

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

MIS10, 111

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master Académique en Mathématiques
Option : **Equations aux Dérivées Partielles**



Par : M^{elle}. AFAIFIA Wennassa

Intitulé

**Méthode de Legendre-Galerkin appliquée à une
équation intégrale de Fredholm de première espèce.**

Dirigé par : N. BOUSSETILA

Devant le jury

PRESIDENT
RAPPORTEUR
EXAMINATEUR

Dr. H. HAMLAOUI
Dr. N. BOUSSETILA
Dr. K. BOUKRIOUA

MCA
MCA
MCB

Univ-Guelma
Univ-Guelma
Univ-Guelma

Session Juin 2014



Table des matières

Introduction	5
0.1 Thématique de recherche	5
0.1.1 Problèmes directs	6
0.1.2 Problèmes inverses	6
1 Rappels et notations	7
1.1 Opérateurs compacts et théorie de Riesz-Fredholm	7
1.2 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts	9
1.3 Equations opérationnelles et Alternative de Fredholm	10
1.4 Equations intégrales de première espèce	11
2 Problème inverses linéaires	17
2.1 Terminologie des problèmes bien posés	17
2.2 Exemples	18
2.2.1 Méthode de moindres carrés linéaires	24
2.3 Inverse généralisé et méthodes de régularisation	28
2.3.1 Méthode de Tikhonov	30
2.3.2 Méthode de troncature spectrale	32
3 Méthode de Legendre-Collocation régularisée	35
3.1 Polynôme de Legendre	36
3.2 Formules de quadrature	37
3.3 Méthode de Legendre-Collocation régularisée pour une équation intégrale de Fredholm de première espèce	40
3.3.1 Position du problème	40
3.3.2 Méthode de Legendre-Collocation régularisée	40
3.3.3 Tests numériques	42
RÉFÉRENCES	47

Introduction

0.1 Thématique de recherche

L'étude des phénomènes dans la nature nous permet de calculer des quantités ou des propriétés physiques d'un modèle donné. On distingue alors deux types de problèmes : les problèmes directs et les problèmes inverses.

De manière schématique, un problème inverse peut être formulé comme étant une relation fonctionnelle (**Input, Système, Output**), où l'objectif d'étude est d'identifier des causes connaissant les effets. D'après J.B. Keller, deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre si la formulation de l'un met l'autre en cause.

La causalité et l'irréversibilité donnent une dichotomie entre les phénomènes physiques, qui peut être quantifiée mathématiquement en deux classes de problèmes : les problèmes bien posés et les problèmes mal posés. En se référant de cette dichotomie, le mot problèmes inverses désigne tous les problèmes qui partagent le caractère mal posé par opposition aux problèmes dits directs.

La prédiction de l'état futur d'un système physique connaissant son état actuel est l'exemple type de problème direct. On peut envisager divers problèmes inverses :

- Reconstituer l'état passé d'un système connaissant son état actuel si ce système est irréversible.
- Déterminer des paramètres du système connaissant entièrement ou en partie son évolution (Problèmes d'identification de paramètres).

Un problème inverse est une situation dans laquelle les valeurs de certains paramètres (ou inconnues) d'un modèle doivent être identifiées à partir d'observations (ou mesures) du phénomène. C'est également en quelques sortes le contraire d'un problème direct : supposons que l'on dispose d'un modèle. Si on se fixe des valeurs pour les paramètres du modèle, on peut alors faire tourner le modèle, en déduire une trajectoire, et l'observer. Il s'agit du problème direct. Le problème inverse consiste à remonter le schéma : connaissant les observations, le but est de retrouver les valeurs des paramètres.

La résolution du problème inverse passe donc en général par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite problème direct qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en ef-

fets observables expérimentalement. Ensuite, à partir des mesures obtenues sur le phénomène réel, la démarche va consister à approximer au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte de ces mesures. Cette résolution peut se faire par simulation numérique ou de façon analytique. La résolution mathématique est rendue difficile par le fait que les problèmes inverses sont en général des problèmes mal posés, c'est-à-dire que les seules observations expérimentales ne suffisent pas à déterminer parfaitement tous les paramètres du modèle. Il est donc nécessaire d'ajouter des contraintes ou des a priori qui permettent de réduire l'espace des possibilités de façon à aboutir à une solution unique.

0.1.1 Problèmes directs

Si on note par \mathbf{P} l'espace des paramètres, \mathbf{E} l'espace des excitations et \mathbf{R} l'espace des états (réponses), alors le problème direct $L : \mathbf{P} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$, consiste à calculer la réponse d à partir de la donnée des sollicitations x et des paramètres p . Les équations de la physique donnent en général la réponse d comme fonction de x et p : $L(x, p) = d$, la notation L symbolise les équations de la physique du problème considéré; on parle parfois du modèle physique.

0.1.2 Problèmes inverses

[Réf] ¹ D'un point de vue "physique" ou "expérimental", on dit qu'on a un problème inverse toute situation où l'on souhaite évaluer une certaine grandeur physique p inaccessible à l'expérience à partir de la mesure d'une autre grandeur d directement accessible à l'expérience, connaissant un modèle mathématique du problème direct qui donne explicitement d à partir de p (ce que l'on note symboliquement $d = G(p)$).

On peut schématiser mathématiquement un problème inverse comme suit :

$$\{\text{INPUT} \rightarrow [\text{MODÈLE}] \rightarrow \text{OUTPUT}\}$$

- ▶ MODÈLE = matrice, EDO, EDP, Equation intégrale.
- ▶ INPUT = vecteur, données initiales, conditions aux limites, paramètres, géométrie du domaine...
- ▶ OUTPUT = solution, état du système physique, quantité matérielle, propriétés qualitatives.
- Problème direct : $\text{OUTPUT} = \text{solution} = \text{MODÈLE}(\text{INPUT})$.
- Problème inverse : $\text{INPUT} = \text{MODÈLE}^{-1}(\text{OUTPUT})$.

1. Marc Bonnet, Problèmes inverses : Cours de DEA Dynamique des Structures et Couplages (2004).

Rappels et notations

1.1 Opérateurs compacts et théorie de Riesz-Fredholm

Références

- H. Brezis ; Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Masson (1993).
- R. Dautray, J.-L. Lions ; Analyse mathématique et calcul numérique. Tome 5 (spectre des opérateurs), Edt. Masson, (1988). {chap 3. page 136-180}.
- E.B. Davies ; Linear Operator and their Spectra, Cambridge University Press (2007).
- I. Gohberg, S. Goldberg and M.A. Kaashoek ; Basic Classes of Linear Operators, Birkhäuser (2003).
- D. Huet ; Décomposition Spectrale et Opérateurs, PUF (1976).
- P. Lévy-Bruhl ; Introduction à la Théorie Spectrale : Cours et Exercices Corrigés, Dunod (2003).

On se place dans un cadre normé $(E_1 \longrightarrow E_2)$, où E_1 et E_2 sont deux espaces de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , les normes sont notées respectivement par $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$.

Définition 1.1.1. Un opérateur linéaire est une application $A : \mathcal{D}(A) \subseteq E_1 \longrightarrow E_2$ linéaire, où $\mathcal{D}(A)$ est le domaine de définition de l'application linéaire A , qui est un sous-espace vectoriel de E_1 , que l'on suppose en général dense dans E_1 . L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) = E_1 \longrightarrow E_2$ est dit borné si la quantité

$$\|A\| = \sup \{ \|Au\|_{E_2}, u \in \mathcal{D}(A), \|u\|_{E_1} = 1 \}$$

est finie. Dans ce cas A est une application linéaire continue sur $\mathcal{D}(A)$, et lorsque $\mathcal{D}(A)$ est dense dans E_1 , A s'étend de manière unique à un opérateur borné sur E_1 .

Notations. On note par $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ (resp. $\mathcal{L}(E)$ si $E = E_1 = E_2$) l'espace vectoriel des *applications (opérateurs) linéaires continues* de E_1 dans E_2 (resp. des *endomorphismes continus* de E), que l'on munit de la norme (**de la convergence uniforme**) définie par :

$$A \in \mathcal{L}(E_1, E_2), \quad \|A\| = \sup_{0 \neq u \in E_1} \frac{\|Au\|_{E_2}}{\|u\|_{E_1}}.$$

On vérifie que, si E_2 est un espace de Banach (complet), alors $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ est un espace de Banach.

• Tout opérateur A est complètement défini par son graphe $\mathbf{G}(A)$ qui est un sous-espace vectoriel de $E_1 \times E_2$ défini par $\mathbf{G}(A) = \{(v, Av), v \in \mathcal{D}(A)\}$.

Pour tout opérateur linéaire $A: \mathcal{D}(A) \subseteq E_1 \longrightarrow E_2$, on note par :

$$\mathbf{N}(A) = \{h \in \mathcal{D}(A), Ah = 0\} \text{ (noyau de } A), \quad \mathbf{R}(A) = \{h_2 = Ah_1, h_1 \in \mathcal{D}(A)\} \text{ (image de } A).$$

Définition 1.1.2. Soient E et F deux espaces de Banach. Une application $T \in L(E, F)$ est dite **compacte** si l'image $T(B_E(0, 1))$ par l'application T de la boule unité de E est relativement compacte, i.e., $\overline{T(B_E(0, 1))}$ est un ensemble compact pour la topologie forte de $F \iff$ Pour toute suite bornée (x_n) de E , la suite (Tx_n) admet une sous-suite qui converge dans F .

On note $\mathcal{K}(E, F)$ (resp. $\mathcal{K}(E)$ si $E = F$) l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F .

Si $\dim(\mathbf{R}(T))$ est finie, on dit alors que T est de rang fini. On note $\mathcal{K}_0(E, F)$ (resp. $\mathcal{K}_0(E)$ si $E = F$) l'ensemble des applications linéaires de rang fini de E dans F .

Remarque 1.1.1. Il est clair que tout opérateur T de rang fini est compact. En effet, l'ensemble $T(B_E(0, 1))$ est alors un ensemble borné d'un espace vectoriel de dimension finie, donc il est relativement compact (tous e.v.n de dimension finie est localement compact).

La proposition suivante donne des propriétés fondamentales de stabilité des opérateurs compacts.

Proposition 1.1.1. Soient E et F deux espaces de Banach. Alors :

- (i) $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.
- (ii) Soient E, F et G des espaces de Banach, $S \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T \in \mathcal{L}(F, G)$. Si S ou T est compacte alors TS est compacte. En particulier, $\mathcal{K}(E)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 1.1.2. Soit T un opérateur continu de l'espace de Hilbert H_1 dans l'espace de Hilbert H_2 . Les deux énoncés suivants sont équivalents :

- (i) T est compact.
- (ii) Pour toute suite $(x_n) \subset H_1$, on a $x_n \rightharpoonup x \implies Tx_n \longrightarrow Tx$.

Théorème 1.1.1. Soit T un opérateur continu de l'espace de Hilbert H_1 dans l'espace de Hilbert H_2 . Les deux énoncés suivants sont équivalents :

- (i) T est compact.
- (ii) Pour toute suite orthonormale $(e_n) \subset H_1$, on a $Te_n \longrightarrow 0$.

Proposition 1.1.3. Soit T un opérateur borné de l'espace de Hilbert H_1 vers l'espace de Hilbert H_2 . Alors T est compact si et seulement si T^* est compact.

