République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Par :

M^{elle}. BOUMAZA Hana

Intitulé

Théorie de Darboux et non existence des cycles limites

Dirigé par : Dr. BADI Sabrina

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. H. HAMLAOUI	Prof	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. S.BADI	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. N. SELLAMI	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2014

Remerciements

Au nom d'Allah, le tout miséricordieux,

le très miséricordieux

La reconnaissance est la mémoire du cœur

LE GRAND MERCI POUR ALLAH

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Je remercier du fond du cœur ¤ **mes parents** ¤ pour leur contribution leur soutien et leur patience durant toutes mes études et qui m'ont toujours aidé et encouragé aux moments opportuns.

Je tiens à remercier sincèrement **Madame : Badi Sabrina** qui en tan que Directeur de mémoire, s'est toujours montrée à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

J'adresse également mes remerciements, à tous mes enseignants, qui m'ont donnés les bases de la science. Je souhaite aussi remercier l'ensemble du laboratoire (LMAM).

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à mes jumeaux

¤ **Safa** ¤, ¤ **Marwa** ¤ et mon frère ¤ **Fouad** ¤, à tous mes proches, amis

et collègues qui m'ont toujours soutenue et encouragé.

☞Résumé

La première partie de ce mémoire est consacrée à l'étude de la théorie de Darboux, cette méthode qui permet de trouver une intégrale première pour des systèmes différentiels polynômiaux planaire de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases}$$

Nous illustrons ceci à travers différents exemples.
Dans le seconde partie de ce mémoire, nous abordons la notion de cycle limite pour un système différentiel non linéaire. Nous nous intéressons à un critère de non-existence des cycles limites qui est le facteur intégrant inverse.

☞Abstract

The first part of this memory is devoted to study the theory of Darboux, this method allows to find a first integral for planar polynomial differential systems of the form :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y). \end{cases}$$

We illustrate this, through various examples.

In the second part of this memory, we discuss the notion cycle limit for a nonlinear differential system. We are interested to a criterion of non-existence of limit cycles that is the inverse integrating factor.

Introduction

En 1878, Darboux a montré que l'on peut construire un facteur intégrant (ou une intégrale première) d'un système différentiel polynomial planaire qui possède un nombre suffisant de courbes algébriques invariantes.

En particulier, il a prouvé que si un système polynômial de degré m a au moins $m(m+1)/2$ courbes algébriques invariantes, alors il a une intégrale première. La meilleure amélioration des résultats de Darboux est grâce à Jouanolou en 1979, Prelle-Singer en 1983 et Singer en 1992. Jouanolou a montré que si le nombre de courbes algébriques invariantes d'un système polynomial de degré m est au moins $2+[m(m+1)/2]$, alors le système a une intégrale première rationnelle, et par conséquent toutes ses solutions sont des courbes algébriques invariantes.

Ce mémoire comporte trois chapitres. Dans le premier chapitre, on rappelle certaines notions préliminaires sur les systèmes différentiels planaires. Le second chapitre est consacré à la recherche des intégrales premières pour des champs de vecteurs polynômiaux. Pour cela nous introduisons les notions des courbes algébriques invariantes et facteurs intégrants et nous appliquons cette méthode sur différents systèmes. Dans le dernier chapitre on s'intéresse à la non-existence des cycles limites pour des systèmes différentiels polynômiaux planaires. nous introduisons la notion de facteur intégrant inverse.

CHAPITRE 1

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Ce chapitre comporte un rappel succinct sur la théorie qualitative des systèmes différentielles.

1.1 Système dynamique

Définition 1.1.1.

Un système dynamique sur E est une application continuement différentiable

$$\Phi : \mathbb{R} \times E \to E$$

où E est un sous ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^n$, tel que $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$ satisfait

1. $\Phi_0(x) = x \qquad \forall x \in E$
2. $\Phi_t \circ \Phi_s(x) = \Phi_{t+s}(x) \qquad \forall s, t \in \mathbb{R}$ et $x \in E$.

Remarque 1.1.2. *Un système dynamique sur E est linéaire si*

$$\Phi(t, \alpha x + \beta y) = \alpha\Phi(t, x) + \beta\Phi(t, y) \qquad \forall \alpha, \beta, t \in \mathbb{R} \text{ et } x, y \in E.$$

Exemple 1.1.3.

Soit l'application

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

définie par

$$\Phi(t,x) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} x$$

on a

1.
$$\Phi(0,x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = x$$

2.
$$\begin{aligned} \Phi(t,x) \circ \Phi(s,x) &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2s} & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} x \\ &= \begin{pmatrix} e^{2s}e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-s}e^{-t} \end{pmatrix} x \\ &= \begin{pmatrix} e^{2(s+t)} & 0 \\ 0 & e^{-(s+t)} \end{pmatrix} x \\ &= \Phi_{s+t}(x). \end{aligned}$$

L'application Φ est un système dynamique dans $\mathbb{R}^2$, et pour $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $\Phi(t, x_0)$ est la solution du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.2 Système quadratique

Un système quadratique dans $\mathbb{R}^2$ est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} &= a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 \\ \dot{y} &= b_{0,0} + b_{1,0}x + b_{0,1}y + b_{2,0}x^2 + b_{1,1}xy + b_{0,2}y^2 \end{cases}$$

Un système quadratique dans $\mathbb{R}^3$ est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{0,0,0} + a_{1,0,0}x + a_{2,0,0}x^2 + a_{0,1,0}y + a_{1,1,0}xy + a_{0,2,0}y^2 + a_{0,0,1}z + a_{1,0,1}xz + a_{0,1,1}yz + a_{0,0,2}z^2 \\ \dot{y} = b_{0,0,0} + b_{1,0,0}x + b_{2,0,0}x^2 + b_{0,1,0}y + b_{1,1,0}xy + b_{0,2,0}y^2 + b_{0,0,1}z + b_{1,0,1}xz + b_{0,1,1}yz + b_{0,0,2}z^2 \\ \dot{z} = c_{0,0,0} + c_{1,0,0}x + c_{2,0,0}x^2 + c_{0,1,0}y + c_{1,1,0}xy + c_{0,2,0}y^2 + c_{0,0,1}z + c_{1,0,1}xz + c_{0,1,1}yz + c_{0,0,2}z^2 \end{cases}$$

1.3 Flot d'un système différentiel

Définition 1.3.1.

Soit le système différentiel non linéaire

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.3.1}$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$, $x_0 \in E$, E est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f \in C^1(E)$.

Soit $\Phi(t, x_0)$ la solution de (1.3.1).

L'ensemble des applications Φ_t défini par

$$\Phi_t(x_0) = \Phi(t, x_0)$$

est appelé le flot de l'équation différentielle (1.3.1).

Remarque 1.3.2. *Le flot est dit autonôme si f ne dépend pas explicitement du temps t, sinon il est dit non autonôme.*

1.4 Portrait de phase

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \tag{1.4.1}$$

où P et Q sont des polynômes en x et y.

Les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.4.1) sont représentées dans le plan (x, y) par des courbes appelées orbites.

Les points critiques de ce système sont des solutions constantes. La figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentés dans le plan (x, y) s'appel le portrait de phase, et le plan (x, y) est appelé plan de phase.

1.5 Points critiques

Définition 1.5.1.

Le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est appelé un point critique ou point d'équilibre du système (1.3.1) s'il vérifie

$$f(x_0) = 0$$

1.6 Solutions et solutions périodiques

Soit le système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}. \tag{1.6.1}$$

Une solution de (1.6.1) est une fonction de classe C^1 sur I un intervalle de $\mathbb{R} : t \to x(t)$ telle que :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \qquad \forall t \in I.$$

Définition 1.6.1.

On appelle solution périodique du système (1.6.1), toute solution $x(t)$ telle qu'il existe un nombre $T > 0$ vérifiant

$$\forall t \in [0, T] : x(t+T) = x(t).$$

Le plus petit nombre T qui convient s'appelle alors période de cette solution.

1.7 Stabilité d'un point d'équilibre

Définition 1.7.1.

Une solution $\Phi(t)$ du système (1.6.1) telle que $\Phi(t_0) = \Phi_0$ est dite stable au sens de Lyapunov si quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (1.6.1) vérifiant $x(t_0) = x_0$ et
$\| x(t_0) - \Phi(t_0) \| \leq \delta$ on aura $\| x(t) - \Phi(t) \| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0$,
c'est à dire :
$\Phi(t)/_{\Phi(t_0)=\Phi_0}$ est stable ssi $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$, telle que pour toute solution $x(t)/_{x(t_0)=x_0}$

$$\| x(t_0) - \Phi(t_0) \| < \delta \Rightarrow \forall t > 0 : \| x(t) - \Phi(t) \| < \varepsilon.$$

Si, de plus de cette définition on a :

$$\lim_{t \to +\infty} \| x(t) - \Phi(t) \| = 0.$$

On dira que la solution $\Phi(t)$ est asymptotiquement stable.
La solution de (1.6.1) $\Phi(t)/_{\Phi(t_0)=\Phi_0}$ est dite instable si pour $\delta > 0$ aussi petit

que l'on veut, l'inégalité $\forall t > 0 : \| x(t) - \Phi(t) \| < \varepsilon$ n'est pas vérifiée pour au moins une solution $x(t)$.

