République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté de Mathématiques, d'Informatique
et des Sciences de la Matière.
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Par :

AMOUCHI Hakim

Intitulé

Problème de Cauchy linéaire

Dirigé par : Dr.Benarioua

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. N.BOUSSTILA	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. K.BENARIOUA	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. S.BADI	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2014

إهداء

بدأت بأكثر من يد وقاسيت بأكثر من هم وعانيت الكثير

من الصعوبات

وها أنا اليوم والحمد لله

أطوي سهر الليالي وتعب الأيام وخلاصة مشواري بين دفتي هذا

العمل المتواضع

إلى منارة العلم والإمام المصطفى إلى الأمّي الذي علم المتعلمين

إلى سيد الخلق سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم

إلى الينبوع الذي لم يمل العطاء إلى من حاكت سعادتي بخيوط

منسوجة من قلبها إلى والدتي –رحمها الله–

التي سعت وشقت لأنعم بالراحة والهناء التي لم تبخل بشيء

من أجل دفعي في طريق النجاح التي علمتني أن

أرتقي سلم الحياة بحكمة وصبر

إلى من حبهم يسري في عروقي ويلهج بذكراهم فؤادي

والدي وإخوتي إلى كل رفاق دربي :

سفيان أيمن عماد محمد سلامة عبدالله نجيب شعيب فؤاد مراد...إلخ

إلى كل من علمني حرفا من ذهب وكلمات من درر وعبارات

من أسمى و أجل عبارات في العلم

إلى أساتذتي الكرام

حكيم

شكر وتقدير

وأنا أخطو خطواتي الأخيرة في الحياة الجامعية من مشوار يعود لأعوام قضيتها في رحاب الجامعة مع أساتذتي الكرام الذين قدموا لي الكثير باذلين بذلك جهودا كبيرة، وأتقدم بأسمى آيات الشكر والامتنان والتقدير والمحبة الذين حملوا أقدس رسالة في الحياة، ومهدوا لي طريق العلم والمعرفة.

" فكن عالما ... فإن لم تستطع فكن متعلما، فإن لم تستطع فأحب العلماء، فإن لم تستطع فلا تبغضهم " .

وأخص بالتقدير والشكر للدكتور "بن عريوة " الذي أقول له بشراك قول رسول الله صلى الله عليه وسلم "إن الله في عون العبد مادام العبد في عون أخيه "

كما أخص بذكر أيضا الدكاترة "بوسطيلة مهري بادي لكحل بن رابح عزوزة فريوي ...إلخ"

الذين علموني التفاؤل ووقفوا إلى جانبي عندما ضللت الطريق وكذلك أشكر كل من ساعدني على إتمام هذا البحث وقدم لي العون ومدني يد المساعدة فلهم مني كل الشكر والامتنان

Sur le Problème de Cauchy Linéaire*

Hakim AMOUCHI
Mémoire de Mastère en Mathématiques
Université de Guelma

12 juin 2014

Résumé

Dans ce mémoire, Je formule très clairement le problème de Cauchy pour un système linéaire d'opérateurs différentiels du premier ordre à cœfficients constants, et je donne des conditions nécessaires et (ou) suffisantes à sa « Well-posedness », que je démontre (pour la plupart) dans les moindres détails.

MOTS CLÉ : Distributions régulières par rapport à une variable - Trace Sectionnelle - Transformée de Fourier - Espaces de Sobolev - Systèmes Linéaires d'EDP - Problème de Cauchy - Well-Posedness - Symétrisation de Friedrichs - Valeurs Propres - Hyperbolicité - Diagonalisation.

Table des matières

1 Introduction 2

2 Rappel, Notations et Conventions 2
2.1 Généralités 2
2.2 Rappels sur les matrices 3
2.3 Fonctions test et distributions 4
2.4 Transformée de Fourier 6
2.5 Espaces de Sobolev 7

3 Problème de Cauchy linéaire à cœfficients constants 7
3.1 Position du problème 7
3.2 Problème très faiblement bien posé 10
3.3 Problème fortement bien-posé 15
3.3.1 Hyperbolicité 17
3.4 Symétrisation de Friedrichs 20

*Document saisi à l'aide du logiciel de traitement de texte TeX, au format LaTeX 2_ε.

1 Introduction

Dans ce mémoire :

Je formule très clairement le problème de Cauchy pour un système linéaire d'opérateurs différentiels du premier ordre à cœfficients constants (système apparenté à une équation d'évolution). J'introduis de façon non moins claire la notion de problème bien-posé (notion de « Well-posedness ») ainsi que des conditions qui lui sont nécessaires et (ou) suffisantes (exprimées en termes d'hyperbolicité), que je démontre dans les moindres détails, et j'accorde un itérêt bien particulier aux systèmes dits symétrisables au sens de Friedichs.

Bien sûr, lorsque les cœfficients, le second membre et la donnée initiale dudit système sont analytiques, le théorème de Cauchy-Kovalevski (*cf.* [2]) fournit une solution analytique, unique (d'après Holmgren). Cependant, cette solution n'existe que sur un intervalle « de temps » relativement court, dépendant souvent de la donnée initiale. Comme l'analyticité de cette dernière est peu probable dans la « vraie vie », et vu que les solutions locales ne sont pas vraiment d'un grand intérêt, je ne serais guère concerné par ce type de résultat.

Le problème de Cauchy que j'aborde ici est posé sur l'espace $\mathbb{R}^d$ tout entier, pendant que le temps décrit un intervalle du type $]0, T[$ où $T \leq \infty$. Je lui attache deux sortes de « Well-posedness » : celle dite faible et une seconde que l'on qualifie de forte, et je démontre que ces propriétés sont, d'une façon ou d'une autre, intimement liées à la notion « d'hyperbolicité » dudit système.

Le principal support à l'élaboration de ce mémoire est le chapitre 1 du livre de Sylvie Benzoni-Gavage & Denis Serre, rédigé en anglais et intitulé : Multidimensional Hyperbolic Partial Differential Equations, où les résultats sont présentés de façon très succinte, et leurs preuves sont souvent sommaires et inachevées (à mon très humble avis).

Ma contribution à ce travail se résume à un effort de synthèse du chapitre susdit, et aux énoncés et preuves des résultats qui s'y trouvent, de façon nettement plus intelligible.

2 Rappel, Notations et Conventions

2.1 Généralités

Les notations sont celles des équations aux dérivées partielles. Lorsque d est un nombre entier strictement positif, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^d$, et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$ est un d-multi-indice (*i.e* un d-uple de nombres entiers ≥ 0), on pose :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_d \tag{1}$$

$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2)^{1/2} \tag{2}$$

$$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_d! \tag{3}$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_d^{\alpha_d} \tag{4}$$

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (\text{pour } j = 1, 2, \ldots, d) \tag{5}$$

$$\partial = (\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_d) \tag{6}$$

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\ldots\partial_d^{\alpha_d} \tag{7}$$

$$D_j = \frac{1}{i}\partial_j \quad (\text{pour } j = 1, 2, \ldots, d, \text{ et } i^2 = -1) \tag{8}$$

$$D = \frac{1}{i}\partial_j \tag{9}$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\ldots D_d^{\alpha_d} \tag{10}$$

de telle sorte que, pour une fonction f suffisamment différentiable, la formule de Taylor s'écrit :

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha|<N} \partial^\alpha f(x)\frac{h^\alpha}{\alpha!} + O(\|h\|^N). \tag{11}$$

