République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Par :

DJOUAD SARAH

Intitulé

Quelques inégalités de type Ostrowski pour les intégrales fractionnaires des applications dont la dérivée est s-convexe

Dirigé par : Dr. F. LAKHAL

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. K. FERNANE	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. F. LAKHAL	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. F. ELLAGOUNE	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2014

REMERCIMENTS

Je remercie notre DIEU le tout puissant pour avoir donné le courage et la force et de termine notre projet de fin d'étude.

Je remercie mes chers parents

*Je tiens à exprimer ma gratitude, ma reconnaissance et mes profonds remerciements à mon encadreur **Dr. Lakhal Fahim**. Je le remercie chaleureusement pour sa confiance, ses conseils précieux qu'il m'a apportés durant mon travail et pour la réalisation de ce projet.*

*Mes remerciements les plus respectueux vont au **Dr. K. Fernane** d'avoir accepté d'être président du jury, et **Dr. F. Ellagoune** qui m'a fait l'honneur d'être examinateur de ce mémoire.*

Dédicaces

Je dédie ce travail :

A Mon père qui ma donné la volante pour continue les études.

A Ma mère qui ma donnée l'espoir et le courage pour les moments difficile.

A ma sœur : Hoda et son mari Sadik et son enfants Raouf, Ritadj, et Amani. Et ma sœur: Sonia et son mari Samir

A mes frères: Mohamed, et sur tout Toufik et son épouse Fatima, et Hamdi.

A tous mes oncles, tantes, cousins, et cousines.

A tout mes chères amies.

A tout mes professeurs.

A toute ma promotion.

Table des matières

Résumé

Dans ce travail on c'est intéressé à l'étude de quelques inégalités de type Ostrowski pour les fonctions dont la dérivée est s-convexe et ceci en utilisant les intégrales fractionnaires.

Introduction

En analysant la dynamique de l'examen médical régie par les diverses équations aux dérivées partielles non-linéaires on a besoin souvent de quelques nouvelles idées et méthodes. Il est bien connu que la méthode d'inégalités différentielles et intégrales joue un rôle important dans la théorie qualitative d'équations différentielles, intégrales et intégro-différentielles et les dérivées partielles. Ces inégalités sont crucial dans la discussion de l'existence, l'unicité, la continuation, la bornètude, l'oscillation, et des propriétés de stabilité des solutions. Pendant les dernières années, beaucoup de papiers sont apparus dans la littérature qui traitent des inégalités intégrales avec plus qu'une variable indépendante qui sont motivés par certaines applications dans la théorie d'équations différentielles et aux dérivées partielles hyperboliques.

Ce chapitre présente un nombre d'inégalités intégrales linéaires multidimensionnelles développées dans la littérature qui peut être employée en tant qu'outils prêts et paissant dans l'analyse de diverses classe d'équations différentielles, intégrales et intégro-différentielles.

Quelques applications de ces inégalités sont également présentées et quelques inégalités diverses qui peuvent être employées aisément dans certaines applications sont données.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Dérivées et intégrales non entières

La dérivation et intégration d'ordre non entier constituent le calcul fractionnaire qui est un vieux concept datant de l'époque de Cauchy. C'est une généralisation de la notion de dérivée d'ordre entier α d'une fonction $f(x)$ par rapport à la variable x à des valeurs non entière de α. Si α est négatif, il s'agit d'une intégration non entière et si α est positif, on parle d'une dérivation non entière.

L'idée pour la généralisation de la dérivée vers un ordre arbitraire est découverte dans le courier échangé entre L'Hopital et Leibniz. Le 30 septembre 1695. L'Hopital a écrit à Leibniz afin de l'interroger au sujet d'une notation particulière qu'il avait employée dans ses publications pour la nième-dérivée d'une fonction $f(x)$. L'Hopital pose alors la question à Leibniz, sur le résultat de cette dérivée pour l'ordre $\dfrac{1}{2}$?.

Toutefois, la définition de la dérivation non entière peut s'établit selon les trois approches. La première est l'approche par limites qui est l'approche classique de Grünwald-Letnikov et qui consiste à généraliser la notion de la dérivation entière. La deuxième est l'approche de Riemann-Liouville et Caputo qui, à partir des primitives, associe la dérivation non entière à l'intégration fractionnaire. La troisième approche est spectrale utilisant la transformée de laplace.

1.1.1 Notations

On notera $f^{(k)}$ ou $\dfrac{d^k}{dx^k}f$ la dérivée d'ordre k de la fonction f et nous pourrons abuser de la notation $f(x)$ à la place de $f(.)$ ou de f.

$[\alpha]$ partie entière du réel α. On pourra noter aussi $[f]$ la distribution associée à une fonction localement intégrable.

Y échelon de Heaviside, δ distribution de Dirac.