1.8 Linéarisation

Définition 1.8.1.

Considérons le système

$$\dot{x} = f(t, x) \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R} \tag{1.8.1}$$

Le système

$$\dot{x} = Ax$$

où

$$\begin{aligned} A &= Df(x_0) \\ &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right), \qquad 1 \leq i, j \leq n \end{aligned} \tag{1.8.2}$$

et

$$f(x_0) = 0$$

est appelé le linéarisé de (1.8.1) en x_0.

Exemple 1.8.2.

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= 2x_1^2 + x_2^3 - 2 \\ \dot{x_2} &= x_2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1^2 + x_2^3 - 2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Les points critiques sont

$$(-1,0) \text{ et } (1,0)$$

On a

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 & 3x_2^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Au point $(-1,0)$

$$Df(-1,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors le système linéarisé est

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= -4x_1 \\ \dot{x_2} &= x_2 \end{cases}$$

2. Au point $(1,0)$

$$Df(1,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors le système linéarisé est

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= 4x_1 \\ \dot{x_2} &= x_2 \end{cases}$$

Définition 1.8.3.

Le point critique x_0 est dit hyperbolique de (1.3.1), si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(x_0)$ n'a pas de partie réelle nulle.

1.9 Classification des points critiques

Considérons le système différentiel linéaire à coefficients constants :

$$\dot{x} = Ax \tag{1.9.1}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et A une matrice carrée inversible d'ordre 2. Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différentes classification pour le point critique hyperbolique $x = x_0$ selon les valeurs propres de A.

1. λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signe différent, le point critique $x = x_0$ est un point **selle**, il est toujours instable.

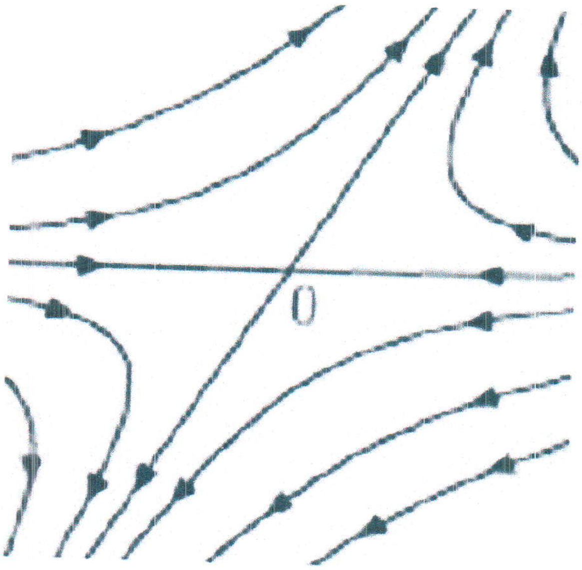


Figure 1.1 – Point de selle

Exemple 1.9.1.

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2x + y \\ \dot{y} &= -y \end{cases}$$

Le point critique est $(0,0)$, la matrice A est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

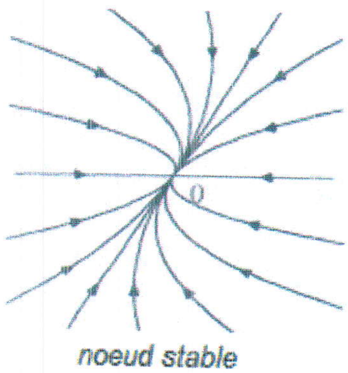
Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 2 \text{ et } \lambda_2 = -1$$

alors le point critique (0,0) est un point selle.

2. λ_1 et λ_2 sont réelles de même signe

- Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, le point critique $x = x_0$ est un **noeud** stable.
- Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, le point critique $x = x_0$ est un **noeud** instable.
- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, le point critique $x = x_0$ est un **noeud propre**, il est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$.



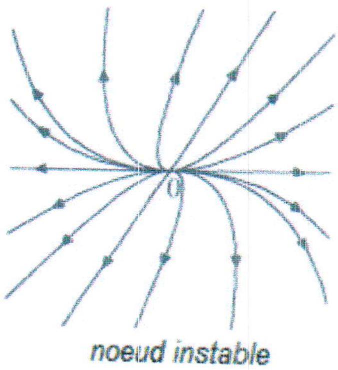


FIGURE 1.2 – Point noeud

Exemple 1.9.2.

Soit les systèmes différentiels

a)

$$\begin{cases} \dot{x} & = -2x \\ \dot{y} & = -y \end{cases}$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = -2 \text{ et } \lambda_2 = -1$$

alors le point critique (0,0) est un noeud stable.

b)

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2x \\ \dot{y} &= y \end{cases}$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 2 \text{ et } \lambda_2 = 1$$

alors le point critique (0,0) est un noeud instable.

c)

$$\begin{cases} \dot{x} &= -3x \\ \dot{y} &= -3y \end{cases}$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -3,$$

alors le point critique (0,0) est un noeud propre stable.

d)

$$\begin{cases} \dot{x} &= 3x \\ \dot{y} &= 3y \end{cases}$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3,$$

alors le point critique (0,0) est un noeud propre instable.

3. λ_1 et λ_2 sont des complexes conjuguées et $\text{Im}(\lambda_{1,2} \neq 0)$, alors le point critique $x = x_0$ est un **foyer**. Il est stable si $\text{Re}(\lambda_{1,2} < 0)$ et instable si $\text{Re}(\lambda_{1,2} > 0)$.

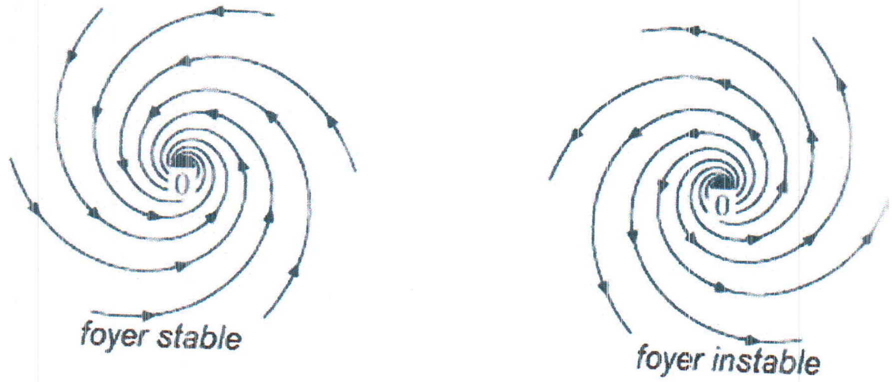


Figure 1.3 – Point foyer

Exemple 1.9.3.

Soit les deux systèmes différentiels

a)

$$\begin{cases} \dot{x} & = y \\ \dot{y} & = -x - y \end{cases}$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Re(\lambda_{1,2}) < 0$$

alors le point critique (0,0) est un foyer stable.

b)

$$\begin{cases} \dot{x} & = y \\ \dot{y} & = -x + y \end{cases}$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$Re(\lambda_{1,2}) > 0$$

alors le point critique (0,0) est un foyer instable.

4. λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures, alors le point critique $x = x_0$ est un **centre**, il est stable mais n'est pas asymptotiquement stable.

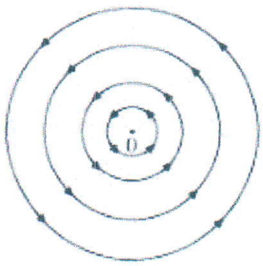


Figure 1.4 – Point centre

Exemple 1.9.4.

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= 3y \\ \dot{y} &= -2x \end{cases}$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{6}$$

alors le point critique (0,0) est un centre.

1.10 Système Hamiltonien

Définition 1.10.1.

Soit E un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ et $H \in C^2(E)$ tel que

$$H = H(x, y) \qquad \text{avec } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Un système de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned} \tag{1.10.1}$$

où

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \frac{\partial H}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial x_n}\right)^T, \frac{\partial H}{\partial y} = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \frac{\partial H}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial y_n}\right)^T$$

est appelé système hamiltonien à n degré de liberté dans E.

Exemple 1.10.2.

Soit le système differetiel

$$\begin{cases} \dot{x} &= 4y^3 + x \\ \dot{y} &= -(4x^3 + y) \end{cases}$$

Posons $f(x, y) = 4y^3 + x$ et $g(x, y) = -(4x^3 + y)$. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$, donc il existe une fonction H tel que

$$\left(\frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial x}\right) = (f(x, y), g(x, y)).$$

Le système s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \\ \dot{y} &= -g(x,y) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \end{aligned}$$

calculons $H(x,y)$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 4y^3 + x$$

donc

$$\begin{aligned} H(x,y) &= y^4 + xy + u(x) \\ \frac{\partial H}{\partial x} &= y + \grave{u}(x) = 4x^3 + y \end{aligned}$$

donc

$$\grave{u}(x) = 4x^3$$

et

$$u(x) = x^4 + cte.$$

On trouve ainsi

$$H(x,y) = x^4 + y^4 + xy.$$

1.11 Cycle limite

Définition 1.11.1.

