

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

M/S 10.118

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques
Option : **Equations aux Dérivées Partielles**



Par : **SENANI Imad Eddine**

Intitulé

**Existence globale des solutions d'un système de
réaction-diffusion avec matrice triangulaire**

Dirigé par : Dr.K . BOUKRRIOUA

Devant le jury

PRESIDENT	Mr.F.LAKHAL	MCA Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Mr.K.BOUKERRIOUA	MCA Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Mr.Y.BOUATIA	MCA Univ-Guelma

Session Juin 2014

Table des matières

1	Modélisation de systèmes de réaction-diffusion	6
1.1	Introduction	6
1.2	Modélisation et exemples	7
1.2.1	Modélisation	7
1.3	Exemples	8
2	Semi-groupes et problèmes semi linéaires	11
2.1	Semi-groupes	11
2.1.1	Introduction	11
2.1.2	Définitions et propriétés des semi-groupes	11
2.1.3	Définition d'un semi-groupe de classe C^0	12
2.1.4	Semi-groupe de contraction de classe C^0	13
2.1.5	Générateur infinitésimal d'un semi-groupe	13
2.1.6	Le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe C^0	14
2.2	Opérateur dissipatifs et opérateurs m -dissipatifs	15
2.2.1	Rappels de quelques résultats utiles de l'analyse fonctionnelle	15
2.2.2	Opérateurs non bornés dans un espace de Banach	15
2.2.3	Opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert	17
2.2.4	Exemples	18
2.2.5	Théorème de Hill-Yosida-Phillips	21

Table des matières

2.3	Existence locale de la solution d'un problème d'évolution	22
2.3.1	Equations non homogènes et problème semi-linéaires	22
2.3.2	Equations non homogènes	22
2.4	Problème semi-linéaires	26
2.4.1	Rappels	26
3	Existence globale de la solution d'un système de réaction-diffusion via fon-	
	tionnelle de Lyapunov	29
3.1	Introduction	29
3.2	Notations et préliminaires :	31
3.2.1	Existence locale	32
3.3	Existence globale et positivité de la solution	33
3.3.1	positivité de la solution	33

Introduction

Les équations de réaction-diffusion s'inscrivent dans le cadre de ces équations d'évolution non homogènes. Elles sont de la forme :

$$\begin{aligned} u_t + Au &= f, t \in [0, +\infty[\\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{P}$$

avec en particulier

$$A = \begin{pmatrix} -d_1\Delta & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & -d_2\Delta & & & \\ 0 & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & -d_m\Delta \end{pmatrix}$$

une matrice de diffusion diagonale, (A peut être triangulaire, pleine ou à coefficients variables), d_1, d_2, \dots, d_m , appelés coefficients de diffusion (positifs), $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ le laplacien dans \mathbb{R}^n , $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$.

En d'autres termes on aura à considérer des équations de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \forall i &= 1, \dots, m, \quad \partial_t u_i - d_i \Delta u_i = f_i(u_1, u_2, \dots, u_m) \\ u_i(0, x) &= u_{i0}(x), \quad x \in \Omega, \quad (t, x) \in]0, T[\times \Omega \\ Bu_i &= 0, \quad (t, x) \in]0, T[\times \partial\Omega. \end{aligned} \tag{D}$$

Où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $u_i = u_i(t, x)$, $i = 1, \dots, m$, $d_i > 0$ et B des conditions aux bords de : (En particulier de type Neumann, de Dirichlet ou de conditions mêlées).

Dans ce travail, nous montrons la possibilité d'existence globale des solutions du système de réaction suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u &= \Pi - f(u, v) - \lambda u \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\
\frac{\partial v}{\partial t} - c\Delta u - d\Delta v &= f(u, v) - \lambda v \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\
\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} &= 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\
u(0, x) = u_0, \quad v(0, x) &= v_0 \quad \text{sur } \Omega.
\end{aligned} \tag{G}$$

Satisfaisant à deux propriétés qu'on trouve classiquement dans beaucoup d'applications :

(P) La positivité des solutions est préservée au cours du temps

(M) La masse totale des composants est contrôlée au cours du temps.

La condition (P) est vérifiée si et seulement si f est quasi-positif ce qui signifie que pour tout $i = 1, \dots, m$

$$[u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, \dots, u_{i-1} \geq 0, u_{i+1} \geq 0, \dots, u_m \geq 0] \iff f_i(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, 0, \dots, u_m) \geq 0.$$

La condition (M) est par exemple satisfaite dès que

$$\sum_{i=1}^{i=m} f_i \leq 0$$

Le fait que la masse totale des composants n'explose pas en temps fini incite à penser que les solutions existent en un certain sens globalement en temps. Nous signalons que ce mémoire représente une continuation du mémoire [8].

Ce travail est organisé de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, après avoir donné la forme générale des systèmes de réaction-diffusion ainsi que les exemples faisant ressortir leur rôle essentiel dans les sciences, nous avons modélisé ces derniers en utilisant la loi de comportement de Fick.

Dans le deuxième chapitre on commence par citer quelques résultats concernant les semi-groupes, puis dans la deuxième section, nous présentons des outils très importants dans l'étude de l'existence locale de la solution du système (G) en donnant bien sûr la forme explicite de la solution. Enfin, l'essentiel de ce travail est présenté dans le troisième chapitre dans lequel il a été procédé à l'étude de l'existence globale de la solution du système (G), cette étude est basée

sur un résultat de D. Henry [6] (effet régularisant) où pour prouver l'existence globale de la solution du système (D), il suffit de trouver une estimation uniforme de $\| f_i(u, v) \|_p$ ($i = 1, 2$) sur $[0, T_{\max}[$ dans l'espace $L^p(\Omega)$ pour $p > \frac{n}{2}$.

Chapitre 1

Modélisation de systèmes de réaction-diffusion

1.1 Introduction

La plus grande partie de ce mémoire est consacrée à l'étude de l'existence globale en temps des solutions d'une classe de systèmes appelés *Systèmes de Réaction-Diffusion*, ce sont des systèmes d'équations aux dérivées partielles du type parabolique, ces systèmes interviennent dans des applications nombreuses, par exemple : en chimie, en biochimie, en métallurgie, en dynamique des populations, en génétique des populations, en biophysique...ect. En première partie, vu les applications nombreuses et variantes de ces systèmes, on donnera les démarches suivies pour modéliser certains problèmes gouvernés par le système (D) comme la publicité sur un produit, l'épidémiologie et le phénomène prédateur-proie.

Les individus diffèrent d'un problème à un autre : en chimie, par exemple, ils représentent des substances chimiques. En biochimie, ils peuvent représenter des molécules. En métallurgie, des atomes. En dynamique des populations, ce sont des humains. En génétique des populations, ils représentent des caractères. En biophysique, des charges électriques ou bien des différences de potentiel. En environnement, ils peuvent représenter les animaux ou les plantes d'une forêt, d'une mer ou bien d'un fleuve.

Pour la plus grande partie de ces problèmes, on montre qu'on aboutit à des systèmes de type

(D). Les conditions aux bords seront choisies selon l'origine et la nature du problème étudié : s'il n'y a pas d'immigration des individus à travers la frontière du domaine sur lequel le problème est posé, on choisit les conditions aux bords homogènes de Neumann. S'il n'y a pas d'individus sur la frontière, on prend les conditions aux bords homogènes de Dirichlet.

L'inconnue (la solution qu'on cherche) est un vecteur dont les composantes sont généralement des fonctions positives : en chimie, par exemple, c'est un vecteur de concentrations chimiques. En biochimie ou en métallurgie, c'est un vecteur de concentrations en nombres de molécules ou d'atomes respectivement. En dynamique des populations et en environnement, c'est un vecteur de densité de populations humaines, animales ou végétales. Les conditions initiales sont généralement positives ; puisqu'il s'agit de concentrations, densités, charges électriques,...ect.

