République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



**Mémoire**

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Master Académique en Mathématiques**

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Par :

**Melle. Maaichia Chahira**



# Intitulé

# Equation Générales de mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau

**irigé par : Dr.** F. ELLAGGOUNE

**Devant le jury**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **PRESIDENT** | **Dr. M. Z. Aissaoui** | **Prof** | **Univ-Guelma** |
| **RAPPORTEUR** | F. ELLAGGOUNE | **MCA** | **Univ-Guelma** |
| **EXAMINATEUR** | **Dr. H. Fujita Yashima** | **MCA** | **Univ-Guelma** |

**Session Juin 2014**

# Equations générales du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau

**Maaichia Chahira**
**Université 8 Mai 1945 Guelma**

9 juin 2014

# Table des matières

# Chapitre 1

# Introduction

Comme on le connaît bien, l'atmosphère contient l'eau dans l'état gazeux et à la différence des autres molécules comme $N_2$, $O_2$, ..., qui restent toujours en état gazeux dans les conditions ordinaires de l'atmosphère, $H_2O$ peut avoir trois états : gazeux, liquide et solide. La proportion de $H_2O$ dans l'air est très variable ; nous trouvons l'air très humide quand il pleut et l'air très sec par exemple dans les déserts. Comme nous l'observons quotidiennement la présence de la vapeur d'eau dans l'air est un des aspects essentiels de l'évolution des phénomènes météorologiques.

Même si la description du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau, donc avec d'éventuelles gouttelettes d'eau, est cruciale pour la modélisation des phénomènes atmosphériques et météorologiques, l'étude mathématique de ces phénomènes est peu développée jusqu'à maintenant à cause de sa complexité : le mouvement de l'air doit être décrit par les équations de la mécanique des fluides, qui doivent être accouplées avec les équations de la transition de phase de l'eau et celles de coagulation des gouttelettes d'eau. Dans [2] et puis dans [8] on a proposé un modèle mathématique pour le mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau et démontré un théorème d'existence et d'unicité de la solution local pour un système d'équations approché de ce modèle.

Dans le présent mémoire nous allons démontrer, suivant les raisonnements illustrés dans [8], l'existence et l'unicité de la solution locale d'un système d'équations qui modélise le mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau. Comme dans [2] (voir aussi [1], [6]), dans ce mémoire nous considérons seulement la transition de phase de l'eau de gaz en liquide et vice versa. Or, dans les travaux [8], [2], pour des raisons techniques les auteurs ont posé des conditions qui ne sont pas naturelles. Dans le présent mémoire, nous allons mettre en évidence ce point critique et donner quelques idées pour trouver la solution dans des conditions plus naturelles.

Avant de présenter cette problématique, nous rappelons les lignes générales de la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution locale du système d'équations en question. Comme nous le verrons dans la suite, le système d'equations que nous allons examiner sera le système (3.2)–(3.6) et ces équations sont non linéaires. Les inconnues des équations sont la densité de l'air $\varrho$, la densité de la vapeur $\pi$, la densité de l'eau liquide $\sigma$ (densité par l'unité de volume de l'air), la vitesse de l'air $v$ et la température $T$. La pression sera donnée comme fonction de $\varrho$, $\pi$, $T$ (voir (2.1)) et donc ne figure pas comme fonction inconnue dans le système d'équations. Les équations de la vitesse $v$ et de la température $T$, c'est-à-dire (3.2)–(3.3) sont des équations de type parabolique, tandis que les équations des densités (3.4)–(3.6) sont de type de transport (de type hyperbolique du premier ordre). Pour démontrer l'existence d'une solution, on va résoudre d'abord les équations pour $\varrho$,

$\pi$ et $\sigma$ avec $v$ et $T$ données. Pour cette résolution des équations (3.4)-(3.6) avec $v$ et $T$ données, on considère d'abord les équations linéarisées et puis on cherche la solution comme point fixe de l'opérateur défini par la résolution des équations linéarisées. Pour montrer que cet opérateur admet un point fixe, il est essentiel d'obtenir des estimations adéquates des solutions des équations linéarisées. Si nous obtenons la solution des équations (3.4)–(3.6) avec $v$ et $T$ données, nous pouvons procéder pour la résolution des équations linéarisées de (3.2)–(3.3), qui définira une application $G_t$ qui associe à chaque $(\overline{v}, \overline{T}) \in B_t$ la solution $(v, T)$ des équations linéarisées de (3.2)–(3.3), où $B_t$ est un ensemble convenablement choisi des fonctions qui peuvent être la solution. On démontrera que pour $t$ suffisamment petit, l'application $G_t$ est une contraction dans $B_t$, ce qui nous donne l'existence d'une solution. L'unicité de la solution se démontre d'une manière habituelle, c'est-à-dire, par l'estimation de la différence de deux éventuelles solutions.

Retournons à la question sur la problématique des conditions posées. En effet, le résultat que nous venons mentionner est démontré sous la condition que la composante normale de la force extérieure sur la frontière s'annule, c'est-à-dire que $\nabla\Phi \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$ (voir (3.15)). Mais, il est clair que, dans un modèle correspondant à l'atmosphère réelle, la force extérieure $\nabla\Phi$ est la force gravitationnelle ($\Phi$ est le géopotentiel) et que sur la frontière d'un domaine $\Omega$, si on choisit le domaine $\Omega$ d'une manière naturelle, on ne peut pas avoir $\nabla\Phi \cdot n = 0$.

Dans le présent mémoire, nous allons mettre en évidence les points critique de la démonstration relatifs à la condition $\nabla\Phi \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$. Cet examen des détails du calcul nous permet de trouver des cas où l'on pourra résoudre le système d'équations sans imposer cette condition peu naturelle. En effet, dans le dernier chapitre, nous proposons une condition initiale pour $\sigma$ qui nous permettra probablement d'obtenir la solution avec la force extérieure naturelle $\nabla\Phi$.

# Chapitre 2

# Système d'équations

Dans ce chapitre nous rappelons le système d'équations que nous allons examiner, en suivant l'exposé de [2]. Les quantitées physiques qu'on va considérer sont la densité de l'air sec $\varrho$, la densité de la vapeur d'eau $\pi$, la densité de l'eau liquide $\sigma(m)$ contenue dans les gouttelettes de masse $m$, la vitesse $v = (v_1; v_2; v_3)$ de l'air, la vitesse $u_l(m) = (u_{l;1}(m); u_{l;2}(m); u_{l;3}(m))$ des gouttelettes de masse $m$, la température $T$ et la pression $P$.

D'autre part, pour la pression $P$ et la vitesse de gouttelette de masse $m$ $u_l(m) = (u_{l,1}(m), u_{l,2}(m), u_{l,3}(m))$, nous supposons qu'elles sont déterminées par (2.1) et (2.2) (voir la section suivante).

## 2.1 Equation de quantité de mouvement de l'air

On sait que la pression partielle de l'air sec et celle de la vapeur d'eau sont représentées respectivement par

$$\frac{R_0}{\mu_a}\varrho T \qquad \text{et} \qquad \frac{R_0}{\mu_h}\pi T,$$

où $R_0$, $\mu_a$ et $\mu_h$ sont respectivement la constante universelle des gaz, la masse molaire moyenne de l'air et celle de l'eau. On rappelle que la pression d'un gaz composé par deux types de molécules est la somme des deux préssions partielles de chaque partie. Donc la pression $P$ de l'air est donnée par

$$P = R_0(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h})T \tag{2.1}$$

D'autre part, pour la vitesse $u(m)$ des gouttelettes de masse $m$, supposons qu'elle est donnée par

$$u(m, x, t) = v(x, t) - \frac{1}{\alpha_l(m)}\nabla\Phi, \tag{2.2}$$

où $v(x, t)$, $\alpha_l(m)$ et $\nabla\Phi$ représentent respectivement la vitesse de l'air, le coefficient de friction entre les gouttelettes et l'air et la force gravitationnelle. Pour la commodité du traitement mathématique on suppose que

$$\alpha_l(\cdot) \in C^1([0, \infty[), \quad \alpha_l(m) > 0, \quad \forall m \in [0, \infty[.$$

Compte tenu des considérations citées ci-dessus, en les adjoignant à l'équation classique de la quantité de mouvement d'un gaz avec les coefficients de viscosité $\eta$ et $\zeta$ (voir [5]), pour $t \geq 0$ l'équation de quantité de mouvement de l'air est la suivante

$$\begin{aligned}(\varrho + \pi)(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v) = \eta\Delta v + (\zeta + \frac{\eta}{3})\nabla(\nabla \cdot v) +\\ -R_0\partial_x[(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h})T] - (\varrho + \pi + \int_0^\infty \sigma(m)dm)\nabla\Phi.\end{aligned} \tag{2.3}$$

## 2.2 Equation de bilan de l'energie

Introduisons une fonction $S_l(m)$ qui représente la surface des guottelettes de masse $m$ comme la somme de la masse de $H_2O$ et de celle des noyaux (dit aérosols) à l'exception des gouttelettes d'eau de diamètre trop petit. Nous supposons que

$$S_l(m) \in C^2([0, \infty[),$$
$$S_l(m) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq m \leq \frac{\overline{m}_a}{2},$$
$$S_l(m) = 3^{\frac{2}{3}}(4\pi)^{\frac{1}{3}} m^{\frac{2}{3}} \quad \text{pour} \quad m \geq \overline{m}_A,$$

avec $0 < \overline{m}_a < \overline{m}_A < \infty$ ($\overline{m}_a$ et $\overline{m}_A$ représentent les bornes inférieure et supérieure de la masse des aérosols susceptibles de la formation de gouttelettes). D'autre part, on désigne par $\overline{\pi}_{vs} = \overline{\pi}_{vs}(T)$ la densité de la vapeur saturée, dont la valeur est donnée approximativement par

$$\overline{\pi}_{vs(l)} \approx \frac{\mu_h}{R_0 T} E_0 \cdot 10^{\frac{7,63(T-273,15)}{T-31,25}} \quad \text{avec } E_0 = 6,107(mbar).$$

Nous introduisons la quantité de condensation sur les gouttelettes de masse $m$ (par unité de masse)

$$h_{gl}(m) = h_{gl}(T, \pi, m) = K_1 \frac{S_l(m)}{m}(\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)),$$

où $K_1$ est le coefficient positif de la vitesse de condensation ou d'évaporation.

En ce qui concerne l'équation du bilan de l'énergie, on rappelle que celle pour l'air sec est donnée par (2.3) du chapitre I de [4], Pour l'air contenant la vapeur d'eau, il faut ajouter à l'équation (2.3) du chapitre I de [4] le terme qui représente la contribution de la chaleur latente de la condensation ou de l'évaporation

$$H_{gl} L_{gl}.$$

où $H_{gl}$ la quantité totale (dans l'unité de volume et de temps) de $H_2O$ qui se transforme de gaz en liquide (son éventuelle valeur négative signifie la quantité de $H_2O$ qui se transforme de liquide en gaz), et qui peut être donnée par

$$H_{gl} = H_{gl}(T, \pi, \sigma(\cdot)) = K_1(\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)) \int_0^\infty \frac{S_l(m)}{m} \sigma(m) dm,$$

Si on suppose que le coefficient de conductibilité thermique $\kappa$ est constant, on aura

$$(\varrho + \pi) c_v (\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial T}{\partial x_j}) = \tag{2.4}$$

$$= \kappa \Delta T - R_0 (\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h}) T \nabla \cdot v + \eta \sum_{i,j=1}^{3} (\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot v) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} +$$

$$+ \zeta (\nabla \cdot v)^2 + E_{rad} + L_{gl} H_{gl},$$

où $E_{rad}$ est la contribution thermique de la radiation sur l'atmosphère et $c_v$ la chaleur spécifique de l'air.

## 2.3 Equation de continuité de l'air sec

Comme il n'y a pas de possibilité de transformation de l'air sec à $H_2O$ ou de $H_2O$ à un des éléments de l'air sec, la loi de la conservation de la masse s'applique séparément à l'air sec et à $H_2O$. Donc, pour l'air sec, qui n'est pas assujetti à la transition de phase, la loi de conservation de la masse est exprimée par l'équation (2.1) du chapitre I de [4], que nous numérotons de nouveau

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho v) = 0. \tag{2.5}$$

## 2.4 Equation de continuité de la vapeur d'eau

Considérons la variation par rapport au temps $t$ de la masse totale de vapeur d'eau dans une région générique $V_0$

$$\frac{d}{dt}\int_{V_0} \pi(t,x)dx = \int_{V_0} \partial_t \pi(t,x)dx.$$

Cette variation doit correspondre exactement à la différence de la masse qui entre dans $V_0$ et de celle qui sort de $V_0$ et à la différence de la quantité de $H_2O$ qui se transforme du liquide en gaz et de celle qui se transforme du gaz en liquide, c'est-à-dire, en utilisant la fonction $H_{gl}(T,\pi,\sigma)$, qui représente la quantité totale de condensation (ou d'évaporation) dans l'unité de volume et de temps, on a

$$\frac{d}{dt}\int_{V_0} \pi(t,x)dx = \int_{\partial V_0} v(t,x)\cdot n(x)\pi(t,x)dS - \int_{V_0} H_{gl}(T,\pi,\sigma)dx,$$

où $n(x)$ et $v(t,x)$ désignent le vecteur unitaire de la normale extérieure à $\partial V_0$ et le vitesse de l'air, tandis que $dS$ est l'élément de surface de $\partial V_0$. La quantité $v(t,x)\cdot n(x)\pi(t,x)dSdt$ sera donc la quantité de masse de vapeur qui sort de $V_0$ passant par l'élément de surface $dS$ et pendant le temps infinitésimal $dt$. On en déduit que

$$\int_{V_0} \partial_t \pi(t,x)dx = -\int_{\partial V_0} v(t,x)\cdot n(x)\pi(t,x)dS +$$
$$-\int_{V_0} H_{gl}(T,\pi,\sigma)dx.$$

D'autre part, grâce à la formule de Stokes, on a

$$\int_{\partial V_0} v(t,x)\cdot n(x)\pi(x)dS = \int_{V_0} \nabla\cdot(\pi(t,x)v(t,x))dx.$$

Il s'ensuit que

$$\int_{V_0} \partial_t \pi(t,x)dx = -\int_{V_0} \nabla \cdot (\pi(t,x)v(t,x))dx - \int_{V_0} H_{gl}(T,\pi,\sigma)dx.$$

Comme $V_0$ est arbitraire, on en déduit que

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\pi v) = -H_{gl}(T,\pi,\sigma(.)). \tag{2.6}$$

## 2.5 Equation de continuité de l'eau liquide

Pour la densité de l'eau liquide $\sigma$ on propose l'équation

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma u) + \frac{\partial (m h_{gl} \sigma)}{\partial m} = \tag{2.7}$$

$$= h_{gl}\sigma(m) + g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\sigma)]^+[\pi - \overline{\pi}_{vs}(T)]^+ - g_1(m)[\pi - \overline{\pi}_{vs}(T)]^-\sigma(m) +$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m')\sigma(m-m')dm' +$$

$$-m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm',$$

où $\beta(m,m')$ est la probabilité de rencontre entre une gouttelette de masse $m$ et une de masse $m'$, et $h_{gl}(m)$ est la partie de condensation (ou d'évaporation) produite sur les gouttelettes de masse $m$. Pour déduire l'équation (2.7), nous devons avant tout rappeler la définition des fonctions $H_{gl}(T,\pi,\sigma(\cdot))$ et $h_{gl}(m)$ introduites précédemment. Il est utile de rappeler que, selon les affirmations des météorologues, les aérosols jouent un rôle essentiel dans la formation des nuages. À cause de la pression de la vapeur saturée élevée pour les gouttelettes très petites due à la grande courbure, dans l'atmosphère réelle les gouttelettes de diamètre inférieur à l'ordre de 0,1 $\mu$ ne se forment pas et les gouttelettes se forment sur des petits objets présents dans l'air, objets dits aérosols. Comme dans la nature les gouttelettes de rayon plus petit qu'une certaine valeur critique peuvent difficilement se former, on peut supposer que $\sigma(m) = 0$ pour $0 \leq m \leq \overline{m}_a$ avec $\overline{m}_a > 0$.