2.2 Rappels sur les matrices

Si n est un entier strictement positif et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), on désigne par $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices à n lignes et n colonnes ($n \times n$-matrices), à cœfficients dans $\mathbb{K}$, où l'élément neutre pour l'addition est noté $\mathbf{0}_n$ et celui pour la multiplication $\mathbf{I}_n$. La transposée d'une matrice M de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ sera notée : M^T, son adjointe : M^* (de sorte que $\mathrm{M}^* = \overline{\mathrm{M}}^T$), et une matrice U de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ sera dite unitaire si et seulement si $\mathrm{U}^*\mathrm{U} = \mathrm{I}_n$ ou (de façon équivalente) $\mathrm{UU}^* = \mathrm{I}_n$. Le groupe des $n \times n$-matrices inversibles sur $\mathbb{K}$ est noté $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$, et la partie de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ constituée de toutes les matrices unitaires est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ que l'on note $\mathbf{U}_n(\mathbb{C})$. L'algèbre $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ est équipée de la norme :

$$\|M\| = \sup_{z\in\mathbb{C}^n;\, z\neq 0} \frac{\|\mathrm{M}z\|_{\mathbb{C}^n}}{\|z\|_{\mathbb{C}^n}}, \quad \text{où} \quad \|\zeta\|_{\mathbb{C}^n} = \sqrt{\zeta^*\zeta}, \tag{12}$$

laquelle vérifie :

$$\forall \mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \quad \|\mathrm{MN}\| \leq \|\mathrm{M}\|\|\mathrm{N}\| \tag{13}$$

$$\forall \mathrm{Q} \in \mathbf{U}_n(\mathbb{C}), \quad \|\mathrm{Q}\| = 1, \tag{14}$$

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \quad \forall \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbf{U}_n(\mathbb{C}), \quad \|\mathrm{PMQ}\| = \|\mathrm{M}\|. \tag{15}$$

Soit $(\mathrm{M}_k)_k$ une suite matricielle dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, où chaque M_k est de la forme $(m_{ij}^k)_{1\leq i,j\leq n}$. On dit que la série matricielle $\sum \mathrm{M}_k$ est convergente dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, pour tous entiers i et j tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, la série numérique $\sum_k m_{ij}^k$ est convergente dans $\mathbb{K}$. Pour tout $\mathrm{M} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, on peut facilement vérifier que la série matricielle $\sum \frac{1}{k!}\mathrm{M}^k$ est convergente, et l'on note $\exp \mathrm{M}$ ou encore e^{M} sa somme :

$$\exp \mathrm{M} = e^{\mathrm{M}} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathrm{M}^k. \tag{16}$$

On démontre également que,

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Quel que soit la matrice M de } \mathbf{M}_n(\mathbb{C}), \text{ quel que soit le vecteur} \\ u^0 \text{ de } \mathbb{C}^n, \text{ et quel que soit le réel } t_0, \text{ la fonction vectorielle} \\ \qquad\qquad \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ t \longmapsto e^{(t-t_0)\mathrm{M}}u^0 \end{array} \\ \text{est l'unique solution du système} \\ \qquad\qquad \dfrac{du}{dt} = \mathrm{M}u, \\ \text{qui vaille } u^0 \text{ en } t_0, \end{array} \right. \tag{17}$$

que les valeurs propres de $\exp \mathrm{M}$ sont les exponentielles de celles de M, et que

$$\exp(\mathrm{M}^T) = (\exp \mathrm{M})^T, \quad \exp \overline{\mathrm{M}} = \overline{\exp \mathrm{M}}, \quad \exp(\mathrm{M}^*) = (\exp \mathrm{M})^*. \tag{18}$$

2.3 Fonctions test et distributions

Soit Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, K une partie compacte de Ω, k un entier naturel, et rappelons que :

- $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions réelles ou complexes, continues sur $\mathbb{R}^n$ et tendant vers zéro à l'infini (*i.e* quand $|x| \to \infty$).

- $\mathscr{C}^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions réelles ou complexes, k-fois continûment différentiables sur Ω. C'est un espace de Fréchet [1] pour la topologie définie par la famille de semi-normes $(N_{K,k})_K$ où K décrit les compacts de Ω et,

$$\forall f \in \mathscr{C}^k(\Omega), \quad N_{K,k}(f) = \sup_{\substack{x\in K \\ |\alpha|\le k}} |\partial^\alpha f(x)|. \tag{19}$$

- $\mathscr{C}^k_b(\Omega)$ est l'espace des fonctions réelles ou complexes, k-fois continûment différentiables sur Ω, bornées ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k. C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|f\|_{\mathscr{C}^k_b} \equiv \sup_{\substack{x\in \Omega \\ |\alpha|\le k}} |\partial^\alpha f(x)|. \tag{20}$$

- $\mathscr{C}^k_K(\Omega)$ est l'espace des fonctions réelles ou complexes, k-fois continûment différentiables sur Ω, à supports [2] dans K. C'est un espace de Banach pour la norme $N_{K,k}$.

- $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ (parfois noté $\mathscr{E}(\Omega)$) est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω ($\mathscr{C}^\infty(\Omega) = \cap_{k=0}^\infty \mathscr{C}^k(\Omega)$). C'est un espace de Fréchet pour la topologie définie par la famille de semi-normes $(N_{K,k})_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ K\in\Omega}}$.

1. Un espace de Fréchet est un espace **localement convexe** (*i.e* dont la topologie est définie par une famille de semi-normes $(p_\alpha)_{\alpha\in I}$ qui sépare les points, c-à-d. telle que si $p_\alpha(x) = 0$ pour tout $\alpha \in I$, alors $x = 0$), **métrisable** (*i.e* de topologie définie par une famille dénombrable de semi-normes) et **complet**.
2. Le support d'une fonction f (noté Supp f) est le plus petit ensemble fermé dans le complémentaire duquel f est nulle.

• $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ (également noté $\mathscr{D}(\Omega)$) est l'espace des fonctions réelles ou complexes, indéfiniment différentiables sur Ω, à support compact. Par définition, une application sur $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ est continue si, et seulement si, sa restriction à $\mathscr{C}_K^\infty(\Omega)$ est continue pour tout compact $K \Subset \Omega$.

• $\mathscr{C}^{-\infty}(\Omega)$ (ou $\mathscr{D}'(\Omega)$) est le dual topologique de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$; c'est l'espace des distributions sur Ω. Sur $\mathscr{C}^{-\infty}(\Omega)$, on dispose de plusieurs topologies : la topologie faible, qui est la topologie de la convergence simple sur $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$, et la topologie forte, qui est celle de la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ (une partie B de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ est bornée s'il existe un compact $K \Subset \Omega$ tel que $B \subset \mathscr{C}_K^\infty(\Omega)$ et, pour tout entier $k \geq 0$, $N_{K,k}(B) = \sup_{\varphi\in B} N_{K,k}(\varphi) < \infty$). La topologie faible (resp. forte) est définie par la famille de semi-normes $(p_F)_F$ telle que :

$$\forall T \in \mathscr{C}^{-\infty}(\Omega), \quad p_F(T) = \sup_{\varphi\in F} |\langle T, \varphi\rangle| \tag{21}$$

où F parcourt l'ensemble des parties finies (resp. des parties bornées) de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$. La topologie forte est, comme son nom l'indique, (vraiment) plus fine que la topologie faible : Une famille qui converge faiblement ne converge pas toujours fortement. Cependant on a le résultat (qui a l'air miraculeux) :

> Si $(T_n)_n$ est une suite de distributions qui converge simplement vers une limite T, alors T est une distribution, et T_n tend fortement vers T. (22)

• $\mathscr{C}(]a,b[,\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))$ $\Big($noté également $\mathscr{C}(a,b;\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))\Big)$ est l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^d\times]a,b[$, continues en la variable de $]a,b[$: A toute U continue de $]a,b[$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$, on associe injectivement la distribution $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d\times]a,b[)$ en posant :

$$\langle u,\varphi\rangle = \int_a^b \langle U(t),\varphi(.,t)\rangle dt \quad \text{où} \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d\times]a,b[). \tag{23}$$

Pour tout $t_0 \in]a,b[$, la « trace sectionnelle » de u sur $\mathbb{R}^d \times \{t_0\}$ est définie par $u(.,t=t_0) = U(t_0)$.

