République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Par : **M$^{\text{elle}}$.**

TEBIB Loubna

Intitulé

Estimateur d'erreur a posteriori pour l'équation de la chaleur.

Dirigé par : Dr. A.CHAOUI

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. K.BENARIOUA	MCA	Univ- Guelma
RAPPORTEUR	Dr. A.CHAOUI	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. H.GUEBBAI	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2014

Dédicaces

Au nom du dieu le clément et le miséricordieux louange à ALLAH le tout puissant.
Je dédie ce modeste travail :

A Ma très chère et douce mère, Mon très cher père à qui m'adresse au ciel les vœux les plus ardents pour la conservation de leur santé et de leur vie.

A mes chères sœur :Marwa, Mayssa,Manar.

A mon frère : Seyfeddine .

A mon mari Hassan, à qui je souhaite tout le bonheur du monde. Tu as toujours été pour moi d'une aide très précieuse.

A toute ma famille.

A tous mes amis avec lesquels j'ai partagé mes moments de joie et de bonheur
Que toute personne m'ayant aidé de près ou de loin, trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

A tous ceux qui ont confiance en moi.

LOUBNA

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie le bon Dieu, tout puissant, de m'avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

Ma plus grande gratitude va à mon encadreur. Mr Chaoui Abderrsak , pour sa disponibilité et la confiance qu'elle m'a accordée. Nous remercions enfin les membres de jury pour avoir accepter d'évaluer notre travail.

Afin de n'oublier personne, mes vifs remerciements s'adressent à tous ceux qui m'ont aidée à la réalisation de ce modeste mémoire.

Merci

Table des matières

Introduction

Ce premier travail met en évidence l'élaboration d'estimateurs a posteriori pour l'équation de le chaleur. Il est basé premièrement sur une discrétisation en temps par la méthode de Rothe et en deuxièment d'une discrétisation en espace à l'aide d'éléments finis de Crouziex-Raviart.

Dans la première partie on va étudier l'existence, l'unicité, l'erreur d'estimation du procédure d'approximation. La méthode de Rothe s'est avérée un outil théorique et numérique efficace dans l'étude des problèmes d'évolutions. De tels problèmes ont été étudiés par plusieurs auteurs pour différents type d'équations : parabolique, hyperbolique,...

On propose dans la deuxième partie une brieve description des éléments finis de Crouzeix-Raviart. Ces éléments finis sont de type non conforme autrement dit que l'espace des approximations n'est pas inclus au sens ensembliste dans l'espace de vie de la solution.

Dans le cadre d'éléments finis conformes, plusieurs approches ont été introduites pour définir des estimateurs d'erreur pour l'équation de la chaleur.

Pour être capable d'étendre ces techniques d'éléments finis non conformes à des problèmes de type spatio-temporel, on a besoin comme dans le cas des problèmes statiques elliptique d'estimer un terme de consistance qui apparaît lors d'estimations d'erreurs. Ce terme est contrôlé dans à l'aide d'une décompositions d'Helmholtz de l'erreur.

Une fois le problème discrétisé, on met en œuvre non seulement un indicateur d'erreur a posteriori basé sur le saut normal et le saut tangentiel du gradient de notre approximation, mais aussi un indicateur d'erreur en temps basé sur les gradients successifs de l'approximation. L'équivalence entre l'erreur et les indicateurs est prouvée avec des conditions minimales sur le maillage.

Pour mettre en oeuvre des estimations d'erreur a posteriori, on doit prouver l'existence d'une borne d'erreur η qui vérifie le critére suivant

$$\|u - u_h\|_V \lesssim \eta\,(h, u_h, f_h) + \xi_h\,(f)\,.$$

Où $\xi_h\,(f)$ est une quantité négligeable devant η (termes d'ordre supérieurs). La quantité η se calcul trés facillement à partir des données u_h et f_h, par suite il est facile d'obtenir une borne de l'erreur globale, cette borne est appellée estimateur global. En pratique, l'estimateur global est une somme d'estimateur locaux η_K, où K est une maille de notre triangulation T_{ph}. L'estimateur global s'érit alors

$$\eta = \sqrt{\sum_{K \in T_{ph}} \eta_K^2}.$$

L'objectif de cette thèse est le suivant : la Section 2 rappel le problème continu et sa discrétisation. Dans la Section 3, on donne quelques outils analytiques, en particulier quelques propriétés de l'erreur spatiale ainsi que de sa décomposition de Helmholtz. La Section 4.1 est dédiée à l'analyse a posteriori de la discrétisation en temps. L'efficacité et la fiabilité des estimateurs d'erreur spatiale sont établies dans la Section 4.2.

Chapitre 1

Rappel d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques théorèmes d'analyse fonctionnelle.

1.1 Types d'équations aux dérivées partielles

Il existe une classification des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre.

Considérons par exemple une équation aux dérivées partielles écrite sous la forme :

$$Au_{xx} + Bu_{yy} + Cu_{xy} + Du_x + Eu_y + F = 0$$

L'application "elliptique", "parabolique" ou "hyperbolique" d'une équation aux dérivées partielles correspond à la nature de la conique d'écrite par l'équation caractéristique correspondante, c'est–à-dire :

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0.$$

Donnons maintenant des exemples d'équations elliptiques, paraboliques et hyperboliques.

1.1.1 Problèmes elliptiques

L'équation elliptique modèle est :

$$-\Delta u = f$$

où $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 u$, ∂_i désignant la dérivée partielle par rapport à la $i-ème$ variable (et donc ∂_i^2 la dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la $i-ème$ variable). Cette équation modélise par exemple le phénomène de conduction de la chaleur stationnaire.

1.1.2 Problèmes paraboliques

L'équation parabolique modèle est :

$$u_t - \Delta u = f$$

où u_t désigne la dérivée partielle de u par rapport au temps (u est donc une fonction de x, variable d'espace et de t, variable de temps).
Cette équation modélise par la conduction de la chaleur en régime instationnaire. Cette équation parabolique comporte deux opérateurs : la dérivée d'ordre 1 en temps et la dérivée d'ordre 2 en espace.

1.1.3 Problèmes hyperboliques

Les équations de type hyperbolique interviennent principalement en mécanique des fluides. Elles sont souvent obtenues en négligeant les phénomènes de diffusion (parce qu'ils sont faibles) dans les équations de conservation de la mécanique. L'exemple plus classique d'équation hyperbolique est l'équation des ondes :

$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$

1.2 Espaces de Hilbert

Définition 1.2.1 *(Produit scalaire) :*

On appelle produit scalaire dans un espace vectoriel E, une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E ,on a le produit scalaire de deux éléments x,y de E sous la forme (x,y).

Définition 1.2.2 *(Espace de Hilbert) :*

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (x,y) qui est complet lorsqu'il est normé associée à ce produit scalaire.

Définition 1.2.3 *(L'espace $L^2(\Omega)$) :*

L'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions de carré sommable sur Ω, où Ω est un domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, c'est à dire telles que l'integrale:
$\int_\Omega |f(x)|\, dx \prec \infty$, muni du produit scalaire

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

1.3 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début de siècle et permis de résoudre bon nombre de problème concernant les équations aux dérivées partielles restés sans réponse jusque là.

Nous nous limiterons aux espaces les plus utiles en gardant bien à l'ésprit que la théorie sous-jacente est beaucoup plus vaste.

Dans ce qui suit , sauf mention explicite du contraire, on suppose l'ouvert Ω borné.

1.3.1 L'espace $H^1(\Omega)$

Définition 1.3.1 *On note $H^1(\Omega)$ l'espace fonctionnel linéaire défini par :*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \setminus \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i \right\}$$

que l'on munit du produit scalaire noté $((u,v))_{1,\Omega}$:

$$((u,v))_{1,\Omega} = \int_\Omega (u \cdot v + \nabla u \cdot \nabla v)$$

et par le fait même d'une norme induite :

$$\|u\|_{1,\Omega} = \left((u,u)_{1,\Omega}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega (u^2 + \nabla u^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.3.2 L'espace $H_0^1(\Omega)$

définissons maintenant un autre espace de Sobolev qui est un sous-espace du $H^1(\Omega)$ et qui nous sera très utile pour les problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet.