Nous supposons que le taux d'apparition de nouvelles gouttelettes de masse $m$ est

$$g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\sigma)]^+[\pi - \overline{\pi}_{vs(l)}(T)]^+,$$

où $N^*$ est le nombre total de gouttelettes qui peuvent être formé dans l'unité de volume ; d'autre part, $\tilde{N}$ est le nombre dans l'unité de volume des aérosols qui se trouvent déjà dans des gouttelettes. D'autre part, on suppose que le taux de disparition des gouttelettes de masse $m$ est donné par

$$g_1(m)[\pi - \overline{\pi}_{vs}(T)]^-$$

avec

$$supp\, g_0(\cdot) \subset [\overline{m}_a, \overline{m}_A], \qquad supp\, g_1(\cdot) \subset [0, \overline{M}_a]. \tag{2.8}$$

# Chapitre 3

# Existence et unicité de la solution locale

Dans ce chapitre nous allons reconstuire, en suivant la démonstration donnée dans [8], la démonstration du théorème d'existence et unicité de la solution locale du système d'équations introduit dans le chapitre précédent dans le cas où l'état solide de l'eau est absent. Par rapport au théorème 4.1 de [8], ce que nous allons démontrer est un cas plus simple, mais la nature de la difficulté principale demeure essentiellement inchangée, c'est-à-dire que la régularité de la solution $(\varrho, \pi, \sigma)$ des équations de continuité linéarisées n'est pas suffisante pour obtenir la régularité de $(v, T)$ qui devraient être solution d'équations du type parabolique. En outre, nous allons illustrer avec des détails le raisonnement où intervient la condition "problématique" $\nabla\Phi \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$.

## 3.1 Résultat principal

Les équations (2.1)–(2.7) constituent un système qui peut décrire le mouvement de l'air et les processus de transition de phase de $H_2O$ dans l'atmosphère. Pour l'étude mathématique, cependant, pour des raisons techniques, nous considérons un système approximatif, en substituant une moyenne locale $\pi_\vartheta$ de $\pi$ dans les expressions de $h_{gl}, H_{gl}$. Plus précisément, étant donnés un domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, on considère une fonction suffisamment régulière $\vartheta \in C^1(\mathbf{R}^3)$ telles que

$$\vartheta(x) = \vartheta(|x|), \quad \frac{d\vartheta(r)dr}{dr} \leq 0, \quad \vartheta(r) \geq 0, \quad \forall r \geq 0,$$

$$\vartheta(0) > 0, \quad \exists R_1 > 0 \text{ tel que } \vartheta(r) = 0, \quad \forall r \geq R_1.$$

Nous définissons

$$\pi_\vartheta(x,t) = \frac{\int_\Omega \pi(y,t)\vartheta(x-y)dy}{\int_\Omega \vartheta(x-y)dy}. \tag{3.1}$$

Ceci étant introduit, on considère le système d'équations

$$(\varrho + \pi)(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \bigtriangledown)v) = \eta\Delta v + (\zeta + \frac{\eta}{3})\nabla(\nabla \cdot v) + \tag{3.2}$$

$$-R_0\partial_x[(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h})T] - (\varrho + \pi + \int_0^\infty \sigma(m)dm)\nabla\Phi.$$

$$(\varrho + \pi)c_v(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial T}{\partial x_j}) = \tag{3.3}$$

$$= \kappa\Delta T - R_0(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h})T\nabla \cdot v + \eta \sum_{i,j=1}^{3} (\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla \cdot v)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} +$$

$$+\zeta(\nabla \cdot v)^2 + E_{rad} + L_{gl}H_{gl}(T, \pi_\vartheta, \sigma),$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho v) = 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\pi v) = -H_{gl}(T, \pi_\vartheta, \sigma), \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma u) + \frac{\partial(m h_{gl}\sigma)}{\partial m} = h_{gl}(T, \pi_\vartheta, \sigma)\sigma + \tag{3.6}$$

$$+g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\sigma)]^+[\pi - \overline{\pi}_{vs}(T)]^+ - g_1(m)[\pi - \overline{\pi}_{vs}(T)]^-\sigma +$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m-m')\sigma(m')dm' - m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm'.$$

Pour construire la solution des équations (3.2)-(3.6), au moins dans un intervalle de temps suffisamment petit, nous considérons les conditions initiales et les conditions aux limites suivantes

$$v(\cdot,0) = v_0(\cdot) \in W_p^2(\Omega), \qquad v_0|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.7}$$

$$T(\cdot,0) = T_0(\cdot) \in W_q^2(\Omega), \qquad \inf_{x\in\Omega} T_0(x) > 0 \qquad T_0|_{\partial\Omega} = \overline{T}^*|_{t=0}, \tag{3.8}$$

$$\varrho(\cdot,0) = \varrho_0(\cdot) \in W_p^1(\Omega) \qquad \inf_{x\in\Omega} \varrho_0(x) > 0, \tag{3.9}$$

$$\pi(\cdot,0) = \pi_0(\cdot) \in W_p^1(\Omega) \qquad \inf_{x\in\Omega} \pi_0(x) > 0, \tag{3.10}$$

$$\sigma(\cdot,\cdot,0) = \sigma_0(\cdot,\cdot) \in W_p^1(\mathbf{R}_+ \times \Omega), \qquad \sigma_0(\cdot,\cdot) \geq 0, \tag{3.11}$$

$$v|\partial\Omega = 0, \tag{3.12}$$

$$T|_{\partial\Omega} = \overline{T}^* \in W_q^2(\partial\Omega\times]0,t_1[), \qquad \inf_{(x,t)\in\partial\Omega\times]0,t_1[} \overline{T}^*(x,t) > 0, \qquad t_1 > 0, \tag{3.13}$$

$$\exists \overline{M}' \geq \overline{m}_A \quad \text{tel que} \quad \sigma_0(m,x) = 0 \quad \text{si} \quad m \in ]0,\overline{m}_a] \cup [\overline{M}',\infty[. \tag{3.14}$$

Pour les fonctions $\Phi$ et $E_{rad}$ nous supposons que

$$\Phi \in C^3(\Omega), \qquad \nabla\Phi\cdot n = 0 \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega \tag{3.15}$$

($n$ est le vecteur normal à $\partial\Omega$),

$$E_{rad} \in L^q(\Omega\times]0,t_1[). \tag{3.16}$$

Supposons en outre qu'il existe une constante $\overline{M}_\beta$ telle que

$$\beta(m',m'') = 0 \text{ pour } m' + m'' \geq \overline{M}_\beta. \tag{3.17}$$

**Théorème 3.1.** *Soient $p > 4$, $2q > p > q > 3$. Supposons les conditions mentionnées ci-dessus sur les fonctions et les constantes qui figurent dans les équations (3.2)-(3.6). Alors il existe un $\bar{t} > 0$ tel que le système (3.2)-(3.6) avec les conditions aux limites (3.12), (3.13) et les conditions initiales (3.7)-(3.11) admette, dans l'intervalle $[0, \bar{t}]$, une solution $(v, T, \varrho, \pi, \sigma)$ et une seule dans le classe*

$$v \in W_p^{2.1}(Q_{\bar{t}}), \qquad T \in W_q^{2.1}, \quad T > 0, \tag{3.18}$$

$$\varrho \in C^0([0, \bar{t}; W_p^1(\Omega)]), \qquad \inf_{(x,t)\in Q_{\bar{t}}} \varrho(x,t) > 0,$$

$$\pi \in C^0([0, \bar{t}]; W_p^1(\Omega)), \quad \pi \geq 0, \qquad \sigma \in C^0([0, \bar{t}]; W_p^1(\mathbf{R}_+ \times \Omega)), \quad \sigma \geq 0,$$

*où*

$$\|\varphi\|_{W_r^{2,1}(Q_t)} = \|\varphi\|_{L^r(0,t,W_r^2(\Omega))} + \|\partial\varphi\|_{L^r(Q_t)}, \qquad Q_t = (\Omega)\times]0, t[.$$

## 3.2 Equations linéarisées pour les densités.

Pour démontrer le théorème, on commence par la résolution des équations de continuité de l'air sec, de la vapeur d'eau et de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes avec $v = \overline{v}$, $T = \overline{T}$ données. Pour commencer, introduisons les classes

$$\Theta_{t_1}^{(v)} = \{v \in W_p^{2.1}(Q_t) | v \text{ vérifie } (3.7), (3.12)\}, \tag{3.19}$$

$$\Theta_{t_1}^{(T)} = \{T \in W_q^{2.1}(Q_t) | T \text{ vérifie } (3.8), (3.13)\}. \tag{3.20}$$

Soient données $(\overline{v},\overline{T}) \in \Theta_{t_1}^{(v)} \times \Theta_{t_1}^{(T)}$, on considère les équations linéairisées

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \overline{v}) = 0, \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\pi \overline{v}) = -H_{gl}(\overline{T}, \pi_\vartheta, \sigma(\cdot)), \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma \overline{u}) + \frac{\partial (m h_{gl}(\overline{T}, \pi_\vartheta, \sigma(\cdot))\sigma)}{\partial m} = \tag{3.23}$$

$$= h_{gl}(\overline{T}, \pi_\vartheta; m)\sigma + g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\overline{\sigma})]^+[\pi - \overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^+ - g_1(m)[\pi - \overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^- \sigma +$$

$$+\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m', m')\sigma(m-m')\sigma(m')dm' - m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m)\sigma(m')dm',$$

avec

$$\tilde{N}(\sigma) = \int_0^\infty \frac{\sigma(m)}{m} + C_l \int_0^\infty \sigma(m)dm, \qquad \text{où } C_l \text{ est constante}$$

$$\overline{u} = \overline{v} - \frac{1}{\alpha_l(m)}\nabla\Phi. \tag{3.24}$$

**Lemme 3.1.** *Soit $\overline{v} \in \Theta_{t_1}^{(v)}$. Alors l'équation (3.21) avec la condition initiale (3.9) admet une solution $\varrho$ et une seule dans la classe*

$$\varrho \in C^0([0,t_1]; W_p^1(\Omega)).$$

*En outre on a*

$$\|\varrho(\cdot,t)\|_{W_p^1}^p \le q_\varrho(t), \qquad 0 < \alpha_\varrho(t) \le \varrho(x,t) \le \beta_\varrho < \infty \text{ dans } Q_{t_1}, \tag{3.25}$$

*où*

$$\alpha_\varrho(t) = \inf_{x\in\Omega} \varrho_0(x) exp(-cR_{(\overline{v},t)} t^{\frac{p-1}{p}}), \qquad \beta_\varrho(t) = \sup_{x\in\Omega} \varrho_0(x) exp(cR_{(\overline{v},t)} t^{\frac{p-1}{p}}), \tag{3.26}$$

$$q_\varrho(t) = \|\varrho_0\|_{W_p^1}^p exp(cR_{(\overline{v},t)} t^{\frac{p-1}{p}}), \qquad R_{(\overline{v},t)} = \|\overline{v}\|_{W_p^{2,1}(Q_t)}.$$

**Démonstration.** Par la méthode de caractéristiques on démontre que

$$0 < \alpha_{\varrho}(t) \leq \varrho(x,t) \leq \beta_{\varrho} < \infty.$$

Maintenant on multiplie l'équation (3.21) par $\varrho^{p-1}$, de sorte que l'on obtient

$$\varrho^{p-1}[\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \overline{v})] = 0.$$

En l'intègrant sur $\Omega$, on a

$$\int_{\Omega} \varrho^{p-1} \frac{\partial \varrho}{\partial t} dx + \int_{\Omega} \varrho^{p-1} \nabla \cdot (\varrho \overline{v}) dx =$$

$$= \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int \varrho^p dx + \int_{\Omega} \varrho^{p-1} (\nabla \varrho) \cdot \overline{v} dx + \int_{\Omega} \varrho^{p-1} (\nabla \cdot \overline{v}) \varrho dx =$$

$$= \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varrho^p dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \overline{v}) \varrho^p dx + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \overline{v}) \varrho^p dx,$$

donc

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varrho^p dx = -\frac{p-1}{p} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \overline{v}) \varrho^p dx, \tag{3.27}$$

on rappelle que, comme $p > 3$, en vertu des inégalités de Sobolev, on a

$$\|\partial_{x_i} v\|_{L^\infty} \leq c \|v\|_{W_p^2}, \quad j = 1, 2, 3$$

Donc de (3.27) on déduit que

$$\frac{d}{dt} \|\varrho\|_{L^p}^p \leq c \|v\|_{W_p^2} \|\varrho\|_{L^p}^p. \tag{3.28}$$

On remarque que

$$\int_{\Omega} |\nabla \varrho|^{p-2} \sum_{i,j=1}^{3} (\partial_{x_j} \varrho)(\partial_{x_j} \partial_{x_i} \varrho) v_i dx =$$

$$= -(p-1) \int_{\Omega} |\nabla \varrho|^{p-2} \sum_{i,j=1}^{3} (\partial_{x_j} \varrho)(\partial_{x_j} \partial_{x_i} \varrho) v_i dx - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \overline{v}) |\nabla \varrho|^p dx$$

et donc

$$\int_\Omega |\nabla\varrho|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\varrho)(\partial_{x_j}\partial_{x_i}\varrho)v_i dx = -\frac{1}{p}\int_\Omega(\nabla\cdot\overline{v})|\nabla\varrho|^p dx.$$

Cela étant, on applique l'opérateur $\nabla$ à (3.21) et on multiplie par $|\nabla\varrho|^{p-2}\nabla\varrho$ l'équation obtenue puis l'intégre sur $\Omega$, de sorte que l'on obtient