• $\mathscr{E}'(\Omega)$ est le dual topologique de $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$; c'est l'espace des distributions à supports compacts sur Ω.

• $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathbb{R}^n$ à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées de tout ordre. On a $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si :

$$f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ et, } \forall N \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathbb{N}^n, (1+|x|)^N \partial^\beta f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^n, \tag{24}$$

ce qui équivaut à

$$f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ et, } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall \beta \in \mathbb{N}^n, x^\alpha \partial^\beta f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^n. \tag{25}$$

La topologie naturelle de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, et qui en fait un espace de fréchet, est celle définie par l'une des familles équivalentes de semi-normes :

$$p_N(f) = \sup_{\substack{|\beta|\leq N \\ x\in\mathbb{R}^n}} (1+|x|)^N |\partial^\beta f(x)|, \tag{26}$$

$$p_{N,\beta}(f) = \sup_{\substack{|\alpha|\leq N \\ x\in\mathbb{R}^n}} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|, \tag{27}$$

$$p_{\alpha,N}(f) = \sup_{\substack{|\beta|\leq N \\ x\in\mathbb{R}^n}} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|, \tag{28}$$

$$p_{N,k}(f) = \sup_{\substack{|\alpha|\leq N, |\beta|\leq k \\ x\in\mathbb{R}^n}} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|. \tag{29}$$

Enfin, de (15) on déduit que

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n) \tag{30}$$

et de (16) et de la formule de Leibniz, il découle que :

> La dérivation et la multiplication par un monôme sont
>
> des applications continues de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. (31)

• $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ est le dual topologique de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$: C'est l'espace (de Schwartz) des distributions tempérées. Il est muni soit de la topologie duale faible, soit de la topologie duale forte.

2.4 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier $\widehat{f}$ (notée aussi $\mathscr{F}f$) d'une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}^n$ est définie par la formule :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)dx. \tag{32}$$

On démontre aisément que

$$\mathscr{F} \text{ est linéaire,} \tag{33}$$

que

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \widehat{f} \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n) \text{ (lemme de Riemann-Lebesgue),} \tag{34}$$

et que $\forall f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx \text{ (théorème du transfert),} \tag{35}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g}(x)dx \text{ (th. de Plancherel-Parseval).} \tag{36}$$

On démontre également que

$$\mathscr{F} \text{ est continue de } L^1 \longrightarrow L^\infty, \tag{37}$$

et que

$$\mathscr{F} \text{ induit un isomorphisme de } \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S} \tag{38}$$

$$\text{qui se prolonge en un isomorphisme de } \mathscr{S}' \longrightarrow \mathscr{S}' \tag{39}$$

$$\text{et en une isométrie de } L^2 \longrightarrow L^2. \tag{40}$$

Par définition, la transformée de Fourier d'une distribution tempérée $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ est la distribution tempérée $\widehat{u}$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle. \tag{41}$$

L'isomorphisme inverse $\mathscr{F}^{-1}$ est la cotransformation de Fourier notée aussi $\overline{\mathscr{F}}$:

$$[\mathscr{F}^{-1} f](x) = [\overline{\mathscr{F}} f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi. \tag{42}$$

Enfin, la transformation de Fourier jouit des propriétés (d'échanges) suivantes :

$$\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (\mathscr{F} f)(\mathscr{F} g), \tag{43}$$

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \forall g \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}(f g) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} [(\mathscr{F} f) * (\mathscr{F} g)], \tag{44}$$

$$\forall u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}(D^\alpha u) = \xi^\alpha \mathscr{F} u, \tag{45}$$

$$\forall u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \quad \mathscr{F}(P(D)u) = P(\xi) \mathscr{F} u \quad \text{et} \quad \mathscr{F}^{-1}(P(-D))u = P(\xi) \mathscr{F} u, \tag{46}$$

$$\mathscr{F}(\delta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \quad \text{et} \quad \mathscr{F}(1) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \delta. \tag{47}$$

2.5 Espaces de Sobolev

On rappelle également que :

• $L^2(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions mesurables $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, telles que $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx$ soit finie. On le munit de la norme $\|f\|_0 = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx$ associée au produit scalaire $(f|g)_0 = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)} dx$, et on en fait un espace de Hilbert.

• Pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'espace de Sobolev d'ordre s sur $\mathbb{R}^d$, bâti sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et noté $H^s(\mathbb{R}^d)$, est le sous-espace de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ formé des distributions tempérées u sur $\mathbb{R}^d$ telles que $(1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u}$ soit dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. L'application $u \mapsto \|(1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u}\|_0$ est une norme sur $H^s(\mathbb{R}^d)$. Elle dérive du produit scalaire $(u|v)_s = ((1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u} | (1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{v})_0 = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}}(\xi) d\xi$ et fait de $H^s(\mathbb{R}^d)$ un espace de Hilbert.

3 Problème de Cauchy linéaire à cœfficients constants

3.1 Position du problème

Soit d un entier strictement positif, $x = (x_1, \ldots, x_d)$ la variable spatiale, et t la variable temps. Les systèmes de n équations à n distributions inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_n$, qui sont linéaires du premier ordre à cœfficients constants sur $\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_t$, et que nous considérons ici sont de la forme :

$$(S): \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \sum\limits_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le k\le d}} a_{1j}^k \dfrac{\partial u_j}{\partial x_k} & = & \sum\limits_{j=1}^n b_{1j}u_j + f_1 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + \sum\limits_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le k\le d}} a_{2j}^k \dfrac{\partial u_j}{\partial x_k} & = & \sum\limits_{j=1}^n b_{2j}u_j + f_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial t} + \sum\limits_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le k\le d}} a_{nj}^k \dfrac{\partial u_j}{\partial x_k} & = & \sum\limits_{j=1}^n b_{nj}u_j + f_n \end{cases} \tag{48}$$

où (a_{ij}^1), (a_{ij}^2), ..., (a_{ij}^d), et (b_{ij}) sont des matrices constantes données dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, et $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont des distributions données dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_t)$, de sorte que si l'on pose :

$$A_k = (a_{ij}^k)_{i,j} \quad (k = 1, \ldots, d), \qquad B = (b_{ij})_{i,j}, \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \tag{49}$$

on obtient l'abréviation :

$$(S): \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^d A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = Bu + f. \tag{50}$$

Le problème de Cauchy (PC) lié à de tels systèmes (S), et auquel nous nous intéressons ici, est posé sur l'espace $\mathbb{R}^d$ tout entier, pendant que t décrit un intervalle de temps du type $]0, T[$ où $0 < T \le +\infty$. Il se formule comme suit :

$(PC):$

> Etant donné :
>
> > f dans un sous-espace convenable[3] de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_t)^n$,
> >
> > g dans un sous-espace convenable de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_x^d)^n$,
>
> Existe-t-il u dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_t)^n$ telle que :
>
> $$(SCI): \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \sum\limits_{k=1}^d A_k \dfrac{\partial u}{\partial x_k} = Bu + f \\ u(., t = 0) = g \end{cases}$$
>
> au sens des distributions ?

