République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Par :

Mme. Achouri Lamia

Intitulé

Méthode de Rothe appliquée sur un problème hyperbolique intégrodifférentielle avec conditions intégrales

Dirigé par : Dr.CHAOUI Abderazake

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. ELLAGOUNE. F	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.Chaoui. A	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. FERNANE. K	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2014

Remerciement

Par ce travail qui restera toujours notre compensation pour nos longues années d'études, nous remercions :

« Dieu » pour son aide et sa bénédiction.

En suite, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à notre encadreur « **Chaoui Abderazak** » pour nous avoir guider à l'élaboration de ce travail avec ces conseils, ses critique et ses encouragements.

Je remercie monsieur les membres du jury pour la caution qu'ils ont bien voulu apporter à ce travail et à qui nous devons notre profond respect et notre très haute considération.

Nous tenons également à remercier toute personne qui a participé directement et indirectement pour la cueillette de ce fruit.

Nous remercions tout membre du département Mathématique de l'université : Mai 1945 de Guelma au chef du département à tout les enseignants et les administrateurs.

Enfin, nous tenons à adresser nous plus vifs remerciement à tout les personnes qui de prés où de loin nous aide à la réalisation de ce mémoire.

Dédicace

A celui que les rois s'inclinent devant sa majesté et les césars

Devant sa force , à celui que la sagesse revient a ses conseils à celui qui a Cœur rempli de tendresse et de patience, a toi papa

A celle que le soleil a brillé pour éclairer ses yeux, que a offert la

Beauté aux fleurs et le charme a tout ce qui est beau pour la personne

qui na jamais cessé de me porter aide et courage, a toi maman.

A maman : Habiba et Papa : azieze

A mon marie : Younes

A ma petite Rose : Ranime

A mes chers frères : Dada et sa femme Nabila, Mehdi « Mido ».

A mes sœurs : Tata, Naima, Radia, Rachida.

Ainsi que mes chères nièces sans exception

A toute la famille :Achouri

A toute mes amies surtout :Ahlem, Halima, Selma, Nabila, Nesrine, Hanane

Sans oublier toutes les personnes qui m'aide.

Surtout la promotion « 2013-2014 »

Table des matières

Introduction

Le but de ce travail est d'appliquer la méthode de Rothe dans l'étude d'une équation intégro-différentielles à laquelle sont jointent des conditions non locales intégrales du premier type.

On va étudier l'existence, l'unicité, la dépendance continue de la solution par rapport aux données, l'erreur d'estimation du procédure d'approximation.

La méthode de Rothe s'est avéré un outil théorique et numérique efficace dans l'étude des problèmes d'évolutions.

De tels problèmes ont été étudiés par plusieurs auteurs pour différents types d'équations : paraboliques, hyperboliques, pseudo paraboliques, ...

Cette méthode, appelée aussi " method of lines" trouve son origine dans les travaux du mathématicien Allemand E. Rothe en 1930 [11], elle a été également utilisée et développée dans la résolution des équations hyperboliques d'ordre supérieur par le mathématicien K. Rektorys $[9-10]$, et J. Kacur [7].

On peut également citer le travail de A. Bouziani [4].

Plusieurs autres résultat ont été réalisés en changeant l'ordre des dérivées ou en changeant l'équation et les conditions par exemple l'équation de télégraphe [5] ainsi que les problèmes integro-differentieles $[1,2,3]$.

Chapitre 1

Rappel d'analyse fonctionnelle

1.1 Espace de Hilbert

Définition (produit scalaire)

On appelle produit scalaire dans un espace vectoriel E, une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E, on a le produit scalaire de deux éléments x, y de E sous la forme (x, y).

Définition (Espace de Hilbert)

Un espace de Hilbert est un vectoriel muni d'un produit scalaire (x, y) qui est complet lorsqu'il est normé par la norme associée à ce produit scalaire.

Définition (L'espace $\mathbf{L}^2(\Omega)$)

L'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions de carré sommable sur Ω, ou Ω est un domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$ou $\mathbb{R}^3$, c' est à dire telles que l'intégrale : $\int\limits_{\Omega} |f(x)|^2 \prec \infty$, muni du produit scalaire :

$$(f, g) = \int\limits_{\Omega} f(x) g(x) dx.$$

1.2 Espace de Sobolev

Les espaces de sobolev ont été introduits au début du siècle et permis de résoudre bon nombre de problème concernant les équations aux dérivées partielles restés sans réponse jusque là.

Nous nous limiterons aux espaces les plus utiles en gardant bien à l'esprit que la théorie sous jacente est beaucoup plus vaste.

Dans ce qui suit, sauf mention explicite du contraire, on suppose l'ouvert Ω borné

1.2.1 L'espace $H^1(\Omega)$

Définition : On note $H^1(\Omega)$ l'espace fonctionnel linéaire défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i\right\}$$

que l'on munit du produit scalaire noté $(u, v)_{1,\Omega}$:

$$(u, v)_{1,\Omega} = \int_{\Omega} (u.v + \nabla u.\nabla v)$$

et par le fait même d'une norme induite :

$$\|u\|_{1.\Omega} = ((u, u)_{1.\Omega})^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} (u^2 + \nabla u^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.2.2 L'espace $H_0^1(\Omega)$

Définissons maintenant un autre espace de Sobolev qui est un sous espace de $H^1(\Omega)$ et qui nous sera très utile pour les problèmes avec condition aux limites de Dirichlet.

$H_0^1(\Omega)$ est donne par :

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \ u = 0 \ sur \ \partial\Omega\}$$

1.2.3 L'espace $H^2(\Omega)$

Définition : On note $H^2(\Omega)$ l'espace

$$H^2(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega), \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \ et \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in L^2(\Omega), \ \forall 1 \leq i \leq n\right\}$$

que l'on munit du produit scalaire noté $(u,w)_{2.\Omega}$:

$$(u,w)_{2.\Omega} = \int_{\Omega} \left(uw + \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} \right) \right) dv$$

et de la norme induite :

$$\|u\|_{2.\Omega} = \left(\int_{\Omega} \left(u^2 + \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right)^2 \right) dv \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.3 Convergence faible

Soit E un espace de Banach

Définition : (x_n) converge faiblement dans E vers x si l'on a :

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle x', x_n \right\rangle = \left\langle x', x \right\rangle \Rightarrow \lim_{n\to\infty} = \left\langle x', x_n - x \right\rangle = 0, \ \forall x' \in E'$$

avec E' l'espace dual de$E$.

Notation : On note $x_n \longrightarrow x$ faiblement dans E par :$x_n \rightharpoonup x$.

1.4 Espace de Boschner

1)$C(I, L^2(\Omega)) = \{f : I \longrightarrow L^2(\Omega)$ qui associé à $t \longrightarrow f(t) \in L^2(\Omega)$ continue$\}$ munit de la norme :

$$\|f\|_{C(I,L^2(\Omega))} = \max_{t\in I} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

2)$L^\infty(I, H_0^1(\Omega)) = \{f : I \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ essentiellement bornés$\}$ munit de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(I,H_0^1(\Omega))} = \sup_{t\in I} \|f\|_{H_0^1(\Omega)} \ p.p.$$

3)$L^2(I, L^2(\Omega)) = \{f : I \longrightarrow L^2(\Omega)$ à carré intégrable$\}$ munit de la norme :

$$\|f\|_{L^2(I,L^2(\Omega))} = \int \|f\|^2_{L^2(\Omega)} dt \prec \infty.$$

Définition : Si E un espace vectoriel normé sur $\Bbbk = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ le dual de E est l'espace $\pounds(E, \Bbbk)$ des formes linéaires continue sur $\Bbbk$, on le note E' et on munit E' de la norme subordonnée à la norme de E.