Définition 1.3.2 *Soit $C_C^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω et dense dans H_0^1. L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $C_C^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.*

On peut définir que $H_0^1(\Omega)$ est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$ puisque tel est le cas des fonctions $C_C^\infty(\Omega)$. En général, $H_0^1(\Omega)$ est strictement plus petit que $H^1(\Omega)$ car $C_C^\infty(\Omega)$ est un sous-espace strict de $C_C^\infty(\overline{\Omega})$.

1.3.3 L'espace $H^{-1}(\Omega)$

Le dual de l'espace de sobolev $H_0^1(\Omega)$ est appelé $H^{-1}(\Omega)$

$$H^{-1}(\Omega) = \left\{ f = v_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v_i}{\partial^2 x_i} \text{ avec } v_0, v_1, \cdots v_n \in L^2(\Omega) \right\}.$$

1.3.4 L'espace $H^2(\Omega)$

On note $H^2(\Omega)$ l'espace

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega),\ \forall i, j \right\}$$

1.4 Quelques inégalités utiles

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall u, v \in L^2(\Omega) : \left| \int_\Omega uv dx \right| \leq \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\left| \int_\Omega \sum_{i=1}^N u_i v_i dx \right| \leq \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^N u_i^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^N v_i^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Inégalité de Cauchy avec l'ε

Qu'on appelle aussi l'ε-**inégalité**

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2,\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall a,\ b.$$

La généralisation de cette inégalité est appelée l'inégalité de Young

$$|ab| \leq \frac{1}{p} |\varepsilon a|^p + \frac{p-1}{p} \left| \frac{b}{\varepsilon} \right|^{\frac{p}{p-1}},\ \forall p > 1.$$

Inégalité de Poincaré-Friedrichs

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) : \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

1.5 Problème abstrait

Soit V un espace de Hilbert réel de produit scalaire $(\cdot)_V$. Fixons une forme bilinéaire continue

$$a : V \times V \to \mathbb{R} : (u, v) \to a(u, v) .$$

La bilinéarité signifiant la linéarité sur u et v, tandis que la continuité est équivalente à l'existence d'une constante $M \succ 0$ telle que :

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V , \ \forall u, v \in V.$$

Nous considérons le problème abstrait (ou variationnel) suivant : étant donné $f \in L^2(\Omega)$,

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V & \text{telle que} \\ a(u, v) = f(v), & \forall v \in V. \end{cases} \tag{1.1}$$

L'existence d'une solution à ce problème est basée sur la coercivité de la forme a : On dit que la forme bilinéaire a est V-elliptique ou coercive sur V si et seulement s'il existe $\alpha \succ 0$ tel que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 , \quad \forall u \in V.$$

Alors on a la théorème suivant :

Théorème 1.5.1 *(Lax-milgram)*

Si la forme bilinéaire $a(u, v)$ est coercive et si $f(v)$ une forme linéaire continue sur V, alors :

Le problème variationnel

$$\begin{cases} \text{chercher la fonction } u \in V & \text{telle que :} \\ a(u, v) = f(v), & \forall v \in V \end{cases}$$

admet une solution unique dans V.

De plus, si a est symétrique, ce problème est équivalent au problème de minimisation

$$\begin{cases} \text{cherchons la fonction } u \text{ qui réalise le minimum dans } V \text{ de} \\ J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v) \end{cases}$$

1.6 Approximation interne du problème

On reprend le cadre abstrait du §"1.5" : Soient V un espace Hilbert réel, une forme bilinéaire $a : V \times V \to \mathbb{R}$, continue est V-elliptique.

La méthode d'approximation interne (dite méthode de Galerkin) du problème (1.1) consiste à remplacer l'espace V par une famille de sous-espaces V_h de dimension finie, $h \succ 0$ étant paramètre réel destiné à tendre vers 0, de sorte que V_h tend vers V, lorsque $h \to 0$.

Ainsi pour chaque h, on résout le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h, & \text{solution de} \\ a(u_h, v_h) = f(v_h), & \forall v_h \in V_h \end{cases} \tag{1.2}$$

la méthode précédente s'appelle méthode d'approximation interne car tous les espaces V_h sont supposés inclus dans V.

Lemme 1.6.1 *(de Céa)*

Soient $u \in V$ la solution du problème (1.1) et $u_h \in V_h$ solution du problème (1.2). Alors il existe une constante C indépendante de h telle que :

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \inf_{u \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

Démonstration

On a immédiatement en vertu des problèmes (1.1) et (1.2) :

$$a(u, v) = f(v) \qquad , \forall v \in V$$

$$a(u_h, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

Puisque $V_h \subset V$, on peut prendre $v = v_h$ dans la première équation et soustraire pour obtenir :

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \qquad , \forall v_h \in V_h$$

En particulier :

$$a(u - u_h, u_h) = 0$$

et on en conclut que :

$$a(u - u_h, u - u_h) \; = a\,(u - u_h, u - v_h)\,, \quad \forall v_h \in V_h$$

la coercivité et la continuité de la forme bilinéaire a nous permettent alors d'écrire :

$$\alpha \left\| u - u_h \right\|_V^2 \leq C \left\| u - u_h \right\|_V \left\| \, u - v_h \right\|_V \;, \quad \forall v_h \in V$$

ce qui entraîne que :

$$\left\| u - u_h \right\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \left\| \, u - v_h \right\|_V \,, \quad \forall v_h \in V_h$$

puisque cette dernière inégalité est vraie quel que soit $v_h \in V_h$, on a le résultat.

Définition 1.6.1 *On dit que la famille des problèmes $a(u_h, v_h) = f\,(v_h)\,, \forall v_h \in V_h$. associée à V_h est convergente si et seulement si :* $\lim\limits_{h \to 0} \left\| u - u_h \right\|_V = 0$.

On dit que la convergence est d'ordre r si et seulement si il existe $C \succ 0$ (indépendant de h) tel que

$$\left\| u - u_h \right\|_V \leq C h^r.$$

1.7 Èléments finis

La méthode des éléments finis consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres, comme par exemple, ses valeurs en certains points (les nœuds du maillage).

Avantages : traitement possible de géométries complexes, détermination plus naturelle des conditions aux limites, possibilité de démonstrations mathématiques de convergence et de majoration d'erreurs.

Inconvénients : Complexité de mise on œuvre et coût en temps de calcul et en mémoire.

1.8 Le maillage

Dans la méthode des éléments finis, la construction du sous espace V_h nécessite de la discrétisation préalable du domaine Ω en éléments géométriques simples. La discrétisation du domaine Ω est un problème technique difficile et la qualité du maillage est cruciale pour la qualité de l'approximation .
En dimension deux, les éléments sont des triangules ou des quadrangles de côtés droits ou curvilignes. En dimension trois, ce sont des tétraèdres ou hexaèdres.
Un maillage en éléments finis doit satisfaire les critères suivants :

1/ Les éléments K_i du maillage doivent recouvrir le domaine Ω :

$$\cup_i K_i = \Omega$$

Ceci implique que, par exemple en dimension deux ce domaine soit polygonal ou approché par un polygone si l'on utilise des éléments droits.
2/ l'intersection de deux éléments distincts ne peut être que :

-l'ensemble vide.

-un sommet.

-un côté.

-une face (en dimension trois).

1.9 Formules de Green

Version 1 :

Si $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a :

$$-\int_\Omega \Delta u(x)\, v(x)\, dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial v} v d\delta$$

avec $\frac{\partial u}{\partial v} = \nabla u \cdot v$ où v est un vecteur normal extérieur à Γ.

