonction dérivable de classe  $C^n$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot f_i(x_1, \dots, x_n) = \langle \text{grad } V(x), f(x) \rangle .$$

**Théorème 4.6.1 (Théorème de Lyapunov sur la stabilité)** Si pour le système  $(S)$ , il existe une fonction  $V(x_1, \dots, x_n)$  telle que

$$\frac{dV}{dt} = \langle \text{grad } V(x), f(x) \rangle$$

soit de signe constant opposé à celui de  $V$  ou identiquement nul, alors le point critique  $(0, \dots, 0)$  est stable au sens de Lyapunov.

**Exemple 4.6.1** Considérons le système différentiel non linéaire sur la plan suivant

$$\dot{x} = xy^4 \quad \text{et} \quad \dot{y} = yx^4$$

Le point critique est  $(0, 0)$  et

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

On ne peut rien dire dans ce cas. Soit  $V(x, y) = x^4 + y^4$  une fonction définie positive. Alors

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} = 0.$$

D'après le théorème précédent, le point  $(0, 0)$  est stable au sens de Lyapunov. ■

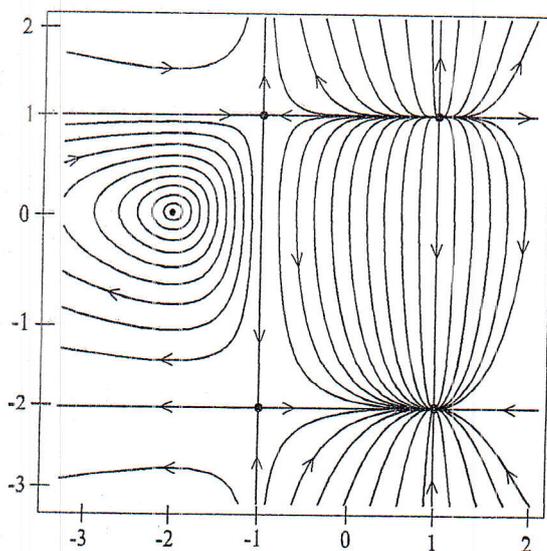


Figure 5 : portrait de phase du système (4.2), page (35).

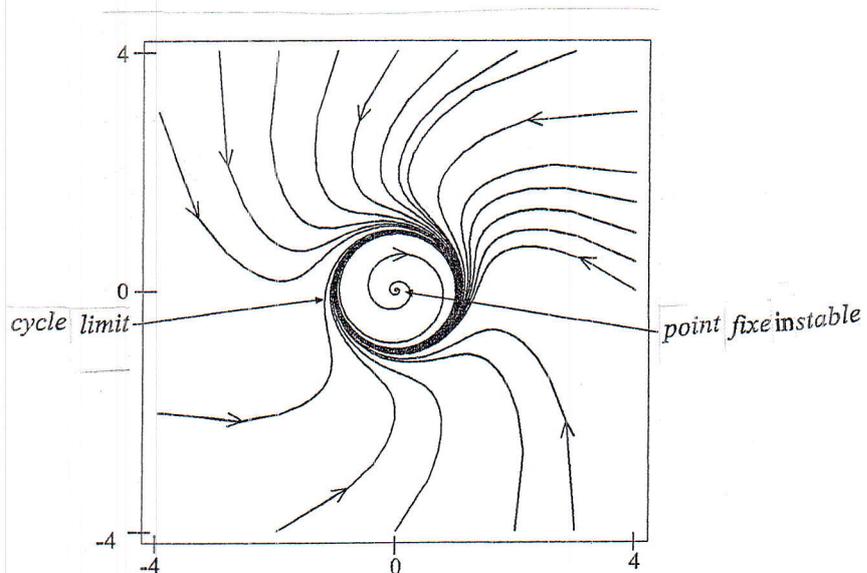


Figure 6 : courbe solution du système (exemple 4.7.1), page (39).

## Bibliography

- [1] S. BADI. *Cours Master sur les système Dynamiques*. Université Guelma, Algérie 2014.
- [2] D. BETOUNES. *Partial Differential Equations for Computational Science with Maple and Vector Analysis*. Science with Maple and Vector Analysis, Springer-Verlag, New York, 1998.  
D. BENTOUNES. *Differential Equations: Theory and Applications*. Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2010.
- [3] N. MARKLEY. *Principles of Differential Equations*. John Wiley & Sons, New Jersey, 2004.
- [4] D. R. MERKIN. *Introduction to the Theory of Stability*. Springer- Verlag, New York, 1997.
- [5] S. KUKSIN, V. LAZUTKIN, AND J. P"OSCHEL. *Principles of Differential Equations*. Seminar on Dynamical Systems, Birkh"auser, Boston, 1994.
- [6] Y. A. KUZNETSNOV. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [7] P. A. RAVIART et J. M. THOMAS. *Introduction à l'analyse Num. des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris 1982.

- [8] Christian ROLLAND. *LaTeX par la pratique*. Editions O'REILLY, Paris 1999.
- [9] J.-L. LIONS et E. MAGENES. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. T.1, Dunod, Paris 1968.
- [10] W. WOLFGANG Walter. *Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1998.