1.2 Modélisation et exemples

1.2.1 Modélisation

Nous allons donner la démarche suivie pour établir (D) ; d'ailleurs qui est le même pour tous les phénomènes cités à l'introduction, puis nous donnerons des exemples.

On considère une région bornée de \mathbb{R}^n , ($n = 2$ ou 3) (qui peut être une surface géographique, une cellule vivante ou des molécules) dans laquelle des réactions se réalisent (ces réactions peuvent être une épidémie, une rumeur ou bien une réaction moléculaire ; d'ailleurs la cellule vivante est le siège de plusieurs réactions chimiques, ainsi que les surfaces géographiques forment les lieux de milliers de virus et rumeurs circulant entre les individus des populations...).

Si on note par $u_i(x, t)$ la concentration de la $i^{\text{ème}}$ espèce prenant part dans ces réactions, $f_i(x, t, u_1(x, t), \dots, u_m(x, t))$ son taux de formation dans la réaction en question au point x et à l'instant $t > 0$ et J_i le flux de ces espèces à travers la frontière de notre région. Considérons un volume V infiniment petit de la région de frontière $S = \partial V$. La vitesse de formation de la $i^{\text{ème}}$ espèce dans le volume V est égale à la quantité formée par la réaction ôtée de son flux à travers

la surface S ; en termes d'équations :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V u_i(x, t) dx = \int_V f_i(x, t, u_1(x, t), \dots, u_m(x, t)) dx - \int_S J_i d\delta, \quad (1.1)$$

après application directe du théorème de la divergence au terme désignant le flux, on obtient :

$$\int_V \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - f_i + \nabla J_i \right) dx = 0 \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.2)$$

puisque le volume V est infiniment petit et arbitraire, on en déduit :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla J_i dx = f_i \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.3)$$

Remarque 1.1 Dans le cas des populations (plan macroscopique) on applique une loi semblable . Le flux (ou la diffusion) est donné par la loi de Fick (seconde loi de Fick) :

$$J_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} \nabla u_j, \quad (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad (1.4)$$

où $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$ est une matrice définie positive, appelée matrice de diffusion.

En substituant (1.4) dans (1.3), on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A \Delta u = f(u).$$

1.3 Exemples

Propagation d'une epidémie

Soit Ω un ouvert borné à frontière régulière et soit le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} - d_1 \Delta S = \Pi - \lambda \frac{C(T)}{T} SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} - d_2 \Delta I = \lambda \frac{C(T)}{T} SI - \sigma I, t > 0, x \in \Omega \\ S(0, x) = S_0(x), I(0, x) = I_0(x) \text{ sur } \Omega \\ \frac{dS}{d\eta} = \frac{dI}{d\eta} = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (E)$$

Où

- S : nombre d'individus Susceptibles ,
- I : nombre d'individus Infectés ,
- Π : le taux de recrutement ,
- λ : le risque de contact ,
- μ le taux de mortalité naturelle,
- $T = S + I$,
- $\frac{C(T)}{T} I$: l'intensité d'infection ,
- $\sigma = \mu + \alpha$,
- α : α le taux de mortalite par infection

la dernière équation de (E) montre qu'il n'y a pas de migration à travers la frontière de Ω et on a les conditions aux bords homogènes de Newman : où η est la normale extérieure à $\partial\Omega$, les conditions initiales sont positives.

Modèle prédateur-proie Dans la première moitié du XXe siècle, l'étude de la dynamique de plusieurs espèces en interaction a connu un essor considérable. C'est cette époque appelée l'âge d'or d'écologie théorique que furent développés les premiers modèles basés sur des comportements de type compétition et des relations prédateur-proie. V. Volterra à étudié la coexistence de deux espèces sont l'une dévore l'autre.

Considérant deux espèce , la première , la proie $u(t, x)$, aurait si elle était seule une croissance exponentielle ou une croissance malthusienne.

La seconde , le prédateur $v(t, x)$, se nourrit exclusivement de la première et en l'absence de proie s'épuiserait progressivement et disparaîtrait.

La mise en équation de la fonction représentant la prédation est basée sur la méthode des rencontres et sur l'hypothèse des équivalentes élaborées par Volterra.

Chapitre 1. Modélisation de systèmes de réaction-diffusion

La première considère que pour qu'il y ait prédation est une espèce proie, il faut tout d'abord qu'il y ait rencontre entre ces deux espèces et que le nombre de rencontres entre ces deux espèces est proportionnel au nombre des individus qui la compose.

Le coefficient de proportionnalité étant égale à la probabilité de rencontre.

La seconde consiste à supposer qu'il existe un rapport constant entre les disparitions et apparitions d'individus que provoquent les rencontres, i.e : que la prédation de la proie est équivalente à la croissance du prédateur.

De plus, Volterra considère comme immédiat cet accroissement.

Ceci conduit au système :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_u \Delta u = au - buv & \text{sur } (0, +\infty) \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_v \Delta v = -cu + duv & \text{sur } (0, +\infty) \times \Omega \end{cases}$$

où a représente le taux de croissance de la proie en l'absence de prédateur, b le taux de prédation du prédateur sur la proie, c le taux de mortalité du prédateur en l'absence de proie et d le taux croissance du prédateur du fait de sa prédation et d_u, d_v sont les constantes de diffusion de proie prédateur respectivement.

Chapitre 2

Semi-groupes et problèmes semi linéaires

2.1 Semi-groupes

2.1.1 Introduction

Cette partie est consacrée au rappel de la théorie des semi-groupes utile pour la résolution du système de Réaction-Diffusion.

2.1.2 Définitions et propriétés des semi-groupes

Soit X un espace de Banach réel ou complexe muni de la norme : $x \rightarrow \|x\|_X$, on désigne par $\mathcal{L}(X)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de X de lui même .

$\mathcal{L}(X)$ est un espace de Banach pour la norme $T \rightarrow \|T\|$ définie par :

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_X = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_X}{\|x\|_X} \quad (2.1)$$

2.1.3 Définition d'un semi-groupe de classe C^0

Une famille $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ d'éléments $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ pour $t \geq 0$ forme un semi-groupe de classe C^0 dans X , si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} i) T(s+t) = T(s) \times T(t) & \text{pour tout } s, t \geq 0 \\ ii) T(0) = I & \text{(identité dans } \mathcal{L}(X)) \\ iii) \lim_{t \rightarrow 0} \|T(t)x - x\|_X = 0 & \text{pour tout } x \in X \end{cases} \quad (2.2)$$

Remarque 2.1 La famille $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ qui vérifie (2.2) avec t, s de signe quelconque s'appelle groupe de classe C^0 .

Exemple 2.1 (cas de dimension finie) :

Soit $X = \mathbb{R}^n$ (ou \mathbb{C}^n), $A \in \mathcal{L}(X)$ alors $T(t) = e^{tA}$ pour $t \in \mathbb{R}$ est groupe de classe C^0 .

Exemple 2.2 (cas de dimension infinie) :

Soit $X = l^2 = \left\{ x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$. On sait que l^2 est un espace de Hilbert pour

la norme $x \rightarrow \|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ associé au produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$.