Version 2 :

La valeur moyenne d'une fonction v sur une arête/face E est définie par :

$$M_E(v) = \frac{1}{|E|} \int_E v.$$

Nous aurons également besoin des formules de Green suivantes : si D est un ouvert borné de R^2 et $v, w \in H^1(D)$, alors on a

$$\int_D \nabla v \cdot \operatorname{curl} w = \int_{\partial D = r} v \operatorname{curl} w \cdot n = \int_{\partial D} \nabla v \cdot tw, \tag{1.3}$$

où t est le vecteur unitaire tangent le long de ∂D et $curlw$ le vecteur défini comme suit $\mathbf{curl}w = \begin{pmatrix} \partial_2 w \\ -\partial_1 w \end{pmatrix}$.

En outre, si D est un ouvert borné de R^3 et $v \in H^1(D), w \in H^1(D)^3$ alors on a :

$$\int_D \nabla v \cdot curlw = \int_{\partial D} vcurlw \cdot n = \int_{\partial D} (\nabla v \times n) \cdot w. \tag{1.4}$$

Chapitre 2

Discrétisations du problème

Soit Ω un ouvert borné de $R^d, d = 2$ ou 3, avec un bord Γ polygonal ($d = 2$) ou polyèdral ($d = 3$). Soit T un nombre positive fixé.

On considère l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^d$. Soit u une solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega\times]0, T[, \\ u(., t) = 0 & \text{sur } \Gamma\times]0, T[, \\ u(., 0) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

La donnée $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ et la valeur initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$. Sous ces conditions, le problème (2.1) ou de manière équivalente

$$(\partial_t u(t), v) + (\nabla u(t), \nabla v) = (f(t), v), \forall v \in H_0^1(\Omega), \forall t \in (0, T), \tag{2.2}$$

possède une unique solution faible dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$.

2.1 Discrétisation en temps par la méthode de Rothe

On suppose maintenant que la donnée $f \in C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$. On introduit également une partition de $[0, T]$ en sous intervalles $[t_{p-1}, t_p], 1 \leq p \leq N$ tels que $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$. On dénote par $\tau_p = t_p - t_{p-1}$ la longueur de $[t_{p-1}, t_p]$ et par $\tau = max_p \tau_p$.

L'approximation semi-discrète du problème continu (2.1) par la méthode de Rothe consiste à déterminer une suite $(u^p)_{0\leq p\leq N}$ solution de

$$\begin{cases} \dfrac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} - \Delta u^p = f^p & \text{dans } \Omega \qquad 1 \leq p \leq N, \\ u^p = 0 & \text{sur } \Gamma \qquad 1 \leq p \leq N, \\ u^0 = u_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

avec $f^p = f(.,t_p)$. Ce problème admet une solution faible unique $u^p \in H_0^1(\Omega)$ dont la formulation est

$$\int_\Omega u^p v + \tau_p \int_\Omega \nabla u^p \cdot \nabla v = \int_\Omega u^{p-1} v + \tau_p \int_\Omega f^p v, \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.4}$$

2.2 Problème complètement discrétisé

2.2.1 Éléments finis de Crouzeix-Raviart

1) Description topologique

Nous fixons un maillage T_{ph} de Ω qui est régulier au sens de Ciarlet [6] autrement dit, il existe $\sigma > 0$ tel que

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma, \qquad \forall K \in T_{ph}, \tag{2.5}$$

où h_K et ρ_K désignent respectivement le diamètre de K et le diamètre de la plus grande boule inscrite dans K. Tous les éléments sont des triangles/ tétraèdres notés K. l'ensemble de toutes les arêtes/faces de T_{ph} est symbolisé par ξ_{ph}. On définit également l'ensemble ξ_{ph}^{int} des arêtes/faces intérieures de T_{ph} et l'ensemble ξ_K des arêtes/faces d'un élément K. Enfin pour une arête /face donnée $E \in \xi_K \cap \xi_L$, on désigne par h_E, la longueur ou le diamètre d'un élément E.

Il est également nécessaire de définir des patchs locaux : pour un élément K, on définit w_K comme la réunion de tous les éléments qui partagent une arête/face avec

K. Pour une arête/face E, w_E désigne la réunion des triangles/tétraèdres ayant E pour arête/face.

Enfin, pour un nœud x, on définit w_x comme la réunion de tous les triangles/tétraèdres ayant x pour nœud. De la même manière, on définit par $\tilde{w}_K$ et $\tilde{w}_E$ la réunion de tous les triangles/tétraèdres partageant respectivement un nœud avec K et E. N_{ph} représente l'ensemble des nœuds de la triangulation T_{ph} et N_{ph}^{int} l'ensemble des nœuds intérieurs de la triangulation T_{ph}.

Le problème (2.4) est maintenant discrétisé par une méthode d'éléments finis non conformes. Pour tout $p = 0, 1, \cdots, N$, On introduit l'espace d'élément finis non conformes de Crouzeix-Raviart :

$$X_{ph}^0 = \{v \in L^2(\Omega) : v_{|K} \in P_1, \forall K \in T_{ph},$$

$$\int_E v_{|K} = \int_E v_{|L}, \forall E \in \xi_K \cap \xi_L \cap \xi_{ph}^{int}, K, L \in T_{ph},$$

$$\int_E v_{|K} = 0, \forall E \in \xi_K \cap \Gamma, K \in T_{ph}\}.$$

Dans le cadre 2D, l'espace peut être reformulé comme suit :

$$X_{ph}^0 = \{v \in X_{ph} : v = 0 \text{ au milieu des arêtes du bord } \Gamma$$

avec

$$\begin{aligned} X_{ph} \quad &= \quad \{v \in L^2(\Omega) : v_{|K} \in P_1, \forall K \in T_{ph}, \\ &\qquad v \text{ est continue au milieu des arêtes}\} \end{aligned}$$

2) **Définitions et propriétés**

On utilisera également, lors de l'analyse par éléments finis des équations aux dérivées partielles, la propriété suivantes :

$$\int_E [[u_h]]_E = 0 \qquad ,\forall E \in \xi_{ph}, \ \forall u_h \in X^0_{ph}, \tag{2.6}$$

où le saut d'une fonction v à travers une arête/face E au point x est défini par

$$[[v(x)]]_E = \begin{cases} \lim\limits_{\alpha \to 0^+} v(x + \alpha n_E) - v(x - \alpha n_E) & \text{si } E \in \xi^{int}_{ph}, \\ v(x) & \text{si } E \in \xi_h \setminus \xi^{int}_{ph}. \end{cases}$$

Notons également que le signe de $[[v(x)]]_E$ dépend de l'orientation de η_E. Néanmoins,des quantités telles que le saut du gradient $[[\nabla v \cdot n_E]]_E$ sont indépendantes de cette orientation. Pour une fonction $v \in X^0_{ph}$, on définit le gradient discontinu $\nabla_h v$ par :

$$(\nabla_h v)_{\backslash K} = \nabla_{v \backslash K}, \forall K \in T_{ph}.$$

Le problème complètement discrétisé (2.1) par la méthode de Rothe et une discrétisation spatiale par éléments finis de Crouzeix-Raviart est donnée par : étant donnée une approximation $u^0_h \in X^0_{0h}$ de u_0, trouver $u^p_h \in X^0_{ph}$, $1 \leq p \leq N$, telle que :

$$\int_\Omega u^p_h v_h + \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla u^p_h \nabla v_h = \int_\Omega u^{p-1}_h v_h + \tau_p \int_\Omega f^p v_h \tag{2.7}$$

pour tout $v_h \in X^0_{ph}$.

Définition

Soit u^p une solution de (2.4) et u^p_h une solution de (2.7), alors on note l'erreur spatiale par

$$e^p = u^p - u^p_h.$$

2.2.2 Opérateurs d'interpolation de Clément

1) Èlément finis conformes de premier ordre

Nous avons défini précédemment les éléments fini conforme P_1

$$V_{ph} = \{v \in H^1(\Omega) : v_{|K} \in P_1, \forall K \in T_{ph}\},$$

avec

$$V_{ph}^0 = V_{ph} \cap H_0^1(\Omega).$$

2) Définition

Pour notre analyse a posteriori,nous avons besoin de l'interpolé de Clément.