, (51)

Si f est identiquement nulle, on dit que ce problème (PC) est homogène.

3. $\mathscr{D}'(.)^n$ est le produit cartésien de n exemplaires de $\mathscr{D}'(.)$.

Ainsi, le problème homogène (PCH) associé au problème (PC) est le suivant :

$$(PCH) : \left\| \begin{array}{l} \text{Etant donné } g \text{ dans un sous-espace de } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d_x)^n, \\ \text{existe-t-il } u \text{ dans } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}_t)^n \text{ telle que :} \\ (SHCI) : \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{k=1}^{d} A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = Bu \\ u(.,t=0) = g \end{array} \right. \\ \text{au sens des distributions.} \end{array} \right. \quad (52)$$

Notre but, surtout quand ces équations décrivent et modélisent des phénomènes physiques, c'est de pouvoir déterminer la solution de façon unique, et surtout qu'elle dépende « continûment » des données (en un sens intuitif, qu'il faudra préciser). S'il en est ainsi on dit, avec J. Hadamard, que le problème est bien-posé. Plus précisément, le problème (PCH) est dit (X,Y)-bien-posé, où X et Y sont deux sous-espaces de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d_x)^n$, si et seulement si :

$$(BP) \left\| \begin{array}{l} (\text{BP1}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } g \in X, \text{ il existe une unique } u \in \mathscr{C}(0,T;Y), \\ \text{solution au sens des distributions du système homogène (SHCI),} \end{array} \right. \\ (\text{BP2}) \left\{ \begin{array}{l} \text{L'application :} \\ \qquad \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathscr{C}(0,T;Y) \\ g & \longrightarrow & u \end{array} \\ \text{qui à tout } g \in X \text{ associe l'unique solution } u \in \mathscr{C}(0,T;Y) \\ \text{du système homogène (SHCI) est continue.} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (53)$$

L'existence et la continuité impliquent que $X \subset Y$, puisque l'application $g \mapsto u(0)$ doit être continue. Plus généralement, on utilise la notation :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{S_t} & Y \\ g & \longmapsto & u(t) \end{array} \quad (54)$$

Puisqu'un système homogène est, au moins formellement, un système d'équations différentielles autonômes par rapport au temps, on aimerait donc avoir la propriété de semi-groupe :

$$S_{t+s} = S_t \circ S_s, \quad s,t \geqslant 0, \quad (55)$$

ce qui requiert bien sûr que $Y = X$.

Dans ce cas :

On dit que le problème de cauchy homogène (PCH) définit un semi-groupe continue [4]si, et seulement si, pour toute donnée initiale $g \in X$, il existe une unique soulution (au sens des distributions) $u \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^+;X)$ pour le problème (PCH).

Lorsque le problème de Cauchy homogène définit un semi-groupe continu sur un espace fonctionnel X, on pourra, à ce moment-là, résoudre le problème de Cauchy non-homogène en utilisant la formule de Duhamel :

$$u(t) = S_t g + \int_0^t S_{t-s} f(s) ds, \tag{56}$$

pourvu que f soit au moins dans l'espace $L^1(0,T;X)$. Pour cette raison, nous allons nous focaliser uniquement sur le problème de Cauchy homogène et nous contenter de construire le semi-groupe.

3.2 Problème très faiblement bien posé

Définition 3.2.1. *On dit que le problème (PCH) est très faiblement bien posé, ou qu'il est $(\mathscr{S},\mathscr{S}')$-bien-posé, s'il est (X,Y)-bien-posé avec $X = \mathscr{S}(\mathbb{R}_x^d)^n$ et $Y = \mathscr{S}'(\mathbb{R}_x^d)^n$.*

Etonnamment, la recherche de conditions nécessaires à cet effet va nous fournir une condition un peu plus forte, dite parfois de « (faible) hyperbolicité ».

Théorème 3.2.1. *Pour que le problème (PCH) soit $(\mathscr{S},\mathscr{S}')$-bien-posé, il est nécessaire (mais pas suffisant) que, quel que soit $\xi \in \mathbb{R}^d$, toutes les valeurs propres de la matrice $A(\xi)\Big(:= \sum_{j=1}^d \xi_j A_j\Big)$ soient réelles.*

Pour la démonstration de ce théorème, nous aurons besoin des lemmes suivants :

lemme 3.2.1. *Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$ et λ une valeur propre simple de $A(\xi)$. Il existe alors une application :*

$$\begin{array}{rccc} (\mu, r) & : & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{C}\times\mathbb{R}^d \\ & & (t,\sigma) & \longmapsto & (\mu(t,\sigma), r(t,\sigma)) \end{array} \tag{57}$$

définie dans un voisinage W de $(0,\xi)$, de classe $\mathscr{C}^\infty$, et telle que :

$$\begin{cases} \left[t^2 B - iA(\sigma)\right] r(t,\sigma) = \mu(t,\sigma) r(t,\sigma) \\ \mu(0,\xi) = -i\lambda(\xi) \\ \|r\| = 1 \end{cases} \tag{58}$$

Preuve : (cf[1])

lemme 3.2.2. *Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$, W un voisinage ouvert de $(0,\xi)$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, et $\theta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact telle que $\theta(0) \neq 0$. Pour t assez petit, on a l'implication :*

$$(\eta - t^{-2}\xi) \in \text{Supp}\,\theta \Longrightarrow (t, t^2\eta) \in W \tag{59}$$

.

Preuve : En effet :

$$\begin{aligned} \text{Supp}\,\theta \text{ compact dans } \mathbb{R}^d &\Rightarrow \text{Supp}\,\theta \text{ borné dans } \mathbb{R}^d \\ &\Rightarrow \exists \delta > 0 \,/\, \text{Supp}\,\theta \subset B(0,\delta), \end{aligned}$$

4. A noter que la continuité fait référence à celle de la solulition par rapport à t et non celle de l'application $t \to S_t$.

$$\begin{aligned} W \text{ voisinage ouvert de } (0,\xi) \text{ dans } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d &\Rightarrow \exists \alpha>0, \exists \delta'>0 \;/]-\alpha,\alpha[\times B(\xi,\delta')\subset W \\ &\Rightarrow]-\varepsilon,\varepsilon[\times B(\xi,\delta')\subset W, \text{ où } \varepsilon=\min\left\{\alpha, \sqrt{\frac{\delta'}{\delta}}\right\}, \end{aligned}$$

et maintenant, pour t assez petit, par exemple $t\in]-\varepsilon,\varepsilon[$, et pour tout ξ et η dans $\mathbb{R}^d$, on a :

$$\begin{aligned} (\eta-t^{-2}\xi)\in \operatorname{Supp}\theta &\Longrightarrow (\eta-t^{-2}\xi)\in B(0,\delta) \\ &\Longrightarrow \|\eta-t^{-2}\xi\|<\delta \\ &\Longrightarrow \|t^2\eta-\xi\|<t^2\delta \\ &\Longrightarrow \|t^2\eta-\xi\|<\varepsilon^2\delta \\ &\Longrightarrow \|t^2\eta-\xi\|<\frac{\delta'}{\delta}\times\delta \\ &\Longrightarrow \|t^2\eta-\xi\|<\delta' \\ &\Longrightarrow t^2\eta\in B(\xi,\delta') \\ &\Longrightarrow (t,t^2\eta)\in]-\varepsilon,\varepsilon[\times B(\xi,\delta') \\ &\Longrightarrow (t,t^2\eta)\in W. \end{aligned}$$