On définit $T(t)x = \left\{ e^{-n^2 t} x_n \right\}_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$ pour $t \geq 0$, on remarque que : (2.2),i) et (2.2),ii) sont faciles à vérifier, reste à vérifier (2.2),iii). En effet :

$$\|T(t)x - x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{N-1} (1 - e^{-n^2 t})^2 |x_n|^2 + \sum_{n=N}^{\infty} (1 - e^{-n^2 t})^2 |x_n|^2$$

et comme $\sum_{n=N}^{\infty} (1 - e^{-n^2 t})^2 |x_n|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2$ et que $x \in l^2$ donc, $\forall \varepsilon > 0$ on peut choisir N de

tel sorte que : $\sum_{n \geq N} (1 - e^{-n^2 t})^2 |x_n|^2 \leq \varepsilon$ mais $1 - e^{-n^2 t}$ est croissante pour $n \geq 1$, donc on a :

$$\sum_{n=1}^N (1 - e^{-n^2 t})^2 |x_n|^2 \leq (1 - e^{-N^2 t})^2 \|x\|_2^2 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$$

ce qui implique :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \| T(t)x - x \|_{l^2}^2 \rightarrow 0$$

On a aussi un exemple de semi-groupe qui n'est pas prolongeable à un groupe car

$$T(-t)x = e^{+n^2t}x_n \notin l^2(n \in \mathbb{N}) \text{ pour } t \neq 0 \text{ } x \in l^2.$$

2.1.4 Semi-groupe de contraction de classe C^0

Définition 2.1 Un semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de classe C^0 est appelé semi-groupe de contraction de classe C^0 si l'on a :

$$\| T(t) \| \leq 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Remarque 2.2 L'exemple 2.2 est un semi-groupe de contraction.

2.1.5 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe

Introduction :

On reprend les deux exemples précédents :

a) Cas de dimension finie :

On prend

$$X = \mathbb{R}^n \text{ (ou } \mathbb{C}^n), e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} t^n ; \forall x \in X \text{ on a : } \left[\frac{d}{dt} T(t)x \right]_{t=0} = Ax$$

ou encore :
$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = Ax$$

on dit que A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $T(t)$, dans ce cas on note que : l'ensemble des opérateurs A qui sont générateurs infinitésimaux de semi-groupe $T(t)$ coïncide avec $\mathcal{L}(X)$.

b) Cas de dimension infinie :

Soit $X = l^2, T(t)x = \left\{ e^{-n^2 t} x_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ et considérons la suite :

$$\frac{T(h)x - x}{h} = \left\{ \frac{e^{-n^2 h} - 1}{h} x_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{e^{-n^2 h} - 1}{h} x_n = -n^2 x_n e^{-\theta_n n^2 h}; \quad 0 < \theta_n < 1.$$

Il en résulte que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} = \left\{ -n^2 x_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

donc la suite n'existe pas toujours dans l^2 , mais $Ax = \{-n^2 x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est défini pour tout $x \in l^2$ et qui vérifie $\{-n^2 x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$. On déduit que :

$$D(A) = \left\{ x \in l^2 : \left\{ -n^2 x_n \right\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge dans } X \right\}$$

où $D(A)$ est le domaine de l'opérateur non borné A .

2.1.6 Le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe C^0

Soit X est un espace de Banach réel ou complexe, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe de classe C^0 sur X , on a vu dans le 2^{ième} exemple que pour tout $x \in X$, la fonction $t \rightarrow T(t)x$ n'est pas dérivable sauf quand x fait partie d'un certain ensemble que nous avons noté $D(A)$.

Définition 2.2 On désigne par $D(A)$ l'ensemble des vecteurs (dérivables) dans X , i.e : l'ensemble des $x \in X$ tels que : la fonction $t \rightarrow T(t)x$ soit dérivable pour tout $t \geq 0$; donc $D(A)$ est caractérisé par :

$$D(A) = \left\{ x \in X : \frac{T(h)x - x}{h} \text{ converge dans } X \text{ lorsque } h \rightarrow 0 \right\} \quad (2.3)$$

dans la suite on pose : $A = \frac{T(h)-I}{h}$, où A est opérateur qui appartient à $\mathcal{L}(X)$, $\forall h > 0$, cet opérateur est appelé générateur infinitésimal de semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ (généralement A est non borné).

2.2 Opérateur dissipatifs et opérateurs m-dissipatifs

2.2.1 Rappels de quelques résultats utiles de l'analyse fonctionnelle

Définition 2.3 Une application $f : X \rightarrow X$ est dite contractante si :

$$\exists k(\text{constante}) \in [0, 1[\text{ telle que } : \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\| \text{ pour tout } (x, y) \in X^2$$

Théorème 2.1 (du point fixe de Banach)

Soit (E, d) un espace métrique complet, f une application contractante définie de X vers X . Alors f admet un point fixe.

Preuve. cf : [3].

■

Théorème 2.2 (de Lax Miligram)

Soit H un espace de Hilbert, $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, on suppose qu'il existe deux constantes positives $c < +\infty$ et α telles que :

i) $|a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\|$

ii) $a(u, u) > \alpha \|u\|^2$ (coersivité) alors :

$$\forall f \in H, \exists ! u \in H \text{ tel que } a(u, v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in H$$

Preuve. cf : [3].

■

2.2.2 Opérateurs non bornés dans un espace de Banach

Dans toute la suite X est un espace de Banach, sa norme est notée $\| \cdot \|$.

Définition 2.4 Un opérateur linéaire dans X est un couple (D, A) où D est un sous-espace vectoriel de X et $A : D \rightarrow X$ est une application linéaire.

Définition 2.5 Si (D, A) est un opérateur linéaire dans X , le graphe de A et l'image de A ($G(A), R(A)$) sont définis par :

$$\begin{aligned}G(A) &= \{(u, v) \in X \times X, u \in D, v = Au\} \\R(A) &= A(D(A))\end{aligned}$$

Remarque 2.3 Dans la suite de chapitre on désignera le couple (D, A) par A . Noter cependant que lorsqu'on introduit un opérateur linéaire, il est absolument indispensable de définir son domaine.

Notations et définitions

Définition 2.6 Soit A un opérateur de X de domaine $D(A)$, alors $(u, v) \in A$ signifie que $u \in D(A)$ et $v \in Au$.

On dit que A est multivoque si Au contient plus d'un élément, dans le cas contraire on dit que A est univoque.

Définition 2.7 Un opérateur A dans X est dit dissipatif si on a :

$$\forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in A : \|u_1 - u_2 - (v_1 - v_2)\| \geq \|u_1 - u_2\|$$

Si A est linéaire, la définition est donnée comme suit :

$$\forall u \in D(A), \forall \lambda > 0, \|u - \lambda Au\| \geq \|u\| \tag{2.4}$$

Remarque 2.4 Si $-A$ est dissipatif; on dit que A est accréatif.

Remarque 2.5 Si A est accréatif alors l'équation :

$$u + \lambda Au = f \tag{2.5}$$

admet au plus une solution.

Preuve. Soit u_1, u_2 deux solutions de (2.5) alors : $u_1 - u_2 = \lambda(Au_1 - Au_2)$ et on a :

$$\|v\| \leq \|v - \lambda Av\| \text{ avec } v = u_1 - u_2, \text{ donc :}$$

$$\|u_1 - u_2\| \leq \|u_1 - u_2 - \lambda Au_1 + \lambda Au_2\| = 0 \text{ d'où } u_1 = u_2$$

■

Définition 2.8 Un opérateur dissipatif A dans X est dit m -dissipatif si :

$$R(I - \lambda A) = X \tag{2.6}$$

i.e : $\forall f \in X, \forall \lambda > 0, \exists ! u \in D(A)$ tel que :

$$u - \lambda Au = f \tag{2.7}$$

Remarque 2.6 Si $-A$ est m -dissipatif dans X , on dit que A est m -accrétif.

2.2.3 Opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert

Dans ce paragraphe on suppose que $X = H$ est un espace de Hilbert, et on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dans H .