La fonction gamma d'Euler est définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\exp(-t)\;dt,\; x > 0,$$

elle se prolonge sur $\mathbb{C}$ holomorphe ailleurs que sur les entiers négatifs.

On définit la fonction bêta d'Euler par

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,\; x,\; y > 0.$$

On rappelle que $\forall x \in \mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,...\}, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

En particulier $\Gamma(n) = (n-1)!$ Certaines identités peuvent être utiles.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

et avec $z = \dfrac{1}{2}$ on a

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}\\ -\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

puis

On reppelle aussi pour la fonction bêta d'Euler

$$\forall x,\; \forall y,\; \operatorname{Re} x > 0,\; \operatorname{Re} y > 0,\; B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

pour $\alpha \notin \{0,-1,-2,...\}$, on pose

$$Y_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}Y(x),\; Y_1 = Y,\; Y_0 = \delta.$$

On notera enfin l'exponentielle de Millag-Leffler.

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

1.1.2 Intégration non entière par convolution

L'approche communément pratiquée est celle de Riemann-Liouville

Elle part de la formule de Cauchy.

$$\int_0^t \dots \int_0^\tau f(\tau)d\tau = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau$$

Notons, la notation D^{-n} pouvant s'avérer piégeuse :

$$J^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau,\ n \in \mathbb{N}^*$$

Les fonctions $J^n f$, $n \geq 1$, sont causales, $J^n f(t) = 0$, $\forall t \leq 0$.

En supposant la fonction f causale, en particulier $f(0) = 0$,

on peut convenir que $J^0 f(t) = f(t)$. On a alors

$$\forall m,\ n \in \mathbb{N},\ J^n J^m = J^{n+m}$$

On peut étendre immédiatement la formule intégrale à une puissance non entière α, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ par

$$\begin{aligned} J^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau = Y_\alpha * f(t) \\ J^\alpha f(t) &= \delta * f(t) \end{aligned}$$

Moyennant cette extension, on a

$$\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}_+,\ J^\alpha J^\beta = J^{\alpha+\beta}$$

La définition, avec $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, est valide pour une classe de fonction notée C par Miller-Ross :

$$f \in C \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est continue par morceaux sur }]0, \infty[\\ f \text{ est localement intégrable sur } [0, \infty[\end{cases}$$

La classe C inclut les puissances $x^\lambda Y(x)$ où $\lambda > -1$, ainsi que les fonctions de forme $\varphi(x) = x^k \eta(x) Y(x)$ où η est analytique et $\lambda > -1$.

Selon Kilbas l'opérateur J^α ($\operatorname{Re}\alpha > 0$) est continue pour la norme de $L^p(a,b)$, $1 \leq p \leq \infty$

$$\|J^\alpha f\|_p \leq \frac{b^{\operatorname{Re}\alpha}}{\operatorname{Re}(\alpha)\Gamma(\alpha)} \|f\|_p$$

On a

$$\forall\ k = 0, 1, ... [\alpha] : \frac{d^k}{dx^k}(J^\alpha f)(x) = J^{\alpha-k} f(x)$$

En effet, comme $\alpha - k > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{d^k}{dx^k}(J^\alpha f)(x) &= \frac{d^k}{dx^k}(Y_\alpha * f)(x) \\
&= \frac{d^k}{dx^k} Y_\alpha * f(x) \\
&= Y_{\alpha-k} * f(x) = J^{\alpha-k} f(x)
\end{aligned}$$

Exemples d'intégrales

Intégrale de Riemann-Liouville, pour $\alpha > 0$ non entièr.

a/ $f(x) = x^\beta Y_1(x)$, $\beta > -1$

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^\beta (x-t)^{\alpha-1} dt$$

Posons $t = xu$

$$\begin{aligned}
J^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (xu)^\beta x^{\alpha-1} (1-u)^{\alpha-1} x du \\
&= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

Cas particulier : $\beta = k \in \mathbb{N}$

$$J^\alpha f(x) = \frac{k!}{\Gamma(\alpha+k+1)} x^{\alpha+k}$$

b/ $f(x) = \exp(\lambda x) Y(x)$. On a

$$\exp(\lambda x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!}$$

En intégrant terme à terme, il vient :

$$\begin{aligned} J^{\alpha}\left(\exp(\lambda x)\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha+k+1)} J^{\alpha}\left((\lambda\xi)^{k}\right)(x) \\ &= \frac{1}{\lambda^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(\alpha+k+1\right)} (\lambda x)^{k+\alpha} \end{aligned}$$

On n'obtient pas exactement une exponentielle, lorsque α n'est pas un entier.