Théorème 1.1.2. $\mathcal{K}(H) = \overline{\mathcal{K}_0(H)}$, i.e., pour tout $T \in \mathcal{K}(H)$ il existe une suite $(T_n) \subset \mathcal{K}_0(H)$ telle que $\|T - T_n\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

1.2 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts

Théorème 1.2.1. [Alternative de Fredholm : V1] Soit $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. On a les propriétés suivantes :

- (i) $N(T) = R(T^*)^\perp$.
- (ii) $N(T^*) = R(T)^\perp$.
- (iii) $\overline{R(T)} = N(T^*)^\perp$.
- (iv) $\overline{R(T^*)} = N(T)^\perp$.

Théorème 1.2.2. [Alternative de Fredholm : V2] Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact et $\lambda \neq 0$. On a

- (i) $N(T - \lambda I)$ est de dimension finie et $\dim(N(T - \lambda I)) = \dim(N(T^* - \bar{\lambda} I))$.
- (ii) $R(T - \lambda I)$ est sous-espace fermé dans H .
- (iii) $R(T - \lambda I) = \overline{R(T - \lambda I)} = N(T^* - \bar{\lambda} I)^\perp$.
- (iv) $H = R(T - \lambda I) \iff N(T^* - \bar{\lambda} I) = \{0\} \iff N(T - \lambda I) = \{0\} \iff R(T^* - \bar{\lambda} I) = H$.

Théorème 1.2.3. Soit $K \in \mathcal{K}(E)$ avec $\dim(E) = \infty$. Alors on a :

- (a) $0 \in \sigma(K)$,
- (b) $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}$,
- (c) l'une des situations suivantes :
 - ou bien $\sigma(K) = \{0\}$,
 - ou bien $\sigma(K) \setminus \{0\}$ est fini,
 - ou bien $\sigma(K) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

Théorème 1.2.4. Soient H un espace séparable et $A \in \mathcal{K}(H)$. Il existe des systèmes orthonormés (v_j) et (w_j) et une suite réelle (s_j) qui décroît vers 0 tels que

$$A(v) = \sum s_j \langle v, v_j \rangle w_j \quad \text{pour tout } v \in H. \quad (1.2.1)$$

En fait, les s_j sont les valeurs propres de $|A|$ répétées selon leur multiplicité et associées avec les vecteurs propres v_j : ce sont les valeurs singulières de A .

Théorème 1.2.5. On suppose que H est séparable. Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T :

$$\forall x \in H, \quad x = x_0 + \sum_{k \geq 1} (x, e_k) e_k, \quad x_0 \in \mathbf{N}(A), \quad Tx = \sum_{k \geq 1} \lambda_k e_k.$$

1.3 Equations opérationnelles et Alternative de Fredholm

On suppose que H est séparable. Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact donnée par sa décomposition spectrale :

$$\forall h \in H, \quad h = h_0 + \sum_{k \geq 1} (h, e_k) e_k, \quad h_0 \in \mathbf{N}(A), \quad Th = \sum_{k \geq 1} \lambda_k e_k.$$

Considérons l'équation

$$(T - \lambda I)f = g, \tag{1.3.1}$$

où $f = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n e_n$, $g = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n e_n$ sont deux vecteurs de H donnés.

- Si $\lambda \notin \sigma(A)$, la solution de l'équation (1.3.1) est donnée par :

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g_n}{\lambda_n - \lambda} \right) e_n - \frac{g_0}{\lambda}.$$

- Si $\lambda = \lambda_s \neq 0$, l'équation (1.3.1) n'a de solution que si $g_s = 0$ ($\Leftrightarrow g \in \mathbf{N}(T - \lambda_m I)^\perp$) et dans ce cas les solutions sont données par :

$$f = \left[\sum_{n \neq s}^{\infty} \left(\frac{g_n}{\lambda_n - \lambda} \right) e_n - \frac{g_0}{\lambda_s} \right] + G_m,$$

où G_m est un élément arbitraire de $\mathbf{N}(T - \lambda_m I)$.

- Si $\lambda = 0$, pour que l'équation $Tf = g$ ait une solution il faut et il suffit que

$$f_0 = 0 \Leftrightarrow f \in \mathbf{N}(T)^\perp = \overline{\mathbf{R}(T)}$$

et que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_n|^2}{\lambda_n^2}$$

soit convergente. Dans ce cas les solutions sont données par :

$$f = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g_n}{\lambda_n} \right) e_n \right] + G_0,$$

où G_0 est un élément arbitraire de $\mathbf{N}(T)$.

1.4 Equations intégrales de première espèce

Définition 1.4.1. [Opérateurs de Hilberts-Schmidt] Soit H un espace de Hilbert séparable. On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt (on note $T \in \mathcal{L}_{hs}(H)$:= ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt définis sur H) s'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$ de H telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\| < \infty$. On note cette quantité par $\|T\|_{hs}$.

Théorème 1.4.1. Soient H un espace de Hilbert séparable, et $T \in \mathcal{L}_{hs}(H)$. On a :

(i) Si $(f_m)_{m \geq 1}$ est une autre base hilbertienne de H , alors

$$\mathbf{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\| = \sum_{m=1}^{\infty} \|T^* f_m\|.$$

$$\mathbf{b} \quad \text{Pour toute base hilbertienne } (\hat{e}_m)_{m \geq 1} \text{ de } H, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\| = \sum_{m=1}^{\infty} \|T\hat{e}_m\|.$$

(ii) T est compact.

(iii) On suppose que $H = L^2(\Omega)$, où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N . Soit $k(.,.) : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{K} (= \mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction $L^2(\Omega \times \Omega)$. Alors l'opérateur intégral défini par :

$$\mathbf{K}u(x) = \int_{\Omega \times \Omega} k(x, y)u(y)dy$$

est compact.

(iv) Tout opérateur de Hilbert-Schmidt sur $H = L^2(\Omega)$ s'écrit de manière unique sous la forme \mathbf{K} .

Considérons l'équation intégrale de Fredholm de première espèce (resp. de seconde espèce)

$$\int_a^b k(x, y)f(y)dy = g(x), \quad (1.4.1)$$

$$f(x) - \lambda \int_a^b k(x, y)f(y)dy = g(x), \quad (1.4.2)$$

où le noyau $k \in L^2([a, b] \times [a, b])$, le second membre $g \in L^2(a, b)$ et le multiplicateur $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sont donnés. Notre but est d'étudier l'existence d'une solution $f \in L^2(a, b)$ à ces équations et, si possible, de la représenter.

On sait que, sous la condition $k \in L^2([a, b] \times [a, b])$, l'opérateur \mathbf{K} défini dans $H := L^2(a, b)$ par :

$$\mathbf{K}f(x) := \int_a^b k(x, y)f(y)dy, \quad x \in [a, b]$$

est du type Hilbert-Schmidt (donc compact) et nous réduirons les équations intégrales envisagées aux formes abstraites

$$\mathbf{K}f = g, \quad (I - \lambda\mathbf{K})f = g,$$

avec \mathbf{K} compact dans un espace de Hilbert H .

Pour toutes fonctions f et $g \in L^2(a, b)$ une application du théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{K}f, g \rangle &= \int_a^b \left(\int_a^b k(x, y) f(y) dy \right) \overline{g(x)} dx = \int_a^b f(y) dy \left(\int_a^b k(x, y) \overline{g(x)} dx \right) dx = \\ &= \int_a^b f(y) dy \overline{\left(\int_a^b k(x, y) g(x) dx \right)} dx = \langle f, \mathbf{K}^* g \rangle, \end{aligned}$$

si bien que l'adjoint \mathbf{K}^* est défini par $\mathbf{K}^* g(x) = \int_a^b \overline{k(y, x)} g(y) dy$ et l'opérateur \mathbf{K} est auto-adjoint ssi $\overline{k(y, x)} = k(x, y)$ p.p. dans $]a, b[\times]a, b[$.

Une application directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\|\mathbf{K}\| \leq \left(\int_a^b \int_a^b |k(x, y)| dx dy \right)^{\frac{1}{2}} = \| |k| \|_{\text{ns}}.$$

Définition 1.4.2. On dit que $\lambda \neq 0$ est une valeur singulière de l'opérateur \mathbf{K} si l'équation

$$(I - \lambda\mathbf{K})f = 0$$

admet une solution $f \neq 0$ i.e., $N(I - \lambda\mathbf{K}) \neq \{0\}$. Comme cette équation s'écrit encore $\left(\frac{1}{\lambda}I - \mathbf{K}\right)f$, on voit que λ est une valeur singulière de \mathbf{K} si et seulement si $\mu = \frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de \mathbf{K} . Les solutions non nulles de $(I - \lambda\mathbf{K})f = 0$ seront encore appelées éléments propres et le nombre d'éléments propres linéairement indépendants associés à une même valeur singulière λ définit la multiplicité de celle-ci.

On sait bien qu'un opérateur compact \mathbf{K} admet un nombre fini ou une suite de valeurs singulières dont les modules croissent vers $+\infty$. Chaque valeur singulière est de multiplicité finie et λ est valeur singulière de \mathbf{K} si et seulement si $\bar{\lambda}$ est valeur singulière de \mathbf{K}^* , avec la même multiplicité.

En vertu du Théorème (1.2.2), on déduit le résultat suivant connu sous le nom "alternative de Fredholm".

Théorème 1.4.2. Soit $\mathbf{K} \in \mathcal{K}(H)$. Alors

- (i) Ou bien l'équation $(I - \lambda\mathbf{K})f = 0$ n'admet que la solution $f = 0$ ($N(I - \lambda\mathbf{K}) = \{0\}$) et l'équation $(I - \lambda\mathbf{K})f = g$ admet une et une seule solution quel que soit le second membre $g \in H$.

(ii) Ou bien l'équation homogène $(I - \lambda \mathbf{K})f = 0$ admet des solutions non nulles ($N(I - \lambda \mathbf{K}) \neq \{0\}$) et l'équation $(I - \lambda \mathbf{K})f = g$ admet une solution si et seulement si le second membre g est orthogonal aux solutions de l'équation homogène adjointe $(I - \bar{\lambda} \mathbf{K}^*)f = 0$ ($g \in N(I - \bar{\lambda} \mathbf{K}^*)^\perp$).

Preuve. Puisque $\lambda \neq 0$, l'équation $(I - \lambda \mathbf{K})f = g$ peut s'écrire $\left(\mathbf{K} - \frac{1}{\lambda} I\right)f = -\frac{1}{\lambda} g$.

Dans la première éventualité, $\frac{1}{\lambda}$ n'est pas une valeur propre de \mathbf{K} et l'opérateur $\left(\mathbf{K} - \frac{1}{\lambda} I\right)$ est inversible dans $\mathcal{L}(H)$, puisque pour un opérateur compact \mathbf{K} , $\sigma(\mathbf{K}) = \sigma_p(\mathbf{K}) \cup \{0\}$. L'équation $(I - \lambda \mathbf{K})f = g$ admet donc une solution unique donnée par $f = -\frac{1}{\lambda} \left(\mathbf{K} - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} g$.

Dans la seconde éventualité, $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de \mathbf{K} et l'équation $(I - \lambda \mathbf{K})f = g$ n'est résoluble qu'à la condition nécessaire et suffisante

$$g \in R\left(\mathbf{K} - \frac{1}{\lambda} I\right) = N\left(\mathbf{K}^* - \frac{1}{\lambda} I\right)^\perp = N(I - \bar{\lambda} \mathbf{K}^*)^\perp.$$

On peut représenter la (les) solution(s) de l'équation non homogène de seconde espèce lorsque \mathbf{K} est auto-adjoint, i.e., la condition $k(x, y) = \overline{k(y, x)}$ est satisfaite.