Définition 2.9 Un opérateur A est dit monotone dans H si :

$$\langle Au, u \rangle \geq 0 \tag{2.8}$$

Proposition 2.1 A est dissipatif dans H ssi $-A$ est monotone.

Preuve. Si A est dissipatif, on a :

$$\langle u - \lambda Au, u - \lambda Au \rangle = \|u - \lambda Au\|^2 = \|u\|^2 - 2\lambda \langle Au, u \rangle + \lambda^2 \|Au\|^2, \forall \lambda > 0, \forall u \in D(A)$$

donc

$$\|u - \lambda Au\|^2 - \|u\|^2 = \lambda^2 \|Au\|^2 - 2\lambda \langle Au, u \rangle$$

Chapitre 2. Semi-groupes et problèmes semi linéaires

on divise par λ et on faisant $\lambda \rightarrow 0$, il résulte : $\langle Au, u \rangle \leq 0$.

Réciproquement : si $\langle Au, u \rangle \leq 0, \forall u \in D(A)$ on a :

$$\|u - \lambda Au\|^2 = \|u\|^2 - 2\lambda \langle Au, u \rangle + \lambda^2 \|Au\|^2 \geq \|u\|^2$$

d'où

$$\|u - \lambda Au\| \geq \|u\|$$

ce qui implique que A dissipatif. ■

Corollaire 2.1 Soit A un opérateur linéaire de domaine dense dans H tel que $G(A) \subset G(A^*)$ et A est dissipatif alors :

$$A \text{ m-dissipatif} \iff A = A^*$$

Preuve. cf : [4]. ■

2.2.4 Exemples

Exemple 2.3 Soit Ω un ouvert quelconque de \mathbb{R}^n et $Y = L^2(\Omega)$. On définit l'opérateur linéaire B sur Y par :

$$\begin{aligned} D(B) &= \{u \in H_0^1, \Delta u \in L^2(\Omega)\} \\ Bu &= \Delta u \quad \forall u \in D(B) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \{u \in H^1(\Omega), \text{ tel que } : u|_{\Gamma} = 0\} \text{ avec } \Gamma = fr(\Omega) \\ H^1(\Omega) &= \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tq } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\} \end{aligned}$$

Montrons que :

B est un opérateur m-dissipatif de domaine dense, de plus B est auto-adjoint

Chapitre 2. Semi-groupes et problèmes semi linéaires

Preuve. 1) D'après la formule de Green on a :

$$\int_{\Omega} \Delta u v = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v dv$$

où n est la normale extérieure à $\Gamma = \partial\Omega$. Montrons que : $\langle \Delta u, u \rangle \leq 0$.

On a :

$$\forall u \in D(B), \langle \Delta u, u \rangle = \int_{\Omega} \Delta u u dx = - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq 0$$

donc B est dissipatif.

2)

$$\forall f \in Y, \exists! u \in D(B) : u - \lambda \Delta u = f \quad (2.9)$$

Multipliant (2.9) par v avec $v \in H_0^1$, on trouve :

$$\int_{\Omega} (uv - \lambda v \Delta u) dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall \lambda > 0$$

Prenons $\lambda = 1$ donc :

$$\int_{\Omega} (uv + \nabla v \nabla u) dx = \int_{\Omega} f v dx$$

de la forme

$$b(u, v) = l(v)$$

c'est évident de vérifier que $b(u, v)$ est coercive et $l(v)$ est continue, et on applique le théorème de Lax-Millgram, donc : $\exists! u$ qui vérifie $u - Au = f$ d'où $B = \Delta u$ est m -dissipatif.

3) $\overline{D(B)} = Y$? On a $D(\Omega) \subset D(B) \subset L^2(\Omega) \implies \overline{D(B)} = L^2(\Omega)$ car $\overline{D(\Omega)} = L^2(\Omega)$.

4) $\langle Bu, v \rangle = \langle u, B^*v \rangle$, mais :

$$\langle Bu, v \rangle = - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx = \int_{\Omega} u \Delta v dx = \langle u, \Delta v \rangle$$

ce qui implique : $(u, v) \in G(B^*)$ et d'après corollaire (2.1) $B = B^*$ donc B est auto-adjoint.

Chapitre 2. Semi-groupes et problèmes semi linéaires

Exemple 2.4 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $Z = L^\infty(\Omega)$

on définit l'opérateur C par :

$$\begin{aligned} D(C) &= \{u \in H_0^1 \cap Z, \Delta u \in Z\} \\ Cu &= \Delta u \end{aligned}$$

Montrons que C est m -dissipatif dans Z .

Preuve. Montrons que : C est dissipatif ?

Soit $\lambda > 0$, $f \in Z$, posons : $M = \|f\|_\infty$, et soit $u \in H_0^1$ une solution de :

$$u - \lambda \Delta u = f \text{ dans } D(\Omega) \tag{2.10}$$

l'équation (2.10) est en particulier vérifiée dans $L^2(\Omega)$, et l'on a :

$$(u - M) - \lambda(\Delta u - M) = f - M \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

posons $v = (u - M)^+ \in H_0^1(\Omega)$ avec $\nabla v = \Psi_{\{u > M\}} \nabla u$ donc :

$$\int_{\Omega} v^2 dx + \lambda \int_{\{u > M\}} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} (f - M)v dx \leq 0$$

d'où

$$\int_{\Omega} v^2 dx \leq 0 \implies v = 0 \implies u \leq M \quad \text{p.p sur } \Omega$$

de la même manière on montre que : $u \geq -M$ p.p sur Ω donc :

$\|u\|_{L^\infty} \leq M = \|f\|_\infty$, il résulte que C est dissipatif.

Soit maintenant $f \in L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, $\exists ! u \in H_0^1(\Omega)$ avec $\Delta u \in L^2(\Omega)$ solution de :

$$u - \Delta u = f \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

puisque $u \in L^\infty(\Omega)$ alors, $u \in D(C)$ ce qui implique : $u - Cu = f$ admet une solution unique,

d'où est C m -dissipatif. ■

Remarque 2.7 Dans les deux exemples, on voit que c'est la même équation qui correspond à plusieurs opérateurs qui ont des propriétés différentes, car ils sont définis sur des domaines différents, donc, on voit l'utilité du domaine de définition.

■

2.2.5 Théorème de Hill-Yosida-Phillips

Semi-groupe engendré par un opérateur m -dissipatif

Soit X un espace de Banach, A est opérateur linéaire m -dissipatif de domaine dense.

Proposition 2.2 Soit $T(t)$ un semi-groupe de contraction et L son générateur infinitésimal alors L est m -dissipatif de domaine dense.

Preuve. cf :[4]. ■

Théorème 2.3 (Hill-Yosida-Phillips)

Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction ssi A est m -dissipatif de domaine dense.

Preuve. cf :[4]. ■

Théorème 2.4 (Hill-Yosida)

Soit A un opérateur linéaire m -accrétif dans un espace de Hilbert X , alors pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction $u \in C^1([0, +\infty[; X) \cap C([0, +\infty[; D(A))$ unique telle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0 & \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.11)$$

de plus $|u(t)| \leq |u_0|$ et $|\frac{du}{dt}| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0$.

$(D(A), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach muni de la norme de graphe :

$\|v\| + \|Av\|$ et de la norme hilbertienne équivalente $(\|v\|^2 + \|Av\|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Preuve. cf :[4]. ■

Corollaire 2.2 *Sous les même hypothèse du théorème (2.4) , l'équation :*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au + \lambda u = 0 & \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, admet une solution unique.