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{p}\int_\Omega|\nabla\varrho|^p dx = -\int_\Omega|\nabla\varrho|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}(\partial_{x_i}\varrho)(\partial_{x_j}\varrho)\partial_{x_j}\overline{v}_i dx +$$

$$-\int_\Omega|\nabla\varrho|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}\varrho(\partial_{x_j}\varrho)\partial_{x_j}(\nabla\cdot\overline{v})dx - \int_\Omega|\nabla\varrho|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}(\partial_{x_j}\varrho)(\partial_{x_j}\partial_{x_i}\varrho)\overline{v}_i dx -$$

$$-\int_\Omega|\nabla\varrho|^p(\nabla\cdot\overline{v})dx = -\int_\Omega|\nabla\varrho|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}(\partial_{x_i}\varrho)(\partial_{x_j}\varrho)\partial_{x_j}\overline{v}_i dx +$$

$$-\int_\Omega|\nabla\varrho|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}\varrho(\partial_{x_j}\varrho)\partial_{x_j}\nabla\cdot\overline{v}dx - \frac{p-1}{p}\int_\Omega|\nabla\varrho|^p(\nabla\cdot\overline{v})dx$$

En utilisant les inégalités de Sobolev pour les termes du second membre de cette égalité, on obtient

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\varrho\|^p_{L^p} \leq c\|\overline{v}\|_{W^2_p}\|\varrho\|^p_{W^1_p}. \tag{3.29}$$

En adjoignant les inégalités (3.28) et (3.29), on obtient

$$\frac{d}{dt}\|\varrho\|^p_{W^1_p} \leq c\|\overline{v}\|_{W^2_p}\|\varrho\|^p_{W^1_p},$$

d'où il résulte

$$\|\varrho\|_{W^1_p} \leq \|\varrho_0\|_{W^1_p}\exp\left(c\int_0^t\|\overline{v}\|_{W^2_p}dt'\right).$$

Or, on a

$$\int_0^t\|\overline{v}\|_{W^2_p}dt' \leq t^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_0^t\|\overline{v}\|^p_{W^2_p}dt'\right)^{1/p}.$$

On en déduit que

$$\|\varrho\|_{W_p^1} \leq \|\varrho_0\|_{W_p^1} \exp\, (ct^{\frac{p-1}{p}} (\int_0^t \|\overline{v}\|_{W_p^2}^p dt')^{1/p}).$$

La première inégalité de (3.25) est démontrée, ce qui achève la démonstration du lemme 3.1.

Pour l'équation linéarisée de $\pi$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\pi \overline{v}) = -H_{gl}(\overline{T}, \overline{\pi}_\vartheta, \overline{\sigma}_l(\cdot)) \tag{3.30}$$

nous avons le lemme suivant.

**Lemme 3.2.** *Soient données $\overline{v} \in \Theta_{t_1}^{(v)}$, $\overline{T} \in \Theta_{t_1}^{(T)}$, $\overline{\pi} \in C^0([0,t_1]; W_p^1(\Omega))$, $\overline{\sigma} \in C^0([0,t_1]; W_p^1(\mathbf{R}_+ \times \Omega))$. Supposons qu'il existe une constante $\overline{M}$ telle que supp $(\overline{\sigma}(\cdot,\cdot,t)) \subset D_2$ pour tout $t \in [0,t_1]$ avec*

$$D_2 = ]0, \overline{M}[\times \Omega.$$

*Alors l'équation (3.30) avec la condition initiale (3.10) admet une solution $\pi$ et une seule dans la classe*

$$\pi \in C^0([0,t_1]; W_p^1(\Omega)).$$

*En outre on a*

$$\|\pi(.,t)\|_{W_p^1} \leq q_\pi(t), \tag{3.31}$$

*où*

$$\begin{aligned} q_\pi(t) = \|\pi_0\|_{W_p^1(\Omega)}\ exp\ (Ct^{\frac{p-1}{p}} (\|\overline{v}\|_{L^p([0,t];W_p^2(\Omega))} + \\ \|H_{gl}\|_{L^p([0,t];W_p^1(\Omega))})) + \int_0^t C \|H_{gl}\|_{W_p^1}\ exp\ (C(t-t')^{\frac{p-1}{p}} \\ \times (\|\overline{v}\|_{(L^p[t',t];W_p^2(\Omega))} + \|H_{gl}\|_{L^p([t',t];W_p^1(\Omega))}))dt'. \end{aligned} \tag{3.32}$$

**Démonstration.** Comme dans le cas de $\varrho$ (lemme 3.1), en utilisant la méthode des caractéristiques, on construit la solution $\pi$ sous l'hypothèse de la régularité des données.

Puis en multipliant les deux membres de (3.30) par $\pi^{p-1}$ et en les intégrant sur $\Omega$, on a

$$\int_\Omega \pi^{p-1}\partial_t \pi dx = -\int_\Omega \pi^{p-1}\overline{v}\cdot(\nabla\pi)dx - \int_\Omega (\nabla\cdot\overline{v})\pi^p dx - \int_\Omega \pi^{p-1}H_{gl}dx.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \pi^{p-1}\partial_t\pi dx &= \frac{1}{p}\int_\Omega \partial_t(\pi^p)dx\\ &= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega (\pi^p)dx\\ &= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)}dx\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega \pi^{p-1}\overline{v}\cdot(\nabla\pi)dx - \int_\Omega(\nabla\cdot\overline{v})\pi^p dx - \int_\Omega \pi^{p-1}H_{gl}dx\\ &= -\frac{1}{p}\int_\Omega \nabla(\pi^p)\cdot\overline{v}dx - \int_\Omega \pi^p(\nabla\cdot\overline{v})dx - \int_\Omega \pi^{p-1}H_{gl}dx\\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega \pi^p(\nabla\cdot\overline{v})dx - \int_\Omega \pi^p(\nabla\cdot\overline{v})dx - \int_\Omega \pi^{p-1}H_{gl}dx\\ &= \frac{1-p}{p}\int_\Omega \pi^p(\nabla\cdot\overline{v})dx - \int_\Omega \pi^{p-1}H_{gl}dx.\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \pi^p dx = (1-p)\int_\Omega \pi^p(\nabla\cdot\overline{v})dx - p\int_\Omega \pi^{p-1}H_{gl}dx.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\frac{d}{dt}\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)} \leq |1-p|\int_\Omega \pi^p|\nabla\cdot\overline{v}|dx + p\Big[\int_\Omega (\pi^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}dx\Big]^{\frac{p-1}{p}}\Big[\int_\Omega (H_{gl})^p dx\Big]^{\frac{1}{p}},$$

ou

$$\frac{d}{dt}\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)} \leq |1-p|\|\nabla\cdot\overline{v}\|_{L_\infty(\Omega)}\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)} + p\|H_{gl}\|_{L^p(\Omega)}\|\pi\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}.$$

Or, comme on a

$$\|\pi\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} \leq (1+\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)}),$$

on obtient

$$\frac{d}{dt}\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)} \leq c\|\nabla\cdot\overline{v}\|_{L_\infty(\Omega)}\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)} + c\|H_{gl}\|_{L^p(\Omega)}(1+\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)}).$$

Comme $p>3$, d'après l'inégalité de Sobolev on a

$$\|\nabla\cdot\overline{v}\|_{L_\infty(\Omega)} \leq c\|\overline{v}\|_{W^2_p(\Omega)}.$$

Donc on a

$$\frac{d}{dt}\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)} \leq C\|\pi\|^p_{L^p(\Omega)}\Big[\|\overline{v}\|_{W^2_p(\Omega)} + \|H_{gl}\|_{L^p(\Omega)}\Big] + \|H_{gl}\|_{L^p(\Omega)}. \qquad (3.33)$$

Maintenant en appliquant l'opérateur $\nabla$ à l'équation (3.30) et en la multipliant par $|\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi$, on intègre sur $\Omega$, de sorte que l'on obtient

$$\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\cdot\nabla(\partial_t\pi)dx = -\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\cdot\nabla(\nabla\pi\cdot\overline{v})dx$$
$$-\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\cdot\nabla(\pi\nabla\cdot\overline{v})dx - \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\cdot\nabla(H_{gl})dx.$$

Or, on a

$$\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\cdot\nabla(\partial_t\pi)dx = \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-1}\frac{\nabla\pi\cdot\nabla(\partial_t\pi)}{|\nabla\pi|}dx$$
$$= \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-1}\frac{\nabla\pi\cdot\partial_t(\nabla\pi)}{|\nabla\pi|}dx$$
$$= \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-1}\partial_t(|\nabla\pi|)$$

$$= \frac{1}{p}\int_\Omega \partial_t(|\nabla\pi|^p)$$
$$= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\pi|^p dx$$
$$= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\nabla\pi\|^p_{L^p(\Omega)}$$

et

$$\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\cdot\nabla(\nabla\pi\cdot\overline{v})dx + \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\cdot\nabla(\pi\nabla\cdot\overline{v})dx$$
$$+\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\nabla\pi\cdot\nabla(H_{gl})dx =$$
$$= \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\pi)\partial_{x_j}((\partial_{x_i}\pi)\overline{v}_i)dx + \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\pi)\partial_{x_j}(\pi\partial_{x_i}\overline{v}_i)dx +$$
$$\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}(\partial_{x_j}\pi)\partial_{x_j}(H_{gl})dx$$
$$= \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\pi)(\partial_{x_j}\partial_{x_i}\pi)\overline{v}_i dx + \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\pi)(\partial_{x_i}\pi)\partial_{x_j}\overline{v}_i dx +$$
$$\int_\Omega |\nabla\pi|^p\nabla\cdot\overline{v}dx + \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}\pi(\partial_{x_j}\pi)\partial_{x_j}\nabla\cdot\overline{v}dx + \int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{j=1}^{3}(\partial_{x_j}\pi)\partial_{x_j}(H_{gl})dx.$$

D'ailleurs, on a

$$\int_\Omega |\nabla\pi|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\pi)(\partial_{x_j}\partial_{x_i}\pi)\overline{v}_i dx = \frac{1}{p}\int_\Omega \nabla|\nabla\pi|^p\cdot\overline{v}dx$$
$$= -\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla\pi|^p\nabla\cdot\overline{v}dx.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\pi|^p dx = -\frac{p-1}{p}\int_\Omega |\nabla\pi|^p\nabla\cdot\overline{v}dx$$

$$\tilde{N}(\overline{\sigma}) = \int_0^\infty \frac{\sigma(m)}{m} + C_l \int_0^\infty \overline{\sigma}(m)dm, \qquad \text{avec une constante } C_l.$$

**Lemme 3.3.** *Soient données* $\overline{v} \in \Theta_{t_1}^{(v)}$, $\overline{T} \in \Theta_{t_1}^{(T)}$, $\overline{\pi} \in C^0([0,t_1]; W_p^1(\Omega))$, $\overline{\sigma} \in C^0([0,t_1]; W_p^1(\mathbf{R}_+ \times \Omega))$ *avec leur norme majorée par une constante* $R_0$ *dans les espaces prévus (indiqués). Alors il existe une constante* $\overline{M} < \infty$ *telle que, pourvu que* $\overline{\sigma}(m,x,t) = 0$ *pour* $m \notin ]\frac{\overline{m}_a}{2}, \overline{M}[$, *l'équation* (3.35) *avec les conditions initiales* (3.11)-(3.14) *admette une solution et une seule dans la classe*

$$\sigma \in C^0([0,t_1]; W_p^1(\mathbf{R}_+ \times \Omega));$$

*on a*

$$\sigma(m,x,t) = 0 \text{ pour } m \notin ]\frac{\overline{m}_a}{2}, \overline{M}[, \tag{3.36}$$

$$\|\sigma(.,.,t)\|^p_{W_p^1(\mathbf{R}_+\times\Omega)} = \|\sigma(.,.,t)\|^p_{W_p^1(D_2)} \leq q_\sigma(t), \tag{3.37}$$

*avec*

$$q_\sigma(t) = \|\sigma_0\|_{W_p^1(D_2)}\ exp\ (\int_0^t cf(t')dt') + \int_0^t g(t')\ exp\ (\int_{t'}^t cf(t'')dt'')dt', \tag{3.38}$$

*où* $f(t)$, $g(t)$ *sont des fonctions de* $\overline{T}$, $\overline{v}$, $\overline{\sigma}$.

**Demonstration :** Résolvons l'équation (3.35) le long des caractéristiques $(m(t), x(t))_{t\in[0,t_1]}$ définies comme solution du problème de Cauchy

$$\frac{dm(t)}{dt} = m(t)h_{gl}(\overline{T}, \overline{\pi}, t, x(t)), \quad \frac{dx(t)}{dt} = \overline{u}(m(t), t, x(t))$$

$$m(0) = m_0 \in [0, \overline{M}], \quad x(0) = x_0 \in \Omega.$$

Si on considère la dérivée totale de $\sigma$ dans l'espace $D_2 = ]0, \overline{M}[\times\Omega$

$$\frac{d}{dt} = \partial_t + mh_{gl}\partial_m + \sum_{j=1}^3 \overline{u}_{l,j}\frac{\partial}{x_j}$$

on peut écrire l'équation dans la forme

$$\frac{d}{dt}\sigma(m) = [h_{gl}(\overline{T}, \overline{\pi}_\vartheta; m) + B_1(\overline{\sigma}; m) - g_1(m)[\overline{\pi} - \overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T})]^-]\sigma - \sigma(m)\nabla_{(m,x)} \cdot \tilde{U}_{4l}(m) +$$

$$+g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\overline{\sigma})]^+[\overline{\pi} - \overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T})]^+ + B_2(\overline{\sigma}; m).$$

Cette équation, ayant la dérivée totale $\frac{d}{dt}\sigma_l$ au premeir membre, peut être résolue le long de la trajectoire $(m(t); x(t))$ (la méthode des caractéristiques). Donc en procédant de manière analogue à la démonstration des lemmes 3.1, 3.2, on montre l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.35). Dans la suite pour la fonction $\beta(m', m'')$ qui figure dans (3.35), nous supposons qu'elle est suffisament régulière et qu'il existe une constante $M (M < 1)$ telle que

$$\beta(m', m'') = 0 \quad m' + m'' \geq M.$$

En outre pour des raisons techniques, nous introduisons la fonction de la moyenne locale de $\overline{\pi}$.on pose une fonction $\theta$ telle que :