Pour $p = 1, \cdots, N$, on définit

$$Y_{ph} = \{v \in L^2(\Omega) : v_{|K} \in H^1(K), \forall K \in T_{ph},$$
$$\int_E v_{|K} = \int_E v_{|L}, \forall E \in \xi_K \cap \xi_L \cap \xi_{ph}^{int}, K, L \in T_{ph}\},$$

$$Y_{ph}^0 = \{v \in L^2(\Omega) : v_{|K} \in H^1(K), \forall K \in T_{ph},$$
$$\int_E v_{|K} = \int_E v_{|L}, \forall E \in \xi_K \cap \xi_L \cap \xi_{ph}^{int}, K, L \in T_{ph},$$
$$\int_E v_{|K} = 0, \forall E \in \xi_K \cap \Gamma, K \in T_{ph}\}.$$

Remarque"a" Notez que $H^1(\Omega) \subset Y_{ph}$ et que $X_{ph}^0 \oplus H_0^1(\Omega) \subset Y_{ph}^0$.

L'opérateur d'interpolation de Clément est défini comme suit : on définit de manière standard l'application qui à tout nœud x associe $\lambda_x \in V_{ph}$ vérifiant :

$$\lambda_x(y) = \delta_{x,y}, \forall y \in N_{ph}.$$

Pour tout élément $v \in Y_{ph}$ et $w \in Y_{ph}^0$, on définit les opérateurs $I_C v$ et $I_C^0 w$ par

$$I_C v = \sum_{x \in N_{ph}} |w_x|^{-1} (\int_{w_x} v) \lambda_x, \tag{2.8}$$

$$I_C^0 w = \sum_{x \in N_{ph}} |w_x|^{-1} \left(\int_{w_x} w \right) \lambda_x. \tag{2.9}$$

Remarque "b" $I_C v$ appartient à V_{ph}, alors que $I_C^0 w$ appartient à V_{ph}^0.

3) Propriétés de l'opérateur d'interpolation de Clément

Les opérateurs de l'interpolation de Clément définis précédemment vérifient les propriétés suivantes.

Lemme Pour tout $v \in Y_{ph}$ et $w \in Y_{ph}^0$, on a :

$$\|v - I_C v\|_K \lesssim h_K \|\nabla_h v\|_{\tilde{w}_K}, \forall K \in T_{ph}, \tag{2.10}$$

$$\|v - I_C v\|_E \lesssim h_E^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h v\|_{\tilde{w}_E}, \forall E \in \xi_{ph}, \tag{2.11}$$

$$\left\|w - I_C^0 w\right\|_K \lesssim h_K \|\nabla_h w\|_{\tilde{w}_K}, \forall K \in T_{ph}, \tag{2.12}$$

$$\left\|w - I_C^0 w\right\|_E \lesssim h_E^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h w\|_{\tilde{w}_E}, \forall E \in \xi_{ph}^{int}, \tag{2.13}$$

$$\left\|\nabla I_C^0 w\right\|_K \lesssim \|\nabla_h w\|_{\tilde{w}_K}, \qquad \forall K \in T_{ph}. \tag{2.14}$$

Démonstration

Toutes ces propriétés sont démontrées dans [8]. On pourra également se référer à [14, 16] pour des estimations équivalentes faisant intervenir d'autres opérateurs.

Pour terminer nous introduisons quelques notations relatives aux sauts normal et tangentiel du gradient de u_h^p.

On définit les quantités $J_{E,n}^p$ et $J_{E,t}^p$ comme suit :

$$J_{E,n}^p = \begin{cases} [[\nabla u_h^p \cdot n_E]]_E & \text{si } E \in \xi_{ph}^{int}, \\ 0 & \text{si } E \in \xi_{ph} \setminus \xi_{ph}^{int}. \end{cases}$$

Si $d = 2$, alors

$$J_{E,t}^p = \begin{cases} [[\nabla u_h^p \cdot t_E]]_E & \text{si } E \in \xi_{ph}^{int}, \\ -\nabla u_h^p \cdot t_E & \text{si } E \in \xi_{ph}^p \setminus \xi_{ph}^{int}. \end{cases}$$

Si $d = 3$, alors

$$J_{E,t}^p = \begin{cases} [[\nabla u_h^p \cdot n_E]]_E & \text{si } E \in \xi_{ph}^{int}, \\ -\nabla u_h^p \cdot n_E & \text{si } E \in \xi_{ph}^p \setminus \xi_{ph}^{int}. \end{cases}$$

Chapitre 3

Outils et propriétés analytiques

Dans cette section, on établit quelques propriétés satisfaites par l'erreur spatiale e^p. Celles-ci seront particulièrement utiles pour établir des bornes d'erreur.

3.1 Relations d'orthogonalité

Lemme 3.1.1 *(Orthogonalité au sens de Galerkin).*

l'erreur e^p satisfait la relation d'orthogonalité de Galerkin suivante :

$$\sum_{K\in T_{ph}} \int_k \nabla_h e^p \cdot \nabla v_h = \int_\Omega \frac{e^{p-1} - e^p}{\tau_p} v_h, \forall v_h \in V_{ph}^0. \tag{3.1}$$

Démonstration

Il suffit de soustraire (2.4) avec $v = v_h \in V_{ph}^0$ à l'identité (2.7)

$$\int_\Omega u^p v_h + \tau_p \int_\Omega \nabla u^p \cdot \nabla v_h - \int_\Omega u_h^p v_h - \tau_p \sum_{K\in T_{ph}} \int_K \nabla u_h^p \nabla v_h$$
$$= \int_\Omega u^{p-1} v + \tau_p \int_\Omega f^p v - \int_\Omega u_h^{p-1} v_h - \tau_p \int_\Omega f^p v_h.$$

on obtient

$$\int_\Omega e^p v_h + \tau_p \sum_{K\in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \nabla v_h = \int_\Omega e^{p-1} v_h$$

par suite

$$\sum_{K\in T_{ph}}\int_k \nabla_h e^p \cdot \nabla v_h = \int_\Omega \frac{e^{p-1}-e^p}{\tau_p} v_h, \forall v_h \in V_{ph}^0.$$

Lemme 3.1.2 *Soit $\varphi \in H^1(\Omega)$ si $d=2$ et $\varphi \in H^1(\Omega)^3$ si $d=3$. Alors l'erreur satisfait l'identité suivante :*

$$\int_\Omega \nabla_h e^p \operatorname{curl}\varphi = \sum_{E\in\xi_{ph}}\int_E J_{E,t}^p \cdot \varphi. \tag{3.2}$$

Démonstration

Supposons que $d=2$. Une intégration par parties dans Ω sur chaque élément K donne (cf.(1.3))

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla_h e^p \cdot \operatorname{curl}\varphi &= \int_\Omega \nabla u^p \cdot \operatorname{curl}\varphi - \sum_{K\in T_{ph}}\int_k \nabla u_h^p \cdot \operatorname{curl}\varphi \\
&= \int_\Gamma \operatorname{curl}\varphi \cdot n u^p - \sum_{K\in T_{ph}}\int_{\partial K} \nabla u_h^p \cdot t_K \varphi
\end{aligned}$$

Comme $u^p \in H_0^1(\Omega)$ et $\varphi \in H^1(\Omega)$, on conclut en utilisant la définition de $J_{E,t}^p$. En utilisant la propriété (1.4), la preuve est similaire en 3D.