Preuve. L'équation (2.12) se ramène à l'équation (2.11) grâce à l'artifice classique suivant :

$$v(t) = e^{\lambda t} u(t)$$

■

2.3 Existence locale de la solution d'un problème d'évolution

2.3.1 Equations non homogènes et problème semi-linéaires

Dans cette partie on désigne par X l'espace de Banach et A l'opérateur linéaire m-dissipatif de domaine dense, on note $T(t)$ le semi-groupe de contraction engendré par A .

2.3.2 Equations non homogènes

Soit $T > 0$ pour tout $x \in X$ et $f : [0, T] \rightarrow X$, une fonction donnée, on veut résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} i) u \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], X) \\ ii) \dot{u}(t) = Au(t) + f(t) \quad \forall t \in [0, T] \\ iii) u(0) = x \end{cases} \quad (2.13)$$

on a le résultat suivant :

Lemme 2.1 *Soit $x \in D(A)$ et $f \in C([0, T], X)$, on considère une solution $u \in C([0, T], D(A))$*

du problème (2.13), alors on a :

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \quad (2.14)$$

Preuve. Soit $t \in [0, T]$, on pose :

$$w(s) = T(t-s)u(s) \text{ pour } s \in [0, T]$$

Soit $h \in [0, t-s]$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{w(s+h) - w(s)}{h} &= T(t-s-h) \left(\frac{u(s+h) - u(s)}{h} - \frac{(T(h) - I)}{h} u(s) \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} T(t-s)(\dot{u}(s) - Au(s)) \\ &= (T(t-s)f(s)) \end{aligned}$$

puisque

$$T(t-s)f(s) \in C([0, t], X) \implies \dot{w} \in C([0, t], X) \implies w \in C^1([0, t], X).$$

$$\dot{w}(s) = T(t-s)f(s), \quad \forall s \in [0, t] \quad (2.15)$$

en intégrant (2.15) sur $[0, \delta]$ et en faisant tendre δ vers t ($r < t$) on obtient :

$$w(r) - w(0) = \int_0^r T(t-s)f(s)ds$$

donc :

$$w(r) = w(0) + \int_0^r T(t-s)f(s)ds$$

lorsque $r \rightarrow t$ on obtient :

$$\begin{aligned} w(r) &= T(t-r)u(r) \rightarrow T(0)u(t) = u(t), \\ u(t) &= u(0) + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \end{aligned}$$

Corollaire 2.3 Pour tout $x \in X$ et $f \in C([0, T], X)$, le problème (2.13) possède au plus une solution.

Preuve. Supposons que u_1 et u_2 sont deux solutions de (2.13) donc d'après (2.14) :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ u_2(t) &= x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \end{aligned}$$

par substitution, on trouve : $u_1(t) - u_2(t) = 0 \implies u_1(t) = u_2(t) \quad \forall t \in [0, T]$ et donc :

$$u_1 \equiv u_2$$

■

Remarque 2.8 Pour tout $x \in X$ et $f \in C([0, T], X)$, la formule donnée par (2.14) définit une fonction $u \in C([0, T], X)$, nous allons chercher des conditions suffisantes pour que la fonction u donnée par (2.14) soit une solution de (2.13).

Remarque 2.9 Il est clair que si u est une solution de (2.13), on doit avoir $u(0) = x \in D(A)$, cependant cette condition n'est plus suffisante pour que u donnée par (2.14), soit solution de (2.13).

■

Contre exemple Supposons que $T(t)$ est un groupe d'isométrie et soit $y \in X \setminus D(A)$ alors : $T(t)y \notin D(A)$.

on prend pour tout $t \in \mathbb{R} : f(t) = T(t)y$, et $x = 0 \in D(A)$ donc (1.14) donne :

$$u(t) = tT(t)y \notin D(A) \text{ pour } t \neq 0.$$

donc $u(t)$ n'est plus une solution de (2.13).

Proposition 2.3 Soit $x \in D(A)$ et $f \in C([0, T], X)$, on suppose que l'une au moins des deux conditions suivantes est satisfaite :

i) $f \in L^1([0, T], D(A))$

ii) $f \in W^{1,1}([0, T], X)$

alors u donnée par (2.14) est solution du problème (2.13).

Preuve. cf :[4]. ■

Lemme 2.2 (Granwall)

Soit $T > 0$, $\lambda \in L^1[0, T]$ tel que $\lambda \geq 0$ p.p et soit c_1, c_2 deux constantes positives .

$\zeta \in L^1[0, T]$, $\zeta \geq 0$ p.p tel que $\lambda\zeta \in L^1[0, T]$ alors, si $\forall t \in [0, T]$

$$\zeta(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t \lambda(s)\zeta(s)ds \text{ p.p on a :}$$

$$\zeta(t) \leq c_1 \exp c_2 \int_0^t \lambda(s)ds$$

Preuve. cf[4]. ■

Remarque 2.10 En particulier, si $c_1 = 0$, alors $\zeta(t) = 0$ p.p sur $[0, T]$.

2.4 Problème semi-linéaires

2.4.1 Rappels

On dit que $F : X \rightarrow X$ est lipschytzienne sur les bornées de X , si pour toute constante $M > 0$, $\exists K(M)$ tel que :

$$\| F(x) - F(y) \| \leq K(M) \| x - y \|, \quad \forall x, y \in B(0, M)$$

étant donnée $u_0 \in X$, $F : X \rightarrow X$ une fonction lipschytzienne, on cherche $T > 0$ et une fonction u solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], X) \\ \frac{du}{dt} - Au = F(u(t)) \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{array} \right. \quad (2.16)$$

le problème (2.16) s'appelle problème semi-linéaire.

Lemme 2.3 Soit $T > 0$, $u_0 \in X$ et $u, v \in C([0, T], X)$ deux solutions du problème :

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds \quad (2.17)$$

alors $u = v$ (l'unicité de la solution).

Preuve. Posons : $M = \sup_{t \in [0, T]} \{ \| u(t) \|, \| v(t) \| \}$ on a :

$$\| u(t) \| - \| v(t) \| \leq \int_0^t \| F(u(s)) - F(v(s)) \| ds \leq K(M) \int_0^t \| u(s) - v(s) \| ds$$

pour $t \in [0, T]$, et d'après Gronwall ($C_1 = 0$), on déduit que :

$$\| u(t) - v(t) \| = 0$$

ce qui implique : $u = v$.

Proposition 2.4 Le problème (2.17) admet une solution unique.

Preuve. On pose $T_M = [2K(2M + \|F(0)\|) + 2]^{-1} > 0$, où T_{\max} est le temps d'existence maximale et on pose : $L = 2M + \|F(0)\|$, on définit E comme suit :

$$E = \{u \in C([0, T_M], X) \text{ tel que } \|u\| \leq L, \forall t \in [0, T_M]\}$$

on associe à E , la distance d induite par la norme de $C([0, T_M], X)$

$$d(u, v) = \max_{t \in [0, T_M]} \|u(t) - v(t)\|$$

Soit $\Phi_u \in C([0, T_M], X)$, $\forall u \in E$:

$$\Phi_u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds \text{ pour } s \in [0, T_M]$$

on a : $F(u(s)) = F(0) + [F(u(s)) - F(0)]$ donc :

$$\|F(u(s))\| \leq \|F(0)\| + LK(L) \leq \frac{M + \|F(0)\|}{T_M}$$

il résulte que :

$$\|\Phi_u(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|F(u(s))\| ds \leq M + \frac{t(M + \|F(0)\|)}{T_M} \leq L \quad \forall t \in [0, T_M]$$

par conséquent $\Phi_u \in E$ d'où :

$$\Phi_u : E \longrightarrow E$$

de plus : $\forall (u, v) \in E \times E$, on a :

$$\|\Phi_u(t) - \Phi_v(t)\| \leq K(L) \int_0^t \|u(s) - v(s)\| ds \leq K(L)d(u, v)T_M \leq \frac{1}{2}d(u, v)$$

donc Φ_u est contractante et d'après le théorème du point fixe de Banach, Φ_u possède une unique solution, et en déduit que : Le problème (2.17) admet une solution unique. ■