$i)\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$

$ii)\theta \geq 0$ et $\theta(x) = \theta(|x|)$

$iii)$ $\int_{\mathbb{R}_3} \theta(x)dx = 1,$

et en substituant $\pi$ par $(\pi * \theta)$, défini par $\int_{\mathbb{R}_3} \pi(x-y)\theta(y)dy$, on remarque que c'est une régularisation de $\overline{\pi}$ et donc on constate facilement que même avec la substitution de $\overline{\pi} * \theta$ à $\overline{\pi}$ et la condition (3.1), le lemme 3.3 reste valable, car pour sa démonstration on n'utilise que la continuité des fonctions du deuxième membre et $\overline{\pi}$ est continue. Pour simplifier, on pose $D_2 = \Omega \times ]0, \overline{M}[$ et en multipliant l'équation (3.35) par $\sigma^{p-1}(m)$ et en intégrant sur $]0, \overline{M}[\times\Omega$, on obtient

$$\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega \sigma^{p-1}(m)\partial_t\sigma(m)dxdm + \int_0^{\overline{M}}\int_\Omega \sigma^{p-1}\nabla\cdot(\sigma(m)\overline{u})dxdm+$$
$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega \sigma^{p-1}(m)\partial_m[mh_{gl}\sigma(m)]dxdm = \int_0^{\overline{M}}\int_\Omega \sigma^{p-1}(m)h_{gl}(m)\sigma(m)dxdm+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega\int_0^m m\sigma^{p-1}(m)\beta(m-m',m')\overline{\sigma}(m')\overline{\sigma}(m-m')dm'dxdm+$$
$$-\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega\int_0^\infty m\sigma^{p-1}(m)\beta(m',m)\overline{\sigma}(m')\sigma(m)dm'dxdm+$$
$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega \sigma^{p-1}(m)g_0(m)[N^*-\tilde{N}(\overline{\sigma})]^+[(\overline{\pi}*\theta)-\overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^+dxdm+$$
$$-\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega \sigma^{p-1}(m)g_1(m)[(\overline{\pi}*\theta)-\overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^-\sigma(m)dxdm.$$

Or on a

$$\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega \sigma^{p-1}\nabla\cdot(\sigma(m)\overline{u})dxdm = \int_0^{\overline{M}}\int_\Omega \sigma^{p-1}[\nabla\sigma\cdot\overline{u}+\sigma\nabla\cdot\overline{u}]dxdm$$
$$= \int_0^{\overline{M}}\int_\Omega \sigma^{p-1}\nabla\sigma\cdot\overline{u}dxdm + \int_0^{\overline{M}}\int_\Omega \sigma^p\nabla\cdot\overline{u}dxdm$$
$$= \frac{1}{p}\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega \nabla\sigma^p\cdot\overline{u}dxdm + \frac{1}{p}\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega \sigma^p\nabla\cdot\overline{u}dxdm$$
$$= \frac{p-1}{p}\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega \sigma^p\nabla\cdot\overline{u}dxdm,$$

et

$$\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega \sigma^{p-1}(m)\partial_m[mh_{gl}\sigma(m)]dxdm = \frac{1}{p}\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega \partial_m\sigma^p(mh_{gl})dxdm$$
$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega \sigma^p\partial_m(mh_{gl})dxdm.$$

D'autre part, comme $\overline{u}$ vérifie la relation

$$\nabla \cdot \overline{u} = \nabla \cdot \overline{v} - \frac{1}{\alpha_l(m)}\Delta\Phi,$$

en substituant cette relation dans l'équation, on a

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega \sigma^p(m)dxdm + \frac{p-1}{p}\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega \sigma^p(\nabla \cdot \overline{v} - \frac{1}{\alpha_l(m)}\Delta\Phi)dxdm +$$
$$+\frac{p-1}{p}\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega \sigma^p(m)\partial_m(mh_{gl})dxdm = \int_0^{\overline{M}}\int_\Omega \sigma^{p-1}(m)h_{gl}\sigma(m)dxdm+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega\int_0^m m\sigma^{p-1}(m)\beta(m-m',m')\overline{\sigma}(m')\overline{\sigma}(m-m')dm'dxdm+$$
$$-\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega\int_0^\infty m\sigma^{p-1}(m)\beta(m',m)\overline{\sigma}(m')\sigma(m)dm'dxdm+$$
$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega \sigma^{p-1}(m)g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\overline{\sigma})]^+[(\overline{\pi} * \theta) - \overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^+dxdm+$$
$$-\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega \sigma^p(m)g_1(m)[(\overline{\pi} * \theta) - \overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^-dxdm.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et en tenant compte que $\beta$, $g_0$, $g_1$, $[N^* - \tilde{N}(\overline{\sigma})]^+$ sont bornées, avec $q = \frac{p}{p-1}$, et en désignant par $C_\Phi$ la quantité constante $\|\frac{1}{\alpha_l(m)}\Delta\Phi\|_{L^\infty(D_2)}$, on a

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\sigma\|^p_{L^p} \leq \frac{|p-1|}{p}(\|\nabla \cdot \overline{v}\|_{L^\infty} + C_\Phi)\|\sigma\|^p_{L^p}+$$
$$+\frac{|p-1|}{p}\|\partial_m(mh_{gl})\|_{L^\infty}\|\sigma\|^p_{L^p} + \|h_{gl}\|_{L^\infty}\|\sigma(m)\|^p_{L^p}+$$
$$+2c\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}\|\sigma\|^{p-1}_{L^p}\|\overline{\sigma}\|_{L^p} + c\|\sigma\|^{p-1}_{L^p}\|\overline{\pi}+\overline{\pi}_{vs}\|_{L^p} + c\|\sigma\|^p_{L^p}\|\overline{\pi}+\overline{\pi}_{vs}\|_{L^\infty}$$

ou, compte tenu que $p > 3$, et donc $W^1_p \hookrightarrow L^\infty$, et que $\|m(mh_{gl})\|_{L^\infty}$, $\|h_{gl}(m)\|_{L^\infty} \leq c(\|\overline{\pi}\|_{W^1_p} + \|\overline{T}\|_{W^2_q})$,

$$\frac{d}{dt}\|\sigma\|^p_{L^p} \leq C[\|\overline{v}\|_{W^2_p}\|\sigma\|^p_{W^1_p} + \|\sigma\|_{W^1_p} + (\|\overline{\pi}\|_{W^1_p} + \|\overline{T}\|_{W^2_q})\|\sigma\|^p_{W^1_p}+$$

$$+\|\overline{\sigma}\|^2_{W^1_p}\|\sigma\|^{p-1}_{W^1_p} + \|\sigma\|^{p-1}_{W^1_p}(\|\overline{\pi}\|_{W^1_p} + \|\overline{T}\|_{W^2_q}) + \|\sigma\|^p_{W^1_p}(\|\overline{\pi}\|_{W^1_p} + \|\overline{T}\|_{W^2_q}).$$

Encore, compte tenu de l'inégalité

$$\|\sigma\|^{p-1}_{W^1_p} \leq (1 + \|\sigma\|^p_{W^1_p}),$$

on obtient

$$\frac{d}{dt}\|\sigma\|^p_{L^p} \leq C\Big(\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)}\Big[1 + \|\overline{v}\|_{W^2_p} + \|\overline{\pi}\|_{W^1_p} + \|\overline{T}\|_{W^2_q}\Big] +$$

$$+\|\overline{\sigma}\|^2_{W^1_p}(1 + \|\sigma\|^p_{W^1_p}) + (1 + \|\sigma\|^p_{W^1_p})(\|\overline{\pi}\|_{W^1_p} + \|\overline{T}\|_{W^2_q})\Big),$$

ce qui implique que

$$\frac{d}{dt}\|\sigma\|^p_{L^p} \leq C\Big(\|\sigma\|^p_{W^1_p(D_2)}\Big[1 + \|\overline{v}\|_{W^2_p} + \|\overline{\pi}\|_{W^1_p} + \|\overline{T}\|_{W^2_q} + 2\|\overline{\sigma}\|^2_{W^1_p}\Big] +$$

$$+\|\overline{\sigma}\|^2_{W^1_p} + \|\overline{\pi}\|_{W^1_p} + \|\overline{T}\|_{W^2_q}\Big). \tag{3.39}$$

Maintenant en appliquant l'opérateur $\nabla$ à l'équation (3.35) et en la multipliant par $|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma$, on l'intègre sur $]0, \overline{M}[\times\Omega$, de sorte qu'on obtient

$$\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(\partial_t\sigma(m))dxdm+$$

$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(\nabla\cdot(\sigma(m)\overline{u}))dxdm+$$

$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(\frac{\partial}{\partial m}[mh_{gl}\sigma(m)])dxdm$$

$$=\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[h_{gl}\sigma(m)]dxdm+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\overline{M}}\int_0^m m\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[\beta(m-m', m')\overline{\sigma}(m')\overline{\sigma}(m-m')]dm'dxdm+$$

$$-\int_0^{\overline{M}}\int_0^\infty m\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[\beta(m', m)\overline{\sigma}(m')\sigma(m)]dm'dxdm+$$

$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[g_0(m)[N^*-\tilde{N}(\overline{\sigma})]^+[\overline{\pi}-\overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^+]dxdm+$$

$$-\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[[g_1(m)[\overline{\pi}-\overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^-\sigma(m)]dxdm.$$

Or on a

$$\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(\nabla\cdot(\sigma(m)\overline{u}))dxdm=\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(\nabla\sigma\cdot\overline{u}+\sigma\nabla\cdot\overline{u})dxdm$$

$$=\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)\partial_{x_j}[\partial_{x_i}\sigma\overline{u}_i+\sigma\nabla\cdot\overline{u}]dxdm$$

$$=\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)(\partial_{x_j}\partial_{x_i}\sigma)\overline{u}_i+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)(\partial_{x_i}\sigma)((\partial_{x_j}\overline{u}_i))dxdm+$$

$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p}\cdot\nabla\cdot\overline{u}dxdm+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)\sigma\partial_{x_j}\nabla\cdot\overline{u}dxdm,$$

on a encore

$$\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)(\partial_{x_j}\partial_{x_i}\sigma)\overline{u}_i=\frac{1}{2}\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}(\partial_{x_i}|\nabla\sigma|^2)\overline{u}_idxdm$$

$$=\frac{1}{p}\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega (\partial_{x_j}|\nabla\sigma|^p)\overline{u}_idxdm$$

$$=\left[\frac{1}{p}|\nabla\sigma|^p\overline{u}\cdot n\right]_{\partial\Omega}-\frac{1}{p}\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^p\nabla\cdot\overline{u}dxdm,$$

en vertu de la condition $\overline{u}\cdot n|_{\partial\Omega}=0$ on a

$$\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(\nabla\cdot(\sigma(m)\overline{u}))dxdm$$

$$=\frac{p-1}{p}\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^p\nabla\cdot\overline{u}dxdm+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)(\partial_{x_i}\sigma)(\partial_{x_j}\overline{u}_i)dxdm$$

$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)\sigma\partial_{x_j}\nabla\cdot\overline{u}dxdm;$$

en outre, en vertu de $\sigma(m)=0$ pour $m\leq\overline{m}_a$, et $m>\overline{m}_A$,

$$\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(\frac{\partial}{\partial_m}[mh_{gl}\sigma(m)])dxdm=\frac{p-1}{p}\int_\Omega|\nabla\sigma|^p\partial_m(mh_{gl})dxdm$$

$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\sigma\nabla\sigma\cdot\nabla(\partial_m(mh_{gl})dxdm+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(mh_{gl})\partial_m\sigma dxdm.$$

Donc on aura

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega|\nabla\sigma|^p dxdm+\frac{p-1}{p}\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega|\nabla\sigma|^p\cdot\nabla\cdot\overline{u}dxdm$$

$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega|\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)(\partial_{x_i}\sigma)(\partial_{x_j}\overline{u}_i)dxdm+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega|\nabla\sigma|^{p-2}\sigma\nabla\sigma\cdot\nabla(\nabla\cdot\overline{u})dxdm$$

$$+\frac{p-1}{p}\int_\Omega|\nabla\sigma|^p\partial_m(mh_{gl})dxdm+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega|\nabla\sigma|^{p-2}\sigma\nabla\sigma\cdot\nabla(\partial_m(mh_{gl})dxdm$$

$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(mh_{gl})\partial_m\sigma dxdm=\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[h_{gl}\sigma(m)]dxdm$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\overline{M}}\int_0^m m\int_\Omega|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[\beta(m-m',m')\overline{\sigma}(m')\overline{\sigma}(m-m')]dm'dxdm$$

$$-\int_0^{\overline{M}}\int_0^\infty m\int_\Omega|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[\beta(m',m)\overline{\sigma}(m')\sigma(m)]dm'dxdm$$

$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[g_0(m)[N^*-\tilde{N}(\overline{\sigma})]^+[\overline{\pi}-\overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^+]dxdm$$

$$-\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[g_1(m)[\overline{\pi}-\overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^-\sigma(m)]dxdm. \qquad (3.40)$$

Pour avoir une estimation de $|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(mh_{gl})\partial_m\sigma$, $\nabla\sigma\cdot\nabla\partial_m(mh_{gl})\sigma$, et $|\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla h_{gl}\sigma(m)$ nous avons besoin d'une régularité plus élevée de

$\overline{\pi}$. Pour cela nous utilisons les propriétés régularisantes de la moyenne locale $(\overline{\pi} * \theta)$, introduite plus haut. De plus nous utilisons les relations

$$\nabla \cdot \overline{u} = \nabla \cdot \overline{v} - \frac{1}{\alpha_l(m)} \Delta\Phi, \text{ et } \nabla(\nabla \cdot \overline{u}) = \nabla(\nabla \cdot \overline{v}) - \frac{1}{\alpha_l(m)} \nabla(\Delta\Phi).$$

En utilisant ces relations, nous réécrivons (3.2) dans la forme

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^p dxdm + \frac{p-1}{p}\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^p(\nabla\cdot\overline{v} - \frac{1}{\alpha_l(m)}\Delta\Phi)dxdm +$$

$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\sum_{i,j=1}^{3}(\partial_{x_j}\sigma)(\partial_{x_i}\sigma)(\partial_{x_j}\overline{v}_i - \frac{1}{\alpha_l(m)}\partial_{x_j}\partial_{x_i}\Phi)dxdm +$$

$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\sigma\nabla\sigma\cdot(\nabla(\nabla\cdot\overline{v}) - \frac{1}{\alpha_l(m)}\nabla(\Delta\Phi))dxdm +$$

$$+\frac{p-1}{p}\int_\Omega |\nabla\sigma|^p\partial_m(mh_{gl})dxdm + \int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\sigma\nabla\sigma\cdot\nabla(\partial_m(mh_{gl}))dxdm +$$

$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(mh_{gl})\partial_m\sigma dxdm = \int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[h_{gl}\sigma(m)]dxdm +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\overline{M}}\int_0^{m} m\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[\beta(m-m',m')\overline{\sigma}(m')\overline{\sigma}(m-m')]dm'dxdm +$$

$$-\int_0^{\overline{M}}\int_0^{\infty} m\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[\beta(m',m)\overline{\sigma}(m')\sigma(m)]dm'dxdm +$$

$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[g_0(m)[N^* - \tilde{N}(\overline{\sigma})]^+[(\overline{\pi}*\theta) - \overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^+]dxdm +$$

$$-\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla[g_1(m)[(\overline{\pi}*\theta) - \overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^-\sigma(m)]dxdm.$$