Démonstration du théorème 3.2.1. :

• **La condition est bel et bien nécessaire** : En effet, supposons donc que (PCH) est $(\mathscr{S},\mathscr{S}')$-bien-posé, soit g une donnée initiale dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d_x)^n$, et u l'unique solution dans $\mathscr{C}(0,T;\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d_x)^n)$ de (PCH) associée à g. De l'égalité,

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{k=1}^{d}A_k\frac{\partial u}{\partial x_k}=Bu, \tag{60}$$

il découle que [5]

$$u\in\mathscr{C}^\infty(0,T;\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d_x)^n), \tag{61}$$

et cela nous permet de prendre la transformée de Fourier par rapport à la variable spatiale x. De cette façon, l'égalité (60) va équivaloir à :

$$\frac{\partial\widehat{u}}{\partial t}+i\sum_{k=1}^{d}\eta_kA_k\widehat{u}=B\widehat{u}, \tag{62}$$

ou encore à :

$$\frac{\partial\widehat{u}}{\partial t}=(B-iA(\eta))\widehat{u}, \tag{63}$$

sachant que :

$$A(\eta):=\sum_{k=1}^{d}\eta_kA_k. \tag{64}$$

5. En effet, on sait que $u\in\mathscr{C}^0(0,T;\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d_x)^n)$, et si l'on suppose que $u\in\mathscr{C}^p(0,T;\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d_x)^n)$, on obtient : Pour tout $k=1,\dots,d$, $\frac{\partial u}{\partial x_k}\in\mathscr{C}^p(0,T;\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d_x)^n)$. Cela implique donc que $Bu-\sum_{k=1}^d A_k\frac{\partial u}{\partial x_k}$ est dans $\mathscr{C}^p(0,T;\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d_x)^n)$, et par suite, $\frac{\partial u}{\partial t}\in\mathscr{C}^p(0,T;\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d_x)^n)$, ce qui veut dire que $u\in\mathscr{C}^{p+1}(0,T;\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d_x)^n)$. Comme p est quelconque, on conclut que $u\in\mathscr{C}^\infty(0,T;\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d_x)^n)$.

Comme $\widehat{u}(.,0)=\widehat{g}$, et compte tenu de (17), l'unique solution de (63) est donnée par la formule

$$\widehat{u}(\eta,t)=e^{t\left(B-iA(\eta)\right)}\widehat{g}(\eta) \tag{65}$$

et vu que (PCH) est $(\mathscr{S},\mathscr{S}')$-bien-posé, que la transformée de Fourier est un isomorphisme de $\mathscr{S}'$ dans $\mathscr{S}'$, on déduit que, quel que soit $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d_x)$, l'application :

$$\begin{array}{rcl}]0,T[& \longrightarrow & \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d_x) \\ t & \longmapsto & e^{t\left(B-iA(\cdot)\right)}\widehat{g}(\cdot) \end{array} \tag{66}$$

est continue, et qu'il en est de même de l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathscr{C}(0,T;\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)) \\ g & \longmapsto & \left(t\mapsto e^{t\left(B-iA(\cdot)\right)}\widehat{g}(\cdot)\right) \end{array}. \tag{67}$$

En d'autres termes, l'application bilinéaire,

$$(\varphi,\psi)\longmapsto\int_{\mathbb{R}^d}\psi(\eta)^*e^{t\left(B-iA(\eta)\right)}\varphi(\eta)d\eta \tag{68}$$

est bien définie sur $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d_\eta)^n\times\mathscr{D}(\mathbb{R}^d_\eta)^n$, continue pour la topologie de Schwartz, uniformément en t sur tout intervalle compact, car :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^d}\psi(\eta)^*e^{t\left(B-iA(\eta)\right)}\varphi(\eta)d\eta\right| &\le \|e^{t\left(B-iA(\cdot)\right)}\varphi(\cdot)\|_{\mathscr{S}'^n}\|\psi^*\|_{\mathscr{S}^n}\\
&\le \|e^{t\left(B-iA(\cdot)\right)}\varphi(\cdot)\|_{\mathscr{S}'^n}\|\psi^*\|_{\mathscr{S}^n}\\
&\le \left(\sup_{t\in[a,b]\subset]0,T[}\|e^{t\left(B-iA(\cdot)\right)}\varphi(\cdot)\|_{\mathscr{S}'^n}\right)\|\psi^*\|_{\mathscr{S}^n}\\
&\le \|t\mapsto e^{t\left(B-iA(\cdot)\right)}\varphi(\cdot)\|_{\mathscr{C}\left(0,T;\mathscr{S}'^n\right)}\|\psi^*\|_{\mathscr{S}^n}\\
&\le \|t\mapsto e^{t\left(B-iA(\cdot)\right)}\widehat{\overline{\varphi}}(\cdot)\|_{\mathscr{C}\left(0,T;\mathscr{S}'^n\right)}\|\psi^*\|_{\mathscr{S}^n}\\
&\le C\|\overline{\varphi}\|_{\mathscr{S}^n}\|\psi^*\|_{\mathscr{S}^n}\\
&\le C\|\varphi\|_{\mathscr{S}^n}\|\psi\|_{\mathscr{S}^n},
\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d}\psi(\eta)^*e^{t\left(B-iA(\eta)\right)}\varphi(\eta)d\eta\right|\le C\|\varphi\|_{\mathscr{S}^n}\|\psi\|_{\mathscr{S}^n}. \tag{69}$$

Soit maintenant $\xi\in\mathbb{R}^d$, λ une valeur propre simple de $A(\xi)$, (μ,r) l'application du lemme 3.2.1., et $\theta:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact telle que $\theta(0)\neq 0$. Pour $t>0$ et assez petit (de sorte que l'implication (59) du lemme 3.2.2. soit vraie), on définit deux champs de vecteurs ϕ_t et ψ_t sur $\mathbb{R}^d$ (transformations de $\mathbb{R}^d$), de classe $\mathscr{C}^\infty$ et à supports compacts, par :

$$\forall\eta\in\mathbb{R}^d,\quad\left\{\begin{array}{l}\phi_t(\eta):=\theta(\eta-t^{-2}\xi)r(t,t^2\eta)\\ \psi_t(\eta):=\theta(\eta-t^{-2}\xi)\ell(t,t^2\eta)\end{array}\right., \tag{70}$$

où ℓ est un champs de vecteurs propres pour la matrice adjointe $\left[t^2B - iA(\sigma)\right]^*$, défini et normalisé comme précédemment. On vérifie aisément que $(\phi_t)_t$ et $(\psi_t)_t$ sont bornées pour la topologie de Schwartz lorsque $t \to 0$. En effet :