Un cycle limite C du système (1.4.1) est une orbite périodique isolée dans l'espace des phase. Ceci signifie qu'il existe un voisinage de C dans lequel il n'y a pas d'autre courbes fermées.

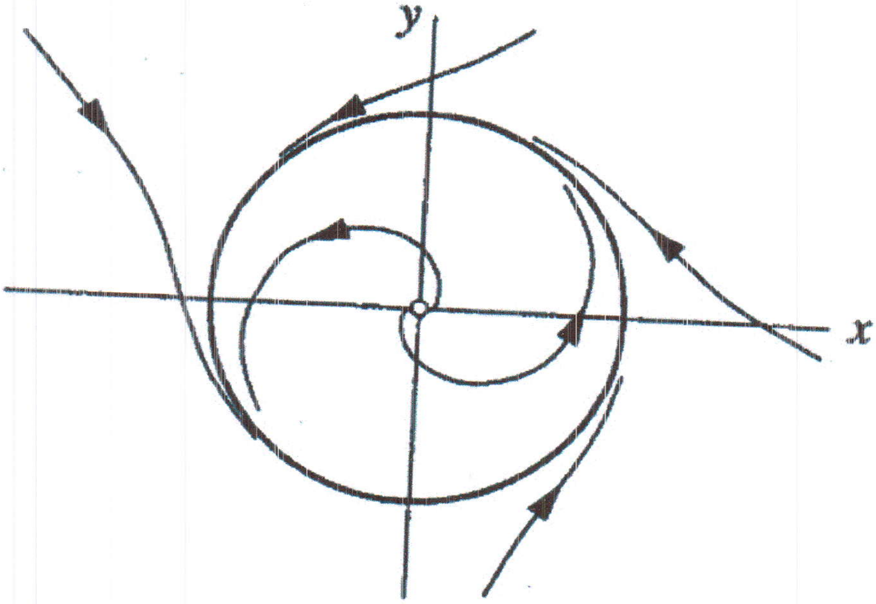


Figure 1.5 – Cycle limite

Exemple 1.11.2.

Soit le système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - y - \alpha x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + \alpha y - \alpha y(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

tel que $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

Après passage en coordonnées polaires (r, θ), ce système se découple en

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned}$$

d'où

$$\dot{r} = 0 \Longleftrightarrow r = 0, r = 1 \text{ et } r = -1.$$

$r = 0$ et $r = -1$ sont refusés.

Pour $r = 1$, on a l'orbite périodique

$$(x(t), y(t)) = (\cos(t + \theta_0), (\sin(t + \theta_0))) \qquad \text{avec } \theta(0) = \theta_0.$$

Cette orbite périodique est un cycle limite stable pour $\alpha > 0$, et instable pour $\alpha < 0$.

Si $\alpha = 0$ le système a une infinité d'orbites périodiques, et il n'y a pas de cycle limite.

Remarque 1.11.3. *Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.*

1.12 Méthode des fonctions de Lyapunov

Soit $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction différentiable

Soit le système :

$$\frac{dx}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad i = \overline{1, n} \tag{1.12.1}$$

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dx_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x_i) \tag{1.12.2}$$

Si $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ $satisfait$ (1.12.1).

Théorème 1.12.1.

Si pour le système (1.12.1), il existe une fonction $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de signe défini, tel que :

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n)$$

est une fonction semi définie (de signe inverse de $v(x_1, \dots, x_n)$ où identiquement nulle) alors le point critique $(0, \dots, 0)$ du système (1.12.1) est stable.
$v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est dite fonction de Lyapunov.
Pour la démonstration voir ([2]).

Exemple 1.12.2.

Soit le système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -xy^4 = f_1(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = yx^4 = f_2(x,y) \end{cases}$$

$(0,0)$ le point critique
soit $v(x,y) = x^4 + y^4$, définie positive ;

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} f_1(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y} f_2(x,y) = 4x^3(-xy^4) + 4y^3(yx^4) = 0$$

$\Rightarrow (0,0)$ est stable.
Les orbites vérifiant $x^4(t) + y^4(t) = c, (c > 0)$.

Théorème 1.12.3.

Si pour le système (1.12.1), il existe une fonction $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de signe défini tel que

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n)$$

CHAPITRE 2

THÉORIE D'INTÉGRABILITÉ DE DARBOUX

Pour un champ de vecteur de dimention deux, l'existence d'intégrale première détermine complètement son portrait de phase. Les champs de vecteurs planaires les plus simples qui ont une intégrale première sont les Hamiltoniens. Les champs de vecteurs planaires intégrables qui ne sont pas Hamiltoniens sont généralement trés difficiles à détecter. Dans ce chapitre on étudie l'existence des intégrales premières pour les champs de vecteurs polynômiaux par la théorie d'intégrabilité de Darboux.

2.1 Définition et notation

Un système polynomial est un système différentiel de la forme

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x} = P(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y} = Q(x,y) \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

ou bien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

où P et Q sont des polynômes des variables x et y à coefficients complexes. Le degré m du système polynômial (2.1.1) est le maximum de degrés des polynômes P et Q.

On note

$$m = \max\{deg\ P, deg\ Q\}.$$

2.2 Intégrales premières

On note par F l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et par F-polynômial le système polynômial (2.1.1) des variables x, y à coefficients dans F.

Définition 2.2.1.

Le champ de vecteurs X associé au système (2.1.1) est défini par

$$X = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$$

Le système F-polynômial (2.1.1) est intégrable sur un sous ensemble ouvert U de F^2 s'il existe une fonction analytique non constante

$$H : U \to F$$

appelée intégrale première du système (2.1.1) sur U et elle est constante sur toutes les courbes intégrales $(x(t), y(t))$ du système (2.1.1) contenues dans U; $i.e$, $H(x(t), y(t)) = cte$ pour toutes les valeurs de t pour lesquelles la solution $(x(t), y(t))$ est définie et appartient à U. Clairement H est une intégrale première du système (2.1.1) si et seulement si

$$XH = PH_x + QH_y = 0$$

Définition 2.2.2.

Soit U un sous ensemble ouvert de F^2. On dit qu'une fonction analytique

$$H(x, y, t) : U \times F \to F$$

est un invariant du champ de vecteurs X sur U si $H(x(t), y(t), t) = cte$ pour toutes les valeurs de t telle que la solution $(x(t), y(t))$ est définie et appartient à U.

Remarque 2.2.3. *Si un invariant H est indépendant de t alors c'est une intégrale première.*

2.3 Facteurs intégrants

Soient U un sous ensemble ouvert de F^2 et $R : U \to F$ une fonction analytique n'est pas identiquement nulle sur U.

Définition 2.3.1.

La fonction R est un facteur intégrant du système F-polynômial (2.1.1) sur U si au moins une des conditions suivantes est vérifiée

$i)$ $\dfrac{\partial(RP)}{\partial x} = -\dfrac{\partial(RQ)}{\partial y}$

$ii)$ $div(RP, RQ) = 0$

$iii)$ $XR = -R\, div(P, Q)$

où la divergence du champ de vecteur X est définie par

$$div\ (X) = div\ (P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Les condition $i), ii), iii)$ sont équivalentes.

Preuve. $i) \Rightarrow ii)$

$$\frac{\partial(R.P)}{\partial x} = -\frac{\partial(R.Q)}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial(RP)}{\partial x} + \frac{\partial(RQ)}{\partial y} = 0$$

$\Rightarrow div\ (RP, RQ) = 0$

d'où $ii)$.

$ii) \Rightarrow iii)$

$$\begin{aligned} div(RP, RQ) &= \frac{\partial(RP)}{\partial x} + \frac{\partial(RQ)}{\partial y} \\ &= P\frac{\partial R}{\partial x} + R\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial R}{\partial y} + R\frac{\partial Q}{\partial y} \\ &= P\frac{\partial R}{\partial x} + Q\frac{\partial R}{\partial y} + R(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}) \\ &= XR + R\ div\ (P, Q) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow XR = -R\ div\ (P, Q)$

d'où $iii)$.

$iii) \Rightarrow i)$.

$$\begin{aligned} XR &= P\frac{\partial R}{\partial x} + Q\frac{\partial R}{\partial y} \\ &= -R(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}) \\ &= -R\frac{\partial P}{\partial x} - R\frac{\partial Q}{\partial y} \\ \Rightarrow & P\frac{\partial R}{\partial x} + R\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial R}{\partial y} + R\frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\partial(RP)}{\partial x} + \frac{\partial(RQ)}{\partial y} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\partial(RP)}{\partial x} = -\frac{\partial(RQ)}{\partial y} \end{aligned}$$

d'où $i)$.