Remarque 1.1 *On a*

$$J^{\alpha} x^{k-\alpha} = \frac{\Gamma(k-\alpha+1)}{\Gamma(k+1)} x^{k}$$

La solution de l'équation

$$J^{\alpha} f(x) = x^{k}$$

est

$$f(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} x^{k-\alpha}$$

Théorème 1.1 *On suppose f continue sur $[0, X]$ et g analytique en tout point $a \in [0, X]$. Alors, pour tout $\alpha > 0$*

$$J^{\alpha}(fg)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} \frac{d^{k}}{dx^{k}} g(x) J^{\alpha+k}(f)(x)$$

où l'on note

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}$$

Remarque 1.2 *L'origine 0 de l'intégration peut être remplacée par $c \in [-\infty, x[$ s'il est besoin. Il faudrait alors noter*

$${}_{c}J_{x}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{c}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

Pour $c = -\infty$, c'est le schéma de Liouville. pour $c \in \mathbb{R}$, $c < x$, c'est le schéma de Riemann-Liouville. IL n'ya clairment pas de relation de Chasles. Pour éviter d'alourdir la notation, nous garderons partout $c = 0$.

Définition 1.1 *Soit $f \in L[a,b]$. Les intégrales de Riemann-Liouville $J_{a+}^{\alpha} f$ et $J_{b-}^{\alpha} f$ d'ordre $\alpha > 0$ avec $a \geq 0$ sont définies par*

$$J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \; x > a$$

et

$$J_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \; x < b$$

respectivement où $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} \exp(-u) u^{\alpha-1} du$,

avec $J_{a+}^{0} f(x) = J_{b-}^{0} f(x) = f(x)$. Dans le cas $\alpha = 1$, l'intégrale fractionnaire réduit à l'intégrale classique.

Lemme 1.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, une application différentiable sur (a,b) avec $a < b$.*

Si $f' \in L[a,b]$, alors pour tout $x \in [a,b]$ et $\alpha > 0$, on a

$$\begin{aligned} &\left(\frac{(x-a)^{\alpha} + (b-x)^{\alpha}}{b-a} \right) f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)} \left[J_{x-}^{\alpha} f(a) + J_{x+}^{\alpha} f(b) \right] \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 t^{\alpha} f'(tx + (1-t)a) dt \\ &- \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 t^{\alpha} f'(tx + (1-t)b) dt \end{aligned} \tag{1.1}$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} \exp(-u) u^{\alpha-1} du$.

Preuve. Par une intégration par partie, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{\alpha} f'(tx + (1-t)a) dt &= t^{\alpha} \frac{f(tx + (1-t)a)}{x-a} \Bigg|_0^1 - \int_0^1 \alpha t^{\alpha-1} \frac{f(tx + (1-x)a)}{x-a} dt \\ &= \frac{f(x)}{x-a} - \int_0^1 \alpha t^{\alpha-1} \frac{f(tx + (1-x)a)}{x-a} dt. \end{aligned}$$

On pose

$$u = tx + (1-t)a, \text{ alors } du = (x-a)dt,$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x-a} - \int_0^1 \alpha t^{\alpha-1} \frac{f(tx + (1-x)a)}{x-a} dt &= \frac{f(x)}{x-a} - \frac{\alpha}{x-a} \int_a^x \frac{(a-u)^{\alpha-1}}{(a-x)^{\alpha-1}} \frac{f(u)}{x-a} du \\ &= \frac{f(x)}{x-a} - \frac{\alpha \Gamma(\alpha)}{(x-a)^{\alpha+1}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (u-a)^{\alpha-1} f(u) du. \end{aligned} \tag{1.2}$$

De même manière pour l'intégrale $\int_0^1 t^\alpha f'(tx+(1-t)b)dt$, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^1 t^\alpha f'(tx+(1-t)b)dt\\ =\ & \frac{f(x)}{x-b}+\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(b-x)^{\alpha+1}}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (b-u)^{\alpha-1}f(u)du.\end{aligned} \tag{1.3}$$

En multipliant les deux côtés de (1.2) et (1.3) par $\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}$ et $\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}$, respectivement, on a

$$\begin{aligned}&\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\frac{f(x)}{x-a}-\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(x-a)^{\alpha+1}}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (u-a)^{\alpha-1}f(u)du\\ &-\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\frac{f(x)}{x-b}-\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(b-x)^{\alpha+1}}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (b-u)^{\alpha-1}f(u)du\\ =\ & \frac{(x-a)^\alpha}{b-a}f(x)-\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{b-a}J_{x-}^\alpha f(a)+\frac{(b-x)^\alpha}{b-a}f(x)-\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{b-a}J_{x+}^\alpha f(b).\end{aligned}$$