1.5 Les inégalités utilisées

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

1.5.1 Inégalité de Cauchy Schwartz

$\forall u, v \in L^2(\Omega)$:

$$\left|\int_\Omega u.v dx\right| \leq \left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left|\int_\Omega \sum_{i=1}^N u_i v_i dx\right| \leq \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^N u_i^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^N v_i^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

preuve : pour $\lambda \in \mathbb{R}$, définissons le trinôme du second degré.
$p(\lambda) = (u + \lambda v, u + \lambda v) = \lambda^2(v, v) + 2\lambda(u, v) + (u, u)$.
comme $p(\lambda) \geq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, nécessairement le discriminant $\Delta = (u, v)^2 - (u, u)(v, v)$ doit être négatif ou nul, soit $|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}}$ .Si $\Delta = 0$ alors le polynôme $p(\lambda) = 0$ admet une racine double i.e ils existes λ_1 tq $p(\lambda_2) = 0$ donc u et v colinéaires.

1.5.2 L'ε inégalité

$$|xy| \leq \frac{\varepsilon}{2} x^2 + \frac{1}{2\varepsilon} y^2, \ \forall \varepsilon \geq 0, \quad \forall x, y$$

1.5.3 Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans au moins une direction de l'espace.
Il existe une constante $C \succ 0$ telle que, pour toute fonction

$$v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx$$

1.6 Opérateur de Voltra

une équation intégrale linéaire de Voltera est un équation de convolution si :

$$x\left(t\right)=f\left(t\right)+\int_{t_0}^{t}k(t-s)x(s)ds$$

1.7 Le schéma de la méthode de Rothe

▶ On divise l'intervalle du temps en n sous intervalle $[t_{j-1},t_j]$, $j=1...n$, où $t_j=jh$ et $h=\frac{T}{n}$.

▶ On remplace les dérivées de la variable spatiale u par la correspondante différence quotient.

▶ On approxime le problème à tout point $t=t_j$, $j=1...n$, par un nouveaux problème discrétisé.

▶ On détermine les fonctions u^n solutions du système obtenue.

▶ On se basant sur des estimations a priori des fonctions u^n dans des espaces convenablement choisi on démontre que la limite est la solution du problème posé.

1.8 Classification mathématique des EDP du second ordre

Ce sont de la forme :

$$\begin{aligned} A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu &= g(x,y) \\ A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= f\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

et $A,B,C,...,F$ sont les coefficients de l'EDP, ils sont fonction de x et y et peuvent être des constants. Selon le signe du discriminant

$$\Delta=B^2-4AC.$$

Nous obtenons le classement suivent :

1)Si $\Delta \prec 0$, l'EDP est dite elliptique comme l'équation de Laplace de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

2)Si $\Delta \succ 0$, l'EDP est dite hyperbolique comme l'équation des ondes de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

3)Si $\Delta = 0$, l'EDP est dite parabolique comme l'équation de la chaleur de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \delta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ \delta \succ 0.$$

Chapitre 2

Position du problème et estimations a priori

2.1 Espace fonctionnels

Soit $I = [0, T]$

On note par $(,)$ et $\|.\|$ le produit scalaire et la norme correspondante de $L^2(0,1)$.
V est l'espace de Hilbert définit par :

$$V = \left\{ v \in L^2(0,1) \ tq : \int_0^1 v(x)dx = \int_0^1 xv(x) = 0 \right\}$$

L'espace de Hilbert $L^2(0,1)$ peut être injecté continument dans un autre espace de Hilbert $B(0,1)$ qui est le complété de $C_0(0,1)$ l'espace des fonctions continues à support compact dans $(0,1)$ par rapport au produit scalaire :

$$(u,v)_B = \int_0^1 \Psi_x u.\Psi_x v dx$$

telle que :

$$\Psi_x u = \int_0^x u(\xi)d\xi$$

et la norme :

$$\|u\|_B^2 = (u,u)_B$$

Il s'ensuit que :

$$\|u\|_B^2 \leq \frac{1}{2}\|u\|^2$$

L'espace des fonctions continues de I dans $B(0,1)$, noté $C(I, B(0,1))$ est un Banach pour la norme :

$$\|x\|_{C(I,B(0,1))} = \max_I \|x(t)\|_B$$

On dénote par V_B, $C^{0,1}(I,X)$ et $C^{1,1}(I,X)$ les espaces suivants :

$$V_B = \left\{v \in B(0,1), \text{ tq : } \int_0^1 v dx = 0\right\}$$

$$C^{0,1}(I,X) = \{u : I \longrightarrow X \text{ tq } u \text{ est lipchitzienne continue}\}$$

$$C^{1,1}(I,X) = \left\{u \in C^{0,1}(I,X) \text{ tq } \frac{du}{dt} \in C^{0,1}(I,X)\right\}$$

où X est un espace normé.

On peut voir la fonction

$$f : (0,1) \times I \longmapsto f(x,t) \in \mathbb{R}$$

Comme une fonction associe à $t \longmapsto f(t)$ défini de I dans un espace fonctionnel.

En posant :

$$f(t) : x \in (0,1) \longmapsto f(x,t)$$

2.2 position du probléme

On considère l'équation semi linéaire intégro-différentielle avec condition intégrale suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) + \int_0^t a(t-s)\, k(s, u(x,s))\; ds \qquad (x,s) \in (0,1) \times (0,T) \quad (2.1)$$

Avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} u(x,0) &= U_0(x) \\ \tfrac{\partial u}{\partial x}(x,0) &= U_1(x) \end{aligned} \quad x \in (0,1) \qquad (2.2)$$

Et les conditions intégrales :

$$\int_0^1 u(x,t)\,dx = \int_0^1 xu(x,t)dx = 0 \quad x \in (0,1) \tag{2.3}$$

Pour résoudre le probléme $(2.1)-(2.3)$, on suppose que :

$H_1) f(t) \in L^2(0,1)$ et $\|f(t)-f(t')\|_B \leq l\,|t-t'|$

l constante positive.

$H_2) U_0(x), U_1(x) \in H^2(0,1)$

$H_3) U_0, U_1$ vérifient :

$$\int_0^1 U_0(x)dx = \int_0^1 xU_0(x)dx = 0 \tag{2.4}$$

$$\int_0^1 U_1(x)\,dx = \int_0^1 xU_1(x)dx = 0 \tag{2.5}$$

$H_4) a$ est une fonction réelle continue telle que :

$$|a(t)-a(t')| \leq C_1\,|t-t'|$$

$k : I \times B(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$ est continue pour les deux variables vérifiant :

$$\|k(t,u)\|_B \leq \|u(t)\|_B$$

$H_5)$

$|k(t,u)-k(t,v)| \leq L(t)\,\|u(t)-v(t)\|_B$ p.p sur I et $\forall u(t), v(t) \in V$ ou $L \in L^1(I)$ positive

Définition 2.2.1 *Une fonction $u : I \longrightarrow L^2(0,1)$ est dite solution faible du problème $(2.1)-(2.3)$ si*

i)

$$u \in C^{0,1}(I,V)$$

ii)

$$\frac{du}{dt} \in L^\infty(I,V) \cap C^{0,1}(I,B(0,1)) \;\; et \;\; \frac{d^2u}{dt^2} \in L^\infty(I,B(0,1))$$

iii)

$$u(0) = U_0 \ dans \ V \ et \ \frac{du}{dt}(0) = U_1 \ dans \ B(0,1)$$

iv) pour tout $\phi \in V$ et p.p $t \in I$, l'identité

$$\int_I \left(\frac{d^2 u(t)}{dt^2}, \phi \right)_B dt + \int_I (u(t), \phi)\, dt = \int_I \left(f(t) + \int_0^t a(t-s)\, k(s,u)\, ds, \phi \right)_B dt \tag{2.6}$$

est satisfaite.