$$\begin{aligned}
\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \eta^\alpha (D^\beta \Phi_t)(\eta) &= \eta^\alpha D^\beta [\theta(\xi - t^{-2}\xi) r(t, t^2\xi)] \\
&= \eta^\alpha \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d \\ \gamma \leq \beta}} C_\gamma^\beta t^{2|\beta-\gamma|} (D^\gamma \theta)(\eta - t^{-2}\xi)(D_\sigma^{\beta-\gamma} r)(t, t^2\eta) \\
&= \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d \\ \gamma \leq \beta}} C_\gamma^\beta t^{2|\beta-\gamma|} \eta^\alpha (D^\gamma \theta)(\eta - t^{-2}\xi)(D_\sigma^{\beta-\gamma} r)(t, t^2\eta)
\end{aligned}$$

donc, pour tout $\varepsilon > 0$, tout $t \in]0, \varepsilon]$ et tous α et β dans $\mathbb{N}^d$, on a :

$$|\eta^\alpha (D^\beta \Phi_t)(\eta)| \leq \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d \\ \gamma \leq \beta}} C_\gamma^\beta t^{2|\beta-\gamma|} |\eta^\alpha| . |(D^\gamma \theta)(\eta - t^{-2}\xi)| . |(D_\sigma^{\beta-\gamma} r)(t, t^2\eta)|$$

et comme θ est à support compact, pour tout $\eta \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$|(D^\gamma \theta)(\eta - t^{-2}\xi)| \leq \sup_{\zeta \in \operatorname{Supp} \theta} |(D^\gamma \theta)(\zeta)|.$$

Maintenant, on remplace ϕ par ϕ_t et ψ par ψ_t dans (68) et on obtient :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \psi_t(\eta)^* e^{t\left(B - iA(\eta)\right)} \phi_t(\eta) d\eta \right| \leq C \|\phi_t\|_{\mathscr{S}^n} \|\psi_t\|_{\mathscr{S}^n}, \tag{71}$$

et comme les familles $(\phi_t)_t$ et $(\psi_t)_t$ sont bornées pour la topologie de Schwartz, lorsque $t \to 0$, on arrive à :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \psi_t(\eta)^* e^{t\left(B - iA(\eta)\right)} \phi_t(\eta) d\eta \right| \leq M, \tag{72}$$

où M est une constante positive.

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \psi_t(\eta)^* e^{t[B-iA(\eta)]}\phi_t(\eta)d\eta &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\theta}(\eta - t^{-2}\xi)\ell(t,t^2\eta)e^{t[B-iA(\eta)]}\theta(\eta - t^{-2}\xi)r(t,t^2\eta)d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \ell^*(t,t^2\eta)e^{t[B-iA(\eta)]}r(t,t^2\eta)|\theta(\eta - t^{-2}\xi)|^2 d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \ell^*(t,t^2\eta)e^{t[B-\frac{i}{t^2}A(t^2\eta)]}r(t,t^2\eta)|\theta(\eta - t^{-2}\xi)|^2 d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \ell^*(t,t^2\eta)e^{\frac{1}{t}[t^2B-iA(t^2\eta)]}r(t,t^2\eta)|\theta(\eta - t^{-2}\xi)|^2 d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \ell^*(t,t^2\eta)e^{\frac{1}{t}\mu(t,t^2\eta)}r(t,t^2\eta)|\theta(\eta - t^{-2}\xi)|^2 d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{1}{t}\mu(t,t^2\eta)}(\ell.r)(t,t^2\eta)|\theta(\eta - t^{-2}\xi)|^2 d\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{1}{t}\mu(t,t^2\zeta+\xi)}(\ell.r)(t,t^2\zeta+\xi)|\theta(\zeta)|^2 d\zeta \\
&= e^{\frac{1}{t}\mu(0,\xi)}\int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{1}{t}[\mu(t,t^2\zeta+\xi)-\mu(0,\xi)]}(\ell.r)(t,t^2\zeta+\xi)|\theta(\zeta)|^2 d\zeta \\
&= e^{-\frac{i\lambda}{t}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{1}{t}[\mu(t,t^2\zeta+\xi)-\mu(0,\xi)]}(\ell.r)(t,t^2\zeta+\xi)|\theta(\zeta)|^2 d\zeta
\end{aligned}$$

et vu que :

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{1}{t}[\mu(t,t^2\zeta+\xi)-\mu(0,\xi)]}(\ell.r)(t,t^2\zeta+\xi)|\theta(\zeta)|^2 d\zeta &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\mu(t,t^2\zeta+\xi)-\mu(0,\xi)]}(\ell.r)(0,\xi)|\theta(\zeta)|^2 d\zeta \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{d}{dt}[\mu(t,t^2\zeta+\xi)]\big|_{t=0}}(\ell.r)(0,\xi)|\theta(\zeta)|^2 d\zeta \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{d\mu}{dt}(0,\xi)}(\ell.r)(0,\xi)|\theta(\zeta)|^2 d\zeta \\
&= e^{\frac{d\mu}{dt}(0,\xi)}(\ell.r)(0,\xi)\int_{\mathbb{R}^d} |\theta(\zeta)|^2 d\zeta
\end{aligned}$$

et que :

$$e^{\frac{d\mu}{dt}(0,\xi)}(\ell.r)(0,\xi)\int_{\mathbb{R}^d} |\theta(\zeta)|^2 d\zeta = C \neq 0$$

on conclut que :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi_t(\eta)^* e^{t[B-iA(\eta)]}\phi_t(\eta)d\eta \sim C\exp\left(-\frac{i\lambda}{t}\right) \quad \text{quand } t \to 0.$$

Mais, on sait que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^d} \psi_t(\eta)^* e^{t[B-iA(\eta)]}\phi_t(\eta)d\eta$ est bornée quand $t \to 0$, et cela implique que $e^{-\frac{i\lambda}{t}}$ est bornée quand $t \to 0$, c'est-à-dire que $|e^{-\frac{i\lambda}{t}}| \leq K$, où K est une constante > 0. En posant $\lambda = \alpha + i\beta$, où α et β sont dans $\mathbb{R}$, on arrive à : $|e^{-\frac{i\lambda}{t}}| = |e^{-\frac{i\alpha}{t}+\frac{\beta}{t}}| = e^{\frac{\beta}{t}} \leq K$, quand $t \to 0^+$, ce qui implique que β est ≤ 0, c'est-à-dire que :

$$\operatorname{Im}\lambda \leq 0. \tag{73}$$

En appliquant cette conclusion à la valeur propre $\overline{\lambda}$, on arrive à :

$$\operatorname{Im} \overline{\lambda} \leq 0. \tag{74}$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{Im} \lambda \geq 0. \tag{75}$$

et de (73) et(75) on déduit que

$$\operatorname{Im} \lambda = 0, \tag{76}$$

ce qui veut dire que :

$$\lambda \text{ est réelle.} \tag{77}$$

Le cas d'une valeur propre de multiplicité constante dans un voisinage ouvert d'un point ξ de $\mathbb{R}$ se traite par les mêmes idées, et là encore on démontre que cette valeur propre est réelle. Les points Ξ en lesquels les multiplicités ne sont pas localement constantes forment une variété algébrique, donc un ensemble d'intérieur vide, et la continuité implique le caractère réel des valeurs propres (*cf.* [1]).