D'aprés les propriétés de la fonction gamma, on obtient

$$\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 t^\alpha f'(tx+(1-t)a)dt=\frac{(x-a)^\alpha}{b-a}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}J_{x-}^\alpha f(a)$$

et

$$\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 t^\alpha f'(tx+(1-t)b)dt=-\frac{(b-x)^\alpha}{b-a}f(x)+\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}J_{x+}^\alpha f(b)$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}&\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 t^\alpha f'(tx+(1-t)a)dt-\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 t^\alpha f'(tx+(1-t)b)dt\\ =\ & \left(\frac{(x-a)^\alpha+(b-x)^\alpha}{b-a}\right)f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J_{x-}^\alpha f(a)+J_{x+}^\alpha f(b)].\end{aligned}$$

■

En 1938, Ostrowski a démontré le théorème suivant

Théorème 1.2 *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I° l'intérieur de I, est soit $a,\ b \in I^\circ$ avec $a<b$. Si $|f'(x)| \le M$ pour tout $x\in[a,b]$. Alors on a l'inégalité suivante est vérifiée*

$$\left|f(x)-\frac{1}{a-b}\int_a^b f(t)dt\right| \le \left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-(\frac{a+b}{2})\right)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)M,\ x\in[a,b] \tag{1.4}$$

pour tout $x \in [a,b]$. *La constante* $\frac{1}{4}$ *est la meilleure possible dans le sens où elle ne peut être remplacée par une plus petite. Cette inégalité donne une limite supérieure pour le rapprochement de la moyenne de l'intégrale* $\dfrac{1}{b-a}\int_0^1 f(t)dt$ *par la valeur* $f(x)$.

Preuve. En utilisant une intégration par partie dans l'égalité suivante, on obtient

$$f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt$$

où

$$p(x,t) := \begin{cases} t-a, & \text{si } t \in [a,x] \\ t-b, & \text{si } t \in [x,b] \end{cases}, \quad x \in [a,b]$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b |p(x,t)|\,|f'(t)|\,dt \\
&\leq \frac{M}{b-a}\left[\int_a^b |p(x,t)|\right] dt \\
&= \frac{M}{b-a}\left[\int_a^x |t-a|\,dt + \int_x^b |t-b|\,dt\right] \\
&= \frac{M}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2}\right] \\
&= M(b-a)\left[\frac{\left(x-(\frac{a+b}{2})\right)^2 + \frac{a^2+b^2}{2} - (\frac{a+b}{2})^2}{(b-a)^2}\right] \\
&= M(b-a)\left[\frac{1}{4} + \frac{(x-(\frac{a+b}{2})^2)}{(b-a)^2}\right]
\end{aligned}$$

■

Un cas plus général de ce théorème est le suivant

Théorème 1.3 *Suppose*

(1) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *soit continue sur* $[a,b]$;

(2) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *soit différentiable à l'ordre* n *sur* (a,b), *avec la dérivée d'ordre* n, $f^{(n)} : (a,b) \to \mathbb{R}$ *est bornée sur* (a,b), *i.e.* $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty = \sup_{t\in(a,b)} \left|f^{(n)}(t)\right| < \infty$,

(3) Il existe $x_0 \in (a,b)$ *telle que* $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 1,2,...,n-1$. *Alors pour tout* $x \in [a,b]$, *on a*

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{\left\|f^{(n)}\right\|_\infty}{n!}\left\{\left(\left|x - \frac{a+b}{2}\right| + \frac{b-a}{2}\right)^n + \frac{(b-a)^n}{n+1}\right\}$$

1.1.3 Quelques nouvelles inégalités de type Ostrowski pour les fonctions $s-$convexe

Définition 1.2 *Une fonction $f\colon\ [0,\infty[\ \to \mathbb{R}$ est dite s-convexe au deuxième sens si*

$$f(\lambda x+(1-\lambda)\,y)\leq \lambda^{s}f(x)+(1-\lambda)^{s}f(y)$$

pour tout $x,\ y\in[0,\infty[,\ \lambda\in[0,1]$ et pour certaines s fixes, $s\in[0,1]$. Cette classe de fonctions $s-$convexe est généralement désignée par K_s^2. Il est facile de voir que pour $s=1$, la $s-$convexité réduit à la convexité ordinaire pour une fonction définie sur $[0,\infty)$.

Par exemple : Soit $s\in(0,1)$ et $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ on définit la fonction $f:[0,\infty[\ \to\mathbb{R}$ par

$$f(t)=\begin{cases} a, & t=0\\ bt^{s}+c, & t>0.\end{cases}$$

Si $b\geq 0$ et $0\leq c\leq a$, alors $f\in K_s^2$. Alors, pour $a=c=0$, $b=1$, on a $f:[0,1]\to[0,1]$, $f(t)=t^s\in K_s^2$.

Théorème 1.4 *(voir [1]). Soit $f:I\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ une application différentiable sur I° telle que $f'\in L[a,b]$, où $a,\ b\in I$ avec $a<b$. Si $|f'|$ est s-convexe au seconde sens sur $[a,b]$ pour certaines s fixes, $s\in(0,1]$, est $|f'(x)|\leq M$, $x\in[a,b]$. Alors on a l'inégalité :*

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{M}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{s+1}\right],\tag{1.5}$$

pour tout $x\in[a,b]$.