Comme d'après l'expression de $h_{gl}$, on a

$$\nabla(mh_{gl}) = K_1 S_l(m)\nabla[(\overline{\pi}*\theta) - \overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]$$

$$= K_1 S_l(m)[(\overline{\pi}*\nabla\theta) - \nabla\overline{\pi}_{vs}(\overline{T})],$$

il vient

$$|\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\nabla\sigma\cdot\nabla(mh_{gl})\partial_m\sigma dxdm|$$
$$\leq \|\nabla mh_{gl}\|_{L^\infty(D_2)}\|\nabla\sigma\|^{p-2}_{L^p(D_2)}\|\nabla\sigma\|_{L^p(D_2)}\|\partial_m\sigma\|_{L^p(D_2)}$$
$$\leq c\|S_l\|_{L^\infty(D_2)}\Big[\|\overline{\pi}\|_{W^1_p(D_2)}\|\nabla\theta\|_{L^\infty(D_2)}+\|\overline{T}\|_{W^2_q(D_2)}\Big]\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\partial_m\sigma\|_{L^p(D_2)}.$$
$$\leq C\Big[\|\overline{\pi}\|_{W^1_p(D_2)}+\|\overline{T}\|_{W^2_q(D_2)}\Big]\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\partial_m\sigma\|_{L^p(D_2)}.$$

Analoguement

$$|\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\sigma\nabla\sigma\cdot\nabla\partial_m(mh_{gl})|dxdm$$
$$\leq C\Big[\|\overline{\pi}\|_{W^1_p(D_2)}+\|\overline{T}\|_{W^2_q(D_2)}\Big]\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^p(D_2)},$$

et

$$|\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2}\sigma(m)\nabla\sigma\cdot\nabla h_{gl}dxdm|$$
$$\leq \|\nabla h_{gl}\|_{L^\infty(D_2)}\|\nabla\sigma\|^{p-2}_{L^p(D_2)}\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^p(D_2)}$$
$$\leq C\Big[\|\overline{\pi}\|_{W^1_p(D_2)}+\|\overline{T}\|_{W^2_q(D_2)}\Big]\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)}\|\sigma\|_{L^p(D_2)}.$$

Donc on aura

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\nabla\sigma\|^p_{L^p}\leq\frac{p-1}{p}\|\nabla\sigma\|^p_{L^p}\|\nabla\cdot\overline{v}\|_{L^\infty}+\frac{p-1}{p}\|\nabla\sigma\|^p_{L^p}\times$$
$$\times\|\frac{1}{\alpha_l(m)}\Delta\Phi\|_{L^\infty}+\|\nabla\sigma\|^p_{L^p}\sum_{i,j=1}^3\|\partial_{x_j}\overline{v}_i\|_{L^\infty}+\|\nabla\sigma\|^p_{L^p}\sum_{j=1}^3\|\frac{1}{\alpha_l}\partial_{x_j}\nabla\Phi\|_{L^\infty}+$$
$$+\|\nabla(\nabla\cdot\overline{v})\|_{L^p(D_2)}\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p}\|\sigma\|_{L^\infty}+\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p}\|\sigma\|_{L^p}\|\frac{1}{\alpha_l(m)}\nabla(\Delta\Phi)\|_{L^\infty}+$$
$$+\|\nabla(\partial_m(mh_{gl}))\|_{L^p}\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p}\|\sigma\|_{L^\infty}+\|\nabla(mh_{gl})\|_{L^\infty}\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p}\|\partial_m\sigma\|_{L^p}+$$
$$+\frac{p-1}{p}\|\partial_m(mh_{gl})\|_{L^\infty}\|\nabla\sigma\|^p_{L^p}+\|\nabla h_{gl}\|_{L^\infty}\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p}\|\sigma\|_{L^p}+$$

$$+\|h_{gl}\|_{L^\infty}\|\nabla\sigma\|^p_{L^p}+2c\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p}\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}\|\nabla\overline{\sigma}\|_{L^p}+2c\|\nabla\sigma\|^p_{L^p}\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}+$$

$$+\|\sigma\|_{L^p}\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p}\|\nabla[(\overline{\pi}*\theta)+\overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^+\|_{L^\infty}+\|\nabla\sigma\|^p_{L^p}\|[(\overline{\pi}*\theta)+\overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^+\|_{L^\infty},$$

ce qui implique qu'il existe une constante $C$ telle que

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\sigma\|^p_{L^p}\leq C[\|\nabla\sigma\|^p_{L^p}\|\nabla\overline{v}\|_{L^\infty}+\|\nabla\sigma\|^p_{L^p}+\|\nabla\sigma\|^p_{L^{p-1}}\|\sigma\|_{L^\infty}\|\nabla(\nabla\cdot\overline{v})\|_{L^p}+$$

$$+\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p}\|\sigma\|_{L^p}+[\|\overline{\pi}\|_{W^1_p}+\|\overline{T}\|_{W^2_q}]\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p}\|\sigma\|_{L^p}+$$

$$+[\|\overline{\pi}\|_{W^1_p}+\|\overline{T}\|_{W^2_q}]\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p}\|\partial_m\sigma\|_{L^p}+[\|\overline{\pi}\|_{W^1_p}+\|\overline{T}\|_{W^2_q}]\|\nabla\sigma\|^p_{L^p}+$$

$$+[\|\overline{\pi}\|_{W^1_p}+\|\overline{T}\|_{W^2_q}]\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p}\|\sigma\|_{L^p}+\|\nabla\sigma\|^p_{L^p}\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}+$$

$$+\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p}\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}\|\nabla\overline{\sigma}\|_{L^p}+[\|\overline{\pi}\|_{W^1_p}+\|\overline{T}\|_{W^2_q}]\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p}\|\sigma\|_{L^p}+$$

$$+[\|\overline{\pi}\|_{W^1_p}+\|\overline{T}\|_{W^2_q}]\|\nabla\sigma\|^p_{L^p}]. \tag{3.41}$$

Maintenant en appliquant l'opérateur $\partial_m$ à l'équation (3.35) et en multipliant par $|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma$ l'équation obtenue, on l'intègre sur $]0,\overline{M}[\times\Omega$, ce qui nous donne

$$\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m(\partial_t\sigma(m))dxdm+$$

$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m(\nabla\cdot(\sigma(m)\overline{u}))dxdm+$$

$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m(\partial_m[mh_{gl}\sigma(m)])dxdm$$

$$=\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m[h_{gl}\sigma(m)]dxdm+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\overline{M}}\int_0^m m\int_\Omega|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m[\beta(m-m',m')\overline{\sigma}(m')\overline{\sigma}(m-m')]dm'dxdm+$$

$$-\int_0^{\overline{M}}\int_0^\infty m\int_\Omega|\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m[\beta(m',m)\overline{\sigma}(m')\sigma(m)]dm'dxdm+$$

$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m[g_0(m)[N^*-\tilde{N}(\overline{\sigma})]^+[\overline{\pi}-\overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^+]dxdm+$$

$$-\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m[[g_1(m)[\overline{\pi}-\overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^-\sigma(m)]dxdm.$$

Cela implique que

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^p dxdm+$$

$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma[\partial_m\nabla\sigma\cdot\overline{u}+\nabla\sigma\cdot\partial_m\overline{u}+\partial_m\sigma\nabla\cdot\overline{u}+\sigma\partial_m\nabla\cdot\overline{u}]dxdm+$$

$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma[\partial_m^2(mh_{gl})\sigma+mh_{gl}\partial_m^2\sigma+2\partial_m\sigma\partial_m(mh_{gl})]dxdm$$

$$=\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m(h_{gl})\sigma(m)dxdm+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma(h_{gl})\partial_m\sigma(m)dxdm+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\overline{M}}\int_0^{m}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\beta(m-m',m')\overline{\sigma}(m')\overline{\sigma}(m-m')dm'dxdm+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\overline{M}}\int_0^{m} m\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m\beta(m-m',m')\overline{\sigma}(m')\overline{\sigma}(m-m')dm'dxdm+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\overline{M}}\int_0^{m} m\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\beta(m-m',m')\overline{\sigma}(m')\partial_m\overline{\sigma}(m-m')dm'dxdm+$$

$$-\int_0^{\overline{M}}\int_0^{\infty}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\beta(m',m)\overline{\sigma}(m')\sigma(m)dm'dxdm+$$

$$-\int_0^{\overline{M}}\int_0^{\infty} m\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m\beta(m',m)\overline{\sigma}(m')\sigma(m)dm'dxdm+$$

$$-\int_0^{\overline{M}}\int_0^{\infty} m\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\beta(m',m)\overline{\sigma}(m')\partial_m\sigma(m)dm'dxdm+$$

$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m g_0(m)[N^*-\tilde{N}(\overline{\sigma})]^+[\overline{\pi}-\overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^+dxdm+$$

$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma g_0(m)[N^*-\tilde{N}(\overline{\sigma})]^+\partial_m[\overline{\pi}-\overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^+dxdm+$$

$$-\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m g_1(m)[\overline{\pi}-\overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^-\sigma(m)dxdm+$$

$$-\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma g_1(m)[\overline{\pi}-\overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^-\partial_m\sigma(m)dxdm,$$

si $m=m'$ on peut éliminer le terme $\int_0^m \beta(m-m',m')\overline{\sigma}(m')\overline{\sigma}(m-m')dm'$, donc on a

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^p dxdm+\frac{p-1}{p}\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^p(\nabla\cdot\overline{v}-\frac{1}{\alpha_l(m)}\Delta\Phi)dxdm+$$

$$-\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\nabla\sigma\cdot\nabla\Phi\partial_m\frac{1}{\alpha_l(m)}dxdm-\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\sigma\Delta\Phi\times$$

$$\times\partial_m\frac{1}{\alpha_l(m)}dxdm+\frac{2p-1}{p}\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^p\partial_m(mh_{gl})dxdm+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\times$$

$$\times\sigma\partial_m^2(mh_{gl})dxdm=\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m(h_{gl})\sigma(m)dxdm+$$

$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma(h_{gl})\partial_m\sigma(m)dxdm+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\overline{M}}\int_0^m\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\beta(m-m',m')\overline{\sigma}(m')\overline{\sigma}(m-m')dm'dxdm+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\overline{M}}\int_0^m m\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m\beta(m-m',m')\overline{\sigma}(m')\overline{\sigma}(m-m')dm'dxdm+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\overline{M}}\int_0^m m\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\beta(m-m',m')\overline{\sigma}(m')\partial_m\overline{\sigma}(m-m')dm'dxdm+$$

$$-\int_0^{\overline{M}}\int_0^\infty\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\beta(m',m)\overline{\sigma}(m')\sigma(m)dm'dxdm+$$

$$-\int_0^{\overline{M}}\int_0^\infty m\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m\beta(m',m)\overline{\sigma}(m')\sigma(m)dm'dxdm+$$

$$-\int_0^{\overline{M}}\int_0^\infty m\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\beta(m',m)\overline{\sigma}(m')\partial_m\sigma(m)dm'dxdm+$$

$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m g_0(m)[N^*-\tilde{N}(\overline{\sigma})]^+[(\overline{\pi}*\theta)-\overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^+dxdm+$$
$$+\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma g_0(m)[N^*-\tilde{N}(\overline{\sigma})]^+\partial_m[(\overline{\pi}*\theta)-\overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^+dxdm+$$
$$-\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma\partial_m g_1(m)[(\overline{\pi}*\theta)-\overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^-\sigma(m)dxdm+$$
$$-\int_0^{\overline{M}}\int_\Omega |\partial_m\sigma|^{p-2}\partial_m\sigma g_1(m)[(\overline{\pi}*\theta)-\overline{\pi}_{vs}(\overline{T})]^-\partial_m\sigma(m)dxdm,$$

d'aprés l'inégalitè de Hölder on obtient de cette égalité l'inégalité

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^p\leq\frac{p-1}{p}(\|\nabla\cdot\overline{v}\|_{L^\infty}+c_\Phi)\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^p+$$
$$+c_\phi\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^{p-1}\|\nabla\sigma\|_{L^p}+c_\phi\|\partial_m\sigma\|_{L^{p-1}}^{p-1}\|\sigma\|_{L^p}+\frac{2p-1}{p}\|\partial_m(mh_{gl})\|_{L^\infty}\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^p+$$
$$+\|\partial_m^2(mh_{gl})\|_{L^\infty}\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^{p-1}\|\sigma\|_{L^p}+\|\partial_m h_{gl}\|_{L^\infty}\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^{p-1}\|\sigma\|_{L^p}+$$
$$+\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^p\|h_{gl}\|_{L^\infty}+2c\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^{p-1}\|\overline{\sigma}\|_{L^p}\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}+2c\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^{p-1}\|\partial_m\overline{\sigma}\|_{L^p}\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}+$$
$$+2c\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^p\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}+\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^{p-1}\|\sigma\|_{L^p}\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}+2c\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^{p-1}\|(\overline{\pi}*\theta)-\overline{\pi}_{vs}(\overline{T})\|_{L^p}+$$
$$+c\|\partial_m\sigma\|_{L^p}\|\sigma\|_{L^p}^{p-1}\|(\overline{\pi}*\theta)-\overline{\pi}_{vs}(\overline{T})\|_{L^\infty}\|\sigma\|_{L^p}+c\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^p\|(\overline{\pi}*\theta)-\overline{\pi}_{vs}(\overline{T})\|_{L^\infty},$$

où

$$\frac{d}{dt}\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^p\leq C'[\|\nabla\cdot\overline{v}\|_{L^\infty}\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^p+\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^p+\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^{p-1}\|\nabla\sigma\|_{L^p}+$$
$$+\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^p+\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^{p-1}\|\sigma\|_{L^p}+[\|\overline{\pi}\|_{W_p^1}+\|\overline{T}\|_{W_q^2}]\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^p+$$
$$+[\|\overline{\pi}\|_{W_p^1}+\|\overline{T}\|_{W_q^2}]\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^{p-1}\|\sigma\|_{L^p}+\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^p\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}+\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^{p-1}\|\sigma\|_{L^p}\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}+$$
$$+\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^{p-1}\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}\|\partial_m\overline{\sigma}\|_{L^p}+[\|\overline{\pi}\|_{W_p^1}+\|\overline{T}\|_{W_q^2}]\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^{p-1}+$$
$$+[\|\overline{\pi}\|_{W_p^1}+\|\overline{T}\|_{W_q^2}]\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^{p-1}\|\sigma\|_{L^p}+[\|\overline{\pi}\|_{W_p^1}+\|\overline{T}\|_{W_q^2}]\|\partial_m\sigma\|_{L^p}^p]. \quad (3.42)$$

En sommant l'inégalité (3.2) et (3.2), on obtient

$$\frac{d}{dt}[\|\partial_m\sigma\|^p_{L^p(D_2)} + \|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}] \leq C'[\|\nabla\cdot\overline{v}\|_{L^\infty(D_2)}(\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)}$$

$$+\|\partial_m\sigma\|^p_{L^p(D_2)}) + (\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)} + \|\partial_m\sigma\|^p_{L^p(D_2)})+$$

$$+[\|\overline{\pi}\|_{W^1_p} + \|\overline{T}\|_{W^2_q}](\|\nabla\sigma\|^p_{L^p(D_2)} + \|\partial_m\sigma\|^p_{L^p(D_2)})+$$

$$+[\|\overline{\pi}\|_{W^1_p} + \|\overline{T}\|_{W^2_q}]\|\sigma\|^p_{L^p(D_2)}(\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)} + \|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p(D_2)})+$$

$$+\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}(\|\partial_m\sigma\|^p_{L^p} + \|\nabla\sigma\|^p_{L^p}) + \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty}(\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p}\|\partial_m\overline{\sigma}\|_{L^p}+$$

$$+\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p}\|\nabla\overline{\sigma}\|_{L^p}) + [\|\overline{\pi}\|_{W^1_p} + \|\overline{T}\|_{W^2_q}](\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p} + \|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p})+$$

$$+[\|\overline{\pi}\|_{W^1_p}+\|\overline{T}\|_{W^2_q}]\|\sigma\|_{L^p}(\|\partial_m\sigma\|^{p-1}_{L^p}+\|\nabla\sigma\|^{p-1}_{L^p})+[\|\overline{\pi}\|_{W^1_p}+\|\overline{T}\|_{W^2_q}](\|\partial_m\sigma\|^p_{L^p}+\|\nabla\sigma\|^p_{L^p}),$$

ou, en utilisant le gradiant $\nabla_{(x,m)}$ de $\sigma$ dans $D_2 = D_m \times \Omega$ et à l'aid de l'injection de Sobolev, aprés les simplification on a

$$\|\sigma(t,.,.)\|_{W^1_p(D_2)} \leq \|\sigma_0\|_{W^1_p(D_2)} \exp\left(\int_0^t cf(t')dt'\right)+$$

$$+\int_0^t g(t')\exp\left(\int_{t'}^t cf(t'')dt''\right)dt',$$

avec $f(t)$, $g(t)$ sont des fonctions de $\overline{T}$, $\overline{v}$, $\overline{\sigma}$.