Lemme 3.1.3 *(Orthogonalité de l'erreur).*

L'erreur satisfait :

$$\sum_{K\in T_{ph}}\int_K \nabla_h e^p \cdot \operatorname{curl}\varphi_h = 0,\ \forall\varphi_h \in V_{ph} \text{ si } d=2 \text{ et } \varphi_h \in (V_{ph})^3 \text{ si } d=3. \tag{3.3}$$

Démonstration

Considérons en élément arbitraire φ_h dans V_{ph} si $d = 2$ ou dans $(V_{ph})^3$ si $d = 3$. Comme précédemment, une intégration par parties (cf. les identités (1.3)) et (1.4)), on obtient (en rappelant que $u^p \in H_0^1(\Omega)$)

$$\begin{aligned}
\sum_{K\in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \operatorname{curl}\varphi_h &= \int_\Omega \nabla u^p \cdot \operatorname{curl}\varphi_h - \sum_{K\in T_{ph}} \int_K \nabla_h u_h^p \cdot \operatorname{curl}\varphi_h \\
&= \int_\Gamma u^p \cdot \operatorname{curl}\varphi_h \cdot n - \sum_{K\in T_{ph}} \int_{\partial K} u_h^p \cdot \operatorname{curl}\varphi_h \cdot n_K \\
&= -\sum_{K\in T_{ph}} \int_{\partial K} u_h^p \cdot \operatorname{curl}\varphi_h \cdot n_K \\
&= -\sum_{K\in \xi_{ph}} \int_E [[u_h^p]]_E \operatorname{curl}\varphi_h \cdot n_E \\
&= -\sum_{K\in \xi_{ph}} (\operatorname{curl}\varphi_h \cdot n_E) \int_E \cdot [[u_h^p]]_E ,
\end{aligned}$$

comme la fonction $(curl\varphi_h.n_E)\backslash_E$ est constante sur $E \in \xi_{ph}$.La propriété des éléments finis de Crouzeix-raviart (2.6) satisfaite par $u_h^p \in X_{ph}^0$, nous permet de conclure cette preuve.

3.2 Relations de l'erreur

Lemme 3.2.1 *L'erreur e^p satisfait :*

$$\sum_{K\in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \nabla w = \sum_{K\in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \right) w + \sum_{E\in \xi_{ph}} \int_E J_{E,n}^P w,$$

pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$.

Démonstration

Une intégration par parties sur chaque élément et le fait que $\Delta u_h^p = 0$ pour tout élément de $K \in T_{ph}$ montre que

$$\begin{aligned}
\sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \nabla w &= \int_\Omega \nabla u^p \cdot \nabla w - \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla u_h^p \cdot \nabla w \\
&= \int_\Omega \left(f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \right) w \\
&\quad - \sum_{K \in T_{ph}} \left(- \int_K \Delta u_h^p w + \int_{\partial K} n \cdot \nabla u_h^p w \right) \\
&= \int_\Omega \left(f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \right) w \\
&\quad - \sum_{E \in T_{ph}} \sum_{E \in \xi_K} \int_E n \cdot \nabla u_h^p w.
\end{aligned}$$

On conclut en utilisant la définition de $J_{E,n}^p$ et la continuité de w à travers les arêtes/faces.

Corollaire 3.2.1 *Pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$ et $\varphi \in H^1(\Omega)$ si $d = 2$ et $\varphi \in H^1(\Omega)^3$ si $d = 3$ on a :*

$$\begin{aligned}
\sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot (\nabla w + \operatorname{curl} \varphi) &= \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \right) w \\
&\quad + \sum_{E \in \xi_{ph}} \int_E \left(J_{E,n}^p w + J_{E,t}^p \cdot \varphi \right).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Démonstration

C'est une conséquence directe des Lemmes 3.1.2 et 3.2.1.

D'aprés le Lemme 3.1.2 on a :

$$\int_\Omega \nabla_h e^p \operatorname{curl} \varphi = \sum_{E \in \xi_{ph}} \int_E J_{E,t}^p \cdot \varphi$$

où bien

$$\sum_{K\in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \operatorname{curl} \varphi = \sum_{E\in\xi_{ph}} \int_E J_{E,t}^p \cdot \varphi.$$

D'autre part, le Lemme 3.2.1 implique :

$$\sum_{K\in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \nabla w = \sum_{K\in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p}\right) w + \sum_{E\in\xi_{ph}} \int_E J_{E,n}^P w.$$

On fait la somme entre les deux inégalités, on a donc :

$$\begin{aligned}\sum_{K\in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot (\nabla w + \operatorname{curl} \varphi) \quad &= \quad \sum_{E\in\xi_{ph}} \int_E \left(J_{E,t}^p \cdot \varphi + \sum_{E\in\xi_{ph}} \int_E J_{E,n}^P . w \right) \\ &\quad + \sum_{K\in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p}\right) w.\end{aligned}$$

On rappelle maintenant les résultats suivants (voir [10] en 2D et [7] en 3D ou [11]) :

3.3 Décomposition de Helmholtz de l'erreur

Lemme 3.3.1 *(Décomposition de Helmholtz de l'erreur)*

On a la décomposition de l'erreur suivante

$$\nabla_h e^p = \nabla w^p + \operatorname{curl} \varphi^p, \tag{3.5}$$

avec $\varphi^p \in H^1(\Omega)$ si $d = 2$ et $\varphi^p \in (H^1(\Omega))^3$ si $d = 3$ et $w^p \in H_0^1(\Omega)$.

De plus, les estimations suivantes sont vérifiées :

$$|w^p|_{1,\Omega} \leq \|\nabla_h e^p\|, \tag{3.6}$$

$$|\varphi^p|_{1,\Omega} \lesssim \|\nabla_h e^p\|. \tag{3.7}$$

Démonstration

Considérons le problème de Dirichlet suivant : trouver $w^p \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\nabla_h e^p - \nabla w^p) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ w^p = 0 & \text{sur } \quad \Gamma. \end{cases} \tag{3.8}$$

La formulation faible du problème (3.8) est :

$$\int_\Omega \nabla w^p \cdot \nabla v = \int_\Omega \nabla_h e^p \cdot \nabla v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.9}$$

Comme le champ de vecteurs $\nabla_h e^p - \nabla w^p$ est à divergence nulle sur Ω,i.e.,

$$\operatorname{div}(\nabla_h e^p - \nabla w^p) = 0 \quad \textit{dans } \Omega,$$

Par [11], il existe $\varphi^p \in H^1(\Omega)$ si $d = 2$ et $\varphi^p \in H^1(\Omega)^3$ si $d = 3$ telle que

$$\operatorname{curl} \varphi^p = \nabla_h e^p - \nabla w^p.$$

L'inégalité (3.6), en utilisant (3.9) avec $v = w^p$, est alors démontrée. L'inégalité (3.7) est obtenue comme suit : en utilisant le développement (3.5), on écrit que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\operatorname{curl} \varphi^p|^2 &= \int_\Omega \operatorname{curl} \varphi^p \cdot \operatorname{curl} \varphi^p \\ &= \int_\Omega \operatorname{curl} \varphi^p \cdot (\nabla_h e^p - \nabla w^p). \end{aligned}$$

À l'aide de la formule de Green et de la condition au bord $w^p = 0$ sur Γ, on obtient

$$\int_\Omega |\operatorname{curl} \varphi^p|^2 = \int_\Omega \operatorname{curl} \varphi^p \cdot \nabla_h e^p. \tag{3.10}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous permet de conclure que

$$\|\operatorname{curl} \varphi^p\| \leq \|\nabla_h e^p\|.$$

Si $d = 2$ l'inégelité (3.7) est une conséquence directe des estimations précédentes puisque $|\varphi^p|_{1,\Omega} = \|\operatorname{curl} \varphi^p\|$.

Les lemmes précédents vont nous permettre de prouver les identités suivantes.