Théorème 1.5 *(voir [1]). Soit $f:I\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ une application différentiable sur I° telle que $f'\in L[a,b]$, où $a,\ b\in I$ avec $a<b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe au seconde sens sur $[a,b]$ pour certaines s fixes, $s\in(0,1]$, $q>1$, $p=\frac{q}{q-1}$ et $|f'(x)|\leq M$, $x\in[a,b]$. Alors on a l'inégalité :*

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{M}{(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{2}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a},\tag{1.6}$$

pour tout $x\in[a,b]$.

Théorème 1.6 *(voir [1]). Soit $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I° telle que $f' \in L[a,b]$, où $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe au seconde sens sur $[a,b]$ pour certaines s fixes, $s \in (0,1]$, $q > 1$, et $|f'(x)| \leq M$, $x \in [a,b]$. Alors on a l'inégalité*

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \leq M\left(\frac{2}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2(b-a)}\right] \tag{1.7}$$

pour tout $x \in [a,b]$.

Le but de ce travail est de généraliser ces inégalités pour le cas fractionnaire

Chapitre 2

Résultat obtenus

2.1 Inégalités de type ostrowski pour l'intégrale fractionnaire

Théorème 2.1 *Soit $f : [a,b] \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur (a,b) avec $a < b$, telle que $f' \in L[a,b]$. Si $|f'|$ est $s-$convexe au seconde sens sur $[a,b]$ pour certaines s fixes, $s \in (0,1]$ et $|f'(x)| \leq M$, $x \in [a,b]$. Alors on a l'inégalité suivante pour les intégrales fractionnaires avec $\alpha > 0$,*

$$\begin{aligned} &\left(\frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a}\right) f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)} \left[J_{x-}^\alpha f(a) + J_{x+}^\alpha f(b)\right] \\ \leq\ & \frac{M}{b-a}\left(1 + \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)}\right)\left[\frac{(x-a)^{\alpha+1} + (b-x)^{\alpha+1}}{\alpha+s+1}\right], \end{aligned} \tag{2.1}$$

où Γ est la fonction gamma d'Euler.

Preuve. D'apérs le lemme 1.1 et comme $|f'|$ est $s-$convexe au seconde sens sur $[a,b]$, on a

$$\begin{aligned} &\left|\left(\frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a}\right) f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)} \left[J_{x-}^\alpha f(a) + J_{x+}^\alpha f(b)\right]\right| \\ \leq\ & \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 t^\alpha \left|f'(tx+(1-t)a)\right| dt \\ &+ \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 t^\alpha \left|f'(tx+(1-t)b)\right| dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \left(t^{\alpha+s}\left|f'(x)\right| + t^{\alpha}(1-t)^s \left|f'(a)\right|\right) dt \\
&\quad + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 (t^{\alpha+s}\left|f'(x)\right| + t^{\alpha}(1-t)^s \left|f'(b)\right|)dt \\
&\leq \frac{M(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 (t^{\alpha+s} + t^{\alpha}(1-t)^s)dt \\
&\quad + \frac{M(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 (t^{\alpha+s} + t^{\alpha}(1-t)^s)dt \\
&\leq \frac{M}{b-a}\left[(x-a)^{\alpha+1} + (b-x)^{\alpha+1}\right]\int_0^1 (t^{\alpha+s} + t^{\alpha}(1-t)^s)dt
\end{aligned}
$$

d'aprés les propriété de la fonction Γ et β on a

$$\int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^s dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)}$$

Finalement on obtient

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}}{b-a}\right)f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)}\left[J_{x-}^{\alpha}f(a) + J_{x+}^{\alpha}f(b)\right]\right| \\
&\leq \frac{M}{b-a}\left(\frac{1}{\alpha+s+1} + \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)}\right)\left[(x-a)^{\alpha+1} + (b-x)^{\alpha+1}\right] \\
&\leq \frac{M}{b-a}\left(1 + \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)}\right)\left[\frac{(x-a)^{\alpha+1} + (b-x)^{\alpha+1}}{\alpha+s+1}\right];
\end{aligned}
$$

et le théorème est démontré. ∎

Corollaire 2.1 *soit $f : [a,b] \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$, une application différentiable sur $[a,b]$ avec $a < b$, telle que $f' \in L[a,b]$, si $|f'|$ est convexe sur $[a,b]$ et $|f'(x)| \leq M$, $x \in [a,b]$. Alors on obtient l'inégalité suivante pour les intégrales fractionnaires avec $\alpha > 0$,*

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}}{b-a}\right)f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x-}^{\alpha}f(a) + J_{x+}^{\alpha}f(b)\right]\right| \\
&\leq \frac{M}{b-a}\left[\frac{(x-a)^{\alpha+1} + (b-x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right],
\end{aligned}
$$

où Γ est la fonction gamma d'Euler.