Théorème 2.2.1 *Supposons que les hypothèses* $(H_1 - H_4)$ *sont vérifies, alors il existe une solution faible* u *du problème* $(2.1)-(2.3)$ *au sens de la définition* $(2.2.1)$*.De plus, si* (H_5) *est satisfaite, alors* u *unique.*

2.3 Schéma de discrétisation et estimations a priori

On divise l'intervalle en n sous intervalle de longueur $h = \frac{T}{n}$ et notons :

$$u_j = u(t_j), \quad tq \ t_j = jh, \quad j = 1 \ldots n$$

pour $j = 1 \ldots n$, ou résoudre successivement le problème stationnaire linéaire :

$$\frac{u_j - 2u_{j-1} + u_{j-2}}{h^2} - \frac{d^2 u_j}{dx^2} = f_j + h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i \tag{2.7}$$

$$\int_0^1 u_j(x)\, dx = 0 \tag{2.8}$$

$$\int_0^1 x u_j(x)\, dx = 0 \tag{2.9}$$

où :

$$\begin{cases} f_j = f(t_j) \\ a_{ij} = a(t_j - t_i) \\ k_i = k(t_i, u_i) \end{cases}$$

On a :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = \frac{\partial U_0}{\partial x}(x) = U_1(x) = \frac{U_0(x) - u_{-1}(x)}{h}$$

Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{-1}(x) = U_0(x) - hU_1(x) \\ u_0(x) = U_0(x) \end{array} \right. \quad x \in (0,1)$$

Alors :

$$\begin{array}{ll} \delta u_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{h} & \\ et & j = 0 \ldots n \\ \delta^2 u_j = \frac{\delta u_j - \delta u_{j-1}}{h} & \end{array}$$

Et définissons la suite de Rothe (u_n) des fonctions lipchitziennes continues définies de

$$I \longrightarrow H^2(0,1) \cap V$$

par :

$$u^n(t) = u_{j-1} + \delta u_j (t - t_j), \quad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1 \ldots n$$

Et les fonctions auxiliaires suivantes :

$$\delta u^n(t) = \delta u_{j-1} + \delta^2 u_j (t - t_j), \quad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1 \ldots n \tag{2.10}$$

$$\bar{u}^{(n)}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} u_j & t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1 \ldots n \\ U_0 & t \in [-h, 0] \end{array} \right. \tag{2.11}$$

$$\bar{\delta} u^{(n)}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \delta u_j & t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1 \ldots n \\ U_1 & t \in [-h, 0] \end{array} \right. \tag{2.12}$$

Théorème 2.3.1 *le problème* $(2.7) - (2.9)$ *admet une solution unique*

$$u_j \in H^2(0,1) \ \textit{pour} \ n \geq 1, \ j = 1 \ldots n$$

Démonstration 2.3.1 *Supposons que u_{j-1} et u_{j-2} sont toujours connues et qu'elle soient dans $H^2(0,1)$, alors $f_j \in L^2(0,1)$.*

La solution général de $(2.7) - (2.9)$ est donnée par :

$$u_j(x) = k_1(x) \cosh \frac{x}{h} + k_2(x) \sinh \frac{x}{h}, \quad x \in (0,1) \tag{2.13}$$

Où k_1, k_2 sont deux fonctions de x telles que :

$$\begin{cases} \frac{dk_1}{dx}(x)\cosh\frac{x}{h} + \frac{dk_2}{dx}(x)\sinh\frac{x}{h} = 0 \\ \frac{dk_1}{dx}(x)\sinh\frac{x}{h} + \frac{dk_2}{dx}(x)\cosh\frac{x}{h} = h\left[\frac{-2u_{j-1}+u_{j-2}}{h^2} - f_i - h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i\right] \end{cases} \tag{2.14}$$

En remarquant que le déterminant de (2.14) est :

$$\Delta = \cosh^2\frac{x}{h} - \sinh^2\frac{x}{h} = 1$$

Alors :

$$\begin{cases} \frac{dk_1}{dx}(x) = hF_j(x)\sinh\frac{x}{h} \\ \frac{dk_2}{dx}(x) = hF_j(x)\cosh\frac{x}{h} \end{cases} \tag{2.15}$$

Où :

$$F_j(x) = \frac{-2u_{j-1}+u_{j-2}}{h^2} - f_j - h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i \tag{2.16}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} k_1(x) = h\int_0^x F_j(\xi)\sinh\frac{\xi}{h}d\xi + \lambda_1 \\ k_2(x) = h\int_0^x F_j(\xi)\cosh\frac{\xi}{h}d\xi + \lambda_2 \end{cases} \tag{2.17}$$

D'aprés l'identité (2.13) on a :

$$u_j(x) = h\int_0^x F_j(\xi)\sinh\left(\frac{x-\xi}{h}\right)d\xi + \lambda_1\cosh\frac{x}{h} + \lambda_2\sinh\frac{x}{h} \tag{2.18}$$

Choisissons (λ_1, λ_2) telles que (2.8), (2.9) soient vérifie, alors :

$$\begin{cases} \lambda_1\int_0^1 \cosh\frac{x}{h}dx + \lambda_2\int_0^1 \sinh\frac{x}{h}dx = -h\int_0^1\int_0^x F_j(\xi)\sinh\frac{x-\xi}{h}d\xi dx \\ \lambda_1\int_0^1 x\cosh\frac{x}{h}dx + \lambda_2\int_0^1 x\sinh\frac{x}{h}dx = -h\int_0^1\int_0^x xF_j(\xi)\sinh\frac{x-\xi}{h}d\xi dx \end{cases} \tag{2.19}$$

Et par suite :

$$\begin{cases} \lambda_1 \sinh \frac{1}{h} + \lambda_2 (\cosh \frac{1}{h} - 1) = -\int\limits_0^1 \int\limits_0^x F_j(\xi) \sinh \frac{x-\xi}{h} d\xi dx \\ \lambda_1 (\sinh \frac{1}{h} - h \sinh \frac{1}{h} + h) + \lambda_2 (\cosh \frac{1}{h} - h \sinh \frac{1}{h}) = -\int\limits_0^1 \int\limits_0^x x F_j(\xi) \sinh \frac{x-\xi}{h} d\xi dx \end{cases} \tag{2.20}$$

Puisque le déterminant (2.20) de :

$$\Delta(h) = 2h - 2h \cosh \frac{1}{h} + \sinh \frac{1}{h}$$

Donc :

$$\Delta(h) = 2 \sinh \frac{1}{2h} \left(\cosh \frac{1}{2h} - 2h \sinh \frac{1}{2h} \right) \tag{2.21}$$

ne s'annule pas $\forall h \succ 0$, alors le système (2.20) admet une unique solution $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

Ce qui implique que le problème $(2.7) - (2.9)$ a une unique solution :

$$u_j \in H^2(0,1) \ \ (\text{puisque } F_j \in L^2(0,1))$$

Remarque 2.3.1 Dans la suite, C dénote une constante positive indépendente de n, j et de h.