(Pour plus de détaille voir [6])

## 3.3 Equations pour les densités de l'eau avec la température et la vitesse données.

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution $(\pi, \sigma)$ du système d'équations (3.22)-(3.23) dans un intervalle du temps suffisamment petit, on rappelle d'abord le lemme suivant

**Lemme 3.4** *Soient* $\overline{v} \in \Theta_{t_1}^{(v)}, \overline{T} \in \Theta_{t_1}^{(T)}$ *et* $R_0 > 0$. *On suppose que*

$$\|\overline{v}\|_{W_p^{2,1}(Q_{t_1})} \leq R_0, \qquad \|\overline{T}\|_{W_q^{2,1}(Q_{t_1})} \leq R_0. \tag{3.43}$$

*Alors il existe un* $t_2 = t_2(R_0)$, $0 < t_2 \leq t_1$, *tel que, quelques soient*

$$\overline{\pi} \in C^0([0, t_2]; W_p^1(\Omega)), \quad \overline{\sigma} \in C^0([0, t_2]; W_p^1(\mathbf{R}_+ \times \Omega)),$$

*avec les conditions*

$$\|\overline{\pi}\|_{C^0([0,t_2];W_p^1(\Omega))} \leq \|\pi_0\|_{W_p^1(\Omega)} + 1 \tag{3.44}$$

$$\|\overline{\sigma}\|_{C^0([0,t_2];W_p^1(\mathbf{R}_+\times\Omega))} \leq \|\sigma_0\|_{W_p^1(\mathbf{R}_+\times\Omega)} + 1$$

$$\overline{\sigma}(m, x, t) = 0 \text{ pour } m \notin ]\frac{\overline{m}_a}{2}, \overline{M}_1[,$$

*la solution* $(\pi, \sigma)$ *des équations linéairisées* (3.30)-(3.35)*avec les conditions initiales* (3.10)-(3.14) *satisfasse aux conditions*

$$\|\pi\|_{C^0([0,t_2];W_p^1(\Omega))} \leq \|\pi_0\|_{W_p^1(\Omega)} + 1$$

$$\|\sigma\|_{C^0([0,t_2];W_p^1(\mathbf{R}_+\times\Omega))} \leq \|\sigma_0\|_{W_p^1(\mathbf{R}_+\times\Omega)} + 1$$

$$\sigma(m, x, t) = 0 \text{ pour } m \notin ]\frac{\overline{m}_a}{2}, M_1[.$$

**Démonstration :** En rappelant les lemmes 3.2 et 3.3, à partir des inégalités (3.31), (3.37) et des expressions (3.32), (3.38) et (3.36), on obtient le lemme

**Lemme 3.5.** *Soient* $\overline{v}, \overline{T}, \overline{M}_1$, $R_0$, $t_2 = t_2(R_0)$ *comme dans le lemme 3.4. Alors il existe un* $t_3 \in ]0, t_2[$ *tel que les équations 3.5–*(3.6) *avec la condition initiale 3.14 admet une solution* $(\pi, \sigma)$ *et une seule dans la classe*

$$\pi \in C^0([0, t_3]; W_p^1(\Omega)), \quad \sigma \in C^0([0, t_3]; W_p^1(\mathbf{R}_+ \times \Omega)),$$

*et on a*

$$\|\pi\|_{C^0([0,t_3];W_p^1(\Omega))} \leq \|\pi_0\|_{W_p^1(\Omega)} + 1$$

$$\|\sigma\|_{C^0([0,t_3];W_p^1(\mathbf{R}_+\times\Omega))} \leq \|\sigma_0\|_{W_p^1(\mathbf{R}_+\times\Omega)} + 1$$

$$\sigma(m,x,t) = 0 \ pour\ m \notin ]\frac{\overline{m}_a}{2}, \overline{M}_1[$$

**Démonstration.** Pour $0 < t \leq t_2$ nous définissons

$$A_{[t]} = \{(\pi,\sigma) \text{ vérifier les conditions } (C.1) - (C.3)\}$$

avec

$$(C.1) \qquad \pi \in C^0([0,t];W_p^1(\Omega)), \qquad \sigma \in C^0([0,t];W_p^1(\mathbf{R}_+\times\Omega))$$

$$(C.2) \qquad \pi(\cdot,0) = \pi_0(\cdot), \qquad \sigma(\cdot,\cdot,0) = \sigma_0(.)$$

$(C.3)$

$$\|\pi\|_{C^0([0,t];W_p^1(\Omega))} \leq \|\pi_0\|_{W_p^1(\Omega)}+1, \qquad \|\sigma\|_{C^0([0,t];W_p^1(\mathbf{R}_+\times\Omega))} \leq \|\sigma_0\|_{W_p^1(\mathbf{R}_+\times\Omega)}+1$$

$$\sigma(m,x,t') = 0 \text{ pour } m \notin ]\frac{\overline{m}_a}{2}, \overline{M}_1[, x\in\Omega, 0\leq t'\leq t, \quad \forall t \in ]0,t_2[.$$

$$x\in\Omega, \quad t'\in[0,t].$$

Soit $G_{1,t}$ l'application qui à $(\overline{\pi},\overline{\sigma}) \in C_0([0,t];L^p(\Omega)) \times C_0([0,t];L^p(D_2))$ associe la solution $(\pi,\sigma)$ des équations (3.30), (3.35) avec $(\overline{\pi},\overline{\sigma})$ indiquées ci-dessus. En vertu du lemme 3.4 on a

$$G_{1,t} : A_{[t]} \longrightarrow A_{[t]} \quad \forall t \in ]0,t_2[.$$

Donc, pour démontrer le lemme 3.5, il suffit de démontrer qu'il existe un $t_3 \in [0,t_2]$, tel que l'opérateur $G_{1.t_3}$ restrient à $A_{[t_3]}$ soit une contraction dans la topologie

$$C_0([0,t_3];L^p(\Omega)) \times C_0([0,t_3];L^p(D_2))].$$

Soient $(\overline{\pi}_i, \overline{\sigma}_i) \in A_{[t_2]}$ et $(\pi_i, \sigma_i) = G_{1,t}$ $i = 1, 2$. Alors les différences

$$\overline{\Pi} = \overline{\pi}_2 - \overline{\pi}_1, \qquad \overline{\Sigma} = \overline{\sigma}_2 - \overline{\sigma}_1, \tag{3.45}$$

$$\Pi = \pi_2 - \pi_1, \qquad \Sigma = \sigma_2 - \sigma_1.$$

satisfons aux équations

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Pi \overline{v}) = H_{gl}(\overline{T}, \overline{\pi}_{1,\vartheta}, \overline{\sigma}_1) - H_{gl}(\overline{T}, \overline{\pi}_{2,\vartheta}, \overline{\sigma}_2) \tag{3.46}$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial m}(m h_{gl}(\overline{T}, \overline{\pi}_{2,\vartheta}; m) + \nabla \cdot (\Sigma \overline{u}) = \tag{3.47}$$

$$= h_{gl}(\overline{T}, \overline{\pi}_{2,\vartheta}; m) + B_1(\overline{\sigma}_2; m) - g_1(m)[\overline{\pi}_2 - \overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T})]^- \Sigma +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial m}\{m[h_{gl}(\overline{T}, \overline{\pi}_{1,\vartheta}; m) - h_{gl}(\overline{T}, \overline{\pi}_{2,\vartheta}; m)]\sigma_1\} +$$

$$+[h_{gl}(\overline{T}, \overline{\pi}_{2,\vartheta}; m) - h_{gl}(\overline{T}, \overline{\pi}_{1,\vartheta}; m)]\sigma_1 + [B_1(\overline{\sigma}_2; m) -$$

$$-B_1(\overline{\sigma}_1; m)]\sigma_1 + g_1(m)([\overline{\pi}_1 - \overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T})]^- -$$

$$-[\overline{\pi}_2 - \overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T})]^-)\Sigma + g_0(m)([N^* - \tilde{N}(\overline{\sigma}_2)]^+[\overline{\pi}_2 - \overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T})]^-]^+ -$$

$$-[N^* - \tilde{N}(\overline{\sigma}_1)]^+[\overline{\pi}_1 - \overline{\pi}_{vs(l)}(\overline{T})]^-]^+) + B_2(\overline{\sigma}_2; m) - B_2(\overline{\sigma}_1; m).$$

En multipliant les équations (3.46)-(3.47) par $\Pi|\Pi|^{p-2}$, $\Sigma|\Sigma|^{p-2}$ respéctivement. Et en faisant l'intégrale de la première sur $\Omega$ et de l'autre sur $D_2$ en tenant compte de conditions (3.44) et les estimations déjà obtenues, après l'intégration et des calculs élémentaires, on obtient les inégalités

$$\frac{d}{dt}\|\Pi\|^p_{L^p(\Omega)} \leq c\|\overline{v}\|_{W^2_p(\Omega)}\|\Pi\|^p_{L^p(\Omega)} +$$

$$+c(1 + \|\overline{T}\|_{W^1_q(\Omega)})(\|\overline{\Pi}\|_{L^p(\Omega)} + \|\overline{\Sigma}\|_{L^p(D_2)})\|\Pi\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}, \tag{3.48}$$

$$\frac{d}{dt}\|\Sigma\|^p_{L^p(D_2)} \leq c(1 + \|\overline{T}\|_{W^1_q(\Omega)} + \|\overline{v}\ |_{W^2_p(\Omega)})\|\Sigma\|^p_{L^p(D_2)} +$$

$$+c(1+\|\overline{T}\|_{W_q^1(\Omega)})(\|\overline{\Pi}\|_{L^p(\Omega)}+\|\overline{\Sigma}\|_{L^p(D_2)})\|\Sigma\|_{L^p(D_2)}^{p-1}. \tag{3.49}$$

En multipliant les deux membres de (3.3)-(3.3)respectivement par $\|\Pi\|_{L^p(\Omega)}^{1-p}$, $\|\Sigma\|_{L^p(\Omega)}^{1-p}$, tenant compte de (3.43), on déduit l'inégalité

$$\|\Pi(.,t)\|_{L^p(\Omega)}+\|\Sigma(.,t)\|_{L^p(D_2)}\leq$$

$$ce^{c(t+t^{\frac{q-1}{q}}+t^{\frac{p-1}{p}})}(t+t^{\frac{q-1}{q}})(\|\overline{\Pi}\|_{C^0([0,t];L^p(\Omega))}+\|\overline{\Sigma}\|_{C^0([0,t];L^p(D_2))}).$$

Il est clair qu'il existe un $t_3>0$ tel que

$$ce^{c(t_3+t_3^{\frac{q-1}{q}}+t_3^{\frac{p-1}{p}})}(t_3+t_3^{\frac{q-1}{q}})<\frac{1}{3}.$$

Par conséquent, rappelant la définition de $G_{1,t}$ et (3.45), on peut déduire que l'application de $G_{1,t_3}$ restreinte à $A_{[t_3]}$ est une contraction par rapport à l'espace métrique

$$C^0([0,t_3];L^p(\Omega))\times C^0([0,t_3];L^p(D_2)),$$

ce qui prouve le lemme.

**Lemme 3.6.** *Soient $\varrho,\pi,\sigma$ sont les solutions d'équations (3.21)-(3.23) avec les conditions initiales (3.9)-(3.14). Dans les mêmes conditions de lemmes 3.1 et 3.5, il existe un $t_4\in]0,t_3]$ tel que pour $t\in[0,t_4]$ et $x\in\Omega$ on a*

$$\|\varrho(.,t)\|_{W_p^1}^p\leq 2\|\varrho_0(.)\|_{W_p^1}^p,\qquad \frac{1}{2}\inf_{x'\in\Omega}\varrho_0(x')\leq\varrho(x,t)\leq 2\sup_{x'\in\Omega}\varrho_0(x') \tag{3.50}$$

$$0\leq\pi(x,t)\leq\sup_{x'\in\Omega}\pi_0(x')+1. \tag{3.51}$$

**Démonstration.** L'existence d'un $t_4\in]0,t_3]$ tel que on ait (3.50) résulte immédiatement de (3.25)-(3.26). En intégrant (3.22) le long de caractéristique $x(t)$ nous avons

$$\pi(x(t),t)=\pi_0(x_0)e^{-\int_0^t\nabla\cdot\overline{v}dt'}-\int_0^t H_{gl}(\overline{T},\pi_\vartheta,\sigma)e^{-\int_{t'}^t\nabla\cdot\overline{v}dt''}dt'. \tag{3.52}$$

En rappelant la définition de $H_{gl}$ et les hypothèses et les résultats du lemme 3.5, nous obtenons

$$\int_0^t |\nabla \cdot \overline{v}| dt' \leq cR_0 t^{\frac{p}{p-1}}, \qquad |H_{gl}(\overline{T}, \pi_\vartheta, \sigma)| \leq c.$$

Par conséquent, à partir de (3.52) il s'ensuit qu'il existe un $t_4 \in ]0, t_3]$ qui s'applique également à (3.51).