Preuve. posons $s = 1$ dans (2.1), nous obtenons le résultat désiré. ∎

Remarque 2.1 *Dans le théorème 2.1, si nous choisissons $\alpha = 1$, alors (2.1) réduit à l'inégalité (1.5) du théorème 1.4.*

Théorème 2.2 *Soit $f : [a,b] \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur (a,b) avec $a < b$, telle que $f' \in L[a,b]$. Si $|f'|^q$ est $s-$convexe au seconde sens sur $[a,b]$ pour certaines s fixes, $s \in (0,1]$, q, $p \geq 1$, et $|f'(x)| \leq M$, $x \in [a,b]$. Alors on a l'inégalité suivante pour les intégrales fractionnaires*

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}}{b-a}\right) f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x-}^{\alpha} f(a) + J_{x+}^{\alpha} f(b)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{M}{(1+p\alpha)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{2}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}+(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\right],
\end{aligned} \tag{2.2}$$

où $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{p}=1$, $\alpha > 0$.

Preuve. D'après le lemme 1.1 et en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}}{b-a}\right) f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x-}^{\alpha} f(a) + J_{x+}^{\alpha} f(b)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'(tx+(1-t)a)\right| dt \\
& + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'(tx+(1-t)b)\right| dt \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 t^{p\alpha} dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'(tx+(1-t)a)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 t^{p\alpha} dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'(tx+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Comme $|f'|^q$ est $s-$convexe au seconde sens sur $[a,b]$ et $|f'(x)| \leq M$, alors

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left|f'(tx+(1-t)a)\right|^q \\
\leq\ & 2M^q \int_0^1 \left(t^s+(1-t)^s\right) dt \\
\leq\ & \frac{2M^q}{s+1}
\end{aligned}$$

De même manière pour l'intégrale $\int_0^1 \left|f'(tx+(1-t)b)\right|^q dt$ on obtient

$$\int_0^1 \left|f'(tx+(1-t)b)\right|^q dt \leq \frac{2M^q}{s+1}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}}{b-a}\right)f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x-}^{\alpha}f(a)+J_{x+}^{\alpha}f(b)\right]\right| \\
&\leq \left(\frac{1}{p\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{2M^{q}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}+(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\right] \\
&\leq \left(\frac{M}{(p\alpha+1)^{\frac{1}{p}}}\right)\left(\frac{2}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}+(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\right].
\end{aligned}$$

et le théorème est démontré. ∎

Corollaire 2.2 *Soit $f:[a,b]\subset[0,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ une application différentiable sur (a,b) avec $a<b$, telle que $f'\in L[a,b]$. Si $|f'|^{q}$ est convexe sur $[a,b]$ et $q,\ p\geq 1$, et $|f'(x)|\leq M$, $x\in[a,b]$. Alors on a l'inégalité suivante pour les intégrales fractionnaires*

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}}{b-a}\right)f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x-}^{\alpha}f(a)+J_{x+}^{\alpha}f(b)\right]\right| \\
&\leq \frac{M}{(1+p\alpha)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}+(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\right],
\end{aligned}$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\alpha>0$.

Preuve. posons $s=1$ dans (2.2), nous obtenons le résultat cherché. ∎

Remarque 2.2 *Dans le théorème 2.2, si nous choisissons $\alpha=1$, alors (2.2) réduit à l'inégalité (1.6) du théorème 1.5.*

Théorème 2.3 *Soit $f:[a,b]\subset[0,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ une application différentiable sur (a,b) avec $a<b$, telle que $f'\in L[a,b]$. Si $|f'|^{q}$ est s-convexe au seconde sens sur $[a,b]$ pour certaines s fixes $s\in(0,1]$ $q\geq 1$, et $|f'(x)|\leq M$, $x\in[a,b]$. Alors on a l'inégalité suivante pour les intégrales fractionnaires*

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}}{b-a}\right)f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x-}^{\alpha}f(a)+J_{x+}^{\alpha}f(b)\right]\right| \\
&\leq M\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{\alpha+s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\times\left(1+\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+s)}{\Gamma(\alpha+s+1)}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}+(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\right], \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

avec $\alpha>0$ et Γ est la fonction gamma d'Euler.