Enfin,

• **La condition n'est pas du tout suffisante** :

En effet, il est démontré dans [1] que si l'on choisit :

$$d=1, \quad n=2, \quad A=A_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + A\partial_x u = Bu \\ u(.,0) = g \end{cases}$$

est $(\mathscr{S}, \mathscr{S}')$-mal-posé, alors que les valeurs propres de la matrice $A(\xi) = \xi A$ sont réelles.

3.3 Problème fortement bien-posé

l'exemple précédent montre que la notion de problème (X, Y)-bien-posé peut ne pas être stable sous l'action de petites perturbations, dans le cas où $X = \mathscr{S}$ et $Y = \mathscr{S}'$.

Pour cette raison, nous considérons plutôt cette notion dans le cas où X est un espace de Banach et $Y = X$, et parlerons dans ce cas de problème fortement bien-posé dans X, ou encore de problème X-bien-posé. Si c'est le cas, l'application :

$$\begin{array}{cccc} S_t & : & X & \longrightarrow & X \\ & & g & \longmapsto & S_t(g) = u(t) \end{array}$$

définit un semi-groupe continu sur X.

Proposition 3.3.1. *Si X est un espace de Banach, il existe deux constantes c et ω, telles que :*

$$||S_t||_{\mathscr{L}(X)} \leq ce^{\omega t} \tag{78}$$

Démonstration :

Tout d'abord, $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ est une famille d'opérateurs continus sur X et, $\forall g \in X$, les applications :

$$\begin{array}{ccccc} [0,T] & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & S_t g & \longmapsto & \|S_t g\| \end{array}$$

Sont continues, car $S_t g = u(t)$ avec $u \in \mathscr{C}([0,T];X)$ et $\big|\|h_1\| - \|h_2\|\big| \leq \|h_1 - h_2\|$, $\forall h_1, h_2 \in X$.

Cela implique donc que, quel que soit $g \in X$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} [0,T] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & \|S_t g\| \end{array}$$

est continue, et par suite borneé sur $[0,T]$.

Ainsi, pour tout $g \in X$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$, $M = \sup_{t\in[0,T]} \|S_t g\|$, tel que :

$$\forall t \in [0,T], \quad \|S_t g\| \leq M,$$

et l'on arrive donc à :

$$\forall g \in X, \quad \forall t \in [0,T], \quad \|S_t g\| \leq M,$$

ce qui veut dire que :

$$\forall g \in X, \text{ l'ensemble } \{S_t g \ / \ t \in [0,T]\} \text{ est borné dans } X.$$

D'aprés le thèorème de Banach-Steinhauss [6],

$$\text{l'ensemble } \{\|S_t\| \ , \ t \in [0,T]\} \text{ est borné dans } \mathbb{R}_+,$$

et il existe alors $C > 0$ tel que :

$$\forall t \in [0,T], \ \|S_t\| \leq C.$$

Maintenant,

$$\forall t \in [0,T] \ , \ t = p + r \text{ avec } p \in \mathbb{N} \text{ et } r \in [0,1[$$

ce qui permet d'écrire :

$$S_t = S_{p+r} = S_p \circ S_r = (S_1)^p S_r$$

et il s'en suit alors que :

$$\|S_t\| = \|(S_1)^p S_r\| \leq \|S_1\|^p . \|S_r\| \ \leq \ C^p C$$

d'où

$$\|S_t\| \ \leq \ C e^{p \ln C}$$

ou encore

$$\|S_t\| \ \leq \ C e^{t\omega} \text{ avec } \omega = \ln C.$$

6. Théorème de Banach-Steinhauss : Soit X un espace de Banach, Y un espace vectoriel normé, et $\mathscr{F}$ une famille d'opérateurs continus de X dans Y. Si, pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{\|Tx\|_Y \ / \ T \in \mathscr{F}\}$ est borné, alors l'ensemble $\{\|T\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \ / \ T \in \mathscr{F}\}$ est à son tour borné (*cf.* [3]).

Proposition 3.3.2. *Si X est un espace de Banach, alors la notion de problème X-bien-posé ne concerne que les matrices $A_1, \ldots, A_d$. Plus précisément, si un problème est X-bien-posé pour une certaine matrice $B_0 \in M_n(\mathbb{R})$, il demeure X-bien-posé pour toute autre matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$.*

Dèmonstration.

On suppose que le problème est X-bien-posé pour une certaine matrice B_0. Dans ce cas, le problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = B_0 u \tag{79}$$

définit un semi-groupe continu $(S_t)_{t\geq 0}$, et on a

$$||S_t||_{\mathscr{L}(X)} \leq ce^{\omega t} \tag{80}$$

pour certaines constantes positives c et ω.

De la formule de Duhamel (56), l'équation (79) avec la matrice $B = B_0 + C$ au lieu de B_0 équivaut à :

$$u(t) = S_t g + \int_0^t S_{t-s} Cu(s) ds \tag{81}$$

et on peut résoudre (80) à l'aide de la méthode itérative de Picard [7]. En effet, en désignant par Ru le membre de droite de (81), et en tenant compte de (80), on peut toujours trouver un nombre entier N tel que R^N soit une application contractante, et l'on conclut alors (d'après le théorème du point fixe de Banach) qu'il existe une unique solution u de (52) dans $\mathscr{C}(]0,T[;X)$. Comme T est arbitraire, la solution est globale dans le temps.

□

3.3.1 Hyperbolicité

Nous considérons d'abord des espaces X tels que la transformée de Fourier dessus définisse un isomorphisme sur un autre espace de Banach Z. Typiquement, X sera un espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)^n$ et Z un espace L^2 avec poids :

$$Z = L_s^2(\mathbb{R}^d)^n, \quad L_s^2(\mathbb{R}^d) := \left\{ v \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^d) \,/\, (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} v \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\}. \tag{82}$$

Ce pourquoi nous supposons que : La multiplication par une fonction mesurable g définit un opérateur continu de Z dans lui-même si, et seulement si, g est borneé.

Définition 3.3.1. *Un opérateur différentiel du premier ordre*

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{83}$$

7. Méthode itérative de Picard (ou méthode des approximations successives) : L'équation différentielle avec condition initiale $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ est équivalente à l'équation intégrale $\begin{cases} \Phi(t) = \int_0^t f(s,\Phi(s))ds \\ \Phi(0) = 0 \end{cases}$. Sous certaines conditions sur f, cette EDO admet une unique solution y. La méthode itérative de Picard consiste à chercher cette solution y comme étant la limite de la suite (bien définie et) convergente $(y_n)_n$, telle que : $\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{n+1}(t) = \int_0^t f(s, y_n(s))ds \end{cases}$.

est dit hyperbolique si, et seulement si

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} \|\exp[iA(\xi)]\| < \infty. \tag{84}$$

Plus généralement, un système du type

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^{d} A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = Bu,$$

dans lequel B est quelconque, est un système hyperbolique d'EDP s'il satisfait à la condition (84).

Proposition 3.3.3. *pour que le problème de Cauchy homogène*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{k=1}^{d} A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = Bu \\ u(.,t=0) = g \end{cases} \tag{85}$$

soit H^s-bien-posé, il est nécessaire que le système d'EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^{d} A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = Bu \tag{86}$$

soit hyperbolique.

Démonstration.