Théorème 1.4.3. [Alternative de Fredholm] Soient H un espace de Hilbert séparable et \mathbf{K} un opérateur auto-adjoint compact. Notons $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} \in \mathbb{R}$ les valeurs singulières de \mathbf{K} , où (μ_n, e_n) sont les couples propres de \mathbf{K} , i.e.,

$$\mathbf{K}e_n = \lambda_n e_n, \quad \langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}, \quad \forall h \in H, h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n \rangle e_n + h_0, \quad h_0 \in N(\mathbf{K}).$$

L'équation $(I - \lambda \mathbf{K})f = g$ s'écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda \mu_n) \langle f, e_n \rangle e_n + f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, e_n \rangle e_n + g_0, \quad f_0, g_0 \in N(\mathbf{K}).$$

• Si λ n'est pas une valeur singulière de \mathbf{K} ($\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \notin \sigma(\mathbf{K})$), alors

$$\begin{aligned} f &= g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g, e_n \rangle}{1 - \lambda \mu_n} e_n = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle g, e_n \rangle}{1 - \frac{1}{\lambda_n} \lambda} e_n = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda} \langle g, e_n \rangle e_n = \\ &= g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda + \lambda}{\lambda_n - \lambda} \langle g, e_n \rangle e_n = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, e_n \rangle e_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda} \langle g, e_n \rangle e_n = g + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle g, e_n \rangle e_n. \end{aligned}$$

$$\text{Si } \lambda \text{ n'est pas une valeur singulière de } \mathbf{K}, \text{ alors } f = g + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle g, e_n \rangle e_n.$$

• Si λ est une valeur singulière de \mathbf{K} , i.e., $\lambda = \lambda_s = \frac{1}{\mu_s}$ pour un certain $s \in \mathbb{N}$. Alors l'équation $(I - \lambda \mathbf{K})f = g$ est résoluble ssi $g \in R(\mathbf{K} - \mu_s) = N(\mathbf{K} - \mu_s)^\perp = N(I - \lambda_s \mathbf{K})^\perp$, et dans ce cas les solutions f sont données par

$$f = g + \lambda_s \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq s}}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_s} \langle g, e_n \rangle e_n + G_s, \text{ où } G_s \in N(I - \lambda_s \mathbf{K}).$$

Considérons maintenant l'équation de première espèce sous sa forme abstraite $\mathbf{K}f = g$, avec \mathbf{K} opérateur compact dans H séparable. Cette équation n'admet une solution que si $g \in R(\mathbf{K})$.

Proposition 1.4.1. *On suppose que $g \in \overline{R(\mathbf{K})} = N(\mathbf{K}^*)^\perp$, alors on a*

$$\mathbf{K}f = g \iff \mathbf{K}^* \mathbf{K}f = \mathbf{K}^* g. \quad (GS)$$

Preuve. En effet, il est immédiat que $\mathbf{K}f = g \implies \mathbf{K}^* \mathbf{K}f = \mathbf{K}^* g$ et pour l'implication inverse, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^* \mathbf{K}f = \mathbf{K}^* g &\implies \langle \mathbf{K}^* \mathbf{K}f, h \rangle = \langle \mathbf{K}^* g, h \rangle, \quad \forall h \in H \\ &\implies \langle \mathbf{K}f, \mathbf{K}h \rangle = \langle g, \mathbf{K}h \rangle, \quad \forall h \in H \\ &\implies \langle \mathbf{K}f, \hat{h} \rangle = \langle g, \hat{h} \rangle, \quad \forall \hat{h} \in \overline{R(\mathbf{K})} \\ &\implies \langle \mathbf{K}f - g, \hat{h} \rangle = 0, \quad \forall \hat{h} \in \overline{R(\mathbf{K})}. \end{aligned}$$

$g \in \overline{R(\mathbf{K})}$ par hypothèse et $\mathbf{K}f \in R(\mathbf{K})$, donc $\mathbf{K}f - g \in \overline{R(\mathbf{K})}$. Puisque l'égalité $\langle \mathbf{K}f - g, \hat{h} \rangle = 0$ est vraie pour tout $\hat{h} \in \overline{R(\mathbf{K})}$, en particulier pour $\hat{h} = \mathbf{K}f - g$, il vient donc $\langle \mathbf{K}f - g, \mathbf{K}f - g \rangle = 0$, d'où $\mathbf{K}f - g = 0 \implies \mathbf{K}f = g$.

Proposition 1.4.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors $N(T^* T) = N(T)$ et $N(T T^*) = N(T^*)$.*

Preuve. $v \in N(T) \implies Tv = 0 \implies T^* Tv = 0 \implies v \in N(T^* T) \implies N(T) \subseteq N(T^* T)$. Pour l'autre inclusion on a $T^* Tv = 0 \implies \langle T^* Tv, v \rangle = 0 = \langle Tv, Tv \rangle = \|Tv\|^2 \implies Tv = 0 \implies v \in N(T)$.

Pour la deuxième égalité, il suffit de remplacer T par T^* et d'utiliser l'égalité $T^{**} = T$.

L'opérateur $\mathbf{K}^* \mathbf{K}$ est auto-adjoint compact (donc diagonalisable) et ses valeurs propres sont positives ou nulles. D'après le théorème de diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts, $\mathbf{K}^* \mathbf{K}$ admet un nombre fini ou une suite de valeurs propres décroissantes vers 0 et si on répète les valeurs propres non nulles σ_n selon leur multiplicité. Notons (σ_n, φ_n) les couples propres de $\mathbf{K}^* \mathbf{K}$, i.e.,

$$\mathbf{K}^* \mathbf{K} \varphi_n = \sigma_n \varphi_n, \quad \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \delta_{nm}.$$

On pose

$$\lambda_n := \frac{1}{\sqrt{\sigma_n}}, \quad \psi_n := \lambda_n \mathbf{K} \varphi_n,$$

d'où

$$\mathbf{K}^* \psi_n = \mathbf{K}^* (\lambda_n \mathbf{K} \varphi_n) = \lambda_n \mathbf{K}^* \mathbf{K} \varphi_n = \sqrt{\sigma_n} \varphi_n.$$

Théorème 1.4.4. La famille $\{\psi_n\}$ est totale orthonormée dans $\overline{R(\mathbf{K})}$ et la famille $\{\varphi_n\}$ est totale orthonormée dans $\overline{R(\mathbf{K}^*)}$.

Preuve. Il est évident que les ψ_n appartiennent à $\overline{R(\mathbf{K})}$ et ils sont orthonormés, puisque

$$\begin{aligned}\langle \psi_n, \psi_m \rangle &= \langle \lambda_n \mathbf{K} \varphi_n, \lambda_m \mathbf{K} \varphi_m \rangle = \lambda_n \lambda_m \langle \mathbf{K}^* \mathbf{K} \varphi_n, \varphi_m \rangle = \lambda_n \lambda_m \langle \sigma_n \varphi_n, \varphi_m \rangle = \\ &= \lambda_n \lambda_m \sigma_n \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \lambda_n \lambda_m \sigma_n \delta_{nm} = \delta_{nm}.\end{aligned}$$

Il sont totaux dans $\overline{R(\mathbf{K})}$, puisque si $h \in \overline{R(\mathbf{K})} = N(\mathbf{K}^*)^\perp$ vérifie $\langle h, \psi_n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient $h = 0$.

En effet, on a

$$\langle h, \psi_n \rangle = 0 = \langle h, \lambda_n \mathbf{K} \varphi_n \rangle = \lambda_n \langle h, \mathbf{K} \varphi_n \rangle = \lambda_n \langle \mathbf{K}^* h, \varphi_n \rangle,$$

pour tout n avec $\lambda_n > 0$, d'où

$$\langle \mathbf{K}^* \mathbf{K} h \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \langle \mathbf{K}^* h, \varphi_n \rangle \varphi_n = 0,$$

et $\mathbf{K} \mathbf{K}^* h \in N(\mathbf{K}^*)$. De là, puisque $h \in N(\mathbf{K}^*)^\perp$, $\langle h, \mathbf{K} \mathbf{K}^* h \rangle = 0$, soit encore $\langle \mathbf{K}^* h, \mathbf{K}^* h \rangle = 0 = \|\mathbf{K}^* h\|^2 = 0$, et $h \in N(\mathbf{K}^*)$. Donc $h \in N(\mathbf{K}^*) \cap N(\mathbf{K}^*)^\perp = \{0\}$, d'où $h = 0$.

Passons aux φ_n . Ils appartiennent à $\overline{R(\mathbf{K}^*)}$ et sont orthonormés. Il sont totaux dans $\overline{R(\mathbf{K}^*)}$, puisque si $h \in \overline{R(\mathbf{K}^*)} = N(\mathbf{K})^\perp$ vérifie $\langle h, \varphi_n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient $h = 0$. En effet, on a

$$\langle h, \varphi_n \rangle = 0 = \langle h, \lambda_n \mathbf{K}^* \psi_n \rangle = \lambda_n \langle h, \mathbf{K}^* \psi_n \rangle = \lambda_n \langle \mathbf{K} h, \psi_n \rangle,$$

pour tout n avec $\lambda_n > 0$, d'où $\langle \mathbf{K} h, \psi_n \rangle = 0$ pour tout n et $\mathbf{K} h = 0$ par la totalité des ψ_n dans $\overline{R(\mathbf{K})}$. Ainsi $h \in N(\mathbf{K}) \cap N(\mathbf{K})^\perp = \{0\}$, donc $h = 0$.

Définition 1.4.3. La suite des triplets $\{(\varphi_n, \psi_n, \sigma_n), n \in \mathbb{N}^*\}$ est dite système singulier pour \mathbf{K}

Théorème 1.4.5. [de PICARD] On suppose que H est un espace de Hilbert séparable. Soient $K \in \mathcal{X}(H)$ un opérateur compact et $\{(\varphi_n, \psi_n, \sigma_n), n \in \mathbb{N}^*\}$ son système singulier. Alors l'équation $\mathbf{K}h = g$ admet une solution si et seulement si

$$(i) \quad g \in N(\mathbf{K}^*)^\perp = \overline{R(\mathbf{K})}.$$

$$(ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle g, \psi_n \rangle|^2 < \infty.$$

- Si $N(\mathbf{K}) = \{0\}$, cette solution est unique et elle est donnée par :

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle g, \psi_n \rangle \varphi_n. \quad (S1)$$

- Si $N(\mathbf{K}) \neq \{0\}$ i.e. 0 est une valeur propre \mathbf{K} , alors la solution générale est donnée par :

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle g, \psi_n \rangle \varphi_n + g_0, \quad g_0 \in N(\mathbf{K}). \quad (S2)$$

Preuve. Si l'équation $\mathbf{K}h = g$ admet une solution, alors $g \in N(\mathbf{K}^*)^\perp = \overline{R(\mathbf{K})}$ et $\mathbf{K}^*\mathbf{K}h = \mathbf{K}^*g$ (cf. Prop (1.4.1), formule (SG)).