Lemme 2.3.1 *il existe $C \succ 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tq :*

$$\|\delta u_j\|_B^2 + \|u_j\|^2 \leq C, \ \ j = 1 \ldots n, \ \ n \succ N$$

Démonstration 2.3.2 Soit $\phi \in V$, il est facile d'avoir :

$$\int\limits_0^1 (x-\xi)\, \phi(\xi)\, d\xi = \Psi_x^2 \phi, \quad \forall x \in (0,1)$$

tq

$$\Psi_x^2 \phi = \Psi_x (\Psi_x \phi) = \int\limits_0^x d\xi \int\limits_0^\xi \phi(\mu)\, d\mu$$

Ce qui implique :

$$\Psi_1^2\phi = \int_0^1 (1-\xi)\,\phi(\xi)\,d\xi$$

Alors :

$$\Psi_1^2\phi = \int_0^1 \phi(\xi)\,d\xi - \int_0^1 \xi\phi(\xi)\,d\xi \tag{2.22}$$

Multiplions (2.7) par $\Psi_x^2\phi$ pour tout $j = 1...n$ et intégrons sur $(0,1)$, on obtient :

$$\int_0^1 \left(\frac{u_j - 2u_{j-1} + u_{j-2}}{h^2}\right)\Psi_x^2\phi dx - \int_0^1 \frac{d^2u_j}{dx^2}(x)\,\Psi_x^2\phi dx = \int_0^1 \left(f_j(x) + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i\right)\Psi_x^2\phi dx$$

On a :

$$\begin{aligned} \delta^2 u_j &= \frac{\delta u_j - \delta u_{j-1}}{h} \\ &= \frac{u_j - 2u_{j-1} + u_{j-2}}{h^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^1 \delta^2 u_j(x)\Psi_x^2\phi dx - \int_0^1 \frac{d^2u_j}{dx^2}(x)\Psi_x^2\phi dx = \int_0^1 \left(f_j(x) + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i\right)\Psi_x^2\phi dx \tag{2.23}$$

Intégrons par parties chaque terme de (2.23)et utilisons (2.22) on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \delta^2 u_j(x)\Psi_x^2\phi dx &= \int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\Psi_x\left(\delta^2 u_j\right)\right)\Psi_x^2\phi dx \\ &= \left(\Psi_x\left(\delta^2 u_j\right)\right)\Psi_x^2\phi\,|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \Psi_x\left(\delta^2 u_j\right)\Psi_x\phi dx \\ &= -\left(\delta^2 u_j, \phi\right)_B \end{aligned}$$

Où :

$$\Psi_x\left(\delta^2 u_j\right)\Psi_x^2\phi\,|_{x=0}^{x=1} = \Psi_1\left(\delta^2 u_j\right)\Psi_1^2\phi - \Psi_0\left(\delta^2 u_j\right)\Psi_0^2\phi = 0$$

Et :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{d^2u_j}{dx^2}(x)\,\Psi_x^2\phi dx &= \frac{du_j}{dx}(x)\,\Psi_x^2\phi\,\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{du_j}{dx}(x)\Psi_x\phi dx \\
&= -\int_0^1 \frac{du_j}{dx}(x)\Psi_x\phi dx \\
&= -u_j(x)\Psi_x\phi\,\Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 u_j(x)\,\phi(x)\,dx \\
&= (u_j,\phi)
\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\int_0^1 \left(f_j + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i\right)\Psi_x^2\phi dx = \int_0^1 \frac{d}{dx}\Psi_x\left(f_j + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i\right)\Psi_x^2\phi dx$$

$$\begin{aligned}
&= \Psi_x\left(f_j + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i\right)\Psi_x^2\phi\,\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \Psi_x\left(f_j + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i\right)\Psi_x\phi dx \quad (2.24)\\
&= -\left(f_j + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i,\phi\right)_B
\end{aligned}$$

Alors (2.23) devient :

$$\left(\delta^2 u_j,\phi\right)_B + (u_j,\phi) = \left(f_j + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i,\phi\right)_B, \quad \forall\phi\in V, \quad \forall j = 1\ldots n \qquad (2.25)$$

Posons $\phi = \delta u_j$ (il est clair que $\phi = \delta u_j \in V$)dans (2.25),

on obtient :

$$\left(\delta^2 u_j,\delta u_j\right)_B + (u_j,\delta u_j) = \left(f_j + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i,\delta u_j\right)_B, \quad \forall j = 1\ldots n$$

Donc :

$$\left(\frac{\delta u_j - \delta u_{j-1}}{h},\delta u_j\right)_B + \left(u_j,\frac{u_j - u_{j-1}}{h}\right) = (f_j,\delta u_j)_B + h\sum_{i=0}^{j-1}(a_{ji}k_i,\delta u_j)_B, \quad \forall j = 1\ldots n$$

Alors :

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}, \delta u_j)_B + (u_j, u_j - u_{j-1}) = h^2 \sum_{i=0}^{j-1} (a_{ji} k_i, \delta u_j)_B + h\,(f_j, \delta u_j)_B\,, \quad \forall j = 1 \ldots n$$

En utilisant les identités :

$$\begin{aligned} 2\,(u_j, u_j - u_{j-1}) &= \|u_j\|^2 + \|u_j - u_{j-1}\|^2 - \|u_{j-1}\|^2 \\ 2\,(\delta u_j, \delta u_j - \delta u_{j-1})_B &= \|\delta u_j\|_B^2 + \|\delta u_j - \delta u_{j-1}\|_B^2 - \|\delta u_{j-1}\|_B^2 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} &\|\delta u_j\|_B^2 + \|\delta u_j - \delta u_{j-1}\|_B^2 - \|\delta u_{j-1}\|_B^2 + \|u_j\|^2 + \|u_j - u_{j-1}\|^2 - \|u_{j-1}\|^2 \\ &\qquad = 2h^2 \sum_{i=0}^{j-1} (a_{ji} k_i, \delta u_j)_B + 2h\,(f_j, \delta u_j)_B \qquad \forall j = 1 \ldots n \end{aligned}$$

Donc :

$$\|\delta u_j\|_B^2 - \|\delta u_{j-1}\|_B^2 + \|u_j\|^2 - \|u_{j-1}\|^2 \leq 2Ch^2 \sum_{i=0}^{j-1} \|k_i\|_B \|\delta u_j\|_B + 2h \|f_j\|_B \|\delta u_j\|_B \tag{2.26}$$

On prend $\varepsilon = 1$ dans l'ε inégalité :

$$\begin{aligned} 2\,\|k_i\|_B \|\delta u_j\|_B &\leq 2\,\|u_j\| \, \|\delta u_j\|_B \\ &\leq \|u_j\|^2 + \|\delta u_j\|_B^2 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} 2h\,\|f_j\| \, \|\delta u_j\|_B &\leq 2h\,\|f\|_{C(I,B)} \|\delta u_j\|_B \\ &\leq Ch + Ch\,\|\delta u_j\|_B \end{aligned}$$