## 3.4 Equations linéaires pour la vitesse et la température.

Dans cette partie, nous examinons les équations linéarisées pour $v$, et $T$. Nous fixons $\bar{v} \in \Theta_{t_1}^{(v)}$, $\overline{T} \in \Theta_{t_1}^{(T)}$ et nous considérons les équations linéaires en $v$ et $T$

$$(\varrho + \pi)\frac{\partial v}{\partial t} - \eta \triangle v - (\zeta + \frac{\eta}{3})\nabla(\nabla \cdot v) = \tag{3.53}$$

$$= -(\varrho + \pi)(\overline{v} \cdot \nabla)\overline{v} - R_0 \nabla((\frac{\pi}{\mu_h} + \frac{\varrho}{\mu_a})\overline{T}) - \Big[\int_0^\infty \sigma dm + \varrho + \pi\Big]\nabla\phi,$$

$$(\varrho + \pi)c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \triangle T = -(\varrho + \pi)c_v \sum_{j=1}^{3} \overline{v}_j \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} - R_0((\frac{\pi}{\mu_h} + \frac{\varrho}{\mu_a})\overline{T})\nabla \cdot \overline{v} + \tag{3.54}$$

$$+\eta \sum_{i,j=1}^{3}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{i,j}\nabla \cdot \overline{v})\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \zeta(\nabla \cdot \overline{v})^2 + E_{rad} + L_{gl}H_{gl}(\overline{T}, \pi_\vartheta, \sigma)$$

où $\varrho$, $\pi$, $\sigma$ sont les solutions des équations 3.21-3.23 avec les conditions initiales 3.9-3.14, dont l'existence et l'unicité ont été démontrées dans le lemmes 3.1 et 3.5. Comme dans [8], nous introduisons les fonctions auxiliaires

$$V_{(p,v)}(t) = \|v\|^p_{W_p^{2,1}(Q_t)} + \sup_{0 \leq t' \leq t} \|v(.,t')\|^p_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)},$$

$$V_{(q,T)}(t) = \|T\|^q_{W_q^{2,1}(Q_t)} + \sup_{0 \leq t' \leq t} \|T(.,t')\|^q_{W_q^{2-\frac{2}{q}}(\Omega)}.$$

**Lemme 3.7.** *Soient* $\overline{v} \in \Theta_{t_1}^{(v)}$ *et* $\overline{T} \in \Theta_{t_1}^{(T)}$. *En autre, soit* $(\varrho, \pi, \sigma)$ *la solution du système d'équations* (3.21)-(3.23) *avec les conditions initiales* (3.9)-(3.14) *donnée par les lemmes 3.5 et 3.6. Alors les équations* ((3.53)) *et* (3.54), *avec les conditions aux limites* (3.12)-(3.13) *et les conditions initiales* (3.7)-(3.8) *admettent une solution et une seule*

$$v \in W_p^{2,1}(Q_{t_4}), \qquad T \in W_q^{2,1}(Q_{t_4}),$$

*et on a les inégalités*

$$V_{(p,v)}(t) \leq c(\|v_0\|^p_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)} + \int_0^t (1 + V_{(p,\overline{v})}(t')^2)dt' + t^{\frac{2q-p}{q}} V_{(q,\overline{T})}(t)), \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned} V_{(q,T)}(t) \leq c\Big[ &\|T_0\|^q_{W_q^{2-\frac{2}{q}}(\Omega)} + \|\overline{T}^*\|^q_{W_q^{2-\frac{1}{q},1-\frac{1}{2q}}(\partial\Omega\times]0,t[)} + t^{\frac{2(p-q)}{p}} V_{(p,\overline{v})}(t)^{\frac{2q}{p}} + \\ &+ \int_0^t (1 + V_{(q,\overline{T})}(t')V_{(p,\overline{v})}(t')^{q/p} + \|E_{rad}\|^q_{L^q(\Omega)})dt' \Big]. \end{aligned} \tag{3.56}$$

*Pour* $0 < t \leq t_4$.

**Demonstration.** Pour la démontration voir [8]

## 3.5 Existence et unicité de la solution locale

Pour prouver le théorème 3.1, nous commençons par le lemme suivant

**Lemme 3.8.** *Il existe deux constantes positives* $\overline{R}_v$, $\overline{R}_T$ *et un* $t_5 \in ]0, t_4[$ *tels que, si*

$$0 < t \leq t_5, \quad \overline{v} \in \Theta_t^{(v)}, \quad \overline{T} \in \Theta_t^{(T)} \quad \text{et} \quad V_{(p,\overline{v})}(t) \leq \overline{R}_v, \quad V_{(q,\overline{T})}(t) \leq \overline{R}_T,$$

*alors la solution* $(v, T)$ *des équations* (3.53) *et* (3.54) *avec des conditions aux limites* (3.12)-(3.13) *et les conditions initiales* (3.7)-(3.8) *satisfaisse aux inégalités*

$$V_{(p,v)}(t) \leq \overline{R}_v, \qquad V_{(q,T)}(t) \leq \overline{R}_T.$$

**Démonstration .** Le lemme résulte immédiatement de l'expression de deuxième membres des inégalités (3.55)-(3.4).

Nous définissons

$$B_t = \{(v,T) \in \Theta_t^{(v)} \times \Theta_t^{(T)} \mid V_{(p,v)}(t) \leq \overline{R}_v,\, V_{(q,T)}(t) \leq \overline{R}_T\} \tag{3.57}$$

Pour $0 < t \leq t_5$ on désigne $G_t$ l'application qui associe a chaque $(\overline{v}, \overline{T}) \in B_t$ la solution $(v,T)$ du systéme d'équations (3.53) et (3.54) avec les conditions aux limites (3.12)-(3.13) et les conditions initiales (3.7)-(3.8). Du lemme 3.8, il s'ensuit que

$$G_t(B_t) \subseteq (B_t), \qquad 0 < t \leq t_5.$$

Maintenant, nous pouvons démontrer le théorème principal.

**DEMONSTRATION DU THEOREME 3.1** Nous définissons pour $0 < t \leq t_5$,

$$Y_t = \left[L^2(0,t;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,t;L^2(\Omega))\right] \times \left[L^2(0,t;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,t;L^2(\Omega))\right].$$

On observe que l'ensemble $B_t$ défini dans (3.57) est convexe et fermé dans l'espace $Y_t$. Par conséquent, pour prouver le théorème il suffit de vérifier qu'il existe un $\overline{t} \in ]0,t_5]$ tel que l'opérateur $G_{\overline{t}}$ est une contraction dans la topologie de $Y_{\overline{t}}$. Soient $(\overline{v}_1, \overline{T}_1), (\overline{v}_2, \overline{T}_2) \in B_t$, $t < 0 \leq t_5$. Considérons d'abord la solutions $(\varrho_1, \pi_1, \sigma_1)$ et $(\varrho_2, \pi_2, \sigma_2)$ des équations (3.21)–(3.23) avec les conditions initiales (3.9)-(3.14), et en remplaçant respectivement $\overline{v} = \overline{v}_1$, $\overline{T} = \overline{T}_1$ et $\overline{v} = \overline{v}_2$, $\overline{T} = \overline{T}_2$ et posons

$$E^{[\varrho]} = \varrho_1 - \varrho_2, \qquad E^{[\pi]} = \pi_1 - \pi_2, \qquad E^{[\sigma]} = \sigma_1 - \sigma_2,$$

$$\overline{D}^{[v]} = \overline{v}_1 - \overline{v}_2, \qquad \overline{D}^{[T]} = \overline{T}_1 - \overline{T}_2.$$

En outre, pour la commodité de l'exposé, nous définissons

$$\overline{u}_i(m,x,t) = \overline{v}_i(x,t) - \frac{1}{\alpha_l(m)}\nabla\phi(x),$$

$$\overline{U}_{4l,i} = (mh_{gl}(\overline{T},\pi_{i,\vartheta};m), \overline{u}_{i,1}; \overline{u}_{i,2}, \overline{u}_{i,3})^T$$

$(i=1,2)$ et nous posons

$$\overline{D}^{[U_{4l}]} = U_{4l,1} - U_{4l,2}.$$

Des différences de (3.21), (3.22), (3.23) pour $\varrho_1$, $\pi_1$, $\sigma_1$ et pour $\varrho_2, \pi_2, \sigma_2$ il s'ensuit que

$$\partial_t E^{[\varrho]} + \overline{v}_1 \cdot \nabla E^{[\varrho]} + \overline{D}^{[v]} \cdot \nabla \varrho_2 + E^{[\varrho]}\nabla \cdot \overline{v}_1 + \varrho_2 \nabla \cdot \overline{D}^{[v]} = 0, \tag{3.58}$$

$$\partial_t E^{[\pi]} + \overline{v}_1 \cdot \nabla E^{[\pi]} + \overline{D}^{[v]} \cdot \nabla \pi_2 + E^{[\pi]}\nabla \cdot \overline{v}_1 + \pi_2 \nabla \cdot \overline{D}^{[v]} = \tag{3.59}$$

$$= H_{gl}(\overline{T}_2, \pi_{2,\vartheta}, \sigma_2) - H_{gl}(\overline{T}_1, \pi_{1,\vartheta}, \sigma_1),$$

$$\partial_t E^{[\sigma]} + \overline{U}_{4l,1} \cdot \nabla_{(m,x)} E^{[\sigma]} + \overline{D}^{[U_{4l}]} \cdot \nabla_{(m,x)}\sigma_2 + E^{[\sigma]}\nabla_{(m,x)} \cdot \overline{U}_{4l,1} + \sigma_2 \nabla_{(m,x)} \cdot \overline{D}^{[U_{4l}]} = \tag{3.60}$$

$$= [h_{gl}(\overline{T}_1, \pi_{1,\vartheta}; m) + B_1(\sigma_1; m) - g_1(m)[\pi_1 - \overline{\pi}_{vs}(T_1)]^-]E^{[\sigma]} +$$

$$+\{h_{gl}(\overline{T}_1, \pi_{1,\vartheta}; m) - h_{gl}(\overline{T}_2, \pi_{2,\vartheta}; m) + B_1(\sigma_1; m) - B_1(\sigma_2; m) - g_1(m)$$

$$([\pi_1 - \overline{\pi}_{vs}(T_1)]^- - [\pi_2 - \overline{\pi}_{vs}(T_2)]^-)\}\sigma_2 + g_0(m)([\pi_1 - \overline{\pi}_{vs}(T_1)]^+ \times [N^* - N(\sigma_1)]^+ -$$

$$-[\pi_2 - \overline{\pi}_{vs}(T_2)]^+ \times [N^* - N(\sigma_2)]^+ + B_2(\sigma_1; m)) - B_2(\sigma_2; m).$$

Nous rappelons les relations

$$\int_\Omega (\overline{v}_1 \cdot \nabla E^{[\varrho]}) E^{[\varrho]} dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla \cdot \overline{v}_1)(E^{[\varrho]})^2 dx,$$

$$\int_{\Omega}(\overline{v}_1\cdot\nabla E^{[\pi]})E^{[\pi]}dx=-\frac{1}{2}\int_{\Omega}(\nabla\cdot\overline{v}_1)(E^{[\pi]})^2dx,$$
$$\int_{D_2}(\overline{U}_{4l,1}\cdot\nabla E^{[\sigma]})E^{[\sigma]}dx=-\frac{1}{2}\int_{D_2}(\nabla\cdot\overline{U}_{4l,1})(E^{[\sigma]})^2dx.$$

Par conséquent, en multipliant (3.58)-(3.60) respectivement par $E^{[\varrho]}$, $E^{[\pi]}$, $E^{[\sigma]}$, et en intégant les deux premiers sur $\Omega$ et l'autre sur $D_2$, avec les calculs habituels pour les estimations, on obtient

$$\frac{d}{dt}\|E^{[\varrho]}\|^2_{L^2(\Omega)}\le c(1+\|\overline{v}_1\|_{W^2_p(\Omega)})\|E^{[\varrho]}\|^2_{L^2(\Omega)}+c\|\overline{D}^{[v]}\|^2_{H^1(\Omega)},\tag{3.61}$$

$$\frac{d}{dt}\|E^{[\pi]}\|^2_{L^2(\Omega)}\le c(1+\|\overline{v}_1\|_{W^2_p(\Omega)}+\|\overline{T}_1\|^2_{W^2_q(\Omega)})\times\tag{3.62}$$
$$\times(\|E^{[\pi]}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|E^{[\sigma]}\|^2_{L^2(D_2)})+c(\|\overline{D}^{[v]}\|^2_{H^1(\Omega)}+\|\overline{D}^{[T]}\|^2_{L^2(\Omega)}),$$

$$\frac{d}{dt}\|E^{[\sigma]}\|^2_{L^2(D_2)}\le c(1+\|\overline{v}_1\|_{W^2_p(\Omega)}+\|\overline{T}_1\|^2_{W^2_q(\Omega)}+\|\overline{T}_2\|^2_{W^2_q(\Omega)})\times\tag{3.63}$$
$$\times(\|E^{[\pi]}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|E^{[\sigma]}\|^2_{L^2(D_2)})+c(\|\overline{D}^{[v]}\|^2_{H^1(\Omega)}+\|\overline{D}^{[T]}\|^2_{L^2(\Omega)}).$$