Preuve. D'apérs le lemme 1.1, et on utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}}{b-a}\right)f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x-}^{\alpha}f(a)+J_{x+}^{\alpha}f(b)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'(tx+(1-t)a)\right|dt \\
&+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'(tx+(1-t)b)\right|dt \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 t^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'(tx+(1-t)a)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 t^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'\left(tx+(1-t)\,b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

comme $|f'|^q$ est s−convexe sur $[a,b]$ et $|f'(x)|\leq M$, alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'(tx+(1-t)a)\right|^q dt &\leq \int_0^1\left[t^{\alpha+s}\left|f'(x)\right|^q+t^{\alpha}(1-t)^s\left|f'(a)\right|^q\right]dt \\
&= \frac{|f'(x)|^q}{\alpha+s+1}+|f'(a)|^q\int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^s dt \\
&= \frac{|f'(x)|^q}{\alpha+s+1}+|f'(a)|^q\,\beta\left(\alpha+1,s+1\right) \\
&= \frac{|f'(x)|^q}{\alpha+s+1}+|f'(a)|^q\,\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(s+1\right)}{\left(\alpha+s+1\right)\Gamma\left(\alpha+s+1\right)} \\
&\leq \frac{M^q}{\alpha+s+1}\left(1+\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(s+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+s+1\right)}\right)
\end{aligned}$$

De même manière pour l'intégrale $\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'\left(tx+(1-t)\,b\right)\right|^q dt$,on a

$$\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'\left(tx+(1-t)\,b\right)\right|^q dt\leq\frac{M^q}{\alpha+s+1}\left(1+\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(s+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+s+1\right)}\right),$$

où β est fonction bêta d'Euler. Finalement on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}}{b-a}\right)f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x-}^{\alpha}f(a)+J_{x+}^{\alpha}f(b)\right]\right| \\
\leq\ & M\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{\alpha+s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\times\left(1+\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1+s)}{\Gamma(\alpha+s+1)}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}+(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\right].
\end{aligned}$$

et le théorème est démontré. ∎

Corollaire 2.3 *Soit* : $[a,b] \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$, *une application différentiable sur* $[a,b]$ *avec* $a < b$, *telle que* $f' \in L[a,b]$. *Si* $|f'|^q$ *est convexe sur* $[a,b]$, $q \geq 1$, *et* $|f'(x)| \leq M$, $x \in [a,b]$. *Alors on a l'inégalité suivante pour les intégrales fractionnaires*

$$\left|\frac{(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}}{b-a}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x-}^{\alpha}f(a)+J_{x+}^{\alpha}f(b)\right]\right|$$
$$\leq \; M\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)\left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}+(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\right]$$

où $\alpha > 0$, Γ *est la fonction gamma d'Euler.*

Preuve. posons $s = 1$ dans (2.3), nous obtenons le résultat cherché. ∎

Remarque 2.3 *Dans le théorème* 2.3, *si nous choisissons* $\alpha = 1$, *alors* (2.3) *réduit à l'inégalité* (1.7) *du théorème* 1.6.

Chapitre 3

Applications à certaines moyennes spéciales

Nous discutons d'abord l'application de (1.4) pour l'estimation de certaines ralations importantes entre les moyennes suivantes :

1/ la moyenne arithmétique

$$A = A(a,b) := \frac{(a+b)}{2}, \quad a,\ b \geq 0$$

2/ la moyenne géométrique

$$G = G(a,b) := \sqrt{ab}, \quad a,\ b \geq 0$$

3/ la moyenne harmonique

$$H = H(a,b) := \frac{2}{\left(\frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{b}\right)}, \quad a,\ b \geq 0$$

4/ la moyenne logarithmitique

$$L = L(a,b) := \begin{cases} \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a}, & \text{si } a \neq b \\ a, & \text{si } a = b \end{cases}, \quad a,\ b \geq 0$$

5/ la moyenne identrique

$$I = I(a,b) := \begin{cases} \dfrac{1}{\exp}\left(\dfrac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{(b-a)}}, & \text{si } a \neq b, \\ a, & \text{si } a = b, \end{cases} \quad , \quad a,\ b > 0$$

6/ la moyenne p-logarithmique

$$L_p(a,b) := \begin{cases} \left[\dfrac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}}, & \text{si } a \neq b, \\ a, & \text{si } a = b, \end{cases} \quad , \quad p \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\},\ a,\ b > 0$$

Ces moyennes sont souvent utilisées dans l'approximation numérique et dans d'autre domaines. Ce pendant, seules les relations simples suivantes sont connues dans la littérateure : $H \leq G \leq L \leq I \leq A$.

Il est également connu que L_p est monotone croissante en $p \in \mathbb{R}$ avec $L_0 = I$ et $L_{-1} = L$.

Nous dérivons maintenant qeulques limites sophistiquées pour certaines différences et les rapports des moyennes ci-dessus.