L'égalité

$$H = N(\mathbf{K}^*\mathbf{K}) \oplus N(\mathbf{K}^*\mathbf{K})^\perp = N(\mathbf{K}) \oplus N(\mathbf{K})^\perp = N(\mathbf{K}) \oplus \overline{R(\mathbf{K}^*)},$$

nous permet d'écrire

$$\forall \zeta \in H, \quad \zeta = \zeta_1 + \zeta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \zeta, \varphi_n \rangle \varphi_n + \zeta_0, \quad \zeta_0 \in N(\mathbf{K}).$$

En développant les deux côtés de l'équation $\mathbf{K}^*\mathbf{K}h = \mathbf{K}^*g$ dans la base $(\varphi_n) \oplus N(\mathbf{K})$, on obtient

$$\mathbf{K}^*\mathbf{K}h = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n = \mathbf{K}^*g = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, \varphi_n \rangle \mathbf{K}^* \varphi_n,$$

d'où $\langle h, \varphi_n \rangle = \frac{1}{\sigma_n} \langle \mathbf{K}^*g, \varphi_n \rangle$. Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma_n} \right)^2 |\langle \mathbf{K}^*g, \varphi_n \rangle|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma_n} \right)^2 |\langle g, \mathbf{K}\varphi_n \rangle|^2 = \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma_n} \right)^2 |\langle g, \sqrt{\sigma_n} \psi_n \rangle|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle g, \psi_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, \varphi_n \rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, \varphi_n \rangle|^2 + \|h_0\|^2 = \|h\|^2, \end{aligned}$$

et la solution h s'exprime par la série

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, \varphi_n \rangle| \varphi_n + h_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle g, \psi_n \rangle \varphi_n + h_0, \quad h_0 \in N(\mathbf{K}) = N(\mathbf{K}^*\mathbf{K}).$$

On en déduit

$$\mathbf{K}h = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle g, \psi_n \rangle \mathbf{K}\varphi_n + \mathbf{K}h_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \mathbf{K}f, \psi_n \rangle \mathbf{K}\psi_n + \mathbf{K}h_0,$$

et, en comparant ce développement avec

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \mathbf{K}f, \psi_n \rangle \psi_n,$$

on obtient $Th_0 = 0$, i.e., $h_0 \in N(\mathbf{K})$. Ce qui achève d'établir la condition nécessaire et la formule de la solution.

Réciproquement, si les conditions (1) et (2) sont satisfaites, l'élément

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle g, \psi_n \rangle \varphi_n + h_0$$

est bien défini, car $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle g, \psi_n \rangle|^2 + \|h_0\|^2 < +\infty$. De plus, cet élément h est une solution de l'équation

$\mathbf{K}h = g$, car

$$\mathbf{K}h = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle g, \psi_n \rangle \mathbf{K}\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, \psi_n \rangle \psi_n,$$

puisque $g \in \overline{R(\mathbf{K})}$ et que les ψ_n sont totaux. ■

Problème inverses linéaires

2.1 Terminologie des problèmes bien posés

En 1923, le mathématicien français J. Hadamard a écrit son livre célèbre sur les équations aux dérivées partielles et leur signification physique [3]. Cet ouvrage fût le point de départ au développement du concept de problème bien posé en physique mathématique. Il s'agit d'un problème dont la solution existe, est unique et dépend continûment des données (stabilité). Bien entendu, ces notions doivent être précisées par le choix des espaces (et des topologies) dans lesquels les données et la solution sont considérées. Dans ce même livre Hadamard laissait entendre (et c'était aussi une opinion partagée avec I.G. Petrovsky) que seul un problème bien posé pouvait modéliser correctement un phénomène physique. La physique mathématique a longtemps ignoré les problèmes mal posés, les considérant soit dénués de sens physique, soit reflétant une modélisation inadéquate. La réalité actuelle est toute autre : le caractère fondamentalement mal posé de certains problèmes pratiques est reconnu et motive de nombreuses recherches en mathématiques (voir [2, 5, 9, 8]).

Définition 2.1.1. [3], Soient X, Y deux espaces de Banach, et $A : X \supseteq D(A) \longrightarrow Y$ un opérateur (linéaire ou non-linéaire). Le problème inverse $Ax = y$ est **bien posé** au sens de HADAMARD si

	Existence :	Pour tout $y \in Y$ il existe $x \in X$ tel que $Ax = y$.
	Unicité :	Pour tout $y \in Y$, il y a au plus une solution $x \in X$.
	Stabilité :	La solution x dépend continûment de la donnée y .

Si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée, alors le problème est dit **mal posé**. En pratique, cela veut souvent dire qu'il n'existe pas de solution unique ou que, si elle existe, une légère modification des données conduit à des solutions très différentes.

Remarque 2.1.1. Le choix des espaces de départ et d'arrivée X et Y est bien sûr très important dans cette définition. La stabilité est une condition primordiale. En effet, s'il y a un problème de stabilité, le calcul numérique de la solution peut devenir impossible à cause des erreurs de mesures ou d'arrondis.

Remarque 2.1.2. La définition donnée par Hadamard est très contraignante dans la pratique. Il faut donc relaxer la définition d'un problème bien posé.

Définition 2.1.2 (Lavrentiev 1959). (Stabilité conditionnelle) Soit $A : X \supseteq D(A) \rightarrow Y$ un opérateur fermé, densément défini. On dit que le problème $Ax = y$ est conditionnellement stable (ou correct au sens de TIKHONOV) sur $M \subset \mathcal{D}(A)$ s'il existe une fonction

$$\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \text{ continue en } 0 \text{ avec } \omega(0) = 0,$$

telle que l'on ait

$$\|x_2 - x_1\| \leq \omega(\|Ax_2 - Ax_1\|), \forall x_2, x_1 \in M.$$

L'ensemble M est appelée ensemble des contraintes (ou ensemble des informations a priori). L'appartenance de u à M signifie une certaine régularité ou une certaine bornitude.

- Un modèle physique étant fixé, les données expérimentales dont on dispose sont en général bruitées, et rien ne garantit que de telles données proviennent de ce modèle, même pour un autre jeu de paramètres.
- Si une solution existe, il est parfaitement concevable (et nous le verrons sur des exemples) que des paramètres différents conduisent aux mêmes observations.
- Le fait que la solution d'un problème inverse puisse ne pas exister n'est pas une difficulté sérieuse. Il est habituellement possible de rétablir l'existence en relaxant la notion de solution (procédé classique en mathématique).
- La non-unicité est un problème plus sérieux. Si un problème a plusieurs solutions, il faut un moyen de choisir entre elles. Pour cela, il faut disposer d'informations supplémentaires (une information a priori).
- Le manque de continuité est sans doute le plus problématique, en particulier en vue d'une résolution approchée ou numérique. Cela veut dire qu'il ne sera pas possible (indépendamment de la méthode numérique) d'approcher de façon satisfaisante la solution du problème inverse, puisque les données disponibles seront bruitées donc proches, mais différentes, des données réelles.

2.2 Exemples

On présente ici quelques exemples académiques, pour bien situer la complexité de cette catégorie de problèmes.

Exemple 2.2.1. La différentiation et l'intégration sont deux problèmes inverses l'un de l'autre. Il est plus habituel de penser à la différentiation comme problème direct, et à l'intégration comme problème inverse. En fait, l'intégration possède de bonnes propriétés mathématiques qui conduisent à la considérer comme le problème direct, et la différentiation est le « prototype » du problème mal posé.

Considérons l'espace de Hilbert $H = L_2(0, 1)$, et l'opérateur intégral A défini par

$$(Af)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Il est clair que A est borné ($\|A\| = \frac{2}{\pi}$). Cet opérateur est injectif, par contre son image est le sous espace vectoriel $R(A) = \{u \in H^1(0, 1) : u(0) = 0\}$, où $H^1(0, 1)$ est l'espace de Sobolev.

L'image de A n'est pas fermée dans $L_2(0, 1)$ (bien entendu, elle l'est dans $H^1(0, 1)$). En conséquence, l'inverse de A n'est pas continu sur $L_2(0, 1)$, comme le montre l'exemple suivant.

Considérons la suite $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(n^2 x)$, on a

$$\|f_n\|_H^2 = \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty,$$

alors que

$$\|f_n'\|_H^2 = n^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right) \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty.$$

$$A^{-1} = \frac{d}{dx} \text{ n'est pas continu.}$$

Exemple 2.2.2. Le problème du calcul d'un vecteur propre commun est mal posé au sens de Hadamard, comme le montre l'exemple suivant :

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Par un simple calcul exact, on trouve les couples propres suivants :

$$\left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = 1, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \lambda_1(\varepsilon) = 1 + \varepsilon, w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2(\varepsilon) = 1 - \varepsilon, w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pour $\varepsilon = 0$, B et A ont un vecteur propre commun $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour $\varepsilon \neq 0$, elles n'ont aucun vecteur propre commun, cela signifie qu'il est impossible de trouver un vecteur propre commun d'un couple de matrices en **présence d'erreurs d'arrondies**. En effet les perturbations sont susceptibles de transformer un couple, ayant un vecteur propre commun, en un couple qui ne vérifie pas cette propriété. La raison topologique derrière ceci est due au fait que l'ensemble des matrices qui n'ont aucun vecteur propre en commun est dense dans l'ensemble de tous les couples de matrices.

Cet exemple montre que les vecteurs propres sont sensibles aux perturbation additives (erreurs d'arrondi, erreurs de troncature) : deux matrices proches avec deux configurations spectrales divergentes !

Théorème 2.2.1. Pour $A \in \mathbf{M}_N(\mathbb{C})$, on note $EV(A)$ l'ensemble des vecteurs propres de A et

$$S := \{(A, B) \in \mathbf{M}_N(\mathbb{C}) \times \mathbf{M}_N(\mathbb{C}) : EV(A) \cap EV(B) = \emptyset\}$$

i.e., l'ensemble de tous les couples de matrices qui n'ont aucun vecteur propre commun. Alors S est dense dans $\mathbf{M}_N(\mathbb{C}) \times \mathbf{M}_N(\mathbb{C})$ ($\bar{S} = \mathbf{M}_N(\mathbb{C}) \times \mathbf{M}_N(\mathbb{C})$).

Exemple 2.2.3. Problème de Cauchy pour l'équation de Laplace. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_y u(x, 0) = \varphi_\varepsilon(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

où $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon \sin(x/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

On vérifie aisément que $u_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^2 \sinh(y/\varepsilon) \sin(x/\varepsilon)$ est une solution du problème (2.2.1). On remarque que $(\varphi_\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0)$ mais $(u_\varepsilon(x, y) \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0)$ pour tout $x > 0$ fixé. Ce qui prouve que les solutions de (2.2.1) ne dépendent pas continûment des données initiales.

Exemple 2.2.4. Problème d'identification de paramètres. Ce problème consiste à la détermination du paramètre $a(t)$ tel que :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), & x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

On suppose que $a(t)$ est positive et continue, $\forall t \geq 0$.

La solution unique de ce problème est donnée par

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 \int_0^t a(\tau) d\tau} \sin(\pi x). \quad (2.2.3)$$

Considérons le problème inverses suivant : Pour une mesure interne de la température au point $x = 1/2$ ($u(1/2, t) = h(t)$) déterminer $a(t)$?

De la formule (2.2.3), on peut écrire

$$h(t) = e^{-\pi^2 \int_0^t a(\tau) d\tau} \implies \ln(h(t)) = -\pi^2 \int_0^t a(\tau) d\tau \implies$$

$$a(t) = \frac{-1}{\pi^2} \frac{h'(t)}{h(t)}. \quad (S2)$$

■ Ce problème inverse admet une solution **unique** mais il est **mal posé (instable)** car la formule (S2) intervient un opérateur de dérivation ($h'(t)$) qui est instable. En effet, Supposons que :

$$d_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ -2n^5(t-1)^3 + 3n^2(t-1)^2, & 1 < t \leq 1 + \frac{1}{n^2}, \\ \frac{1}{n}, & 1 + \frac{1}{n^2} < t. \end{cases}$$

et

$$h_n(t) = h(t) + d_n(t)$$

où $h(t) = e^{-\pi^2 t}$, on trouve alors que $a(t) = 1$. De plus,

$$\|h - h_n\|_\infty \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty.$$

D'autre part, on a

$$a_n(t) = \frac{-1}{\pi^2} \left[\frac{h'_n(t)}{h_n(t)} \right] = \left[\frac{-1}{\pi^2} \frac{h'(t) + d'_n(t)}{h(t) + d_n(t)} \right]$$

avec

$$d'_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ -6n^5(t-1)^2 + 6n^2(t-1), & 1 < t < 1 + \frac{1}{n^2} \\ 0, & 1 + \frac{1}{n^2} < t \end{cases}$$

Un calcul direct de $a_n\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)$ donne

$$\begin{aligned} a_n\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right) &= \frac{-1}{\pi^2} \left[\frac{h'\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right) + d'_n\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)}{h\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right) + d_n\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)} \right] \\ &= \frac{4n^2}{\pi^2} \left[\frac{\pi^2 e^{-\pi^2\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)} + 3 - \frac{3}{2}n}{4n^2 e^{-\pi^2\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)} + 3 - n} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

Donc $a_n(t)$ ne converge pas vers $a(t) = 1$.