L'intégrale première H associée au facteur intégrant R est donnée par

$$H(x, y) = \int R(x, y)P(x, y)dy + h(x) \tag{2.3.1}$$

où h est choisie telle que

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -RQ$$

alors

$$\frac{dx}{dt} = RP = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{dt} = RQ = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{2.3.2}$$

Inversement, on donne une intégrale première H du système (2.1.1), on peut trouver un facteur intégrant R pour lequel (2.3.2) est satisfait.

Proposition 2.3.2.

Si le système F-polynômial (2.1.1) a deux facteurs intégrants R_1 et R_2 sur le sous ensemble ouvert U de F^2, alors dans l'ensemble ouvert $U\backslash\{R_2 = 0\}$ la fonction R_1/R_2 est une intégrale première.

Preuve.

Soit R_i est un facteur intégrant, il satisfait $XR_i = -R_i \; div \; (P, Q)$ pour $i = 1, 2$.

Alors

$$X(\frac{R_1}{R_2}) = \frac{(XR_1)R_2 - R_1(XR_2)}{R_2^2}$$

$$= \frac{-R_1 \; div \; (P, Q)R_2 + R_1R_2 div \; (P, Q)}{R_2^2} = 0$$

par conséquent la proposition est démontrée.

2.4 Courbes algébriques invariantes

Définition 2.4.1.

Soit $f \in \mathbb{C}[x, y]$ une fonction non identiquement nulle.

la courbe algébrique $f(x, y) = 0$ est une courbe algébrique invariante du système F-polynômial (2.1.1) si pour un polynôme $K \in \mathbb{C}[x, y]$ on a

$$\dot{f} = Xf = P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} = Kf. \tag{2.4.1}$$

Le polynôme K est appelé le cofacteur de la courbe algébrique invariante $f = 0$.

On note que, si le système polynômial a un degré m, le cofacteur K a un degré $m - 1$ au plus.

Remarque 2.4.2. *Dans la définition de la courbe algébrique invariante $f = 0$, on suppose que cette courbe soit complexe, c'est-à-dire $f \in \mathbb{C}[x, y]$ même dans le cas d'un système polynômial réel. Car on verra c'est du au fait que parfois pour les systèmes réels l'existence d'intégrale première réelle peut être produit par l'existence des courbes algébriques invariantes complexes. Quand on voit pour la courbe algébrique invariante d'un système réel, on pense au système polynômial complexe.*

Proposition 2.4.3.

Pour le système réel (2.1.1), $f = 0$ est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur K si et seulement si $\overline{f}$ une courbe algébrique invariante avec le cofacteur $\overline{K}$.

Preuve. On suppose que $f = 0.$ est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur K du système polynômial réel (2.1.1). Puisque P et Q sont des polynômes réels, en prenant le conjuqué de (2.4.1), on obtient

$$P\frac{\partial \overline{f}}{\partial x} + Q\frac{\partial \overline{f}}{\partial y} = \overline{Kf}.$$

Par conséquent, $\overline{f} = 0$ est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur $\overline{K}$ du système (2.1.1). La réciproque est similaire.

Lemme 2.4.4.

Soient $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$. On suppose que f et g sont premiers dans l'anneaux $\mathbb{C}[x, y]$. Alors pour un système plynômial (2.1.1), $fg = 0$ est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur K_{fg} si et seulement si $f = 0$ et $g = 0$ sont des courbes algébriques invariantes avec le cofacteur $K_f = 0$ et $K_g = 0$ respectivement et $K_{fg} = K_f + K_g$.

Preuve. On a

$$X(fg) = (Xf)g + f(Xg). \tag{2.4.2}$$

On suppose que $fg = 0$ est une courbe algébrique invariante du système (2.1.1) avec le cofacteur K_{fg}. Alors $X(fg) = K_{fg}fg$ est par l'égalité (2.4.2), nous obtenons $K_{fg}fg = (Xf)g + f(Xg)$, puisque f et g sont premieres entre eux, on obtient que f divise Xf et g divise Xg.

On a

$$(K_f + K_g)fg = (Xf)g + f(Xg) \Rightarrow K_f fg + K_g fg = (Xf)g + f(Xg).$$

Divisons la derniere égalité par f, on obtient

$$K_f g + K_g g = (\frac{Xf}{f})g + f(Xg)$$

si on note par K_f le quotient $\dfrac{Xf}{f}$ et K_g le quotient $\dfrac{Xg}{g}$ alors on obtient

$$K_f g + K_g g = K_f g + Xg \Rightarrow K_g g = Xg$$

alors $g = 0$ est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur $K_g = 0$, on fait la même chose on trouve aussi que $f = 0$ est une courbe algébrique invariante du système (2.1.1) avec le cofacteur $K_f = 0$,
et $K_{fg} = K_f + K_g$.
On suppose que $f = 0$ et $g = 0$ sont des courbes algébriques invariantes du système (2.1.1) avec le cofacteur K_f et K_g respectivement, alors $Xf = K_f f$ et $Xg = K_g g$ d'après l'égalité (2.4.2) on a

$$X(fg) = K_f fg + fK_g g = (K_f + K_g)fg$$

on pose $K_f + K_g = K_{fg}$ alors $X(fg) = K_{fg}(fg)$.

Par conséquent $fg = 0$ est une courbe algébrique invariante du système (2.1.1) avec le cofacteur K_{fg}.

Proposition 2.4.5.

Supposons que $f \in \mathbb{C}[x,y]$ et soit $f = f_1^{n_1} \dots f_r^{n_r}$ sa factorization en des facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[x,y]$. Alors pour le système (2.1.1), $f = 0$ est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur K_f. si et seulement si $f_i = 0$ est une courbe algébrique invariante pour $i = 1, \dots, r$ avec le cofacteur K_{f_i}. De plus, $K_f = n_1 K_{f_1} + \dots + n_r K_{f_r}$.

Preuve. D'après le lemme (2.4.4), on sait que $f = 0$ est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur K_f. si et seulement si $f_i^{n_i} = 0$ est une courbe algébrique invariante pour $i = 1, \dots, r$, avec le cofacteur $K_{f_i^{n_i}}$, en outre $K_f = K_{f_i^{n_i}} + \dots + K_{f_r^{n_r}}$.

Puisque

$$\begin{aligned} X(\frac{h_\varepsilon}{h}) &= \frac{X(h_\varepsilon)h - X(h)h_\varepsilon}{h^2} \\ &= \frac{K_{h_\varepsilon}(h_\varepsilon)h - (h_\varepsilon)K_h h}{h^2} \\ &= \frac{(K_h + \varepsilon K + o(\varepsilon^2))(h + \varepsilon g + o(\varepsilon^2))h - (h + \varepsilon g + o(\varepsilon^2))K_h h}{h^2} \\ &= \frac{K_h(h^2) + \varepsilon K_h g h + \varepsilon K(h^2) + h^2 o(\varepsilon^2) + K_h h o(\varepsilon^2) - K_h(h^2) - \varepsilon g K_h h - K_h h o(\varepsilon^2)}{h^2} \\ &= \varepsilon K + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} X\left((\frac{h_\varepsilon}{h})^{\frac{1}{\varepsilon}}\right) &= \frac{1}{\varepsilon}(\frac{h_\varepsilon}{h})^{\frac{1}{\varepsilon}}(\frac{h_\varepsilon}{h})^{-1}X(\frac{h_\varepsilon}{h}) \\ &= \frac{1}{\varepsilon}(\frac{h_\varepsilon}{h})^{\frac{1}{\varepsilon}}(1 + o(\varepsilon))(\varepsilon K + o(\varepsilon^2)) \\ &= (K + o(\varepsilon))(\frac{h_\varepsilon}{h})^{\frac{1}{\varepsilon}} \end{aligned}$$

Par conséquent la fonction

$$\left(\frac{h + \varepsilon g + o(\varepsilon^2)}{h}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

a le cofacteur $K + o(\varepsilon)$. Quand ε tend vers zéro, l'expression cidessus tend vers

$$exp\,(\frac{g}{h}) \tag{2.5.1}$$

et d'aprés (2.5.1), on obtient que

$$X\left(exp\,(\frac{g}{h})\right) = K exp\,(\frac{g}{h}). \tag{2.5.2}$$

Par conséquent, la fonction (2.5.1) satisfait l'équation (2.4.1). De même que la courbe algébrique invariante, la fonction (2.5.1) possède un cofacteur de degré au plus $m - 1$.

Définition 2.5.1.