■

Chapitre 3

Existence globale de la solution d'un système de réaction-diffusion via fonctionnelle de Lyapunov

3.1 Introduction

Soit le problème :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u &= \Pi - f(u, v) - \lambda u & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - c\Delta u - d\Delta v &= f(u, v) - \lambda v & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} &= 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0, \quad v(0, x) &= v_0 & \text{sur } \Omega \end{aligned} \tag{G}$$

Où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n , a, c, d, λ sont des constantes positives telles que $a > d$ et $c < 4ad$ (la condition de la parabolicité), $f(r, s)$ est une fonction non négative continûment différentiable sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ vérifie

$$\begin{aligned} f(0, s) &= 0, \quad f(r, 0) \geq 0 \text{ pour } r, s \geq 0, \\ f\left(\frac{a-d}{c}s, s\right) &\geq \frac{\Pi c}{a+c-d}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

Chapitre 3. Existence globale de la solution d'un système de réaction-diffusion via fonctionnelle de Lyapunov

et

$$(\xi \geq 0, \eta \geq 0) \implies 0 \leq f(\xi, \eta) \leq \varphi(\xi)(1 + \eta)^\beta. \quad (3.2)$$

où φ est une fonction continue de classe $C(\mathbb{R}^+)$.

Si ($\lambda = \Pi = 0$) avec données initiales non négatives, le problème (P) représente un modèle de diffusion de substances tel que à chaque instant t , il existe une réaction chimique, ce modèle a été étudié par un chercheur qui s'appelle Rosenzweig-mac-Arthur dans le cas où $f(u, v) = u\zeta(v)$ telle que : $\zeta(v) = v^B$, la question de l'existence globale de la solution est posé par un autre chercheur, cette question a trouvé une réponse par N. Alikakos [1] lorsque $1 \leq \beta < \frac{n+2}{n}$, ensuite ; K.Masuda [9] a résolu le problème dans le cas $B \geq 1$. En (1983) A.Haroux et A.Youkana [5] ont généralisé la méthode de K.Masuda en jouant sur la non linéarité de ζ qui doit vérifier certaines conditions par exemple :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \zeta(s))}{s} = 0.$$

La technique traitée par A.Haroux, A.Youkana [5] s'appelle technique de la fonctionnelle de Lyapunov.

Pour u_0 et v_0 bornées, l'existence locale en temps de la solution est classique pour ce système ($\lambda = \Pi = 0$) (on note T_{Max} le temps d'existence maximale), de plus, les solutions sont positives si $u_0, v_0 \geq 0$.

Il en résulte par application du principe du maximum, l'estimation à priori :

$$\|u(t)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty \quad \forall 0 \leq t \leq T_{Max}$$

puisque $f(u, v) \geq 0$, s'il était possible d'établir une estimation a priori uniforme pour $v(t)$, l'existence globale en résulterait, mais, et c'est là la difficulté, une telle estimation n'est pas du tout évidente sauf bien sûr dans le cas trivial $a = d$ où :

$$\|w\|_\infty = \|u + v\|_\infty \leq \|w_0\|_\infty = \|u_0 + v_0\|_\infty$$

Chapitre 3. Existence globale de la solution d'un système de réaction-diffusion via fonctionnelle de Lyapunov

puisque :

$$\frac{\partial}{\partial t} (u + v) - a \Delta (u + v) = 0$$

donne :

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a \Delta w = 0$$

avec $w = u + v$, et d'après le principe de maximum on trouve :

$$\|w\|_{\infty} = \|u + v\|_{\infty} \leq \|w_0\|_{\infty} = \|u_0 + v_0\|_{\infty}.$$

3.2 Notations et préliminaires :

On désigne par $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, +\infty[$ et $\|\cdot\|_{\infty}$ les normes usuelles dans les espaces $L^p(\Omega)$, $L^{\infty}(\Omega)$, respectivement, définies par

$$\|u\|_p^p = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u(x)|^p dx,$$

$$\|u\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |u(x)|.$$

On définit aussi les espaces $L^p(0, T, X)$, $p \in [1, +\infty[$ et $L^{\infty}(0, T, X)$ comme suit :

$$L^p(0, T, X) = \left\{ u : [0, T] \rightarrow X \text{ mesurable, } \int_0^T \|u\|_X^p dt < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(0, T, X)}^p = \int_0^T \|u\|_X^p dt,$$

$$L^{\infty}(0, T, X) = \left\{ u : [0, T] \rightarrow X \text{ mesurable, } \sup_{t \in]0, T[} \|u\|_X < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^{\infty}(0, T, X)} = \sup_{t \in]0, T[} \|u\|_X.$$

L'étude de l'existence locale et l'unicité de la solution (u, v) du problème (G) découle de la théorie de base des équations paraboliques semi-linéaires (voir proposition 2.4).

Chapitre 3. Existence globale de la solution d'un système de réaction-diffusion via fonctionnelle de Lyapunov

En conséquence, il existe un $T_{\max} \in]0, +\infty]$ tel que (G) possède une unique solution classique sur $]0, T_{\max}[\times \Omega$.

De plus, si $T_{\max} < \infty$, alors

$$\lim_{t \uparrow T_{\max}} (\|u(t)\|_{\infty} + \|v(t)\|_{\infty}) = +\infty .$$

et donc la solution explose en temps fini.

Par conséquent, s'il existe une constante positive C telle que

$$\|u(t)\|_{\infty} + \|v(t)\|_{\infty} \leq C, \text{ pour tout } t \in]0, T_{\max}[,$$

alors $T_{\max} = +\infty$.

Cependant l'étude de la positivité de la solution est basée sur le lemme suivant :

Lemme 3.1 *On suppose que la matrice D du système (D) est diagonale. Alors, toute région de la forme*

$$\Sigma = \cap_{i=1}^m \{u : u_i \geq 0\} ,$$

est invariante dès que la fonction $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ satisfait

$$f_i(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_m) \geq 0, \text{ pour tout } u_j \geq 0, i, j = 1, \dots, m (i \neq j).$$

3.2.1 Existence locale

L'existence locale en temps de la solution est classique pour le système (G).

Il suffit de transformer le système (G) en :

$$\begin{cases} U'(t) = H U(t) + F(U(t)), t > 0 \\ U(0) = U_0 \in X. \end{cases}$$

$$H(U(t)) = (a \Delta u(t), c \Delta u(t) + d \Delta v(t))$$

$$\begin{aligned} F(U(t)) &= (\Pi - f(u(t), v(t)) - \lambda u(t), f(u(t), v(t)) - \lambda v(t)), \\ U(t) &= (u(t), v(t)). \end{aligned} \quad (\text{H})$$

Puisque F est localement lipschytienne en $U \in X = C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$, on applique la Proposition 2.4, le système (H) admet une solution locale unique.

Dans la section suivante nous exposons les principaux résultats qui assurent la positivité et l'existence globale de la solution du système (G).