Exemple 2.2.5. Considérons maintenant le problème stationnaire suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x), & 0 < x < 1 \\ -k(1)u'(1) = b \\ -k(0)u'(0) = a \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Le problème direct consiste à trouver la température $u(x)$ et le problème inverse consiste à déterminer le paramètre $k(x)$ connaissant $B(u)$, où B est un opérateur d'observation. Pour résoudre ce problème, on suppose que

$$\int_0^1 f(s) ds = b - a. \quad (2.2.5)$$

Supposons que f vérifie la condition (2.2.5) et $u'(x) \neq 0$, on trouve alors :

$$k(x) = \frac{-1}{u'(x)} \left[\int_0^x f(x) + a \right]. \quad (2.2.6)$$

Donc le problème inverse admet une solution mais elle **n'est pas unique**. En effet, soient

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 2, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ 0, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

$$u(x) = \begin{cases} x^2 - x + \frac{5}{4}, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ 1, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

et soit d une fonction différentiable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Avec ces conditions, la solution du problème stationnaire est

$$k(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ d(x), & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

On voit clairement que ce problème inverse admet **une infinité de solutions**.

De plus, ce problème est instable. En effet, Soit $k(x) = x$ la solution associée à $u(x) = x$ du problème suivant :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -1. \quad (2.2.7)$$

Soit $\epsilon > 0$. Posons

$$k_\epsilon(x) = \frac{\epsilon x}{\epsilon + \cos\left(\frac{x}{\epsilon^2}\right)}$$

Par un calcul de dérivation direct, on montre que $k_\epsilon(x)$ est une solution du problème (2.2.7) en remplaçant u par $u_\epsilon(x)$ où

$$u_\epsilon(x) = \epsilon \sin\left(\frac{x}{\epsilon^2}\right) + x$$

On remarque que

$$|u_\epsilon(x) - u(x)| = \left| \epsilon \sin\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right| \leq \epsilon \implies \|u_\epsilon - u\|_\infty \leq \epsilon \longrightarrow 0, \epsilon \longrightarrow 0,$$

mais $k_\epsilon(x)$ ne converge pas vers $k(x)$ car

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |k_\epsilon(x) - k(x)| = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{\epsilon x}{\epsilon + \cos\left(\frac{x}{\epsilon}\right)} - x \right| \text{ n'existe pas.}$$

Donc, ce problème stationnaire est mal posé.

Exemple 2.2.6. Problème de Dirichlet pour l'équation des ondes.

Dans le rectangle $D = \{0 \leq t \leq T = \alpha\pi, 0 \leq x \leq \pi\}$, on considère le problème hyperbolique suivant

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, u(x, \alpha\pi) = g(x). \end{cases} \quad (\text{HP})$$

Notons $A = -\frac{d^2}{dx^2}$, $D(A) = H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi) \subset H = L^2(0, \pi)$. On sait que A est un opérateur auto-adjoint, positive et à résolvante compacte (\implies diagonalisable). Les couples propres de A sont

$$\lambda_n = n^2, \quad e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Par la méthode de Fourier, la solution formelle du problème (HP) est donnée par la formule

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{\sin(\alpha n\pi)} f_n e_n(x).$$

Soit $\gamma(s) := \sin(\alpha\pi\sqrt{s})$, $s \in \mathbb{R}$ et

$$Z(\gamma) := \{s \in \mathbb{R} : \gamma(s) = 0\} = \left\{ s_k = \left(\frac{k}{\alpha}\right)^2, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si

$$\sigma_p(A) \cap Z(\gamma) = \emptyset \iff \forall (k, n) \in \mathbb{N}_* \times \mathbb{N}_*, \frac{k}{\alpha} \neq n \iff \alpha \neq \frac{k}{n} \iff \alpha \text{ irrationnel,}$$

alors la solution est unique. Inversement, si α est un nombre rationnel positif, alors la solution du problème (HP) n'est pas unique. Cependant, le problème (HP) est mal posé au sens d'HADAMARD : $s \frac{1}{\sin(s)}$ n'est pas bornée au voisinage de $n\pi$.

Exemple 2.2.7. Equation de la chaleur rétrograde Trouver $u(x, 0) = u_0(x)$ (condition initiale inconnue), sachant que le champ de température $u(x, t)$ vérifié :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t \in (0, T), \\ u(x, T) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (\text{BCP})$$

où $\psi \in L_2(0, \pi)$ est une fonction donnée. Par la méthode de Fourier, on peut expliciter la solution du problème (BCP) sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(T-t)n^2} \psi_n e_n(x)$$

où ψ_n est le coefficient de Fourier d'ordre n de ψ : $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \psi(x) e_n(x) dx$, $e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$.

Soit $\varphi(x) = u_0(x, 0)$ la température initiale. Alors d'après l'égalité de Parseval, on a :

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n^2 T} |\psi_n|^2.$$

On considère maintenant le problème (BCP) avec des données bruitées :

$$\psi_k = \psi + \frac{1}{k} \sin(kx).$$

On remarque que $\|\psi_k - \psi\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow +\infty$ mais $\|u(\psi_k; 0) - u(\psi; 0)\| = \frac{1}{k} e^{k^2 T} \rightarrow +\infty$, $k \rightarrow +\infty$. On voit très clair que le problème (BCP) est instable donc mal posé. C'est pour cela qu'on dit que **les phénomènes de la chaleur sont irréversibles**.

Remarque 2.2.1. On remarque d'après les exemples donnés qu'il y a deux questions sérieuses liées à cette catégorie de problèmes :

1 La non unicité. Pour cette question, il nous faut des informations supplémentaires sur la solution et une bonne connaissance de la nature physique du problème, pour récupérer l'unicité.

2 L'instabilité. Ce caractère est le plus problématique, surtout dans l'implémentation numérique. Cela veut dire qu'il est impossible de donner un schéma numérique convergent et stable quel que soit la performance de la méthode proposée. Pour traiter ce caractère d'instabilité, on régularise par un problème proche (dans un certain sens) qui est stable. Les méthodes de régularisation sont variées, chaque problème nécessite un traitement spécifique selon sa complexité et son degré d'instabilité.

2.2.1 Méthode de moindres carrés linéaires

On considère ici le problème inverse

$$A: H_1 \longrightarrow H_2, \quad Ax = y, \quad (x: \text{solution recherchée}), (y: \text{donnée}) \quad (2.2.8)$$

où A est un opérateur linéaire continu et injectif d'un espace de Hilbert H_1 dans l'espace Hilbert H_2 . A cause des erreurs de mesure sur la donnée y , la solution (même au sens algébrique) peut ne pas exister du fait que $y + \eta = y_\eta$ peut ne pas appartenir à l'espace des données admissibles ($\subseteq \mathbf{R}(A)$). Dans certains

cas pratique, la condition de surjectivité est trop restrictive. Il faut chercher donc une autre formulation du problème original (2.2.8), qui permette d'étendre la notion de solution à un sous-espace plus grand. On propose une formulation comme un problème de moindres carrés : on remplace notre problème (2.2.8) par le problème

$$\min_{x \in H} F(x), \quad F(x) = \frac{1}{2} \|Ax - y\|^2. \quad (2.2.9)$$

Théorème 2.2.2. Un élément $\hat{x} \in H_1$ est un minimiseur de la fonctionnelle F ssi

$$A^* A\hat{x} = A^* y. \quad (2.2.10)$$

Cette équation est appelée **équation normale** (ou d'Euler).

Preuve. On suppose que \hat{x} minimise la fonctionnelle F qui est Fréchet-différentiable, donc \hat{x} est un point critique de F , i.e., $F'(\hat{x}) = 0$. Un calcul direct nous donne

$$F'(x).h = \langle Ax - y, Ah \rangle = \langle A^*(Ax - y), h \rangle \implies F'(x) = A^*(Ax - y).$$

D'où

$$F'(\hat{x}) = A^*(A\hat{x} - y) = 0 \iff A^* A\hat{x} = A^* y.$$

Remarque 2.2.2. L'équation normale (2.2.10) implique que

$$A^* A\hat{x} = A^* y \iff A^*(A\hat{x} - y) = 0 \iff (A\hat{x} - y) \in \mathbf{N}(A^*) = \mathbf{R}(A)^\perp,$$

Réciproquement, soit maintenant un \hat{x} vérifiant l'équation normale (2.2.10). On a pour tout $x \in H_1$

$$y - Ax = (y - A\hat{x}) + (A\hat{x} - Ax) = \xi + \zeta,$$

avec $\zeta \in \mathbf{R}(A)$ et $\xi \in \mathbf{R}(A)^\perp$, i.e., ils sont orthogonaux. Il résulte donc d'après le théorème de Pythagore que

$$\|y - Ax\|^2 = \|y - A\hat{x}\|^2 + \|A\hat{x} - Ax\|^2 \implies \|y - A\hat{x}\| \leq \|y - Ax\|, \quad \forall x \in H.$$

Ainsi, \hat{x} est solution du problème (2.2.9).

Remarque 2.2.3. La relation $(A\hat{x} - y) \in \mathbf{R}(A)^\perp = \overline{\mathbf{R}(A)}^\perp$ nous donne l'interprétation géométrique suivante :

$$\begin{aligned} A\hat{x} - y &= A\hat{x} - (y_1 + y_2), \quad y_1 \in \overline{\mathbf{R}(A)}, \quad y_2 \in \overline{\mathbf{R}(A)}^\perp, \\ \implies (A\hat{x} - y) &= (A\hat{x} - y_1) + (-y_2) + y_2 \in \overline{\mathbf{R}(A)}^\perp. \end{aligned}$$

Or, $(A\hat{x} - y_1) \in \overline{\mathbf{R}(A)}$, donc

$$(A\hat{x} - y_1) \in \overline{\mathbf{R}(A)} \cap \overline{\mathbf{R}(A)}^\perp = \{0\} \implies (A\hat{x} - y_1) = 0.$$

On conclut donc :

\hat{x} est une solution de l'équation normale (2.2.10) \iff

$$(A\hat{x} - y_1) = 0 \iff A\hat{x} = y_1 = \Pi_{\overline{\mathbf{R}(A)}}(y), \quad (2.2.11)$$

où $\Pi_{\overline{\mathbf{R}(A)}}$ désigne la projection orthogonale sur le sous-espace fermé $\overline{\mathbf{R}(A)}$.

Définition 2.2.1. On appelle solution LS (ou quasi-solution) si elle existe du problème (2.2.8) toute fonction \hat{x} vérifiant l'une des trois équations équivalentes Eq (2.2.9), Eq (2.2.10) et Eq (2.2.11).

Théorème 2.2.3. [Unicité de la solution LS] La solution du problème (2.2.9) est unique ssi l'opérateur A est injectif.