Soient $h, g \in \mathbb{C}[x, y]$, supposons que h, g sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[x, y]$ ou que $h \equiv 1$. Alors la fonction $exp\ (g/h)$ est appelée un facteur exponentiel du système F-polynômial (2.1.1) si pour un polynôme
$K \in \mathbb{C}[x, y]$ de degré au plus $m-1$ satisfait l'équation (2.5.2). Comme avant on dit que K est le cofacteur du facteur exponentiel $exp\ (g/h)$.

Remarque 2.5.2.

1. On note que les cofacteurs exponentiels ne définissent pas des courbes algébriques pour le flot du système (2.1.1), parce qu'ils ne sont jamais nuls.

2. On remarque que dans la définition du facteur exponentiel $exp\ (g/h)$, nous supposons que cette fonction soit complexe, c'est-à-dire
$h, g \in \mathbb{C}[x, y]$ même dans le cas d'un système polynômial réel. La raison est la même que dans le cas des courbes algébriques invariantes c'est-à-dire, parfois pour des systèmes polynômiaux réels l'existence d'intégrale première peut être déduite par l'existence des facteurs exponentiels complexes. Encore, en voyant pour un facteur exponentiel d'un système polynômial réel, on considère le système polynômial comme étant en $\mathbb{C}^2$.

Proposition 2.5.3.

Pour un système polynômial réel (2.1.1) la fonction $exp\ (g/h)$ est un facteur exponentiel avec le cofacteur K si et seulement si la fonction $exp\ (\overline{g}/\overline{h})$ est un facteur exponentiel avec le cofacteur $\overline{K}$.

Preuve. On suppose que $exp\ (g/h)$ est un facteur exponentiel du système polynômial réel (2.1.1) avec le cofacteur K. Alors l'égalité (2.5.2) est vérifiée. Puisque P et Q sont des polynômes réels, on prend le conjugé de (2.5.2), on obtient que

$$P\frac{\partial\, exp\ (\overline{g}/\overline{h})}{\partial x}+Q\frac{\partial\, exp\ (\overline{g}/\overline{h})}{\partial y}=\overline{K}exp\ (\overline{g}/\overline{h})$$

Par conséquent, $exp\ (\overline{g}/\overline{h})$ est un facteur exponentiel du système (2.1.1) avec le cofacteur $\overline{K}$.
La preuve de la réciproque est similaire.

Proposition 2.5.4.

Si $F=exp\ (g/h)$ est un facteur exponentiel pour le système (2.1.1) alors $h=0$ est une courbe algébrique invariante et g satisfait l'équation

$$Xg=gK_h+hK_F \tag{2.5.3}$$

où K_h et K_F sont respectivement les cofacteurs de h et F.

Preuve. Puisque $F=exp\ (g/h)$ est un facteur exponentiel avec le cofacteur K_F, on a

$$Xg=gK_h+hK_F$$

$$\begin{aligned}K_F\, exp\ (g/h) &= X(exp\ (g/h))\\ &= exp\ (g/h)X(g/h)\\ &= exp\ (g/h)\frac{(Xg)h-g(Xh)}{h^2}\end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à

$$(Xg)h-g(Xh)=h^2K_F \tag{2.5.4}$$

Par conséquent, puisque h et F sont premiers entre eux, on obtient que h divise Xh. on a

$$\begin{aligned} Xg - gK_h &= hK_F \\ &= h\frac{XF}{F} \\ &= h[\frac{\frac{h(Xg)-g(Xh)}{h^2}.F}{F}] \\ &= \frac{h(Xg)-g(Xh)}{h} \end{aligned}$$
$$\Leftrightarrow h(Xg) - ghK_h = h(Xg) - gXh$$

Comme h divise Xh on trouve $Xh = K_h h$. Donc $h = 0$ est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur $K_h = Xh/h$.

Maintenant remplaçant Xh par $K_h h$ dans (2.5.4),

on a

$$(Xg)h - gK_h h = h^2 K_F \Rightarrow Xg = gK_h + hK_F.$$

2.6 La méthode de Darboux

Avant d'énoncer les principaux résultats du théorème de Darboux, on a besoin de quelques définitions.

Définition 2.6.1.

Soit $S(x,y) = \sum_{i+j=0}^{m-1} a_{ij}x^i y^j$ un polynôme de degré $m-1$ avec $m(m+1)/2$ coefficients dans F, alors on écrit $S \in F_{m-1}[x,y]$. On identifie l'espace vectoriel linéaire $F_{m-1}[x,y]$ avec $F^{m(m+1)/2}$ par l'isomorphisme

$$S \rightarrow (a_{00}, a_{10}, a_{01}, \ldots, a_{m-1,0}, a_{m-2,0}, \ldots, a_{0,m-1})$$

Définition 2.6.2.

On dit que r points $(x_k, y_k) \in F^2, k = 1, \ldots, r$, sont indépendants si l'intersection des r hyperplans

$$\{(a_{ij})F^{m(m+1)/2} : \sum_{i+j=0}^{m-1} a_{ij}x^i y^j = 0, \qquad k = 1, \ldots, r, \}$$

est un sous espace linéaire de dimension $(m(m+1)/2) - r$.

Définition 2.6.3.

Un point singulier (x_0, y_0) du système (2.1.1) est dit faible si $div(P, Q)(x_0, y_0) = 0$.

Remarque 2.6.4. *D'après le théorème de Bézout, le nombre maximum des points singuliers isolés du système polynômial* (2.1.1) *est* m^2. *Le nombre maximum des points singuliers independants du système* (2.1.1) *est* $m(m+1)/2$ *et* $m(m+1)/2 < m^2$ *pour* $m > 2$.

Théorème 2.6.5. *(Théorie d'intégrabilité de Darboux)*

On suppose que le système (2.1.1) de degré m admet p courbes algébriques invariantes irréductibles $f_i = 0$ avec les cofacteurs K_i pour $i = 1, \ldots, p$, q facteurs exponentiels $F_j = exp\,(g_j/h_j)$ avec les cofacteurs L_j pour $j = 1, \ldots, q$ et r points singuliers indépendants $(x_k, y_k) \in \mathbb{C}^2$ tel que $f_i(x_k, y_k) \neq 0$ pour $i = 1, \ldots, p$ et $k = 1, \ldots, r$.

1. Ils existent $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_i L_i = 0$$

si et seulement si la fonction

$$H(x,y) = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q} \tag{2.6.1}$$

est une intégrale première du système (2.1.1). De plus, pour les systèmes réels la fonction (2.6.1) est réel.

2. Si $p+q+r \geq [m(m+1)/2]+1$, alors il existe $\lambda_i; \mu_j \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_i L_i = 0.$$
3. Si $p+q+r \geq [m(m+1)/2]+2$, alors le système (2.1.1) a une intégrale première rationnelle et par conséquent toutes les trajectoires du système sont contenues dans les courbes algébriques invariantes .
4. Ils existent $\lambda_i; \mu_j \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_i L_i = -div\ (P,Q)$$
si et seulement si la fonction (2.6.1) est un facteur intégrant du système (2.1.1).
5. Si $p+q+r = m(m+1)/2$ et les r points singuliers indépendants sont faibles, alors la fonction (2.6.1) est une intégrale première si
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_i L_i = 0$$
ou la fonction (2.6.1) est un facteur intégrant si
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_i L_i = -div\ (P,Q)$$
avec $\lambda_i; \mu_j \in \mathbb{C}$ non tous nuls.

6. S'ils existent $\lambda_i; \mu_j \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que

   $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_i L_i = -s$, pour $s \in \mathbb{C}/\{0\}$ alors la fonction

$$H(x, y, t) = f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} F_1^{\mu_1} \dots F_q^{\mu_q}\, exp\,(st) \qquad (2.6.2)$$

   est un invariant du système (2.1.1).

Preuve. (voir [13]).

Remarque 2.6.6. *Une fonction de la forme* (2.6.1) *est appelée fonction Darbouxienne*

Maintenant, nous allons voir que si le système différentiel est réel, alors l'intégrale première par le théorème de Darboux est aussi réelle.

Cela découle du fait suivant, puisque le système différentiel polynômial (2.1.1) *est réel, il est bien connu que si une courbe algébrique invariante du système ou un facteur exponentiel apparait, alors son conjuguée doit apparaitre simultanément (voir proposition* (2.4.3) *et* (2.5.3)*).*

Supposons maintenant que X est un champ de vecteurs réel. Si parmi les courbes algébriques invariantes de X un complexe conjugué paire $f = 0$ et $\overline{f} = 0$ existe, alors l'invariant (2.6.2) *a un facteur réel de la forme $f^{\lambda}\overline{f}^{\overline{\lambda}}$, laquelle est une fonction réelle*

$$[(Re\ f)^2 + (Im\ f)^2]^{Re\,\lambda}\, exp\left(-2Im\,\lambda\ arctan\left(\frac{Imf}{Ref}\right)\right),$$

avec $Im(\lambda)\ Im(f) \neq 0$. Si parmi les facteurs exponentiels de X une paire de conjugué complexe $F = exp\ (g/h)$ et $\overline{F} = exp\ (\overline{g}/\overline{h})$ existe, alors l'intégrale première (2.6.1) *possède un facteur intégrant de la forme*

$$(exp\ (\frac{g}{h}))^{\mu}(exp\ (\frac{\overline{g}}{\overline{h}}))^{\overline{\mu}} = exp\ (2\ Re\ (\mu\frac{g}{h})).$$

On résume que la fonction (2.6.1) *est réelle quand le système différentiel* (2.1.1) *est réel.*

2.7 Quelques applications

Dans ce qui suit, on présente des applications du théorème de Darboux pour des systèmes quadratiques, on a $m(m+1)/2 = 3$.