3.3 Existence globale et positivité de la solution

3.3.1 positivité de la solution

En utilisant le changement de variable suivant :

$$z = v - \frac{c}{a-d}u,$$

le système (G) s'écrit sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = F(u, z), \text{ sur }]0, +\infty[\times \Omega \\ \frac{\partial z}{\partial t} - d\Delta z = G(u, z), \text{ sur }]0, +\infty[\times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur }]0, +\infty[\times \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0, \quad v(0, x) = v_0 \quad \text{sur } \Omega \end{array} \right. \quad (\text{E})$$

où

$$\begin{aligned} F(u, z) &= \Pi - f(u, z) - \lambda u, \\ G(u, z) &= \left(1 + \frac{c}{a-d}\right)f(u, z) - \lambda z - \frac{\Pi c}{a-d}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.1 et comme $f(0, s) = 0$ et $f\left(\frac{a-d}{c}s, s\right) \geq \frac{\Pi c}{a+c-d}$ pour tous $r, s \geq 0$, alors la

région suivante est invariante

$$\Sigma = \{(u_0, z_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ such that } u_0 \geq 0, z_0 \geq 0\},$$

ce qui montre que la solution du problème (E) reste dans Σ , c'est à dire positive.

Maintenant concernant l'existence globale de la solution du système (E), on applique le théorème de comparaison voir [11, theorem 10.1] à la première équation du système (E), on obtient

$$0 \leq u(t, x) \leq \max(\|u_0\|_\infty, \frac{\Pi}{\lambda}) = K. \quad (3.3)$$

Pour prouver que z est globale en temps, et d'après un résultat dans [5], il suffit de trouver une estimation pour la quantité suivante

$$\left\| \left(1 + \frac{c}{a-d}\right) f(u, z) - \lambda z - \frac{\Pi c}{a-d} \right\|_p \text{ pour } p > \frac{n}{2}, i.e.$$

$$\left\| \left(1 + \frac{c}{a-d}\right) f(u, z) - \lambda z - \frac{\Pi c}{a-d} \right\|_p \leq Cte, \quad (3.4)$$

où Cte est une constante positive indépendante de t .

D'après (3.2), nous allons établir la bornitude de la quantité $\|z\|_p$ sur $]0, T_{\max}[$ dans le but de l'assurer pour $\|z\|_\infty$ sur $]0, T_{\max}[$.

prenons $p \geq 2$, et on pose

$$\alpha = \frac{(d-a)^2}{4ad}, \alpha(p) = \frac{p\alpha + 1}{p-1}, M_p = K + \frac{\Pi}{\lambda\alpha(p)}. \quad (3.5)$$

Dans la suite, nous présentons quelques lemmes importants dans l'établissement de l'estimation (3.4).

Lemma 1 *Soit (u, v) une solution du système (E). Alors*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u dx + \int_{\Omega} f(u, z) dx + \lambda \int_{\Omega} u dx = \Pi |\Omega|, \quad (3.6)$$

Chapitre 3. Existence globale de la solution d'un système de réaction-diffusion via fonctionnelle de Lyapunov

Preuve. évidente ■

Lemme 3.3 *On suppose que $p \geq 2$ et soit*

$$G_q(t) = \int_{\Omega} \left[qu + \exp\left(-\frac{p-1}{p\alpha+1} \ln(\alpha(p)(M_p - u))\right) z^p \right] dt, \quad (3.7)$$

où (u, z) est une solution du système (E) sur $]0, T_{\max}[$. Alors sous les conditions (3.1) -(3.2), il existe deux constantes $q > 0$ et $s > 0$ telles que

$$\frac{d}{dt} G_q(t) \leq -(p-1)\sigma G_q + s. \quad (3.8)$$

Preuve. on pose : ■

$$h(u) = -\frac{p-1}{p\alpha+1} \ln(\alpha(p)(M_p - u)), \quad (3.9)$$

donc

$$G_q(t) = q \int_{\Omega} u dx + N(t), \quad (3.10)$$

où

$$N(t) = \int_{\Omega} e^{h(u)} z^p dx. \quad (3.11)$$

On dérive $N(t)$ par rapport à t et on applique la formule de Green, on obtient

$$\frac{d}{dt} N = H + S, \quad (3.12)$$

où

$$\begin{aligned} H = & -d \int_{\Omega} ((h'(u))^2 + h''(u)) e^{h(u)} z^p (\nabla u)^2 dx \\ & -p(d+a) \int_{\Omega} h'(u) e^{h(u)} z^{p-1} \nabla u \nabla v dx \\ & -a \int_{\Omega} p(p-1) e^{h(u)} z^{p-2} (\nabla z)^2 dx, \end{aligned} \quad (3.13)$$

et

Chapitre 3. Existence globale de la solution d'un système de réaction-diffusion via
fonctionnelle de Lyapunov

$$\begin{aligned}
 S = & \Pi \int_{\Omega} h'(u) e^{h(u)} z^p dx + \\
 & \int_{\Omega} \left[p \left(1 + \frac{c}{a-d} \right) z^{p-1} f(u, z) - h'(u) z^p f(u, z) \right] e^{h(u)} dx \\
 & - \lambda \int_{\Omega} h'(u) u e^{h(u)} z^p dx \\
 & - p\lambda \int_{\Omega} e^{h(u)} z^p dx - \frac{p\Pi c}{a-d} \int_{\Omega} e^{h(u)} z^{p-1} dx.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

On observe que H est donné par

$$H = - \int_{\Omega} Q e^{h(u)} dx,$$

où

$$\begin{aligned}
 Q = & d((h'(u))^2 + h''(u)) z^p (\nabla u)^2 + \\
 & + p(a+d) h'(u) z^{p-1} \nabla u \nabla z + ap(p-1) z^{p-2} (\nabla z)^2,
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

est la forme quadratique en fonction de ∇u et ∇v , qui est nonnegative si

$$(p(a+d)h'(u)z^{p-1})^2 - 4adp(p-1)((h'(u))^2 + h''(u))z^{2p-2} \leq 0, \tag{3.16}$$

on choisit $h(u)$ telle que

$$h'(u) = \frac{1}{\alpha(p)(M_p - u)}, \quad h''(u) = \frac{\alpha(p)}{(\alpha(p)(M_p - u))^2}. \tag{3.17}$$

L'inégalité (3.16) peut s'écrire de la forme

$$4adpz^{2p-2} \left\{ p \left[\frac{1}{(\alpha(p)(M_p - u))^2} - \frac{\alpha(p)}{(\alpha(p)(M_p - u))^2} \right] + \frac{1+\alpha(p)}{(\alpha(p)(M_p - u))^2} \right\} = 0, \tag{3.18}$$

Chapitre 3. Existence globale de la solution d'un système de réaction-diffusion via fonctionnelle de Lyapunov

Mais

$$p\alpha - p\alpha(p) + 1 + \alpha(p) = 0,$$

donc l'inégalité (3.16) est vérifiée, $Q \geq 0$ par conséquent

$$H = - \int_{\Omega} Q e^{h(u)} dx \leq 0, \quad (3.19)$$

tandis que le terme S peut être estimé comme suit

$$\begin{aligned} S &\leq \int_{\Omega} (\Pi h'(u) - \lambda p) e^{h(u)} z^p dx + \\ &\quad \int_{\Omega} \left[p \left(1 + \frac{c}{a-d}\right) z^{p-1} f(u, z) - h'(u) z^p f(u, z) \right] e^{h(u)} dx, \\ &\leq -(p-1)\sigma \int_{\Omega} e^{h(u)} z^p dx + \\ &\quad \int_{\Omega} \left[p \left(1 + \frac{c}{a-d}\right) z^{p-1} f(u, z) - h'(u) z^p f(u, z) \right] e^{h(u)} dx, \end{aligned} \quad (3.20)$$

puisque

$$h'(u) = \frac{1}{\alpha(p)(M_p - u)} \leq \frac{1}{\alpha(p)(M_p - K)} = \frac{\lambda}{\Pi}. \quad (3.21)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} -h'(u) &= \frac{-1}{\alpha(p)(M_p - u)} \leq \frac{-1}{\alpha(p)M_p}, \\ h(u) &\leq \frac{-1}{\alpha(p)} \ln \frac{\Pi}{\lambda}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Comme $z \geq 0$, alors d'après (3.22), on observe que

$$\begin{aligned} &\left[p \left(1 + \frac{c}{a-d}\right) z^{p-1} f(u, z) - h'(u) z^p f(u, z) \right] \\ &\leq \left(p \left(1 + \frac{c}{a-d}\right) z^{p-1} - \frac{1}{\alpha(p)M_p} z^p \right) f(u, z). \end{aligned}$$