Lemme 3.3.2 *L'erreur e^p satisfait les égalités suivantes*

$$\begin{aligned}
\tau_p \int_\Omega \nabla_h e^p \cdot \nabla w^p &= \tau_p \int_\Omega \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) (w^p - I_C^0 w^p) \\
&+\tau_p \sum_{E \in \xi_{ph}} \int_E J_{E,n}^p (w^p - I_C^0 w^p) \\
&- \int_\Omega (e^p - e^{p-1}) w^p,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\int_\Omega \nabla_h e^p \cdot \operatorname{curl} \varphi^p = \sum_{E \in \xi_{ph}} \int_E J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C^p \varphi), \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
\|e^p\|^2 + \tau_p \int_\Omega |\nabla_h e^p|^2 &= (e^{p-1}, e^p) \\
&+(e^p - e^{p-1}, e^p - w^p - I_C^0(e^p - w^p)) \\
&+\tau_p \int_\Omega \nabla_h e^p \cdot \nabla I_C^0 (e^p - w^p) \\
&+\tau_p \int_\Omega \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) (w^p - I_C^0 w^p) \\
&+\tau_p \sum_{E \in \xi_{ph}} \int_E (J_{E,n}^p (w^p - I_C^0 w^p) + J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p)).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Démonstration

L'identité(3.12) est issue de la relation de Galerkin, du Lemme 3.1.1 avec $v_h = I_C^0 w^p \in V_{ph}^0$ et du Lemme 3.2.1. La seconde identité (3.13) est une conséquence du lemme 3.2.2 et de relation d'orthogonalité de lemme 3.1.3 avec $\varphi_K = I_C \varphi^p$. En utilisant la décomposition de l'erreur (3.5) on peut écrire

$$\tau_p \int_\Omega |\nabla_h e^p|^2 = \tau_p \int_\Omega \nabla_h e^p \cdot (\nabla w^p + \operatorname{curl} \varphi^p).$$

Les identités (3.12), (3,13) mènent directement à

$$\begin{aligned}
\tau_p \int_\Omega |\nabla_h e^p|^2 &= -\int_\Omega (e^p - e^{p-1}) w^p \\
&+\tau_p \int_\Omega (f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p})(w^p - I_C^0 w^p) \\
&+\tau_p \sum_{E\in\xi_{ph}} \int_E (J_{E,n}^p (w^p - I_C^0 w^p) + J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p)).
\end{aligned}$$

On écrit de manière équivalente que

$$\begin{aligned}
\|e^p\|^2 + \tau_p \int_\Omega |\nabla_h e^p|^2 &= (e^{p-1}, e^p) \\
&+(e^p - e^{p-1}, e^p - w^p - I_C^0(e^p - w^p)) \\
&+(e^p - e^{p-1}, I_C^0(e^p - w^p)) \\
&+\tau_p \int_\Omega \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p}\right)(w^p - I_C^0 w^p) \\
&+\tau_p \sum_{E\in\xi_{ph}} \int_E \left(J_{E,n}^p \left(w^p - I_C^0 w^p\right) + J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p)\right).
\end{aligned}$$

Cette dernière identité et la relation d'orthogonalité de Galarkin (3.1) conduisent au résultat (3.14).

Chapitre 4

Analyse a posteriori de l'erreur

4.1 Analyse a posteriori de la discrétisation en temps

4.1.1 Borne supérieure de l'erreur

En s'inspirant de la littérature existante [12, 05], on définit des indicateurs d'erreur en temps :

$$\eta_t^p = \tau_p^{\frac{1}{2}} \left\|\nabla_h(u_h^p - u_h^{p-1})\right\|, 1 \leq p \leq N. \tag{4.1}$$

Dans la définition de l'indicateur(4,1), nous avons écrit $\nabla_h(u_h^p - u_h^{p-1})$ alors que u_h^{p-1} et u_h^p n'appartiennent pas à la même triangulation, mais la différence $u_h^p - u_h^{p-1}$ peut être vue comme une fonction P_1 sur la triangulation $T_{ph} \cap T_{p-1,h}$. Le gradient discontinu est alors calculé sur la triangulation $T_{ph} \cap T_{p-1,h}$.

Pour plus de commodité, on introduit les notations suivantes : on dénote par $\pi_\tau f$ la fonction étagée constante à $f(t_p)$ sur chaque intervalle (t_{p-1}, t_p), $1 \leq p \leq N$. Pour une suite $v^p \in X_{ph}^0 \oplus H_0^1\ (\Omega), 0 \leq p \leq N$, on dénote par v_τ son interpolé de Lagrange, qui est a *fortiori* affine sur chaque intervalle $[t_{p-1}, t_p]$, $1 \leq p \leq N$, et égal à v^p au point t_p,i.e., défini par,

$$v_\tau(t) = \frac{t_p - t}{\tau_p} v^{p-1} + \frac{t - t_{p-1}}{\tau_p} v^P,\ \forall t \in [t_{p-1}, t_p], 1 \leq p \leq N.$$

Enfin, on note $e_\tau = u - u_\tau$, l'erreur de discrétisation en temps. Étant donné que

$$\partial_t u_\tau = \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \quad \text{sur } (t_{p-1}, t_p),$$

la formulation semi-discrète (2.4) est équivalente à

$$(\partial_t u_\tau(t), v) + (\nabla u^p, \nabla v) = (f^p, v), \forall v \in H_0^1(\Omega), \forall t \in (t_{p-1}, t_p). \tag{4.2}$$

En prenant la différence avec (2.2), on en déduit l'équation résiduelle suivante

$$\begin{aligned}(\partial_t e_\tau(t), v) + (\nabla e_\tau(t), \nabla v) = & ((f - f^p)(t), v) \\ & + (\nabla(u^p - u_\tau)(t), \nabla v), \\ & \forall v \in H_0^1(\Omega), \ \forall t \in (t_{p-1}, t_p).\end{aligned} \tag{4.3}$$

Cette équation nous permet de montrer le théorème suivant .

Théorème 4.1.1 *(Borne d'erreur supérieure en temps)*

l'erreur en temps e_τ vérifie l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}\|e_\tau(t_n)\|^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla e_\tau(s)\|^2 \, ds \lesssim & \sum_{p=1}^{n} (\eta_t^p)^2 \\ & + \int_0^{t_n} \|\nabla_h (u_\tau - u_{h\tau})(s)\|^2 \, ds \\ & + \|f - \pi_\tau f\|^2_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))} .\end{aligned}$$

Démonstration

L'équation résiduelle (4.3) donne $(voir[05])$

$$\begin{aligned}\|e_\tau(t_n)\|^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla e_\tau(t)\|^2 \, dt \leq & \ 2\sum_{p=1}^{n} \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla(u^p - u_\tau)(s)\|^2 \, ds \\ & + 2 \|f - \pi_\tau f\|^2_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))} .\end{aligned} \tag{4.5}$$

Par définition de u_τ, on a clairement

$$\int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla(u^p - u_\tau)(s)\|^2 ds = \frac{\tau_p}{3} \left\|\nabla(u^p - u^{p-1})\right\|^2. \tag{4.6}$$

L'inégalité triangulaire nous permet alors d'écrire que

$$\tau_p^{\frac{1}{2}} \left\|\nabla\left(u^p - u^{p-1}\right)\right\| \leq \eta_t^p + \tau_p^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h(u^p - u_h^p)\| + \tau_p^{\frac{1}{2}} \left\|\nabla_h(u_h^{p-1} - u^{p-1})\right\|.$$

De plus [05] donnent

$$\tau_p \|\nabla_h(u^p - u_h^p)\|^2 + \tau_p \left\|\nabla_h(u_h^{p-1} - u^{p-1})\right\|^2 \lesssim \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(s)\|^2 ds. \tag{4.7}$$

L'identité précédente, ainsi que ces deux estimations donnent

$$\int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla\left(u^p - u_\tau\right)\|^2 ds \lesssim (\eta_t^p) + \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla_h\left(u_\tau - u_{h\tau}\right)(s)\|^2 ds. \tag{4.8}$$

Cette estimation dans (4.5) permet alors conclure.

4.1.2 Borne inférieure de l'erreur

Théorème 4.1.2 *(Borne inférieure de l'erreur en temps).*

Pour tout $p = 1, ..., N$, on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \eta_t^p \lesssim\ & \|\nabla_h e_\tau\|_{L^2(t_{p-1},t_p;L^2(\Omega))} + \|\partial_t e_\tau\|_{L^2(t_{p-1},t_p;H^{-1}(\Omega))} \\ & + \tau_p^{\frac{1}{2}} \left(\|\nabla_h(u^p - u_h^p)\| + \left\|\nabla_h(u^{p-1} - u_h^{p-1})\right\|\right) \\ & + \|f - \pi_\tau f\|^2_{L^2(t_{p-1},t_p;H^{-1}(\Omega))}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Démonstration

À l'aide de l'inégalité triangulaire,on obtient

$$\eta_t^p \lesssim \tau_p^{\frac{1}{2}} \left\|\nabla(u^p - u_h^{p-1})\right\|$$
$$+ \left\|\nabla_h(u^p - u_h^p)\right\| + \left\|\nabla_h(u^{p-1} - u_h^{p-1})\right\|.$$

L'estimation du terme $\tau_p^{\frac{1}{2}} \left\|\nabla(u^p - u^{p-1})\right\|$ est proposée dans [05], ainsi en utilisant (4.6) (avec $n = p$), en prenant $v = u^p - u_\tau$ dans (4.3) et en intégrant le résultat sur l'intervalle $t \in (t_{p-1}, t_p)$.