La recherche d'une solution $u \in \mathscr{C}(]0,T[;X)$ du problème de Cauchy (52) se ramène donc tout simplement à la recherche d'une solution $v \in \mathscr{C}(]0,T[;X)$ pour le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = [B - iA(\eta)]\widehat{u} \\ \widehat{u}(\eta,0) = \widehat{g}(\eta) \end{cases} \tag{87}$$

et grâce à la proposition (3.3.2), ou peut toujours se restreindre au cas où $B = 0_n$. Dans ce cas précisément, $\widehat{u}$ obeïrait à la formule :

$$\widehat{u}(\eta,t) = e^{-itA(\eta)}\widehat{g}(\eta), \tag{88}$$

et pour que $\widehat{u}(t)$ soit dans Z pour tout $\widehat{g}$, il faut et il suffit que l'application $\eta \longmapsto \exp[-itA(\eta)]$ soit bornée. Comme $tA(\eta) = A(t\eta)$, ceci équivaudrait à :

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} \|\exp[iA(\xi)]\| < \infty, \tag{89}$$

et cette dernière propriété est indépendante de t. □

Proposition 3.3.4. *Si le système d'EDP (86) est hyperbolique, alors le problème de Cauchy homogène (85) est H^s-bien-posé.*

Démonstration. L'existence et l'unicité de la solution sont garanties par la transformée de Fourier. En effet, on trouve :

$$\widehat{u}(\eta, t) = e^{-itA(\eta)}\widehat{g}(\eta), \tag{90}$$

et il reste à démontrer que l'application

$$t \longmapsto u(t)$$

est continue de $]0, T[$ dans $(H^s)^n$ pour tout $g \in X$, ce qui revient à démontrer que l'application

$$t \longmapsto \widehat{u}(t)$$

est continue de $]0, T[$ dans $Z = L_s^2(\mathbb{R}^d)^n$.

On a :

$$\|\widehat{u}(\tau) - \widehat{u}(t)\|_Z^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \left|(e^{-i\tau A(\eta)} - e^{-itA(\eta)})\widehat{g}(\eta)\right|^2 (1 + |\eta|^2)^s d\eta. \tag{91}$$

et, grâce à (87), l'intégrande est borné par $c|\widehat{g}(\eta)|^2(1 + |\eta|^2)^s$, ce qui est une fonction intégrable indépendante de t. Ce même intégrande tend vers 0 quand t tend vers 0, et cela implique (d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue [8]que

$$\lim_{\tau \to t} \|\widehat{u}(\tau) - \widehat{u}(t)\|_Z = 0 \tag{92}$$

ce qui veut dire que l'application

$$t \longmapsto \widehat{u}(t)$$

est continue de $]0, T[$ dans $Z = L_s^2(\mathbb{R}^d)^n$, et qu'il en est de même de l'application

$$t \longmapsto u(t)$$

de $]0, T[$ dans $X = H^s(\mathbb{R}^d)^n$.

Nous résumons les résultats précédents dans le théorème suivant :

Théorème 3.3.1.

- *Le problème de Cauchy homogène*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \\ u(., t = 0) = g \end{cases} \tag{93}$$

8. Théorème de la convergence dominée de Lebesgue : soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f. Si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x, \quad |f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{avec} \quad g \in \mathscr{L}^1$$

alors :

$$f \in \mathscr{L}^1 \quad \text{et} \quad \int |f(x) - f_n(x)| dx \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \to 0$$

est H^s-bien-posé pour un certain réel s si, et seulement si le système

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{j=1}^{d}A_j\frac{\partial u}{\partial x_j}=0 \tag{94}$$

est hyperbolique.

- *Si l'opérateur*

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{j=1}^{d}A_j\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{95}$$

est hyperbolique, alors pour toute matrice B dans $M_n(\mathbb{R}^d)$ et tout réel s, le problème de Cauchy homogène

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\displaystyle\sum_{j=1}^{d}A_j\frac{\partial u}{\partial x_j}=Bu\\ u(.,t=0)=g\end{cases} \tag{96}$$

est H^s-bien-posé.

- *En particulier, ce dernier problème de Cauchy est H^s-bien-posé pour un certain réel s si, et seulement si il est L^2-bien-posé.*

Proposition 3.3.5. *Si l'opérateur (95) est hyperbolique, alors le problème de Cauchy (96) est bien-posé à la fois dans $\mathscr{S}$ et dans $\mathscr{S}'$.*

Démonstration : (*cf.* [1])

Théorème 3.3.2. *Le problème de Cauchy (93) est H^s-bien-posé si, et seulement si on a les deux propriétés suivantes :*

- *Pour tout $\xi\in\mathbb{R}^d$, la matrice $A(\xi)$ est diagonalisable, de valeurs propres réelles :*

$$A(\xi)=P(\xi)^{-1}\mathrm{diag}\big(\varrho_1(\xi),\ldots,\varrho_n(\xi)\big)P(\xi). \tag{97}$$

- *Sa diagonalisation est bien-conditionnée en ce sens que :*

$$\sup_{\xi\in S^{d-1}}\|P(\xi)^{-1}\|.\|P(\xi)\|<+\infty \tag{98}$$

Démonstration : (*cf.* [1])

3.4 Symétrisation de Friedrichs

Définition 3.4.1. *Soit l'opérateur*

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{j=1}^{d}A_j\frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{99}$$

- *On dit que L Symétrique au sens de Friedrichs (ou qu'il est Symétrique hyperbolique) si toutes les matrices A_j sont Symétriques.*

- *Plus généralement, on dit que L est Symétrisable au sens de Friedrichs s'il existe une matrice Symétrique et définie positive S_0, telle que chaque S_0A_j (pour j=1,...,d) soit Symétrique.*
- *On dit que L est « constantly-hyperbolic » si toutes les matrices $A(\xi)$ sont diagonalisables de valeurs propres réelles et si, de plus, les multiplicités desdites valeurs propres demeurent constantes lorsque ξ varie dans sphère unité S^{d-1} de $\mathbb{R}^d$. Dans le cas particulier où les valeurs propres sont réelles et simples, on dit que L est strictement hyperbolique.*

Théorème 3.4.1. *Si un opérateur, est Symétrisable au sens de Friedrichs, ou s'il est « constantly-hyperbolic », alors il est hyperbolique.*

Démonstration : (*cf.* [1])

Références

[1] Benzoni-Gavage, S., Serre, D., « *Multidimensional Hyperbolic PDEs.* » Clarendon Press, Oxford, 2007.

[2] Chazarain, J., Piriou, A., « *Introduction à la théorie des EDP.* » Gauthier-Villars, Paris, 1981.

[3] Kolmogorov, A., Fomine, S., « *Eléments de la Théorie des Fonctions et de l'Analyse Fonctionnelle.* » Editions Mir • Moscou, 1973.

Index

$\mathscr{E}(\Omega)$, 4

$\mathscr{C}'(]a,b[,\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))$, 5

$\mathscr{C}^\infty(\Omega)$, 4

$\mathscr{C}^k(\Omega)$, 4

$\mathscr{C}^{-\infty}(\Omega)$, 5

$\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$, 4

$\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$, 5

$\mathscr{C}_b^k(\Omega)$, 4

$\mathscr{D}'(\Omega)$, 5

$\mathscr{D}(\Omega)$, 5

$\mathscr{E}'(\Omega)$, 5

$\mathscr{F}$, 6

$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, 6

$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 5

Décroissance rapide (fonction), 5

Distribution, 5

à support compact, 5

tempérées, 6

Fourier (Transformée de), 6

Fréchet (espace de), 4

multi-indice, 2

Taylor(formule de), 3