Substituons dans (2.26) on aura :

$$\|\delta u_j\|_B^2 - \|\delta u_{j-1}\|_B^2 + \|u_j\|^2 - \|u_{j-1}\|^2 \leq Ch\,\|\delta u_j\|_B^2 + Ch^2 \sum_{i=0}^{j-1} \|u_j\|^2 + Ch \tag{2.27}$$

Choisissons le naturel N tel que $C\frac{T}{N} \prec 1$, alors pour $n \succ N$, l'inégalité (2.26) implique :

$$\begin{aligned}(1-Ch)\left[\|\delta u_j\|_B^2 + \|u_j\|^2\right] &\leq \left(1+Ch^2\right)\left[\|\delta u_{j-1}\|_B^2 + \|u_{j-1}\|^2\right] \\ &+Ch^2\sum_{i=0}^{j-1}\|u_j\|^2 \\ &+Ch\end{aligned} \tag{2.28}$$

En appliquant cette inégalité récursivement, on obtient :

$$(1-Ch)^j\left[\|\delta u_j\|_B^2 + \|u_j\|^2\right] \leq \left(1+jCh^2\right)^j\left[\|\delta U_0\|_B^2 + \|U_0\|^2\right] + jCh$$

Et on a :

$$\begin{aligned}\left[\frac{1+jCh^2}{1-Ch}\right]^n &= \exp\left(n\left(\ln\left(1+Ch\right) - \ln\left(1-Ch\right)\right)\right)\ quand,\ n \longrightarrow \infty \\ &\longrightarrow e^{2nC\frac{T}{n}} = C\end{aligned}$$

Alors :

$$\|\delta u_j\|_B^2 + \|u_j\|^2 \leq C\left[\|\delta U_0\|_B^2 + \|U_0\|^2\right] + \frac{jCh}{1-Ch}$$

Donc :

$$\|\delta u_j\|_B^2 + \|u_j\|^2 \leq C$$

Lemme 2.3.2 *il existe $C \succ 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ t q :*

$$\left\|\delta^2 u_j\right\|_B^2 + \|\delta u_j\|^2 \leq C, \qquad j = 1\ldots n, n \succ \mathbb{N}$$

Démonstration 2.3.3 La différence $(2.25)_j - (2.25)_{j-1}$ donne :

$$\begin{aligned}&\left(\delta^2 u_j, \phi\right)_B - \left(\delta^2 u_{j-1}, \phi\right)_B + (u_j, \phi) - (u_{j-1}, \phi) \\ = &\left(f_j + h\sum_{i=0}^{j-1} a_{ji}k_i, \phi\right)_B - \left(f_{j-1} + h\sum_{i=0}^{j-2} a_{j-1i}k_i, \phi\right)_B, \ \forall\phi \in V,\ \forall j = 1\ldots n\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\left(\delta^2 u_j, \phi\right)_B + (u_j - u_{j-1}, \phi) &= \left(\delta^2 u_{j-1}, \phi\right)_B \\
&+h \left(a_{jj-1} k_{j-1}, \phi\right)_B \\
&+h \sum_{i=0}^{j-2} \left(\left(a_{ji} - a_{j-1i}\right) k_i, \phi\right)_B \\
&+ \left(f_i - f_{j-1}, \phi\right)_B
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Posons $\phi = \delta^2 u_j$ dans (2.29), on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\delta^2 u_j, \delta^2 u_j\right)_B + \left(u_j - u_{j-1}, \delta^2 u_j\right) &= \left(\delta^2 u_{j-1}, \delta^2 u_j\right)_B \\
&+h \left(a_{jj-1} k_{j-1}, \delta^2 u_j\right)_B \\
&+h \sum_{i=0}^{j-2} \left(\left(a_{ji} - a_{j-1i}\right) k_i, \delta^2 u_j\right)_B \\
&+2 \left(f_j - f_{j-1}, \delta^2 u_j\right)_B
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
2 \left\|\delta^2 u_j\right\|_B + 2 \left(u_j - u_{j-1}, \frac{\delta u_j - \delta u_{j-1}}{h}\right) &= 2 \left(\delta^2 u_{j-1}, \delta^2 u_j\right)_B \\
&+2h \left(a_{jj-1} k_{j-1}, \delta^2 u_j\right)_B \\
&+2h \sum_{i=0}^{j-2} \left(\left(a_{ji} - a_{j-1i}\right) k_i, \delta^2 u_j\right)_B \\
&+2 \left(f_j - f_{j-1}, \delta^2 u_j\right)_B
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
2 \left\|\delta^2 u_j\right\|_B + 2 \left(\delta u_j, \delta u_j - u_{j-1}\right) &= 2 \left(\delta^2 u_{j-1}, \delta^2 u_j\right)_B \\
&+2h \left(a_{jj-1} k_{j-1}, \delta^2 u_j\right)_B \\
&+2h \sum_{i=0}^{j-2} \left(\left(a_{ji} - a_{j-1i}\right) k_i, \delta^2 u_j\right)_B \\
&+2 \left(f_j - f_{j-1}, \delta^2 u_j\right)_B
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$2\left\|\delta^2 u_j\right\|_B^2+\left\|\delta u_j\right\|^2-\left\|\delta u_{j-1}\right\|^2 \leq \left\|\delta^2 u_{j-1}\right\|_B^2 + \left\|\delta^2 u_j\right\|_B^2 + 2Ch\left\|k_{j-1}\right\|_B\left\|\delta^2 u_j\right\|_B + 2\left\|f_j-f_{j-1}\right\|\left\|\delta^2 u_j\right\|_B \tag{2.30}$$

Sachant que :

$$\|k_i\|_B \leq \|u_i\| \leq C$$

Et on utilisons l'ε inégalité pour $\varepsilon=1$, on obtient :

$$\begin{aligned} 2Ch\left\|k_{j-1}\right\|_B\left\|\delta^2 u_j\right\|_B &\leq Ch\left\|k_{j-1}\right\|_B^2 + Ch\left\|\delta^2 u_j\right\|_B^2 \\ &\leq Ch + Ch\left\|\delta^2 u_j\right\|_B^2 \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} 2Ch^2\sum_{i=0}^{j-1}\|k_i\|_B\left\|\delta^2 u_j\right\|_B &\leq Ch^2\sum_{i=0}^{j-1}\left(\|k_i\|_B^2+\left\|\delta^2 u_j\right\|_B^2\right) \\ &\leq (j-1)\,Ch^2+(j-1)\,Ch^2\left\|\delta^2 u_j\right\|_B^2 \\ &\leq nC\frac{T^2}{n^2}+nC\frac{T^2}{n^2}\left\|\delta^2 u_j\right\|_B^2 \\ &\leq Ch+Ch\left\|\delta^2 u_j\right\|_B^2 \end{aligned}$$

Pour le dernier terme du membre droite de.(2.30), on a :

$$2\left\|f_j-f_{j-1}\right\|\left\|\delta^2 u_j\right\|_B \leq 2C\left\|t_j-t_{j-1}\right\|\left\|\delta^2 u_j\right\|_B$$