4.2 Analyse a posteriori de la discrétisation spatiale

4.2.1 Borne supérieure de l'erreur

L'élément résiduel exact est donné par

$$f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p}.$$

De manière classique [15], ce terme est remplacé par un élément résiduel approché

$$f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p},$$

où f_h^p est une approximation de f^p via des éléments finis P^0 (plus précisément $(f_h^p)_{/K} := \frac{1}{|K|} \int_K f^p$, pour tout $K \in T_{ph}$).

Définition 4.2.1 *Soit $p \geq 1$. L'estimateur d'erreur local η_K^p est défini par*

$$\eta_K^p = h_K \left\| f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right\|_K + \sum_{E \in \xi_K} h_E^{\frac{1}{2}} \left(\left\| J_{E,n}^p \right\|_E + \left\| J_{E,t}^p \right\|_E \right).$$

L'estimateur d'erreur global η^P est donné par

$$(\eta^p)^2 = \sum_{K \in T_{ph}} (\eta_K^p)^2.$$

les termes d'approximation local et global sont donnés par

$$\xi_K^p = h_K \left\| f^p - f_h^p \right\|_{w_K}, \quad (\xi^p)^2 = \sum_{k \in T_{ph}} (\xi_K^p)^2 .$$

Théorème 4.2.1 *(Borne supérieure de l'erreur)*

L'inégalité suivante est vérifiée

$$\begin{aligned} \|e^n\|^2 + \sum_{p=1}^{n} \tau_p \left\|\nabla_h e^p\right\|^2 \quad &\lesssim \quad \sum_{p=1}^{n} \max\left\{h_p^2, \tau_p\right\} (\eta^p)^2 \\ &+ \left\|e^0\right\|^2 + \sum_{p=1}^{n} \tau_p \, (\xi^p)^2 . \end{aligned} \tag{4.10}$$

Démonstration

Cette borne supérieure est une conséquence des lemmes 3.3.1 et 3.3.2. On estime quelques-uns des termes de droite de l'égalité(3.14) du lemme 3.3.7. En utilisant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'estimation (1.12) et la définition de l'estimateur local, on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in T_{ph}} \int_K \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) \left(w^p - I_C^0 w^p\right) \\ \lesssim \quad &\sum_{k \in T_{ph}} h_k \left\| f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right\|_K |w^p|_{1,\tilde{\omega}_K} \\ \lesssim \quad &\sum_{k \in T_{ph}} \eta_k^p \, |w^p|_{1,\tilde{\omega}_K} . \end{aligned}$$

A l'aide de l'inégalité discrète de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\sum_{k\in T_{ph}} \int_K \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) \left(w^p - I_C^0 w^p \right) \lesssim \eta^p \left| w^p \right|_{1,\Omega}. \tag{4.11}$$

De la même manière, en utilisant (2.13) et (2.11), on estime les termes avec les sauts tangentiel et normal des gradients :

$$\begin{aligned}
\sum_{E\in\xi_{ph}} \int_E J_{E,n}^p \left(w^p - I_C^0 w^p \right) &\leq \sum_{E\in\xi_{ph}} \left\| J_{E,n}^p \right\|_E \left\| w^p - I_C^0 w^p \right\|_E \\
&\lesssim \sum_{E\in\xi_{ph}} \left\| J_{E,n}^p \right\|_E h_E^{\frac{1}{2}} \left| w^p \right|_{1,\tilde{w}_E} \\
&\lesssim \sum_{K\in T_{ph}} \eta_K^p \left| w^p \right|_{1,\tilde{w}_K}. \\
\sum_{E\in\xi_{ph}} \int_E J_{E,t}^p \cdot \left(\varphi^p - I_C \varphi^p \right) &\leq \sum_{E\in\xi_{ph}} \left\| J_{E,t}^p \right\|_E \left\| \varphi^p - I_C \varphi^p \right\|_E \\
&\lesssim \sum_{E\in\xi_{ph}} \left\| J_{E,t}^p \right\|_E h_E^{\frac{1}{2}} \left| \varphi^p \right|_{1,\tilde{w}_E} \\
&\lesssim \sum_{K\in T_{ph}} \eta_K^p \left| \varphi^p \right|_{1,\tilde{w}_K}.
\end{aligned}$$

Comme précédemment, l'inégalité discréte de Cauchy-Schwarz donne

$$\sum_{E\in\xi_{ph}} \int_E J_{E,n}^p \left(w^p - I_C^0 w^p \right) \lesssim \eta^p \left| w^p \right|_{1,\Omega}, \tag{4.12}$$

$$\sum_{E\in\xi_{ph}} \int_E J_{E,n}^p \left(w^p - I_C^0 w^p \right) \lesssim \eta^p \left| w^p \right|_{1,\Omega}, \tag{4.13}$$

L'estimation (2.12) nous permet d'évaluer le terme :

$$\sum_{E\in T_{ph}} \int_K \left(f^p - f_h^p \right) \left(w^p - I_C^0 w^p \right) \leq \sum_{K\in T_{ph}} \left\| f^p - f_h^p \right\|_K \left| w^p \right|_{1,\tilde{w}_K},$$

et par conséquent

$$\sum_{E\in T_{ph}} \int_K \left(f^p - f_h^p \right) \left(w^p - I_C^0 w^p \right) \lesssim \xi^P \left| w^p \right|_{1,\Omega}. \tag{4.14}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation (2.12), on obtient

$$\left|\left(e^p - e^{p-1}, e^p - w^p - I_C^0\left(e^p - w^p\right)\right)\right| \lesssim h_p \left\|e^p - e^{p-1}\right\| \left\|\nabla_h\left(e^p - w^p\right)\right\|.$$

Les estimations précédentes et l'inégalité (2.14) injectées dans l'identité (3.14) permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
\|e^p\|^2 + \tau_p \int_\Omega |\nabla_h e^p|^2 \quad \leq \quad & \left(e^{p-1}, e^p\right) \\
& + C h_p \left\|e^p - e^{p-1}\right\| \cdot \left\|\nabla_h\left(e^p - w^p\right)\right\| \\
& + C\tau_p \left\|\nabla_h e^p\right\| \cdot \left\|\nabla_h\left(e^p - w^p\right)\right\| \\
& + C\tau_p \eta^p \left|\varphi^p\right|_{1,\Omega} \\
& + C\tau_p\left(\eta^p + e^p\right)\left|w^p\right|_{1,\Omega},
\end{aligned} \tag{4.15}$$

avec une constante $C \succ 0$ dépendant uniquement de l'angle minimal de T_{ph}.