Exemple 2.7.1.

Soit le système quadratique suivant avec $abc \neq 0$

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(ax+c), \\ \dot{y} &= y(2ax+by+c). \end{cases} \tag{2.7.1}$$

Ce système a cinq lignes invariantes (*i.e* solutions algébriques de degré 1). En effet, soient $f = \alpha x + \beta y + \gamma$ la courbe algébrique invariante et $K = \delta x + \eta y + \sigma$ le cofacteur de f.

Alors on a

$$Xf = P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} = Kf$$

$$Xf = \alpha x(ax+c) + \beta y(2ax+by+c).$$

$$Kf = (\delta x + \eta y + \sigma)(\alpha x + \beta y + \gamma).$$

On développe l'équation précédente, on trouve

$Xf = a\alpha x^2 + b\beta y^2 + 2a\beta xy + c\alpha x + c\beta y.$

$Kf = \delta\alpha x^2 + \beta\eta y^2 + (\eta\alpha + \delta\beta)xy + (\sigma\alpha + \delta\gamma)x + (\sigma\beta + \gamma\eta)y + \sigma\gamma.$

On obtient alors le système $\begin{cases} \delta\alpha = a\alpha \\ \beta\eta = b\beta \\ \delta\beta + \eta\alpha = 2a\beta \\ \sigma\alpha + \delta\gamma = c\alpha \\ \sigma\beta + \gamma\eta = c\beta \\ \sigma\gamma = 0 \end{cases}$

Si $\gamma = 0, \sigma \neq 0, \beta = 0, \alpha \neq 0$ on a $\{\sigma = c, \eta = 0, \delta = a\}$
alors $f_1 = \alpha x = 0$, d'où $f_1 = x = 0$ est une ligne invariante avec le cofacteur $K_1 = ax + c$.
Si $\gamma \neq 0, \sigma = 0, \beta = 0, \alpha \neq 0$ on a $\{\eta = 0, \delta = a, \gamma = \frac{c}{a}\alpha\}$
alors $f_2 = \alpha x + \frac{c}{a}\alpha = 0$, d'où $f_2 = ax + c = 0$ est une ligne invariante avec le cofacteur $K_2 = ax$.
Si $\gamma = 0, \sigma \neq 0, \beta \neq 0, \alpha = 0$ on a $\{\sigma = c, \delta = 2a, \eta = b\}$
alors $f_3 = \beta y = 0$, d'où $f_3 = y = 0$ est une ligne invariante avec le cofacteur $K_3 = 2ax + by + c$.
Si $\gamma = 0, \sigma \neq 0, \beta \neq 0, \alpha \neq 0$ on a $\{\sigma = c, \eta = b, \delta = a, \alpha = \frac{a\beta}{b}\}$
alors $f_4 = \frac{a\beta}{b}x + \beta y = 0$, d'où $f_4 = ax + by = 0$ est une ligne invariante avec le cofacteur $K_4 = ax + by + c$.
Si $\gamma \neq 0, \sigma = 0, \beta \neq 0, \alpha \neq 0$ on a $\{\eta = b, \delta = a, \alpha = \frac{a\beta}{b}, \gamma = \frac{c\beta}{b}\}$
alors $f_5 = \frac{a\beta}{b}x + \beta y + \frac{c\beta}{b} = 0$, d'où $f_5 = ax + by + c = 0$ est une ligne invariante avec le cofacteur $K_5 = ax + by$.
D'aprés le théorème Darboux, le système (2.7.1) a une intégrale première

$$H = f_1^{\lambda_1} f_2^{\lambda_2} f_3^{\lambda_3} f_4^{\lambda_4} f_5^{\lambda_5}$$

avec $\lambda i \in \mathbb{C}$ qui satisfait $\sum_{i=1}^{5} \lambda_i K_i = 0$.

Alors, on a

$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3 + \lambda_4 K_4 \lambda_5 K_5 = \lambda_1(ax + c) + \lambda_2(ax) + \lambda_3(2ax + by + c) + \lambda_4(ax + by + c) + \lambda_5(ax + by) = a(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)x + b(\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)y + c(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4) = 0$

Ce qui conduit au système suivant

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5=0 \\ \lambda_3+\lambda_4+\lambda_5=0 \\ \lambda_1+\lambda_3+\lambda_4=0 \end{cases}$$

Si on pose $\lambda_3=0, \lambda_1=-1$ alors on a $\lambda_5=-1, \lambda_2=\lambda_4=1$.

Par conséquent, l'intégrale première est

$$H=\frac{(ax+c)(ax+by)}{x(ax+by+c)}$$

Remarque 2.7.2. *D'aprés le théorème ((2.6.5) (3)), le système (2.7.1) a 5 courbes algébriques invariantes, on a une intégrale première rationnelle.*

Exemple 2.7.3.

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y-b(x^2+y^2)=P \\ \dot{y} &= x=Q \end{cases} \tag{2.7.2}$$

Soient $f=\alpha x^2+\beta y^2+\gamma xy+\lambda x+\mu y+\nu$ la courbe algébrique invariante et $K=\delta x+\eta y+\sigma$ le cofacteur de f.

Alors on a

$$\begin{aligned} Xf &= P\frac{\partial f}{\partial x}+Q\frac{\partial f}{\partial y}=Kf \\ Xf &= [-y-b(x^2+y^2)](2\alpha x+\gamma y+\lambda)+x(2\beta y+\gamma x+\mu). \\ Kf &= (\delta x+\eta y+\sigma)(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma xy+\lambda x+\mu y+\nu). \end{aligned}$$

On développe l'équation précédente, on trouve

$Xf=-2b\alpha x^3-b\gamma y^3-b\gamma x^2y-2b\alpha xy^2+(\gamma-b\lambda)x^2+(-\gamma-b\lambda)y^2+(-2\alpha+2\beta)xy+\mu x-\lambda y.$

$Kf=\delta\alpha x^3+\beta\eta y^3+(\eta\alpha+\delta\gamma)x^2y+(\delta\beta+\eta\gamma)xy^2+(\delta\lambda+\sigma\alpha)x^2+(\eta\mu+$

$\sigma\beta)y^2 + (\delta\mu + \eta\lambda + \sigma\gamma)xy + (\delta\nu + \sigma\lambda)x + (\eta\nu + \sigma\mu)y + \sigma\nu.$

ceci conduit au système suivant $\begin{cases} \sigma\nu = 0 \\ \eta\nu + \sigma\mu = -\lambda \\ \delta\nu + \sigma\lambda = \mu \\ \delta\mu + \eta\lambda + \sigma\gamma = -2\alpha + 2\beta \\ \eta\mu + \sigma\beta = -\gamma - b\lambda \\ \delta\lambda + \sigma\alpha = \gamma - b\lambda \\ \delta\beta + \eta\gamma = -2b\alpha \\ \eta\alpha + \delta\gamma = -b\gamma \\ \beta\eta = -b\gamma \\ \delta\alpha = -2b\alpha \end{cases}$

On utilise maple, on trouve les solutions de ce système

$\{\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = -b, \eta = ib, \lambda = \lambda, \mu = i\lambda, \nu = 0, \sigma = i\}$

$\{\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = -b, \eta = -ib, \lambda = \lambda, \mu = -i\lambda, \nu = 0, \sigma = -i\}$

alors, on a deux courbes alébriques invariantes

$f_1 = \lambda x + i\lambda y = 0$, d'où $f_1 = x + iy = 0$ avec le cofacteur $K_1 = -bx + iby + i$, et $f_2 = \lambda x - i\lambda y = 0$, alors $f_2 = x - iy = 0$ avec le cofacteur $K_2 = -bx - iby - i$.

Donc on a

$$f = f_1 f_2 = x^2 + y^2 = 0$$

est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur

$$K = K_1 + K_2 = -2bx.$$

Puisque $div(P,Q) = -2bx = K$, d'aprés le théorème (6.1)(4), on a

$R = f^{-1} = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ est un facteur intégrant, par conséquent

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = RQ = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

alors $H = \int -\frac{x}{x^2+y^2}dx = -\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + h(y) \ldots (\star)$

$h(y)$ est calculé d'aprés l'équation $\frac{\partial H}{\partial y} = RP = \frac{-y-b(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

d'aprés $(\star)$ $\quad \frac{\partial H}{\partial y} = RP = -\frac{y}{x^2+y^2} + h'(y).$

D'où

$$\begin{aligned} h'(y) &= -b \\ h(y) &= -by \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} H &= -\tfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - by \\ H &= (x^2+y^2)\exp(2by). \end{aligned}$$

Exemple 2.7.4.