On a :

$$t_j-t_{j-1}=jh-(j-1)\,h=h$$

Alors :

$$2\left\|f_j-f_{j-1}\right\|\left\|\delta^2 u_j\right\|_B \leq 2Ch\left\|\delta^2 u_j\right\|_B$$

On applique l'ε inégalité pour $\varepsilon = 1$, donc.

$$\begin{aligned} 2\left\|f_j - f_{j-1}\right\|\left\|\delta^2 u_j\right\|_B &\leq 2Ch\left\|\delta^2 u_j\right\|_B \\ &\leq Ch + Ch\left\|\delta^2 u_j\right\|_B^2 \end{aligned}$$

Substituons dans (2.30), on aura :

$$\begin{aligned} \left\|\delta^2 u_j\right\|_B^2 - \left\|\delta^2 u_{j-1}\right\|^2 + \left\|\delta u_j\right\|^2 - \left\|\delta u_{j-1}\right\|^2 &\leq Ch + Ch\left\|\delta^2 u_j\right\|_B^2 \\ &+Ch + Ch\left\|\delta^2 u_j\right\|_B^2 \\ &+Ch + Ch\left\|\delta^2 u_j\right\|_B^2 \\ &+Ch^2\sum_{i=0}^{j-1}\left\|\delta u_j\right\|^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left\|\delta^2 u_j\right\|_B^2 - \left\|\delta^2 u_{j-1}\right\|^2 + \left\|\delta u_j\right\|^2 - \left\|\delta u_{j-1}\right\|^2 &\leq Ch\left\|\delta^2 u_j\right\|_B^2 \\ &+Ch^2\sum_{i=0}^{j-1}\left\|\delta u_j\right\|^2 \\ &+Ch \end{aligned}$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ t.q :

$$C\frac{T}{N} \prec 1, \ pour\ n \succ N$$

L'inégalité précédente implique :

$$\begin{aligned} (1 - Ch)\left[\left\|\delta^2 u_j\right\|_B^2 + \left\|\delta u_j\right\|^2\right] &\leq \left(1 + Ch^2\right)\left[\left\|\delta^2 u_{j-1}\right\|_B^2 + \left\|\delta u_{j-1}\right\|^2\right] \\ &+Ch^2\sum_{i=0}^{j-1}\left\|\delta u_j\right\|^2 \\ &+Ch \end{aligned} \tag{2.31}$$

En appliquant cette inégalité récursivement,

on obtient :

$$\begin{aligned} (1 - Ch)^j\left[\left\|\delta^2 u_j\right\|_B^2 + \left\|\delta u_j\right\|^2\right] &\leq \left(1 + jCh^2\right)^j\left[\left\|\delta^2 U_0\right\|_B^2 + \left\|\delta U_0\right\|^2\right] \\ &+jCh \end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{aligned}\left[\frac{1+jCh^2}{1-Ch}\right]^n &= \exp\left(n\left(\ln\left(1+Ch\right)-\ln\left(1-Ch\right)\right)\right)\ quand,\ n\longrightarrow\infty\\ &\longrightarrow e^{2nC\frac{T}{n}}\\ &= C\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\left\|\delta^2 u_j\right\|_B^2+\left\|\delta u_j\right\|^2 &\leq C\left[\left\|\delta^2 U_0\right\|_B^2+\left\|\delta U_0\right\|^2\right]\\ &\quad +\frac{jCh}{1-Ch}\end{aligned}$$

Donc :

$$\left\|\delta^2 u_j\right\|_B^2+\left\|\delta u_j\right\|^2\leq C$$

Corollaire 2.3.1 Pour tout $t,s\in I$ et $n\succ N$, les lemmes (2.3.1) et (2.3.2) implique :

1.

$$\left\|u^n(t)\right\|+\left\|\bar{u}^n(t)\right\|+\left\|\delta u^n(t)\right\|+\left\|\delta\bar{u}^n(t)\right\|+\left\|\frac{d}{dt}\delta u^n(t)\right\|_B\leq C \tag{2.32}$$

Car : on a d'aprés le lemme (2.3.1) :

$$\left\|\delta u_j\right\|_B^2+\left\|u_j\right\|^2\leq C$$

Donc :

$$\begin{aligned}&\left\|\delta u_j\right\|_B^2\leq C\\ et\quad&\\ &\left\|u_j\right\|^2\leq C\end{aligned}$$

On a :

$$\left\|u_j\right\|=\left\|\bar{u}^n(t)\right\|\leq C$$

Et on a :

$$u^n(t)=u_{j-1}+\delta u_j\left(t-t_j\right)$$

Alors :

$$\begin{aligned}\left\|u^n(t)\right\| &= \left\|u_{j-1}+\delta u_j\left(t-t_j\right)\right\|\\ &\leq \left\|u_{j-1}\right\|+\left|t-t_j\right|\left\|\delta u_j\right\|\end{aligned}$$

Et d'aprés le lemme (2.3.2) :

$$\left\|\delta^2 u_j\right\|_B^2 + \left\|\delta u_j\right\|^2 \leq C$$

On a :

$$\begin{array}{c} \left\|\delta^2 u_j\right\|_B^2 \leq C \\ et \\ \left\|\delta u_j\right\|^2 \leq C \end{array}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left\|u^n(t)\right\| &\leq \left\|u_{j-1}\right\| + \left|t - t_j\right| \left\|\delta u_j\right\| \\ &\leq C + hC = C + \frac{T}{n}C \\ &\leq C \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \left\|\delta u^n(t)\right\| &= \left\|\delta u_{j-1} + \delta^2 u_j \left(t - t_j\right)\right\| \\ &\leq \left\|\delta u_{j-1}\right\| + \left\|\delta^2 u_j\right\| \left|t - t_j\right| \\ &\leq C + Ch \\ &\leq C \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \left\|\delta \bar{u}^n(t)\right\| &= \left\|\delta u_j\right\| \\ &\leq C \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \left\|\frac{d}{dt}\delta u^n(t)\right\|_B &= \left\|\delta^2 u_j\right\|_B \\ &\leq C \end{aligned}$$

Donc :

$$\left\|u^n(t)\right\| + \left\|\bar{u}^n(t)\right\| + \left\|\delta \bar{u}^n(t)\right\| + \left\|\delta u^n(t)\right\| + \left\|\frac{d}{dt}\delta u^n(t)\right\|_B \leq C$$

2.

$$\left\|u^{(n)}(t)-\bar{u}^{(n)}(t)\right\|+\left\|\delta u^{(n)}(t)-\delta\bar{u}^{(n)}(t)\right\|_B\leq\frac{C}{n} \tag{2.33}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left\|u^{(n)}(t)-\bar{u}^{(n)}(t)\right\| &= \left\|u_{j-1}-u_j+\delta u_j(t-t_j)\right\| \\
&= \left\|u_j-u_{j-1}+\delta u_j(t_j-t)\right\| \\
&= \left\|\delta u_j(h+(t_j-t))\right\| \\
&= \left\|\delta u_j\right\|\left|h+(t_j-t)\right| \\
&\leq 2\left\|\delta u_j\right\|h \\
&\leq 2Ch \\
&\leq \frac{C}{n}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\left\|u^{(n)}(t)-\bar{u}^{(n)}(t)\right\|\leq\frac{C}{n}$$