Chapitre 3. Existence globale de la solution d'un système de réaction-diffusion via fonctionnelle de Lyapunov

Donc, il existe $c_1 > 0$ telle que

$$\begin{aligned} & \left(p \left(1 + \frac{c}{a-d} \right) z^{p-1} - \frac{1}{\alpha(p)M_p} z^p \right) f(u, z) \\ & \leq \left(\frac{p \left(1 + \frac{c}{a-d} \right)}{z} - \frac{1}{\alpha(p)M_p} \right) z^p f(u, z), \end{aligned} \quad (3.23)$$

donc, il existe $\eta_0 > 0$, tel que ($0 \leq \xi < K, \eta \geq \eta_0$), la fonction

$$\left(\frac{p \left(1 + \frac{c}{a-d} \right)}{\eta} - \frac{1}{\alpha(p)M_p} \right) z^p f(\xi, \eta) \leq 0,$$

comme $\left(p \left(1 + \frac{c}{a-d} \right) \eta^{p-1} - \frac{1}{\alpha(p)M_p} \eta^p \right)$ est une fonction continue et donc elle est bornée pour tout $\eta \in [0, \eta_0]$.

Ce qui montre que

$$\left(p \left(1 + \frac{c}{a-d} \right) z^{p-1} - \frac{1}{\alpha(p)M_p} z^p \right) f(u, z) \leq c_1,$$

D'après l'inégalité précédente, (3.20) et (3.23), on obtient l'estimation suivante

$$\begin{aligned} S & \leq -(p-1)\sigma N + c_1 \int_{\Omega} f(u, z) e^{h(u)} dx \\ & \leq -(p-1)\sigma N + c_1 e^{\frac{-1}{\alpha(p)} \ln \frac{\Pi}{\lambda}} \int_{\Omega} f(u, z) dx, \end{aligned} \quad (3.24)$$

on pose

$$q_1 = c_1 e^{\frac{-1}{\alpha(p)} \ln \frac{\Pi}{\lambda}}, \quad (3.25)$$

utilisant (3.6), on trouve

$$S \leq -(p-1)\lambda N + q_1 \Pi |\Omega| - q_1 \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t, x) dx, \quad (3.26)$$

Chapitre 3. Existence globale de la solution d'un système de réaction-diffusion via fonctionnelle de Lyapunov

il est clair que d'après (3.10), on obtient

$$S \leq -(p-1)\lambda G_q + q_1((p-1)\lambda K + \Pi) |\Omega| - q_1 \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t, x) dx, \quad (3.27)$$

ce qui montre d'après (3.10) et (3.12) que

$$\frac{d}{dt} G_q \leq -(p-1)\lambda G_q + s, \quad (3.28)$$

où

$$s = q_1((p-1)\lambda K + \Pi) |\Omega|. \quad (3.29)$$

Maintenant, on peut établir l'existence globale de la solution du système (E).

Théorème 3.1 *Sous les conditions (3.1) et (3.2), les solutions du système (E) sont globales et uniformément bornées sur $[0, +\infty[\times \Omega$.*

Preuve. Multiplions l'inégalité (2.28) par $e^{(p-1)\lambda t}$ puis par une simple intégration du résultat, on déduit l'existence d'une constante positive $C > 0$ indépendante de t tel que : ■

$$G_q(t) \leq C. \quad (3.30)$$

D'après (3.9), on observe que

$$e^{h(u)} \geq e^{\frac{-1}{\alpha(p)} \ln \alpha(p)} M_p, \quad (3.31)$$

ce qui montre que pour tout $p \geq 2$, on a

$$\int_{\Omega} z^p dx \leq e^{\frac{1}{\alpha(p)} \ln(K\alpha(p) + \frac{\Pi}{\lambda})} G_q(t) \leq C_1(p), \quad (3.32)$$

où

$$C_1(p) = C e^{\frac{1}{\alpha(p)} \ln(K\alpha(p) + \frac{\Pi}{\lambda})}, \quad (3.33)$$

prenons $p > \frac{n}{2}$ et procédons à l'estimation uniforme de la quantité $\left\| \left(1 + \frac{c}{a-d}\right) f(u, z) - \lambda z - \frac{\Pi c}{a-d} \right\|_p$.

Soit

Chapitre 3. Existence globale de la solution d'un système de réaction-diffusion via fonctionnelle de Lyapunov

$$A = \max_{0 \leq \xi \leq K} \varphi(\xi), \quad (3.34)$$

l'inégalité (3.2), montre que

$$f(u, z) \leq \varphi(u)(1+z)^\beta,$$

ce qui implique,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f^p(u, z) dx &\leq \int_{\Omega} (\varphi(u))^p (1+z)^{\beta p} dx \leq \\ A^p \int_{\Omega} (1+z)^{\beta p} &= C(\beta p, |\Omega|, A), \end{aligned} \quad (3.35)$$

Finalement

$$\begin{aligned} \left\| \left(1 + \frac{c}{a-d}\right) f(u, z) - \lambda z - \frac{\Pi c}{a-d} \right\|_p &\leq \left(1 + \frac{c}{a-d}\right) \|f(u, z)\|_p + \lambda \|z\|_p + \frac{\Pi c}{a-d} \\ &\leq C_1. \end{aligned}$$

Où C_1 est une constante indépendante de t . Ce qui montre que les solutions du système (E) sont globales.

Comme

$$z = v - \frac{c}{a-d} u,$$

donc

$$v = z + \frac{c}{a-d} u \geq 0.$$

Par conséquent les solutions du système (G) sont positives et globales.

Remarque 3.1 L'inégalité (3.35) dérive de la formule suivante :

$$(x+y)^r \leq 2^{r-1}(x^r + y^r), \quad x, y \geq 1, r \geq 1.$$

Bibliographie

- [1] N. D. Alikakos, L^p -Bounds of Solutions of Reaction-Diffusion Equations. Comm. Partial. Differential. Equations 4, (1979), 827-868.
- [2] Boukerrioua, K. (2014). Invariant regions and global existence of solutions for reaction-diffusion systems with a general full matrix. Journal of Inequalities and Applications, 2014(1), 24.
- [3] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle. Théorie et Application, Masson, Paris,1983.
- [4] T. Casenave, A. Haraux, Introduction au Problèmes d'Evolution Semi Linéaires, Eddition Ellipses.
- [5] A.Haraux et A.Youkana, On a Result of K. Masuda Concerning Reaction-Diffusion Equations, Tohoku .Math .J. 40.(1988) S. p. 159-163
- [6] D. Henry, Geometric theory of Semi-Linear Parabolic Equations , Lecture Notes in Math, 840, Springer Verlas, New York (1984).
- [7] S. Kouachi, Cours de Magister1999-2000, Existence globale de la solution des systèmes paraboliques.
- [8] S.Laachouri et al, Mémoire de Master 2013, Existence globale de la solution d'un système de réaction- diffusion avec matrice diagonal.
- [9] K.Masuda, On the Global Exietence and Asymtotic Behavior of Solution of Reaction-Diffusion Equations, Hokaido Math. J.12. (1983), pp. 360-370.