Preuve. D'après la remarque 2.2.1, il suffit de montrer que A^*A est injectif. Si A est injectif, alors de l'égalité $\mathbf{N}(A^*A) = \mathbf{N}(A) = \{0\}$, on déduit le résultat. ■

Théorème 2.2.4. [Existence de la solution LS] La solution du problème (2.2.9) exist ssi

$$y \in G = \mathbf{R}(A) + \mathbf{R}(A)^\perp.$$

L'ensemble S des solutions de l'équation (2.2.9) est un convexe fermé non vide de H_1 .

Preuve. (i) Soit \hat{x} une solution de LS, alors on a

$$A\hat{x} + (y - A\hat{x}) = y \in \mathbf{R}(A) + \mathbf{R}(A)^\perp.$$

Inversement, soit $y = y_1 + y_2 \in \mathbf{R}(A) + \mathbf{R}(A)^\perp$ avec $y_1 \in \mathbf{R}(A)$ et $y_2 \in \mathbf{R}(A)^\perp$. Il existe donc $x_1 \in H_1$ tel que $y_1 = Ax_1$, ce qui implique $A^*Ax_1 = A^*y_1$, $A^*y_2 = 0$ (car $\mathbf{R}(A)^\perp = \mathbf{N}(A^*)$), i.e., il existe $x_1 \in H_1$ vérifiant l'équation

$$A^*y = A^*y_1 = A^*Ax_1.$$

(ii) L'ensemble des solutions est non-vidé d'après le point (i). C'est un espace affine, c'est donc en particulier un convexe, et il est fermé puisque c'est l'image réciproque de A^*y par l'opérateur continu $T = A^*A$. Ceci prouve que $S = x_0 + \mathbf{N}(A)$, où x_0 est une solution quelconque de (2.2.9).

Théorème 2.2.5. L'ensemble $G = \mathbf{R}(A) + \mathbf{R}(A)^\perp$ est dense dans H_2 .

Preuve. Si $x \in (\mathbf{R}(A) + \mathbf{R}(A)^\perp)^\perp$, alors, pour tous $y \in \mathbf{R}(A)$, $z \in \mathbf{R}(A)^\perp$, on a $\langle x, y+z \rangle = 0$. En choisissant d'abord $z = 0$, on obtient $x \in \mathbf{R}(A)$, puis en choisissant $y = 0$, on obtient $x \in \mathbf{R}(A)^\perp$. Autrement dit,

$$(\mathbf{R}(A) + \mathbf{R}(A)^\perp)^\perp = \mathbf{R}(A) \cap \mathbf{R}(A)^\perp = \{0\},$$

ce qui montre la densité recherchée. ■

Définition 2.2.2. On note par $x_g \in H_1$ (solution généralisée) la solution du problème (2.2.9) de norme minimale, i.e. $x_g \in S$ et $\|x_g\| \leq \|\hat{x}\|$ pour toute solution $\hat{x} \in S$.

Théorème 2.2.6. Si $y \in G$, alors le problème (2.2.9) (\Leftrightarrow (2.2.10)) admet une unique solution généralisée.

Preuve. Notons S l'ensemble de solutions de (2.2.9) (\Leftrightarrow (2.2.10)). Chercher une solution de norme minimale de ce problème de moindres carrés revient à résoudre le problème suivant :

$$\min_{\hat{x} \in S} \|\hat{x}\| = \min_{\hat{x} \in S} \|\hat{x} - 0\| = \text{dist}(0, S) = \Pi_S(0),$$

c'est-à-dire à projeter l'origine sur l'ensemble S . D'après le point (ii) du théorème 2.2.4, S est un convexe fermé non-vide de H_1 . Le théorème de projection sur un convexe fermé implique que S possède un élément de norme minimale, qui est la solution recherchée. ■

Définition 2.2.3. On note par A_g^{-1} (noté aussi A^+) l'inverse généralisé (inverse de Moore-Penrose) de A , défini comme suit :

$$A_g^{-1} : D(A_g^{-1}) = \mathbf{R}(A) + \mathbf{R}(A)^\perp \subset H_2 \longrightarrow H_1, \quad y \longmapsto A_g^{-1}(y) = x_g \text{ (notée aussi } x^+). \quad (2.2.12)$$

On montre que $A_g^{-1} \text{ ssi } \mathbf{R}(A)$.

Théorème 2.2.7. Si $\tilde{A} = A | \mathbf{N}(A)^\perp$ représente la restriction de A sur $\mathbf{N}(A)^\perp$, alors pour tout $y \in D(A_g^{-1})$, on a :

$$A_g^{-1} y = \tilde{A}^{-1} P(y)$$

où $P(y)$ est la projection de y sur $\overline{\mathbf{R}(A)}$.

Remarque 2.2.4. Si A est injectif et compact, alors $A^* A$ est aussi injectif et compact, et donc, on peut parler de l'inversion $A^* A$ de l'opérateur au sens algébrique uniquement $(A^* A)^{-1}$ n'est continu : on a élargi la notion de solution pour un domaine vaste et dense, mais le problème de stabilité est présent toujours si A est compact ou $\mathbf{R}(A)$ n'est pas fermée.

2.3 Inverse généralisé et méthodes de régularisation

Dans l'étude des équations de la forme :

$$B : D(B) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2, u \longmapsto Bu = v,$$

la fermeture de $\mathbf{R}(B)$ est une propriété cruciale, pour que l'inverse de B soit borné. Le Théorème de Banach nous fournit une caractérisation topologique de cette propriété :

Théorème 2.3.1 (Théorème de Banach sur l'inversion bornée). *On suppose que B est injectif. Alors $B^{-1} : \mathbf{R}(B) \longrightarrow H_1$ est borné si et seulement si $\mathbf{R}(B)$ est fermée.*

Théorème 2.3.2 (Théorème de PICARD). *Soit $K \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ un opérateur compact, et $\{(\sigma_n, \varphi_n, \psi_n), n \in \mathbb{N}\}$ son système singulier. Alors le problème :*

$$Kf = g \tag{2.3.1}$$

est résoluble si et seulement si

$$g \in \mathbf{N}(K^*)^\perp = \overline{\mathbf{R}(K)}, \tag{2.3.2}$$

et

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sigma_n^2} |\langle g, \psi_n \rangle|^2 < +\infty. \tag{2.3.3}$$

Dans ce cas, la solution est donnée par la formule :

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sigma_n} \langle g, \psi_n \rangle \varphi_n + f_0, f_0 \in \mathbf{N}(K). \tag{2.3.4}$$

Le Théorème de Picard nous fournit un critère théorique et pratique, dans le cas où on connaît explicitement le système singulier de l'opérateur K .

Remarque 2.3.1. On remarque que le terme général de la série (2.3.3) est un produit de deux quantités avec des vitesses opposées :

- le coefficient $\frac{1}{\sigma_n^2} |\langle g, \psi_n \rangle|^2$ (terme général d'une série convergente, il tend donc vers 0),
- les hautes fréquences $\frac{1}{\sigma_n^2} \longrightarrow +\infty$.

A partir de cette remarque, il est clair que la convergence de la série (2.3.3) ne pourrait être garantie sauf si le coefficient de Fourier $\langle g, \psi_n \rangle$ posséderait une certaine vitesse de décroissance qui peut contrôler la vitesse des hautes fréquences.

- Afin de proposer une stratégie de régularisation efficace, on doit mesurer tout d'abord la complexité du problème posé. En général, on ne dispose pas d'un cadre théorique permettant de donner des réponses à ce type de questions, mais dans des cas particuliers, on a des critères qui caractérisent que tels problèmes sont fortement ou faiblement mal posés.
- Pour les opérateurs compacts, on utilise le critère suivant :

Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert séparables, $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, et soit le problème inverse :

$$T : H_1 \longrightarrow H_2, u \longrightarrow Tu = v. \quad (2.3.5)$$

Définition 2.3.1. (cf. [2]) On dit que le problème (2.3.5) est faiblement mal posé (resp. fortement mal posé), si les valeurs singulières s_n de $K = T^*T$ sont équivalentes à $\frac{C}{n^p}$ (resp. Ce^{-n^p}), où C et p sont des constantes positives.

La régularisation des problèmes mal posés, due initialement à TIKHONOV [10], cherche à redéfinir les notions d'inversion et de solution (quasi-solution, solution approchée, ...), de façon que la « solution régularisée » obtenue par « inversion régularisée » dépend continûment des données et soit proche de la solution exacte (supposant que celle-ci existe pour des données proches des valeurs effectivement obtenues par la mesure). En d'autres termes, on remplace le problème initial mal posé par un autre « proche dans un certain sens » du premier et qui est bien posé.

Considérons le problème inverse $Kh_1 = h_2$ où $K : H_1 \longrightarrow H_2$ est un opérateur compact injectif.¹ On suppose que $h_2 \in \mathbf{R}(K)$, i.e., le problème inverse possède une solution unique.²

Définition 2.3.2. Une famille d'opérateurs linéaires bornés $R_\alpha : H_2 \longrightarrow H_1, (\alpha > 0)$ est dite "famille régularisante" pour l'opérateur K si

$$\forall h_1 \in H_1, \lim_{\alpha \rightarrow 0} (R_\alpha K) h_1 = h_1, \text{ i.e., } R_\alpha K \longrightarrow I \text{ simplement.}$$

Remarque 2.3.2. Si R_α est une famille régularisante pour l'opérateur $K : H_1 \longrightarrow H_2$, où H_1 est de dimension infinie, alors les opérateurs R_α ne sont pas uniformément bornés, i.e., il existe une suite $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_{\alpha_n}\| = +\infty$.

La donnée initiale $h_2 \in H_2$ n'est jamais connue exactement : il y a toujours un bruit qui vient la perturber. Notons h_2^η la donnée perturbée où le nombre $\eta > 0$ est le niveau du bruit, i.e., $|h_2 - h_2^\eta| \leq \eta$.

1. Le fait de choisir K injectif n'est pas très contraignant car on peut toujours restreindre l'espace H_1 au complément orthogonal de $\mathbf{N}(K)$, où \mathbf{N} désigne le noyau.

2. Il faut noter que notre problème inverse $Kh_1 = h_2$ est toujours mal posé à cause de la non continuité de K^{-1} .

Notons $h_1^{\alpha, \eta} = R_\alpha h_2^\eta$ l'approximation de la solution du problème inverse $Kh_1 = h_2$ obtenue avec l'opérateur de régularisation et la donnée perturbée. En utilisant l'inégalité triangulaire sur $\{h_1 - h_1^{\alpha, \eta}\}$, on obtient

$$\|h_1 - h_1^{\alpha, \eta}\| = \|(h_1 - R_\alpha h_2) + (R_\alpha h_2 - h_1^{\alpha, \eta})\| \leq \eta \|R_\alpha\| + \|(h_1 - R_\alpha h_2)\|. \quad (2.3.6)$$

Le premier terme de droite de l'équation (2.3.6) représente la majoration de l'erreur due au niveau de bruit. Par la Remarque 2.3.2, nous avons vu que $\|R_{\alpha_n}\| \rightarrow +\infty$ quand $\alpha \rightarrow 0$. Donc il ne faut pas choisir α trop petit sinon l'erreur peut devenir très grande. Par contre le second terme de droite de (2.3.6) tend vers 0 quand α tend vers 0 par définition de R_α . Nous allons faire tendre le niveau de bruit η vers 0 et nous allons choisir une stratégie de régularisation de manière à ne pas commettre une trop grande erreur sur la vraie solution h_1 .