Et on a :

$$\begin{aligned}
\left\|\delta u^{(n)}(t)-\delta\bar{u}^{(n)}(t)\right\|_B &= \left\|\delta u_{j-1}+\delta^2u_j(t-t_j)-\delta u_j\right\|_B \\
&= \left\|\delta u_j-\delta u_{j-1}+\delta^2u_j(t_j-t)\right\|_B \\
&= \left\|\delta^2u_j(h+(t_j-t))\right\|_B \\
&= \left\|\delta^2u_j\right\|_B\left|h+t_j-t\right| \\
&\leq 2\left\|\delta^2u_j\right\|_B h \\
&\leq 2Ch \\
&\leq \frac{C}{n}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\left\|\delta u^{(n)}(t)-\delta\bar{u}^{(n)}(t)\right\|_B\leq\frac{C}{n}$$

Alors :

$$\left\|u^{(n)}(t)-\bar{u}^{(n)}(t)\right\|+\left\|\delta u^{(n)}(t)-\delta\bar{u}^{(n)}(t)\right\|_B\leq\frac{C}{n}$$

Chapitre 3

Existence et unicité de la solution faible

3.1 Résultat de convergence

On note par :

$$f^n(t) = \begin{cases} f_j \\ f_0 = f(0) \end{cases} t \in [t_{j-1}, t_j], \quad 1 \leq j \leq n$$

Où :

$$f_j = f(tj), \ j = 1 \ldots n$$

Et :

$$k^n(t) = \begin{cases} h \sum_{i=0}^{j-1} a_{ji} k_i \\ h a_{10} k_0, \quad t = o \end{cases}$$

Alors (2.25) devient :

$$\left(\frac{d}{dt} \delta u^{(n)}(t), \phi \right)_B + \left(\bar{u}^{(n)}(t), \phi \right) = \left(f^n + k^n(t), \phi \right)_B, \quad \forall \phi \in V \tag{3.1}$$

Ce qui donne :

$$\int_I \left(\frac{d}{dt} \delta u^{(n)}(t), \phi \right)_B dt + \int_I \left(\bar{u}^{(n)}(t), \phi \right) dt = \int_I \left(f^n + k^n(t), \phi \right)_B dt, \quad \forall \phi \in V \tag{3.2}$$

Théorème 3.1.1 *Supposons que les hypothèses $(H_1) - (H_4)$ sont vérifiées, alors il existe une fonction $u \in C^{0,1}(I, V)$ avec les propriétés :*

$$\begin{array}{l} \frac{du}{dt} \in L^{\infty}(I,V) \cap C^{0,1}(I,B) \\ \frac{d^2u}{dt^2} \in L^{\infty}(I,V) \end{array}$$

Et sous suite :

$$\begin{array}{l} \{u^{n_k}\}_k \subset \{u^{(n)}\}_n \\ \{\bar{u}^{n_k}\}_k \subset \{\bar{u}^{(n)}\}_n \end{array}$$

Telles que :

$$u^{nk} \rightharpoonup u, \quad dans\ L^2(I,V) \tag{3.3}$$

$$\bar{u}^{n_k} \rightharpoonup u, \quad dans\ L^2(I,V) \tag{3.4}$$

$$\delta u^{(n_k)} \rightharpoonup \frac{du}{dt}, \quad dans\ L^2(I,V) \tag{3.5}$$

$$\delta \bar{u}^{(n_k)} \rightharpoonup \frac{du}{dt}, \quad dans\ L^2(I,V) \tag{3.6}$$

$$\frac{d}{dt}\delta u^{(n_k)} \rightharpoonup \frac{d^2u}{dt^2}, \quad dansL^2(I,V) \tag{3.7}$$

Démonstration 3.1.1 l'estimation (2.32) implique $\{u^{(n)}\}_n, \{\bar{u}^{(n)}\}_n$ sont uniformément bornée dans $L^2(I,V)$.

Et par suite, il existe deux sous suite $\{u^{n_k}\}_k$, $\{\bar{u}^{n_k}\}_k$ convergentes faiblement vers certaines u et $\bar{u}$ respectivement.

D'aprés l'estimation (2.33), il s'ensuit que $u = \bar{u}$.

(2.32) $\Longrightarrow$ $\{\delta u^{(n)}\}_n, \{\delta \bar{u}^{(n)}\}_n$ sont uniformément bornées dans $L^2(I,V)$.

Donc on peut extraire deux sous suites $\{\delta u^{n_k}\}_k, \{\delta \bar{u}^{n_k}\}_k$ convergentes faiblement vers certaines w et $\bar{w}$ respectivement .

A l'aide de l'inégalité (2.33) on aura :

$$w = \bar{w}$$

Montrons que :

$$w = \frac{du}{dt}$$

Soit l'égalité :

$$u^{(n_k)}(t) - U_0 = \int_0^t \frac{du^{(n_k)}(s)}{ds} ds, \quad \forall t \in I$$

Alors :

$$u(t) = U_0 + \int_0^t w(s)\, ds, \quad \forall t \in I \tag{3.8}$$

Ce qui donne :

$$u \in C(I, B)$$

Et :

$$w = \frac{du}{dt}, \quad dans\ L^2(I, V)$$

(2.32) toujours implique $\left\{\frac{d}{dt}\delta u^{(n)}\right\}_n$ est uniformément bornées dans $L^2(I, B)$.
Alors il admet une sous suite $\left\{\frac{d}{dt}\delta u^{(n_k)}\right\}_k$ convergente faiblement vers S respectivement.

Telle que :

$$S = \frac{d^2u}{dt^2}$$

pour cela soit l'égalité :

$$\delta u^{(n_k)} - U_1 = \int_0^t \frac{d}{ds}\delta u^{(n_k)}(s)\, ds$$

Alors :

$$\frac{du}{dt} - U_1 = \int_0^t S(s)\, ds \tag{3.9}$$

Et par suite :

$$\frac{du}{dt} \in C(I, B)$$

$$et$$

$$S = \frac{d^2u}{dt^2}\ p.p\ dans\ I$$

D'après le corolaire (2.3.1), il s'ensuit que : $u : I \longrightarrow V$ et $w = \frac{du}{dt} : I \longrightarrow B$

3.2 Résultat de l'existence et d'unicité

Théorème 3.2.1 *Supposons que les hypothèses* $(H_1) - (H_4)$ *sont satisfaites, alors la limite* u *est la solution du problème* $(2.1) - (2.3)$ *au sens de la définition* $(2.2.1)$.

Si de plus (H_5) est vérifie alors u est unique.

Démonstration 3.2.1 Notons que d'après ce qui précède, on a :

$$\begin{array}{l} u \in C^{0,1}(I, V) \\ \frac{du}{dt} \in L^{\infty}(I, V) \cap C^{0,1}(I, B) \\ \frac{d^2u}{dt^2} \in L^{\infty}(I, B) \end{array}$$

Et u satisfait aux conditions intégrales puisque $u(t) \in V$

On vertu de (3.8), (3.9) :

$$u(0) = U_0 \ et \ \frac{du}{dt}(0) = U_1$$

Vérifie, d'aprés l'hpothèses H_1, on a :

$$\|f^{\,n}(t) - f(t)\|_B \leq \frac{C}{n} \qquad dans \ I \tag{3.12}$$

Ce qui implique :

$$f^{\,n} \longrightarrow f \qquad dans \ L^2(I, B(0,1)) \tag{3.13}$$

Passons à la limite $n = n_k \longrightarrow \infty$ dans (3.2) en tenant compte les propriétés (3.4), (3.7), (3.11) et (3.13) on aura :

$$\int_I \left(\frac{d^2u}{dt^2}(t), \phi \right)_B dt + \int_I (u(t), \phi) dt = \int_I (f(t), \phi)_B dt + \int_I (ku(t), \phi)_B dt \quad \forall \phi \in V$$

Passons maintenant à la preuve de l'unicité sous l'hypothèses (H_5).