Ces majorations sont très utiles dans les applications. Notre discussion est basée sur les trois applications suivantes :

<u>**Cas 1**</u> : $f(x) = x^p$ avec $p \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$. Substituant ce f dans (1.4), nous avons, pour tout $x \in [a,b]$,

$$\left|x^p - L_p^p\right| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{(x-A)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)\,\gamma_p(a,b) \tag{3.1}$$

avec

$$\gamma_p(a,b) = \begin{cases} pb^{p-1}, & \text{si } p \geq 1, \\ |p|\,a^{p-1}, & \text{si } p \in (-\infty,0) \cup (0,1) \setminus \{-1\} \end{cases}$$

Si nous choisissons encore $x = A$ dans (3.1), alors nous avons

$$\left|A^p - L_p^p\right| \leq \frac{b-a}{4}\gamma_p(a,b).$$

Quand $p \geq 1$, l'inégalité ci-dessuse réduit à

$$0 \leq L_p^p - A^p \leq \frac{p\,(b-a)\,b^{p-1}}{4},$$

et quand $p \in (-\infty,0) \setminus \{-1\}$, nous avons

$$0 \leq L_p^p - A^p \leq \frac{(b-a)\,pa^{p-1}}{4}.$$

En autre, si $p \in (0,1)$, alors nous avons

$$0 \leq A^P - L_p^P \leq \frac{(b-a)pa^{p-1}}{4}.$$

Maintenant nous choisissons $x = I$ dans (3.1) nous obtenons

$$\left|I^p - L_p^p\right| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{(I-A)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)\gamma_p(a,b)$$

En autre, si nous choisissons $x = L$ et $x = G$ dans (3.1), nous avons, respectivement

$$\left|L^p - L_p^p\right| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{(L-A)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)\gamma_p(a,b)$$

et

$$\left|G^p - L_p^p\right| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{(G-A)^2}{(b-a)^2}\right](b-a)\gamma_p(a,b).$$

<u>Cas 2</u> : $f(x) = \frac{1}{x}$. Substituant ce f dans (1.4), nous obtenons

$$|L - x| \leq \frac{xL(b-a)}{a^2}\left[\frac{1}{4} + \frac{(x-A)^2}{(b-a)^2}\right], \ \forall x \in [a,b] \tag{3.2}$$

Maintenant, en prenant, $x = A$, $x = I$, $x = G$, et $x = H$, respectivement, dans (3.2), nous avons les limites suivantes pour les différence des moyennes

$$\begin{aligned}
0 \ &\leq \ A - L \leq \frac{AL(b-a)}{4a^2}, \\
0 \ &\leq \ I - L \leq \frac{IL(b-a)}{a^2}\left[\frac{1}{4} + \frac{(I-A)^2}{(b-a)^2}\right], \\
0 \ &\leq \ L - G \leq \frac{GL(b-a)}{a^2}\left[\frac{1}{4} + \frac{(I-A)^2}{(b-a)^2}\right],
\end{aligned}$$

et

$$0 \leq L - H \leq \frac{HL(b-a)}{a^2}\left[\frac{1}{4} + \frac{(H-A)^2}{(b-a)^2}\right].$$

<u>Cas 3</u> : $f(x) = -\ln x$. Substituant ce f dans (1.4), nous obtenons

$$|\ln I - \ln x| \leq \frac{b-a}{a}\left[\frac{1}{4} + \frac{(x-A)^2}{(b-a)^2}\right], \ x \in [a,b] \tag{3.3}$$

Analogue aux cas précédents, en prenant $x = A$, $x = I$, $x = G$, et $x = H$, respectivement, dans (3.3), nous obtenons les estimations pour les rapports des moyennes de la manière suivante

$$\begin{aligned}
1 &\leq \frac{A}{I} \leq \exp\left(\frac{1}{4(b-a)}\right), \\
1 &\leq \frac{I}{L} \leq \exp\left\{\frac{b-a}{a}\left[\frac{1}{4} + \frac{(L-A)^2}{(b-a)^2}\right]\right\}, \\
1 &\leq \frac{I}{G} \leq \exp\left\{\frac{b-a}{a}\left[\frac{1}{4} + \frac{(G-A)^2}{(b-a)^2}\right]\right\}, \\
1 &\leq \frac{I}{H} \leq \exp\left\{\frac{b-a}{a}\left[\frac{1}{4} + \frac{(H-A)^2}{(b-a)^2}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] M. Alomari, M. Darus, S.S. Dragomir, P. Cerone, Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are s-convex in the second sense, Applied Mathematics Letters 23 (2010) 1071-1076.

[2] Erhan Set, New inequalities of Ostrowski type for mappings whose derivatives are s-convex in the second sense via fractional integrals, Computers and Mathematics with Application 63 (2012) 1147-1154.

[3] S.S. Dragomir, S. WANG, Applications of Ostowski's Inequality to the Estimation of Error Bounds for Some Special Means and for Some Numerical Quadrature Rules.Appl. Math. Lett. Vol. 11, No. 1, pp. 105-109, 1998.