On cherche le facteur intégrant du système

$$\begin{cases} \dot{x} &= xy, \\ \dot{y} &= y(x+By+1). \end{cases} \tag{2.7.3}$$

Soient $f = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \lambda x + \mu y + \nu$ la courbe algébrique invariante et $K = \delta x + \eta y + \sigma$ le cofacteur de f. Alors on a

$$\begin{aligned} Xf &= P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} = Kf \\ Xf &= xy(2\alpha x + \gamma y + \lambda) + y(x+By+1)(2\beta y + \gamma x + \mu). \\ Kf &= (\delta x + \eta y + \sigma)(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \lambda x + \mu y + \nu). \end{aligned}$$

On développe l'équation précédente, on trouve

$Xf = 2B\beta y^3+(2\alpha+\gamma)x^2y+(\gamma+2\beta+B\gamma)xy^2+(B\mu+2\beta)y^2+(\lambda+\mu+\gamma)xy+\mu y.$
$Kf = \delta\alpha x^3 + \beta\eta y^3 + (\eta\alpha + \delta\gamma)x^2y + (\delta\beta + \eta\gamma)xy^2 + (\delta\lambda + \sigma\alpha)x^2 + (\eta\mu + \sigma\beta)y^2 + (\delta\mu + \eta\lambda + \sigma\gamma)xy + (\delta\nu + \sigma\lambda)x + (\eta\nu + \sigma\mu)y + \sigma\nu.$

ceci conduit au système suivant $\begin{cases} \sigma\nu = 0 \\ \eta\nu + \sigma\mu = \mu \\ \delta\nu + \sigma\lambda = 0 \\ \delta\mu + \eta\lambda + \sigma\gamma = \lambda + \mu + \gamma \\ \eta\mu + \sigma\beta = B\mu + 2\beta \\ \delta\lambda + \sigma\alpha = 0 \\ \delta\beta + \eta\gamma = \gamma + 2\beta + B\gamma \\ \eta\alpha + \delta\gamma = 2\alpha + \gamma \\ \beta\eta = 2B\beta \\ \delta\alpha = 0 \end{cases}$

On utilise Maple, d'où les solutions de ce système

$$\{\alpha = \frac{-32B\beta}{4B^2-4B-3}; \beta = \frac{4B\beta}{1+2B}, \gamma = \frac{-16B\beta}{1+2B}; \delta = 0, \eta = \frac{1}{2} + B, \lambda = 0,$$

$$\mu = \frac{16B\beta}{1+2B}, \nu = \frac{-32B\beta}{4B^2+4B+1}; \sigma = 0\}.$$

$$\{\alpha = 0, \beta = \beta, \gamma = 0, \delta = 2, \eta = 2B, \lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0, \sigma = 2\}.$$

alors, on a deux courbes alébriques invariantes

$$f_1 = \frac{-32B\beta}{4B^2-4B-3}x^2 + \frac{4B\beta}{1+2B}y^2 - \frac{16B\beta}{1+2B}xy + \frac{16B\beta}{1+2B}y + \frac{32B\beta}{(4B^2+4B+1)^2};$$

d'où $f_1 = \dfrac{8}{2B-3}x^2 + y^2 - 4xy + 4y + \dfrac{8}{2B+1}$, est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur $K_1 = (\frac{1}{2} + B)y$ et aussi $f_2 = \beta y^2 = 0$, d'où

$$f_2 = y^2 = 0$$

est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur $K_2 = 2x + 2By + 2$.

On a

$$-div\ (P, Q) = -(2B+1)y - x - 1$$

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = (\frac{\lambda_1}{2} + B\lambda_1 + 2B\lambda_2)y + 2\lambda_2 x + 2\lambda_2.$$

Alors on a

$$\begin{cases} \frac{\lambda_1}{2} + B\lambda_1 + 2B\lambda_2 & = -2B - 1 \\ 2\lambda_2 & = -1 \\ 2\lambda_2 & = -1 \end{cases}$$

D'où la solution de ce système est $\lambda_1 = -\frac{2B+2}{2B+1}$ et $\lambda_2 = \frac{-1}{2}$.

Alors d'aprés le théorème de Darboux (4) la fonction

$$R = y^{-1}\left(\frac{8}{2B-3}x^2 + y^2 - 4xy + 4y + \frac{8}{2B+1}\right)^{-\frac{2B+2}{2B+1}}$$

est un facteur intégrant.

CHAPITRE 3

NON EXISTENCE DES CYCLES LIMITES VIA LE FACTEUR INTÉGRANT INVERSE

Le facteur intégrant inverse est un outil important dans l'étude qualitative des équations différentielles. Le but de ce chapitre est d'utiliser le facteur intégrant inverse pour donner un critère de non existence des cycles limites pour des systèmes différentielles planaires polynômiaux.

3.1 Facteur intégrant inverse

Définition 3.1.1.

soit le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 & = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \tag{3.1.1}$$

où $f_i : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 2$ sont des fonctions de classe C^1 et U est un ensemble ouvert simplement connexe.

Considérons le champ de vecteurs

$$F = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

Alors (3.1.1) peut s'écrire sous la forme

$$\dot{x} = F(x), \quad x = (x_1, x_2) \in U. \tag{3.1.2}$$

Définition 3.1.2.

La fonction $\vartheta : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\vartheta \in C^1(U, \mathbb{R})$ est appelé facteur intégrant inverse de (3.1.1) si elle n'est pas localement nulle et satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$f_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\vartheta. \tag{3.1.3}$$

Remarque 3.1.3. *un facteur intégrant inverse est une solution de l'équation*

$$F\vartheta = div(F)\vartheta.$$

En réécrivant (3.1.1) sous sa forme de Pfaff

$$\omega = -f_2(x_1, x_2)dx_1 + f_1(x_1, x_2)dx_2 = 0, \quad (x_1, x_2) \in U. \tag{3.1.4}$$

On note que l'équation ci-dessus est exactement l'équation différentielle des orbites du système (3.1.1).

Définition 3.1.4.

Un facteur intégrant pour $\omega = 0$ est un fonction de classe C^1, $\mu : U \to \mathbb{R}$ qui rend $\mu\,\omega$ une forme exacte dans le cas où U est simplement connexe

Ceci est équivalent à

$$\frac{\partial(-\mu f_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial(\mu f_1)}{\partial x_1}. \tag{3.1.5}$$

Remarque 3.1.5. *μ est un facteur intégrant de (3.1.4) si et seulement si $\vartheta = \dfrac{1}{\mu}$ est un facteur intégrant inverse de (3.1.1) dans le domaine approprié.*

3.2 Non existence des cycles limites

Théorème 3.2.1.

Soit $\vartheta : U \to \mathbb{R}$ un facteur intégrant inverse de (3.1.1). Si $\gamma \subset U$ est un cycle limit de (3.1.1), alors γ est contenu dans l'ensemble
$\vartheta^{-1}(0) = \{(x_1, x_2) \in U, \vartheta(x_1, x_2) = 0\}$.

Remarque 3.2.2. *Il est possible d'imposer certaines conditions sur (3.1.5), pour déterminer les cas particuliers du facteur d'intégrant.*

Proposition 3.2.3.

Soit U un ensemble ouvert simplement connexe. Supposons que le champ de vecteurs

$$F = f_1\frac{\partial}{\partial x_1} + f_2\frac{\partial}{\partial x_2} \in C^1(U, \mathbb{R}^2).$$

Si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite alors (3.1.1) ne possède pas des cycles limites dans U

(i) La fonction $\alpha_i = \operatorname{div}(F)/f_i$ ne depénd que de x_i, pour $i \in \{1, 2\}$ et elle est continue.

(ii) La fonction $\beta = \operatorname{div}(F)/(f_1x_2 + f_2x_1)$ depénd de $z = x_1x_2$ et elle est continue.

Preuve. On considére le cas (i) avec α_1 depénd uniquement de x_1. on recherche un facteur intégrant inverse, utilisons l'équation associée

$$f_1\frac{\partial\vartheta}{\partial x_1}+f_2\frac{\partial\vartheta}{\partial x_2}=(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2})\vartheta.$$

Supposons que ϑ depend uniquement de x_1, donc l'equation précédente se reduit à

$$f_1\frac{\partial\vartheta}{\partial x_1}=(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2})\vartheta,$$

qui est réécrite sous la forme

$$\frac{\partial\log\vartheta}{\partial x_1}=\frac{1}{f_1}(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2})=\alpha_1.$$

De l'hypothèse $\vartheta=\exp(\int^{x_1}\alpha_1(s)ds)$ est un facteur intégrant inverse et $\vartheta^{-1}(0)=\emptyset$, don d'aprés le théorème (3.2.1), le système (3.1.1) ne possède pas des cycles limites. Donc la preuve est complète.