On suppose que :

$$\frac{du}{dt}(0) = u(0) = 0$$

Si u_1 et u_2 sont deux solution faible du problème $(2.1)-(2.3)$ alors la différence: $u=u_1-u_2$ vérifie :

$$\int_I\left(\frac{d^2u}{dt^2}(t),\phi\right)_B dt+\int_I(u(t),\phi)dt=\int_I\left(\int_0^t a\left(t-s\right)\left(\left[k\left(s,u_1\right)-k\left(s,u_2\right)\right]ds,\phi\right)\right)_B dt\ \ \forall\phi\in V \tag{3.14}$$

Soit :

$$w=\max_I|a(t)|\int_0^T L(t)dt \tag{3.15}$$

On subdivise l'intervalle I en sous intervalles de longueur égale à p telle que :

$$w.p\leq\frac{1}{2} \tag{3.16}$$

Dans l'identité (2.6), on prend :

$$\phi=\begin{cases}\frac{du}{dt}, & t\in[0,p]\\ 0, & t\in[p,T]\end{cases} \tag{3.17}$$

Et on utilise :

$$2\left(\frac{du}{dt},u\right)=\frac{d}{dt}\|u\|$$

Donc on aura :

$$\int_0^p\frac{d}{dt}\left\|\frac{du}{dt}\right\|_B^2 dt+\int_0^p\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2dt=2\int_0^p\left(\int_0^t a(t-s)\left[k\left(s,u_1\right)-k\left(s,u_2\right)\right]ds,\frac{du}{dt}\right)_B dt \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}\int_0^p\frac{d}{dt}\left\|\frac{du}{dt}\right\|_B^2 dt+\int_0^p\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2dt &\leq 2\int_0^p\left\|\int_0^t a(t-s)\left[k\left(s,u_1\right)-k\left(s,u_2\right)\right]ds\right\|\left\|\frac{du}{dt}\right\|_B dt\\ &\leq 2\max_I|a(t)|.p\int_0^T L(t)dt\,\|u(t)\|\left\|\frac{du}{dt}\right\|_B\\ &\leq w.p\left[\left(\max_{t\in[0,p]}\|u(t)\|\right)^2+\left(\max_{t\in[0,p]}\left\|\frac{du}{dt}\right\|_B\right)^2\right]\end{aligned} \tag{3.19}$$

Soient t_1 et $t_2\in[0,p]$ tels que :

$$\left\|\frac{du}{dt}(t_1)\right\|_B=\max_{[0,p]}\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|_B \tag{3.20}$$

$$\|u(t_2)\| = \max_{[0,p]} \|u(t)\| \tag{3.21}$$

Alors, avec la considération $\frac{du}{dt}(0) = u(0) = 0$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} \frac{d}{dt}\left\|\frac{du}{dt}\right\|_B^2 dt + \int_0^{t_2} \frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 dt &= \left\|\frac{du}{dt}(t_1)\right\|_B^2 + \|u(t_2)\|^2 \\ &\leq \int_0^{p} \frac{d}{dt}\left\|\frac{du}{dt}\right\|_B^2 dt + \int_0^{p} \frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 dt \end{aligned} \tag{3.22}$$

D'après les inégalités (3.16), (3.19) et (3.21) on obtient :

$$\frac{du}{dt}(t) = u(t) = 0 \qquad \forall t \in [0,p]$$

Répétons le même procédure sur les intervalles $[ip,(i+1)p]$, $i = 1\ldots n$.

On arrive à $u = 0$, ce qui achève la preuve du théorème(3.2.1)

Remarque Dans le cas où les conditions intégrale non homogène de probléme $(2.1)-(2.3)$ devient :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = g(x,t) + \int_0^t a(t-s)\,k(s,\theta(x,s))\,ds \qquad (x,s) \in (0,1)\times(0,T)$$

Avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \theta(x,0) &= \theta_0(x) \qquad x \in (0,1) \\ \frac{\partial\theta}{\partial x}(x,0) &= \theta_1(t) \qquad x \in (0,1) \end{aligned}$$

Et les conditions intégrales :

$$\left.\begin{aligned} \textstyle\int_0^1 \theta(x,t)\,dx &= E(t) \\ \textstyle\int_0^1 x\theta(x,t)dx &= M(t) \end{aligned}\right. \quad t \in (0,T)$$

En utilisant la transformation :

$$\theta(x,t) = u(x,t) + r(x,t)$$

Où :

$$\begin{cases} r(x,t) = 6(2M(t) - E(t))x - 2(3M(t) - 2E(t)) \\ g(x,t) = f(x,t) + \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \\ \theta_0 = U_0(x) + r(x,0) \\ \theta_1(x) = U_1(x) + \frac{\partial r}{\partial t}(0) \end{cases}$$

Bibliographie

[1] D.Bahuguna, A.K. Pani, V .Raghavendra, Rothe's method to semilinear hyperbolic integrodifferential

equations, *Jourrnal of Applied Mathematics and stochastic*, Vol.3,N4(1990) 245-252.

[2] D. Bahuguna, V . Raghavendra, Rothe's method to parabolic integrodifferential equation via abstract integrodifferential equation, *Appl. anal.*33,153-167(1989).

[3] D. Bahuguna, Quasilinear integrodifferential equations in Banach spaces, *Nonlinear analysis*, Vol. 24, N.2(1995) 175-183.

[4] A.Bouziani, N. Merzaga, Rothe time discretization method applied to a quasi-linear wave equation subject to integral condition, *Adv.Difference Equ.* 3(2004)211-235.

[5] A. Guezane-Lakoud, D. Belakroum, Routhe's method for a telegraph equation with integral conditions, Nonlinear Anal. 70(2009) 3842-3853.

[6] A. Guezane-Lakoud, M.S. Jasmati, A. Chaoui, Routhe's method for an integrodifferential equation with integral condition, *Nonlinear Analysis.* 72(2010) 1522-1530. (2010).

[7] J. Kacur, Application of Rothe's method to perturbed linear hyperbolic equations and variational inequalities, *Czech. Math.* J. 34.109, 1984, 92-106.

[8] M. P. Sapagovas and R. Yu. Chegies, On some boundary value problems with a nonlocal condition, *Differential Equation*, 23(1987), no.7,858-863.

[9] K. Rektorys, The Method of Discretization in Time and Partial Differential Equations, D. Reidel Publishing Company, 1982.

[10] K.Rektorys, Solving ordinary and partial boundary value problems in science and engineering, CRS Press, 1999.

[11] E. Rothe, Tow-dimensional parabolic boundary value problems as a limiting case of one-dimensional boundary value problems. Math. Ann.102(1930), 650-670.

[12] A. Chaoui, Etude de quelques problèmes aux limites avec des conditions non locales, Thèses de Doctorat, 2010.