Cette inégalité ne donne pas directement l'estimation désirée à cause des facteurs $\left\|\nabla_h\left(e^p - w^p\right)\right\|$, $\left|w^p\right|_{1,w}$ et $\left|\varphi^p\right|_{1,\Omega}$. On a donc besoin d'estimer ces facteurs. On débute tout d'abord avec le dernier cité. En utilisant les identités(3.10) et (3.13) on peut écrire

$$\int_\Omega \left|\operatorname{curl} \varphi^p\right|^2 = \sum_{E \in \xi_{ph}} \int_E J_{E,t}^P \cdot \left(\varphi^P - I_C \varphi^P\right).$$

En utilisant l'erreur d'approximation (2.11) et la définition de l'estimateur d'erreur a posteriori, on obtient

$$\int_\Omega \left|\operatorname{curl} \varphi^p\right|^2 \lesssim \eta^P \left|\varphi^P\right|_{1,\Omega}.$$

Pour l'estimation de la norme $\nabla_h\left(e^p - w^p\right)$, on commence avec

$$\left\|\nabla_h\left(e^p - w^p\right)\right\|^2 = \int_\Omega \nabla_h\left(e^p - w^p\right) \cdot \nabla_h\left(e^p - w^p\right).$$

En utilisant la décomposition de Helmholtz (3.5), on peut écrire

$$\|\nabla_h (e^p - w^p)\|^2 = \int_\Omega \nabla_h (e^p - w^p) \cdot \operatorname{curl} \varphi^p.$$

l'utilisation du Lemme 3.3.2 et de la formule de Green (en rappelant que $w^p = 0$ sur Γ) permet d'obtenir

$$\|\nabla_h (e^p - w^p)\|^2 = \sum_{E \in \xi_{ph}} \int_E J_{E,t} \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p).$$

En utilisant les estimations (4.13), on obtient

$$\|\nabla_h (e^p - w^p)\|^2 \lesssim \eta^P. \tag{4.16}$$

À l'aide de l'inégalité triangulaire

$$\|\nabla w^p\| \leq \|\nabla_h (w^p - e^p)\| + \|\nabla_h e^p\|,$$

et par l'inégalité classique $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, vérifiée pour tous nombres réels a,b, on obtient

$$\|\nabla w^p\|^2 \leq 2 \|\nabla_h (w^p - e^p)\|^2 + 2 \|\nabla_h e^p\|^2.$$

À l'aide de (4.17) on arrive à

$$\|\nabla w^p\|^2 \leq C (\eta^p)^2 + 2 \|\nabla_h e^p\|^2, \tag{4.17}$$

avec une constante $C \succ 0$ dépendant uniquement de l'angle minimal de T_{ph}.
On peut à présent conclure : en utilisant les estimations(4.16) , (4.17) et l'inégalité de Young dans (4.15), on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_\Omega |e^p|^2 + \tau_p \int_\Omega |\nabla_h e^p|^2 \quad &\leq \quad (e^{p-1}, e^p) \\ &+ C h_p \left\| e^p - e^{p-1} \right\| \eta^p \\ &+ C\tau_p \left\| \nabla_h e^p \right\| \eta^p \\ &+ C\tau_p \left(\left((\eta^p)^2 + \xi^P \right)^2 \right) \\ &+ \frac{1}{8} \tau_p \left| w^p \right|^2_{1,\Omega},\end{aligned}$$

avec une constante $C > 0$ dépendant uniquement de l'angle minimal de T_{ph}.

En utilisant (4.18) pour estimer le terme $|w^p|^2_{1,\Omega}$ et l'inégalité de Young, on arrive finalement à

$$\begin{aligned}\int_\Omega |e^p|^2 + \tau_p \int_\Omega |\nabla_h e^p| \quad &\leq \quad (e^{p-1}, e^p) \\ &+ \frac{1}{2} \left\| e^p - e^{p-1} \right\|^2 + C h_p^2 (\eta^p)^2 \\ &+ C\tau_p \left(\left((\eta^p)^2 + \xi^P \right)^2 \right) \\ &+ \frac{\tau_p}{2} \left\| \nabla_h e^p \right\|^2 \\ &\leq \quad \frac{1}{2} \left\| e^p \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| e^{p-1} \right\|^2 \\ &+ C \left(\max \left\{ h_P^2, \tau_p \right\} (\eta^p)^2 \right) + \tau_p (\xi^p)^2 \\ &+ \frac{\tau_p}{2} \left\| \nabla_h e^p \right\|,\end{aligned}$$

avec une constante $C \succ 0$ dépendant uniquement de l'angle minimal de T_{ph}.

Cette inégalité est équivalente à

$$\left\| e^p \right\|^2 + \tau_p \int_\Omega |\nabla_h e^p|^2 \leq \left\| e^{p-1} \right\|^2 + 2C \left(\max \left\{ h_p^2, \tau_p \right\} (\eta_p^2) + \tau_p \left(\xi^P \right)^2 \right),$$

et on conclut en sommant sur $p = 1, \cdots, n$.

4.2.2 Borne inférieure de l'erreur

Assertion Pour tout $1 \leq p \leq N$, il existe une triangulation conforme $\tilde{T}_{ph}$ telle que tout élément K de $T_{p-1,h}$ ou de T_{ph} soit la réunion d'éléments $\tilde{K}$ de $\tilde{T}_{ph}$ telle que $h_K \sim h_{\tilde{K}}$.

Théorème 4.2.2 *(Borne inférieure de l'erreur locale).*

Si les assertions 4.2.2 sont vérifiées, alors pour tout $1 \leq p \leq N$, on a

$$\eta_K^p \lesssim h_K \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\|_{w_k} + \|\nabla_h e^p\|_{w_k} + \xi_K^p. \tag{4.18}$$

Démonstration voir [05, 17].

Bibliographie

[1] **G. Acosta and R. Deràn**. The maximem angle condition for mixed and nonconforming elements,application to the Stokes equations. SIAM Jornal on Numerical Analysis, 37 : 18-36, (1999).

[2] **T. Apel and S. Nicaise**. The inf-sup condition for some low order elements on anistropic meshes. Calcolo, 41 : 89-113, (2004).

[3] **T. Apel, S. Nicaise, and J.Schöberl**. A non-conforming finite element method with anistopic mesh grading for the Stokes problem in domains with edges. IMA Journal numerical analysis, 21(4) :843,856, (2001).

[4] **A. Bergam,C. Bernardi, and Z.Mghazli**. A posteriori analysis of the finite element discritézation of some parabolic equations.Mathimatics of Computation, 74 : 1117-1138, (2005).

[5] **C. Bernardi and R. Verfürth**. A posteriori error analysis of the fully discretized time-dependent Stockes equations.Mathematical Medelling and Numerical Analysis,M2AN,38 : 437 -455, (2004).

[6] P. G. Ciarlet. The Finite Element Method for Elliptic Problems. North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1978.

[7] **E. Creusé, G. Kunert, and S. Nicaise**. A posteriori error estimation for the Stokes problem : Anisotropic and isotropic discretizations. Math.Models Methods Appl. Sci., 14 : 1297- 1341, (2004).

[8] **P. Clément**. Approximation by finite element fonctions using local regularization. RAIRO Anal.Numér., 9 :77-84, (1975).

[9] **E. A. Dari, R. Durân, C. Padra, and V. Vampa**. Error estimators for nonconforming finite element approximations of the Stokes problem. Mathematical Medelling and Numerical Analysis, M2AN, 64(211) : 1017-1033, (1995).

[10] **E.A. Dari,R. Durân, C. Padra, and V .Vampa**. A Posteriori Error estimators for nonconforming finite element Methods.

[11] **V. Girault and P. Raviart**. Finite element methods for the Navier-stockes equations. Springer, (1986).

[12] **M. Picasso**. Adaptive finite element for a linear parabolic problem. Comput. Method Appl. Mech. Engrg., 167 : 223-237, (1998).

[13] **M. Picasso**. Ananisotropic error andicator based on Zienkiewicz-Zhu error estimatour : application to elliptic and parabolic problem. SIAM Journal on Scientific Computing, 24 : 1328-1355, (2003).

[14] **R. Scott and S. Zhang**. Finite element interpolation of non-smooth functions satisfying boundary conditions. Mathematics of Computation, 54 : 483-493, (1990).

[15] **R. Verfürtch**. A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques. Wiley, Teubner, (1996).

[16] **R. Verfürtch**. Error estimates for quasi-interpolation operators. Mathematical modelling and numerical analysis, M2AN, 33 : 695-713, (1999).

[17] **R. Verfürtch**. A posteriori error estimators for finite element discretisation of the heat equation. Calcolo, 40 : 195-212, (2003).

[18] **C. Bernardi Y. Achdou and F.** Coquel. A priori and a posteriori error analysis of finite volume discretizations of Darcy aquations. Numerische Mathematik, 96 : 17-42, (2003).