Définition 2.3.3. Une stratégie de régularisation $\eta \rightarrow \alpha(\eta)$ est admissible si pour tout $h_1 \in H_1$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \alpha(\eta) = 0 \text{ et } \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\sup_{h_2^\eta \in H_2} \left\{ \|R_{\alpha(\eta)} h_2^\eta - h_1\| \text{ tel que } \|Kh_1 - h_2^\eta\| \leq \eta \right\} \right) = 0 \quad (2.3.7)$$

Les stratégies de régularisation sont variées. Chaque problème nécessite un traitement spécifique selon son degré de complexité. (Voir [2]). Parmi les méthodes les plus connues en problèmes inverses et en calcul matriciel mal conditionné, on a la méthode de Tikhonov et la méthode de la troncature spectrale.

2.3.1 Méthode de Tikhonov

► Le principe de la régularisation de Tikhonov pour stabiliser le problème inverse mal posé $Af = g$ est de choisir comme solution l'élément f_α qui minimise la fonctionnelle

$$\frac{1}{2} \{ \|Af - g\|^2 + \alpha \|f\|^2 \}, \alpha > 0. \quad (2.3.8)$$

Le paramètre α est appelé paramètre de régularisation et le terme $\|f\|^2$ est appelé terme de correction. Le choix du paramètre α est basé sur un critère d'équilibre entre l'erreur due au terme de correction et le gain de la stabilité.

On a le Théorème suivant :

Théorème 2.3.3. [5] Soit $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors la fonctionnelle de Tikhonov admet un unique minimum f_α . L'élément f_α est la solution de l'équation normale

$$S_\alpha f_\alpha = (\alpha I + A^* A) f_\alpha = A^* g. \quad (2.3.9)$$

Preuve. L'existence et l'unicité du minimum sont assurées par la coercivité et la stricte convexité de $f \mapsto \|f\|^2$. Notons f_α l'unique minimiseur de la fonction $F(f) = \frac{1}{2} \{\|Af - g\|^2 + \alpha \|f\|^2\}$ qui Fréchet-différentiable. Un calcul direct nous donne

$$F'(f)(h) = \langle Af - g, Ah \rangle + \langle f, h \rangle.$$

Puisque f_α est un point critique de F' , il vient donc

$$F'(f_\alpha)(h) = \langle Af_\alpha - g, Ah \rangle + \alpha \langle f_\alpha, h \rangle = 0 = \langle A^*(Af_\alpha - g), h \rangle + \alpha \langle f_\alpha, h \rangle, \forall h \in H,$$

ce qui donne

$$A^*(Af_\alpha - g) + \alpha f_\alpha = 0 \iff (A^*A + \alpha I)f_\alpha = K^*g. \quad (\text{Equation d'Euler})$$

Notons $S_\alpha = (A^*A + \alpha I)$. Il est clair que S_α est auto-adjoint ($S_\alpha = S_\alpha^*$), positif :

$$\langle S_\alpha h, h \rangle = \|Ah\|^2 + \alpha \|h\|^2 \geq \alpha \|h\|^2, \forall h \in H_1 \implies (\sigma(S_\alpha) \subset [\alpha, \|S_\alpha\|] \implies 0 \in \rho(S_\alpha)).$$

En conséquence, S_α^{-1} existe et $S_\alpha^{-1} \in \mathcal{L}(H_1)$.

La famille d'opérateurs $R_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1} A^* : H_2 \rightarrow H_1$, est appelée famille régularisante de Tikhonov.

On a $\|R_\alpha\| = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$. En effet,

$$\|R_\alpha\|^2 = \|R_\alpha R_\alpha^*\| = \|(\alpha I + A^*A)^{-2} A^*A\| = \sup_{t \in [0, \|A\|^2]} \frac{t}{(\alpha + t)^2} = \frac{1}{4\alpha}.$$

• Montrons maintenant que (R_α) est une famille d'opérateurs régularisante pour A . Sans perdre la généralité du problème, on suppose que A est compact. Notons $\{s_n, \varphi_n, \psi_n\}$ la SVD de l'opérateur A^*A :

$$\forall h \in H_1, h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, \varphi_n \rangle \psi_n, \quad A\varphi_n = s_n \psi_n, \quad A^* \psi_n = s_n \varphi_n.$$

On a

$$R_\alpha Ah - h = (R_\alpha A - I) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle h, \varphi_n \rangle \psi_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{s_n^2}{\alpha + s_n^2} - 1 \right] \langle h, \varphi_n \rangle \psi_n \implies$$

$$\Delta_\alpha = \|R_\alpha A^* h - h\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{s_n^2}{\alpha + s_n^2} - 1 \right]^2 |\langle h, \varphi_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{s_n^2}{\alpha + s_n^2} - 1 \right]^2 |\langle h, \varphi_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha^2}{\alpha + s_n^2} \right]^2 |\langle h, \varphi_n \rangle|^2$$

$$\Delta_\alpha = \sum_{n=1}^N \left[\frac{\alpha^2}{\alpha + s_n^2} \right]^2 |\langle h, \varphi_n \rangle|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left[\frac{\alpha^2}{\alpha + s_n^2} \right]^2 |\langle h, \varphi_n \rangle|^2 = \Delta_\alpha^1 + \Delta_\alpha^2,$$

où

$$\Delta_\alpha^1 = \sum_{n=1}^N \left[\frac{\alpha^2}{\alpha + s_n^2} \right]^2 |\langle h, \varphi_n \rangle|^2 \leq \frac{\alpha^2}{s_N^2} \sum_{n=1}^N |\langle h, \varphi_n \rangle|^2 \leq \frac{\alpha^2}{s_N^2} \|h\|^2, \quad (a2)$$

$$\Delta_\alpha^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left[\frac{\alpha^2}{\alpha + s_n^2} \right]^2 |\langle h, \varphi_n \rangle|^2 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle h, \varphi_n \rangle|^2. \quad (a3).$$

La série $|h|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, \varphi_n \rangle|^2$ est convergente, donc pour $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle h, \varphi_n \rangle|^2 < \varepsilon/2.$$

Ce qui implique

$$\Delta_\alpha^2 < \varepsilon/2$$

Pour conclure le résultat de convergence, il suffit de choisir α tel que

$$\frac{\alpha^2}{s_N^2} \|h\|^2 < \varepsilon/2.$$

Donc, pour $\alpha < \left\{ \frac{\varepsilon s_N^2}{\|h\|^2} \right\}^{1/2}$, on obtient $\Delta_\alpha < \varepsilon$, i.e., $\Delta_\alpha \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$. ■

► Tout choix de $\alpha(\eta) \rightarrow 0$ avec $(\frac{\eta}{2\sqrt{\alpha}} \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0)$ est admissible.

► Le paramètre de régularisation $\alpha > 0$ est choisi via le principe d'écart (en anglais : discrepancy principle) de MOROZOV [6]. Ce principe consiste à fixer le paramètre tel que la solution correspondante ait une erreur égale au niveau de bruit.

Le choix optimal est extrêmement difficile et les critères qui existent sont d'application délicate, et nécessitent des méthodes itératives pour être mis en oeuvre.^{3,4}

► Dans la pratique nous supposons qu'un paramètre α est valable si l'erreur appartient à un petit intervalle contenant la valeur du niveau de bruit $\eta > 0$ (cf. [7], page 172).

2.3.2 Méthode de troncature spectrale

Soit $K \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur compact. On suppose aussi que K est injectif et positif. On note (λ_n, e_n) les couples propres de la décomposition spectrale de K , c-à-d :

$$K e_n = \lambda_n e_n, \quad 0 \leq \lambda_n \rightarrow 0, \quad \langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}, \quad \forall h \in H, h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n \rangle e_n$$

On définit la famille d'opérateurs $R_\alpha : H \rightarrow H, \alpha > 0$, par

$$R_\alpha h = \sum_{\lambda_n \geq \alpha} \frac{\langle h, e_n \rangle}{\lambda_n} e_n, \quad h \in H.$$

3. **Méthodes a priori** : utilisation d'informations sur le niveau d'erreur et sur l'opérateur K .

4. **Méthodes a posteriori** : utilisent aussi les données g_η . $\alpha_{opt} := \max\{\alpha : |K f_\alpha - g_\eta| \leq \eta\}$, où $f_\alpha = \inf_f \{|K f_\alpha - g_\eta|^2 + \alpha |f_\alpha|^2\}$.

Théorème 2.3.4. La famille d'opérateurs (R_α) définit une stratégie de régularisation pour K

Preuve. Par définition, on a

$$R_\alpha h = \sum_{\lambda_n \geq \alpha} \frac{\langle h, e_n \rangle}{\lambda_n} e_n.$$

Pour démontrer que (R_α) définit une stratégie de régularisation pour K , on doit démontrer que

$$\forall h \in H, \quad \|R_\alpha K h - h\| \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0.$$

On a

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n \rangle e_n, \quad K h = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle h, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n e_n, \quad \nu_n = \lambda_n \langle h, e_n \rangle,$$

d'où

$$\|h - R_\alpha K h\|^2 = \left\| \sum_{\lambda_n < \alpha} \langle h, e_n \rangle e_n + \sum_{\lambda_n \geq \alpha} \langle h, e_n \rangle e_n - \sum_{\lambda_n \geq \alpha} \frac{\nu_n}{\lambda_n} e_n \right\|^2 =$$

$$\left\| \sum_{\lambda_n < \alpha} \langle h, e_n \rangle e_n + \sum_{\lambda_n \geq \alpha} \langle h, e_n \rangle e_n - \sum_{\lambda_n \geq \alpha} \frac{\lambda_n \langle h, e_n \rangle}{\lambda_n} e_n \right\|^2 = \left\| \sum_{\lambda_n < \alpha} \langle h, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \sum_{\lambda_n < \alpha} |\langle h, e_n \rangle|^2.$$

La quantité $\Delta_\alpha = \sum_{\lambda_n < \alpha} |\langle h, e_n \rangle|^2$ représente le reste d'une série convergente, à termes positifs, donc $\Delta_\alpha \rightarrow 0$ quand $\alpha \rightarrow 0$.

• Soit f la solution exacte de l'équation $K f = g$, où $g \in R(K)$, et soit $g_\delta \in H$ tel que $\|g - g_\delta\| \leq \delta$.

On pose $f_\alpha^\delta = R_\alpha g_\delta$, et on choisit $\alpha = c \cdot \delta^\theta$, où $c > 0$ et $\theta \in]0, 1[$. Sous ces conditions, on montre que

$$\|f_\alpha^\delta - f\| \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0.$$

En effet, on peut écrire

$$\|f_\alpha^\delta - f_\alpha\| \leq \|f_\alpha^\delta - f_\alpha\| + \|f_\alpha - f\|,$$

où

$$f_\alpha^\delta = R_\alpha g_\delta, \quad f_\alpha = R_\alpha g.$$

On a

$$\|f_\alpha^\delta - f_\alpha\| = \|R_\alpha g_\delta - R_\alpha g\| \leq \|R_\alpha\| \|g_\delta - g\| \leq \|R_\alpha\| \delta,$$

$$\|f_\alpha - f\| = \|R_\alpha g - f\| = \|R_\alpha K f - f\| = \Delta_\alpha \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0.$$

De la formule

$$\|\Phi(K)\| = \sup_n |\Phi(\lambda_n)|, \quad \Phi \in C([0, \infty[, \mathbb{R}),$$

on trouve

$$\|R_\alpha\| = \sup_{\lambda_n \geq \alpha} \frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{\alpha}.$$

On obtient donc

$$\|f_\alpha^\delta - f_\alpha\| \leq \frac{\delta}{\alpha} + \Delta_\alpha.$$

Pour $\alpha = c\delta^\theta$, $0 < \theta < 1$, on a

$$\frac{\delta}{\alpha} = \frac{\delta}{c\delta^\theta} = \frac{1}{c}\delta^{1-\theta} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0.$$

On a démontré donc l'existence de $\alpha = c\delta^\theta$, $0 < \theta < 1$ tq $\alpha \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$ et

$$\|f_\alpha^\delta - f_\alpha\| \leq \frac{1}{c}\delta^{1-\theta} + \Delta_{\alpha(\delta)} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0.$$

Remarque 2.3.3. On a donné ici deux méthodes de régularisation populaires d'intérêt numérique. Les stratégies de régularisation sont variées, chaque problème a un traitement spécifique selon sa complexité et son degré d'instabilité.