Exemple 3.2.4.

Considérons le système

$$\dot{x_1}=-x_2+ax_1^2+bx_2^3\cos(x_2),$$
$$\dot{x_2}=x_1.$$

On a $\dfrac{\operatorname{div}(F)}{f_2}=2a$ est une fonction de x_2.

Donc par la proposition (3.2.3 (i)), le système ne possède pas des cycles limites.

Exemple 3.2.5.

Considérons le système

$$\dot{x_1} = 2x_1x_2,$$
$$\dot{x_2} = x_1^3x_2^2 - x_2^2 - 1.$$

On a $\dfrac{\text{div}(F)}{f_1} = x_1^2$ d'aprés la proposition (3.2.3), ce système ne possède pas des cycles limites.

Corollaire 3.2.6.

Soit F un champ de vecteurs de classe C^1 sur U. Si $\text{div}(F) = 0$, alors (3.1.1) ne possède pas des cycles limites dans U.

Maintenant, nous utilisons la proposition (3.2.3) pour étudier quelques systèmes spéciaux. Considérons l'équation

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r_1(x_1)r_2(x_2), \\ \dot{x}_2 &= s_1(x_1). \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

On a le résultat suivant.

Corollaire 3.2.7.

Si $r_1(x_1) > 0$ (< 0), alors (3.2.1) ne possède pas des cycles limites dans U.

Preuve. En effet l'expression

$$\frac{\text{div}(F)}{f_1} = \frac{r_1'(x_1)}{r_1(x_1)},$$

est continue et dépend uniquement de x_1, donc le résultat découle de la proposition (3.2.3 (i)).

Exemple 3.2.8.

Considérons le système

$$\dot{x_1} = (2+\sin(x_1))(x_2^3 - x_2^2 + x_2),$$
$$\dot{x_2} = x_1^4 + 5x_1.$$

Il ne possède pas des cycles limites car $(2+\sin(x_1)) > 0$.

Remarque 3.2.9. *le portrait de phase de l'équation différentielle est essentiellement inchangé si on multiple le champ de vecteurs par une fonction non nulle.*

Lemme 3.2.10.

Supposons que système (3.1.1) a un cycle limite α et $B : U \to \mathbb{R}$ est une fonction positive (négative) à valeurs réelles, alors α est un cycle limite du système

$$\dot{x}_1 = Bf_1,$$
$$\dot{x}_2 = Bf_2. \tag{3.2.2}$$

Maintenant, en utilisant le lemme ci-dessus, on obtient une généralisation de nos résultats.

Proposition 3.2.11.

Soit U un ensemble ouvert simplement connexe. Supposons que $B : U \to \mathbb{R}$ est une fonction positive (négative) de classe C^1 telle que $\mathrm{div}(BF)/Bf_i$ depénd uniquement x_i, pour $i \in \{1,2\}$ et elle est continue, alors (3.1.1) ne possède pas des cycles limites dans U.

En particulier de la proposition précédente ou du corollaire (3.2.6), on a le résultat suivant.

Corollaire 3.2.12.

Soit U un ensemble ouvert simplement connexe. Supposons que

$$B : U \to \mathbb{R}$$

est une fonction positive (négative) de classe C^1 telle que $\text{div}(BF) = 0$, alors (3.1.1) ne possède pas des cycles limites dans U.

Définition 3.2.13.

Soit $\mathbb{R}[x_1, x_2]$ l'anneau polynômial sur $\mathbb{R}$ de 2 variables. Soit $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$; Définissons son ensemble nul par

$$V(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : f(x) = 0\}.$$

Si $S \subset \mathbb{R}[x_1, x_2]$, on définit $V(S)$ l'ensemble des zéros communs

$$V(S) = \cap_{f \in S} V(f).$$

Remarque 3.2.14. *Un ensemble de cette forme est appelée algébrique, en particulier $V(f)$ est connu sous le non de courbe algébrique.*

Théorème 3.2.15.

Si un polynôme homogène non nul est un facteur intégrant inverse du système différentielle (3.1.1), alors il ne possède pas des cycles limites.

Corollaire 3.2.16.

Si f_1, f_2 sont des deux polynômes homogènes de même degré, alors (3.1.1) ne possède pas des cycles limites.

Preuve. Il est simple de vérifier que

$$\vartheta(x_1, x_2) = x_1 f_2(x_1, x_2) - x_2 f_1(x_1, x_2),$$

est un facteur intégrant inverse de (3.1.1). Donc il est clair que ϑ est un polynôme homogène, le résultat suit du théorème 3.2.15.

Exemple 3.2.17.

Considérons le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_2^5 - x_1^3 x_2^2 + 6x_1 x_2^4, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 x_2^3 - 2x_1^5. \end{aligned}$$

Ceci est un champ de vevteurs homogène. D'aprés le corollaire précédent, ce système ne possède pas des cycles limites.

Corollaire 3.2.18.

L'équation différentielle linéaire

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2, \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2, \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

ne possède pas des cycles limites.

☞Conclusion et perspectives

Dans notre travail nous avons appliqué la théorie de Darboux pour déterminer les intégrales premières des systémes différentiels. On veut continuer à étudier le prolongement de la méthode de Darboux en dimension supérieure à deux (> 2) pour un systéme polynomial différentiel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I.ABDAOUI, MAKHLOF, Cours de Master 1^{me} année. Introduction aux système dynamique et EDO.

[2] S. BADI, Cours de licence 3^{me} année, Cours de P.G. Introduction aux système dynamique.

[3] I. BENDIXSON, Sur les courbes définiés par des équations différentielles. Acta Math. 24, 1-88 (1901).

[4] A. BUICA, J. LLIBRE , Averaging method for finding period orbits via Brouwer degree. Bull. Sci. math. 128 (2004) 7-22.

[5] J. Chavarriga, García I. A., Giné J.; On the integrability of differential equations defined the sum of homogeneous vectors fields with degenerate infinity, Int. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Eng., 11, (2001), 711-722.

[6] I. Garcia, M. Grau; A survey on the inverse integrating factor, Qual. Theory Dyn. Syst., 9, no.1-2, (2010), 115-166.

[7] A. GASULL AND H. GIACOMINI, A new criterion for controlling the number of limit cycles of some generaized liénard equations, J. Differential Equations Vol. 185. pp 54-73. (2007).

[8] L.A GHERKAS, J.C. ARTÉS AND J. LLIBRE , Quadratic systems of limit cycles of normal size, Bul. Acad. de Stiinte a Rep. Molodova, Matematica Vol. 1 (41).pp 31-46. (2003).

[9] H. Giacomini, J. Llibre and M. Viano, On the nonexistence, existence, and uniqueness of limit cycles, *Nonlinearity*, 9, (1996), 501-516.

[10] J. P. Jouanolou, Équations de Pfaff algébriques, in Lecture Notes in Mathematics, vol. 708, Springer, Berlin, 1979 (French). MR 537038 (81k :14008).

[11] R.E. Kooij and C.J. Christopher; Algebraic invariant curves and the integrability of polynomial systems, Appl. Math. Lett., 6,No.4 (1993),51.53.

[12] LAWRENCE PERKO ; Differential Equations And Dynamical Systems. SPRINGER, Berlin (2006).

[13] J. LLIBRE, Intégrability of polynôme Differential Systems, Ordinary Differential Equations, Vol 1 (2004).

[14] J. LLIBRE, On the limit cycles of the Liénard differential systems, departement de Math, Universitat Autonoma de Barcelona, 08193 Bellaterra, Barcelona, Catalonia, Spain.

[15] MCCLUSKEY. C. C., MULDOWNEY , J. S ; Bendixson-Dulac criteria for difference equations. J. Diff. Equ. 10 , 567-575 (1998).

[16] POLYANIN, A.D., ZAITSEV , V.F ; MOUSSIAUX, A ; Handbook of First Order Partial Differential Equations. Taylor and Francis, London (2002).

[17] G.S. RYCHKOV ; The maximal number of limit cycles of the system $\dot{y} = -x, \dot{x} = y - \sum_2^{i=0} a_i x^{2i+1}$ is equal to two, (russian) differential Equations Vol.11.p 390-391. (1975).

[18] S. STROGATZ, Nonlinear Dynamics and Chaos. Addison-Wesley, Reading (1994).

[19] F. VERHULST, Nonlinear Differential Equation and Dynamique Systems, Uiversitext, Springer, (1991).

[20] XIUDONG CHEN, J. LLIBRE AND ZHIFEN ZHANG, sufficient conditions for the existence of at least n or exactly n limit cycles for the Lienard differential systems, to appear in J. Differential equations.

[21] XIUDONG CHEN AND YONG CHEN, On the conjecture of A. Lins, W. de Melo and C.C.Pugh, Ann. Differential Equation Vol.22.pp 144-148. (2006).