A partir de (3.61), (3.62), (3.63) et les conditions initiales

$$E^{[\varrho]}(\cdot,0)=0,\qquad E^{[\pi]}(\cdot,0)=0,\qquad E^{[\sigma]}(\cdot,\cdot,0)=0$$

il s'ensuit que

$$\|E^{[\varrho]}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|E^{[\pi]}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|E^{[\sigma]}(t)\|^2_{L^2(D_2)})\le\tag{3.64}$$
$$\le ce^{c(t+t^{\frac{p-1}{p}}+t^{\frac{q-2}{q}})}\int_0^t(\|\overline{D}^{[v]}(t')\|_{H^1(\Omega)}+\overline{D}^{[T]}(t')\|_{L^2(\Omega)})dt'$$

$$(\varrho_1+\pi_1)\partial_tD^{[v]}-\eta\Delta D^{[v]}-(\zeta+\frac{\eta}{3})\nabla(\nabla.D^{[v]})=-(E^{[\varrho]}+E^{[\pi]})\partial_tv_2+\tag{3.65}$$
$$-(\varrho_1+\pi_1)(\overline{v}_1\cdot\nabla)\overline{D}^{[v]}-(E^{[\varrho]}+E^{[\pi]})(\overline{v}_1\cdot\nabla)\overline{v}_2-(\varrho_2+\pi_2)(\overline{D}^{[v]}\cdot\nabla)\overline{v}_2+$$
$$-R_0\nabla\Big(\Big(\frac{E^{[\varrho]}}{\mu_a}+\frac{E^{[\pi]}}{\mu_h}\Big)\overline{T}_1\Big)-R_0\nabla\Big(\Big(\frac{\varrho_2}{\mu_a}+\frac{\pi_2}{\mu_h}\Big)\overline{D}^T\Big)+$$

$$-\Big[\int E^{[\varrho]}dm + E^{[\varrho]} + E^{[\pi]}\Big]\nabla\phi,$$

$$(\varrho_1+\pi_1)c_v\partial_t D^{[T]} - \kappa\Delta D^{T]} = -(E^{[\varrho]}+E^{[\pi]})c_v\partial_t T_2 - (\varrho_1+\pi_1)c_v\times \tag{3.66}$$

$$\times\sum_{i=1}^{3}\overline{v}_{1,i}\frac{\partial\overline{D}^{[T]}}{\partial x_i} - (\varrho_1+\pi_1)c_v\sum_{i=1}^{3}\overline{D}_i^{[v]}\frac{\partial\overline{T}_2}{\partial x_i} - (E^{[\varrho]}+E^{[\pi]})c_v\sum_{i=1}^{3}\overline{v}_{2,i}\frac{\partial\overline{T}_2}{\partial x_i}+$$

$$-R_0\Big(\frac{\varrho_1}{\mu_a}+\frac{\pi_1}{\mu_h}\Big)\overline{T}_1\nabla\cdot\overline{D}^{[v]} - R_0\Big(\frac{\varrho_1}{\mu_a}+\frac{\pi_1}{\mu_h}\Big)\overline{D}^T\nabla\cdot\overline{v}_2 - R_0\Big(\frac{E^{[\varrho]}}{\mu_a}+\frac{E^{[\pi]}}{\mu_h}\Big)\overline{T}_2\nabla\cdot\overline{v}_2+$$

$$+\eta\sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial\overline{D}_i^{[v]}}{\partial x_j} - \frac{\partial\overline{D}_j^{[v]}}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\overline{D}^{[v]}\Big)\frac{\partial\overline{v}_{1,i}}{\partial x_j} + \eta\sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial\overline{v}_{2,i}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{v}_{2,j}}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\times$$

$$\times\nabla\cdot\overline{v}_2\Big)\frac{\partial\overline{D}_i^{[v]}}{\partial x_j} + \zeta[(\nabla\cdot\overline{v}_1)^2 - (\nabla\cdot\overline{v}_2)^2] + L_{gl}[H_{gl}(\overline{T}_1,\pi_{1,\vartheta},\sigma_1) - H_{gl}(\overline{T}_2,\pi_{2,\vartheta},\sigma_2)].$$

En multipliant les équations (3.65) et (3.66) réspectivement par $\frac{D^{[v]}}{\varrho_1+\pi_1}$ et $\frac{D^{[T]}}{\varrho_1+\pi_1}$ et en intégrant sur $\Omega$. Nous rappelons la relation

$$\eta\Big|\int_\Omega\frac{\frac{\partial(\varrho_1+\pi_1)}{\partial x_j}\frac{\partial D_i^{[v]}}{\partial x_j}D_i^{[v]}}{(\varrho_1+\pi_1)^2}dx\Big| + \Big(\zeta+\frac{\eta}{3}\Big)\Big|\int_\Omega\frac{\frac{\partial(\varrho_1+\pi_1)}{\partial x_j}\frac{\partial D_j^{[v]}}{\partial x_j}D_i^{[v]}}{(\varrho_1+\pi_1)^2}dx\Big| \le$$

$$\le \overline{c}(\|\varrho_1\|_{W_p^1(\Omega)} + \|\pi_1\|_{W_p^1(\Omega)})\|D^{[v]}\|_{H^1(\Omega)}^{1+\frac{3}{p}}\|D^{[v]}\|_{L^2(\Omega)}^{1-\frac{3}{p}} \le$$

$$\le \varepsilon\|D^{[v]}\|_{H^1(\Omega)}^2 + C_\varepsilon(\|\varrho_1^{\frac{2p}{p-3}}\|_{W_p^1(\Omega)} + \|\pi_1^{\frac{2p}{p-3}}\|_{W_p^1(\Omega)})\|D^{[v]}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

et l'analogue pour $D^{[T]}$. Ensuite, compte tenu de majoration déjà connue

$$\|\partial_t v_2\|_{L^p(\Omega)} \le \overline{c}(1+\|v_2\|_{W_p^2(\Omega)}), \qquad \|\partial_t T_2\|_{L^q(\Omega)} \le \overline{c}(1+\|T_2\|_{W_q^2(\Omega)}+\|\overline{v}_2\|_{W_p^2(\Omega)})$$

($\overline{c}$ est une constante convenable) et a l'aide des inégalités de Sobolev, Hölder et de Cauchy-Schwarz, appliques à plusieurs reprises, nous obtenons les inégalités

$$\frac{d}{dt}\|D^{[v]}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \overline{c}_0\|D^{[v]}\|_{H^1(\Omega)}^2 \le \tag{3.67}$$

$$\le c(1+\|\overline{v}_2\|_{W_p^2(\Omega)}^2)(\|D^{[v]}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|E^{[\varrho]}\|_{L^2(\Omega)}^2)+$$

$$+\|E^{[\pi]}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|E^{[\sigma]}\|^2_{L^2(D_2)} + \|\overline{D}^{[v]}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\overline{D}^{[T]}\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\frac{d}{dt}\|D^{[T]}\|^2_{L^2(\Omega)} + \overline{c}_0\|D^{[T]}\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \tag{3.68}$$

$$\leq c(1 + \|T_2\|^2_{W^2_q(\Omega)} + \|\overline{v}_2\|^2_{W^2_p(\Omega)})(\|D^{[T]}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|E^{[\varrho]}\|^2_{L^2(\Omega)})+$$

$$+\|E^{[\pi]}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|E^{[\sigma]}\|^2_{L^2(D_2)} + \|\overline{D}^{[v]}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\overline{D}^{[T]}\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

À partir de (3.67)-(3.68), il s'ensuit que

$$\|D^{[v]}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|D^{[T]}\|^2_{L^2(\Omega)} + \overline{c}_0\int_0^t (\|D^{[v]}(t')\|^2_{H^1(\Omega)} + \|D^{[T]}(t')\|^2_{H^1(\Omega)})dt' \leq$$

$$\leq ce^{(t+t^{\frac{q-2}{q}}+t+t^{\frac{p-2}{p}})}(t + t^{\frac{q-2}{q}}+t^{\frac{p-2}{p}})\Big[\|\overline{D}^{[T]}\|^2_{L^\infty(0,t,L^2(\Omega))} + \|\overline{D}^{[v]}\|^2_{L^\infty(0,t,L^2(\Omega))}+$$

$$+\|E^{[\varrho]}\|^2_{L^\infty(0,t,L^2(\Omega))} + \|E^{[\pi]}\|^2_{L^\infty(0,t,L^2(\Omega))} + \|E^{[\sigma]}\|^2_{L^\infty(0,t,L^2(\Omega))}\Big].$$

Ensuite, compte tenu de (3.64), nous avons

$$\|D^{[v]}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|D^{[T]}\|^2_{L^2(\Omega)} + \overline{c}_0\int_0^t (\|D^{[v]}(t')\|^2_{H^1(\Omega)} + \|D^{[T]}(t')\|^2_{H^1(\Omega)})dt' \leq \tag{3.69}$$

$$\leq ce^{(t+t^{\frac{q-2}{q}}+t+t^{\frac{p-2}{p}})}(t + t^{\frac{q-2}{q}}+t+t^{\frac{p-2}{p}})\Big[\|\overline{D}^{[T]}\|^2_{L^\infty(0,t,L^2(\Omega))} + \|\overline{D}^{[v]}\|^2_{L^\infty(0,t,L^2(\Omega))}+$$

$$+ce^{(t+t^{\frac{p-1}{p}}+t^{\frac{q-2}{q}})}\int_0^t (\|D^{[v]}(t')\|^2_{H^1(\Omega)} + \|D^{[T]}(t')\|^2_{L^2(\Omega)})dt'\Big].$$

De (3.69) on en déduit qu'il existe un $\overline{t} \in ]0, t_5]$ tel que

$$\|D^{[v]}\|^2_{L^\infty(0,\overline{t},L^2(\Omega))}+\|D^{[T]}\|^2_{L^\infty(0,\overline{t},L^2(\Omega))}+\|D^{[v]}\|^2_{L^2(0,\overline{t},H^1(\Omega))}+\|D^{[T]}\|^2_{L^2(0,\overline{t},H^1(\Omega))} \leq$$

$$\leq \kappa\Big(\|\overline{D}^{[v]}\|^2_{L^\infty(0,\overline{t},L^2(\Omega))}+\|\overline{D}^{[T]}\|^2_{L^\infty(0,\overline{t},L^2(\Omega))}+\|\overline{D}^{[v]}\|^2_{L^2(0,\overline{t},H^1(\Omega))}+\|\overline{D}^{[T]}\|^2_{L^2(0,\overline{t},H^1(\Omega))}\Big)$$

avec $0 < \kappa < 1$, ce qui signifie que l'opérateur $G_{\overline{t}} : B_{\overline{t}} \to B_{\overline{t}}$ est une contraction. Cela nous permet de conclure la preuve de l'existence et l'unicité de la solution dans $[0, \overline{t}]$. Le théorème est démontré.

# Chapitre 4

# Vers une généralisation

Le résultat illustré dans le chapitre précédent a été obtenu en supposant que $\nabla\Phi \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$ (voir (3.15)). Mais cette condition est visiblement contraire à la condition naturelle. En effet, si $\Phi$ est une constante fois $x_3$ (en plus une constante arbitraire) comme dans le cas du champ de la force gravitationnelle ($\Phi = gx_3$), la composante normale du gradient de $\Phi$ ne peut pas s'annuler sur toute la frontière $\partial\Omega$ de $\Omega$. Pour éliminer la condition peu naturelle, dans ce chapitre on va montrer les idées pour obtenir un résultat analogue sans supposer la condition $\nabla\Phi \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$ dans un cas particulier.

Pour $\Phi$, nous supposons au lieu de (3.15), seulement $\Phi \in C^3(\Omega)$ et nous ne supposons pas $\nabla\Phi \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$.

D'autre part, pour les données initiales, nous supposons qu'elles vérifient les conditions (3.7)-(3.14) et (3.16), que nous avons supposées dans le chapitre précédent. De plus nous supposons que

$$supp\, \sigma(\cdot, 0) \equiv \omega \neq \varnothing, \tag{4.1}$$

$$\inf_{x\in\omega, y\in\mathbb{R}^3\setminus\Omega} |x-y| \equiv \mathrm{dist}(\omega, \partial\Omega) > 0, \tag{4.2}$$

$$\pi(x,0) \leq \overline{\pi}_{vs}(T(x,0)) - \delta_\pi, \quad \delta_\pi > 0 \quad \forall x \in S_\Omega, \tag{4.3}$$

où

$$S_\Omega = \{x \in \Omega, \quad \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < \frac{1}{2}\mathrm{dist}(x, \Omega)\}.$$

Si $\sigma$ est continue, il existe un $t_\delta > 0$ tel que

$$\sigma\Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{pour} \;\; 0 \leq t \leq t_\delta > 0.$$

Pour cette raison on a

$$\int_\Omega \nabla\sigma^p \cdot \overline{u} dx dm = -\int_\Omega \sigma^p \nabla \cdot \overline{u} dx dm$$

et donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\overline{M}} \int_\Omega \sigma^{p-1} \nabla \cdot (\sigma(m)\overline{u}) dx dm &= \int_0^{\overline{M}} \int_\Omega \sigma^{p-1} [\nabla\sigma \cdot \overline{u} + \sigma\nabla \cdot \overline{u}] dx dm \\
&= \int_0^{\overline{M}} \int_\Omega \sigma^{p-1} \nabla\sigma \cdot \overline{u} dx dm + \int_0^{\overline{M}} \int_\Omega \sigma^p \nabla \cdot \overline{u} dx dm \\
&= \frac{1}{p} \int_0^{\overline{M}} \int_\Omega \nabla\sigma^p \cdot \overline{u} dx dm + \frac{1}{p} \int_0^{\overline{M}} \int_\Omega \sigma^p \nabla \cdot \overline{u} dx dm \\
&= \frac{p-1}{p} \sigma^p \nabla \cdot \overline{u} dx dm. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Tout analoguement on a

$$\int_0^{\overline{M}} \int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2} \nabla\sigma \cdot \nabla(\nabla \cdot (\sigma(m)\overline{u})) dx dm$$

$$= \frac{p-1}{p} \int_0^{\overline{M}} \int_\Omega |\nabla\sigma|^p \nabla \cdot \overline{u} dx dm + \int_0^{\overline{M}} \int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2} \sum_{i,j=1}^{3} (\partial_{x_j}\sigma)(\partial_{x_i}\sigma)(\partial_{x_j}\overline{u}_i) dx dm$$

$$+ \int_0^{\overline{M}} \int_\Omega |\nabla\sigma|^{p-2} \sum_{i,j=1}^{3} (\partial_{x_j}\sigma)\sigma\partial_{x_j} \nabla \cdot \overline{u} dx dm. \qquad (4.5)$$

Ces relations ont le résultat formellement égal à celui que nous avons vu dans la démonstration du lemme 3.3. Par conséquent, si on peut démontrer la continuité de la fonction

$$\sigma : \Omega \to \mathbb{R},$$

on aura les estimations formellement identiques à celles utlisées dans le chapitre précédent, de sorte que l'on pourra démontrer les résultats analogues au chapitre précédent d'une manière analogue.

De cette manière on pourra avoir au moins un cas particulier, où sans supposer la condition peu naturelle $\nabla\Phi \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$ on peut démontrer l'existence et l'unicité de la solution locale $(v, t, \varrho, \pi, \sigma)$.

# Bibliographie


[1] **Belhireche, H., Aissaoui, M. Z, H.,Fujita Yaashima, H.** :Equations monodimensionelles du mouvement de l'air avec la trasition de phase de l'eau. Sci. Techn. Univ. Constantine-A, Vol. **31** (2011), pp.9-17

[2] **Fujita Yashima, H., Campana, V., Aissaoui, M. Z.** : Système d'équations d'un modèle du mouvement de l'air impliquant la transitionn de phase de l'eau dans l'atmosphère. Quaderno Dip. Mat. Univ. Torino, No. 12 (2009).

[3] **H . FUJITA YASHIMA :** Fluides Newtoniens. *Cours de master*, Univ. Guelma, 2009-2010.

[4] **H.FUJITA YASHIMA :** Modilisation. *Cours de master*, Univ. Guelma, 2009-2010.

[5] **L. D. Landau, E. M. Lifchitz** :Cinétique physique(Physique théorique, tome 10) (traduit du russe). Mir, Moscou,1990.

[6] **Merad Meriem**,Mémoire de master en mathématiques : Modèle général du mouvement de l'atmosphére avec la transition de phase de l'eau :gaz-liquide-solide.

[7] **O. A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'tseva,**, Linear and quasi-linear equations of parabolic type (translated from Russian), «Amer. Math. Soc.», 1968.

[8] **S. C. SEVADURAY,H.FUJITA YASHIMA** Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati : gassoso, liquido e solido. *Acc. Sc. Torino, Memorie Sc. Fis.* vol. **35** (2011), pp. 37-69.