Méthode de Legendre-Collocation régularisée

Plusieurs problèmes inverses en sciences et technologie définis sur un espace unidimensionnel, peuvent être modélisés par des équations intégrales de Fredholm de première espèce, i.e., des équations de la forme :

$$Kf(t) = \int_a^b k(t, s)f(s)ds = g(t), \quad -\infty < a \leq t \leq b < +\infty, \quad (3.0.1)$$

où $k(.,.) \in L^2([a, b]^2)$ est le noyau, qui est en général non dégénéré, $g \in L^2(a, b)$ est la donnée et $f \in L^2(a, b)$ est l'inconnu recherché.

Ces problèmes sont mal posés au sens de Hadamard, et leur traitement numérique pose un problème très délicat.

Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes numériques ont été développées pour traiter cette catégorie de problèmes instables. Parmi ces méthodes, on distingue deux variétés les plus utilisées : les méthodes de collocation qui sont basées sur le développement de la solution en termes de quelques fonctions de base, et la seconde utilise des formules de quadrature. Dans les deux cas, il a été démontré que le taux de convergence de ces méthodes est d'ordre polynômial, i.e., de la forme $O(1/N^p)$, $p \geq 1$, où N représente la dimension finie de l'espace sur lequel se fait la projection, où le nombre de points de la formule de quadrature.

Dans notre investigation, on propose l'étude de la méthode de Legendre-collocation régularisée, i.e., une méthode numérique basée sur la méthode de projection de Galerkin, où la solution est projetée sur un sous-espace engendré par des polynômes orthogonaux de Legendre. Cette méthode est combinée avec une procédure de régularisation de type Tikhonov. On montre la convergence de cette approche, et on donne le bilan d'erreur justifié par des expérimentations numériques.

3.1 Polynôme de Legendre

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques propriétés importantes des polynômes de Legendre qui seront utiles par la suite.

On désigne par I l'intervalle $[-1; 1]$, et on note $P_N(I)$ l'espace des polynômes de degré $\leq N$.

Définition 3.1.1. On appelle famille de polynômes de Legendre, l'ensemble $(P_n)_n$ de polynômes sur I , deux à deux orthogonaux dans l'espace $L^2([-1; 1])$ et tels que, pour tout entier $n \geq 0$, le polynôme P_n vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) P_n' \right\} + n(n+1) P_n = 0, \quad (3.1.1)$$

avec la condition $P_n(1) = 1$.

Il est bien connu, que les polynôme P_n sont donnés par la formule de Rodrigues suivante :

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left\{ \frac{d^n}{dx^n} \left((1-x^2)^n \right) \right\}. \quad (3.1.2)$$

La famille $(P_n)_n$ vérifie la relation de récurrence à trois termes suivante :

$$\begin{cases} (n+1) P_{n+1}(x) = (2n+1)x P_n(x) - n P_{n-1}(x), & n \geq 1 \\ P_0(x) = 1 \text{ et } P_1(x) = x. \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Pour tous entiers $n, m \geq 0$, on a

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } m = n \end{cases} \quad (3.1.4)$$

On note aussi que ces polynômes forment une base orthogonale de $L^2([-1, 1])$.

Les polynômes de Legendre normalisés \tilde{P}_n sont donnés par :

$$\tilde{P}_n = \frac{P_n}{\|P_n\|_{L^2(I)}} = \sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n \quad (3.1.5)$$

forment une base orthonormale de $L^2(I)$.

Soit P_n le polynôme de Legendre de degré n sur I , le polynôme de Legendre P_n translaté sur l'intervalle $[a, b]$ est donné par :

$$P_n^{[a,b]}(x) = P_n(\alpha x + \beta)$$

tel que :

$$\begin{cases} \alpha a + \beta = -1 \\ \text{et } \alpha b + \beta = 1 \end{cases}$$

On définit le polynôme de Legendre normalisé \tilde{P}_n translaté sur l'intervalle $[a, b]$ par :

$$\tilde{P}_n^{[a,b]}(x) = \sqrt{\alpha} \sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n(\alpha x + \beta).$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on note par π_N le projecteur de $L^2(I)$ sur $P_N([-1, 1])$ donné par :

$$\pi_N u = \sum_{n=0}^N a_n \tilde{P}_n, \quad (3.1.6)$$

où

$$a_n = \langle u, \tilde{P}_n \rangle_{L^2(I)} = \int_{-1}^1 u(x) \tilde{P}_n(x) dx.$$

Définition 3.1.2. Pour tout entier positif s , $H^s(I)$ est l'espace des fonctions u dans $L^2(I)$ telles que leurs dérivées jusqu'à l'ordre s appartiennent à $L^2(I)$, il est muni de la semi-norme

$$|u|_{H^s(I)} = \|d_x^s u\|_{L^2(I)},$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^s(I)} = \left(\sum_{l=0}^s \|d_x^l u\|_{L^2(I)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

La famille $\{\tilde{P}_n\}_n$ forme une base de l'espace de Sobolev $H^s(I)$. La qualité d'approximation dans $H^s(I)$ par les polynômes de Legendre est donnée par le théorème suivant.

Théorème 3.1.1. [1] Pour tout entier $s \geq 0$, il existe une constante c positive ne dépendant que de s telle que, pour toute fonction u de $H^s(I)$, on ait :

$$\|u - \pi_N u\|_{L^2(I)} \leq c N^{-s} \|u\|_{H^s(I)}. \quad (3.1.7)$$

Les polynômes de Legendre jouent un rôle important dans la méthode de quadrature de Gauss. C'est l'objet du paragraphe suivant.

3.2 Formules de quadrature

Il est bien connu que les zéros des polynômes de Legendre (ou autre famille de polynômes orthogonaux) servent à la construction de formules de quadrature numérique à haute précision, comme par exemple, la formule de Gauss-Legendre donnée par :

Proposition 3.2.1. Soit N un entier positif fixé. Il existe un unique ensemble de N points ζ_j de I , $1 \leq j \leq N$, et un unique ensemble de N réels w_j , $1 \leq j \leq N$, tels que l'égalité suivante ait lieu pour tout polynôme Φ de $P_{2N-1}(I)$

$$\int_{-1}^1 \Phi(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^N \Phi(\zeta_j) w_j. \quad (3.2.1)$$

Les noeuds ζ_j , $1 \leq j \leq N$, sont les zéros du polynôme P_n . Les poids w_j , $1 \leq j \leq N$, sont positifs.

Calcul des noeuds et des poids de la méthode de Gauss-Legendre

Les noeuds de Gauss-Legendre sont les n racines du polynôme P_n dans $[-1, 1]$. Pour les calculer, la première idée consiste à résoudre justement l'équation définie par $P_n(x) = 0$, par exemple en utilisant la méthode de Newton-Raphson. L'expérience montre qu'en plus du coût élevé quand N devient grand (≥ 20 environ), un problème de précision se pose. D'où l'importance de l'algorithme ci-dessous.

Rappelons la formule de récurrence vérifiée par les polynômes de Legendre. On a :

$$\begin{cases} P_0(\zeta) = 1 & \text{et} & P_1(\zeta) = \zeta \\ (n+1)P_{n+1}(\zeta) = (2n+1)\zeta P_n(\zeta) - nP_{n-1}(\zeta), & n \geq 1 \end{cases}$$

A partir de cette relation de récurrence, on peut en réécrire une équivalente pour les polynômes de Legendre normés $\tilde{P}_n = \sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n$

$$\zeta \tilde{P}_n(\zeta) = \beta_{n+1} \tilde{P}_{n+1}(\zeta) + \beta_n \tilde{P}_{n-1}(\zeta), \quad (3.2.2)$$

avec

$$\beta_n = \frac{n}{\sqrt{4n^2 - 1}}. \quad (3.2.3)$$

Cette relation de récurrence écrite pour tout $n > 0$ est équivalente à

$$\zeta \begin{pmatrix} \tilde{P}_0 \\ \tilde{P}_1 \\ \vdots \\ \tilde{P}_{N-2} \\ \tilde{P}_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{N-1} \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{N-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{P}_0 \\ \tilde{P}_1 \\ \vdots \\ \tilde{P}_{N-2} \\ \tilde{P}_{N-1} \end{pmatrix} + \beta_N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \tilde{P}_N \end{pmatrix}. \quad (3.2.4)$$

Les noeuds de Gauss-Legendre ζ_j sont donc les valeurs propres de la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{N-1} \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{N-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2.5)$$

cette matrice M est de façon évidente tridiagonale symétrique et à diagonale nulle.

Pour le calcul des poids w_j , $1 \leq j \leq N$, nous allons utiliser la formule de Christoffel-Darboux suivante (dont la démonstration se fait par récurrence).

Pour tout $n \geq 0$, $\forall \zeta \in I$, $\forall \mu \in I$

$$\tilde{P}_0(\zeta)\tilde{P}_0(\mu) + \dots + \tilde{P}_n(\zeta)\tilde{P}_n(\mu) = \frac{k_n^*}{k_{n+1}^*} \frac{\tilde{P}_{n+1}(\zeta)\tilde{P}_n(\mu) - \tilde{P}_{n+1}(\mu)\tilde{P}_n(\zeta)}{\zeta - \mu}, \quad (3.2.6)$$

où k_n^* désigne le coefficient du monôme de degré n de $\tilde{P}_n(\zeta)$. En particulier pour $\mu = \zeta_j$ et $n = N-1$ on a :

$$\tilde{P}_0(\zeta)\tilde{P}_0(\mu) + \dots + \tilde{P}_{N-1}(\zeta)\tilde{P}_{N-1}(\mu) = \frac{k_{N-1}^*}{k_N^*} \frac{\tilde{P}_N(\zeta)\tilde{P}_{N-1}(\zeta_j)}{\zeta - \zeta_j}. \quad (3.2.7)$$

Cette relation une fois intégrée nous donne

$$1 = \frac{k_{N-1}^*}{k_N^*} \tilde{P}_{N-1}(\zeta_j) \int_{-1}^1 \frac{\tilde{P}_N(\zeta)}{\zeta - \zeta_j} d\zeta. \quad (3.2.8)$$

En remarquant que $(\zeta - \zeta_j)^{-1} \tilde{P}_N(\zeta)$ est dans $P_{N-1}(I)$, on peut calculer cette intégrale par la formule de quadrature et on obtient :

$$1 = \frac{k_{N-1}^*}{k_N^*} \tilde{P}_{N-1}(\zeta_j) \tilde{P}'_N(\zeta_j) w_j \quad (3.2.9)$$

En faisant tendre dans (3.2.7) ζ vers ζ_j et en identifiant avec (3.2.9) on trouve

$$w_j = \frac{1}{\tilde{P}_0^2(\zeta_j) + \dots + \tilde{P}_{N-1}^2(\zeta_j)}. \quad (3.2.10)$$

On remarque que (3.2.10) s'écrit aussi de la façon simple suivante :

$$w_j = \frac{2}{NP'_N(\zeta_j)P_{N-1}(\zeta_j)} \quad (3.2.11)$$

Quelques exemples numériques

Le tableau ci-dessous contient les valeurs numériques des noeuds et des poids du polynôme de Legendre avec différentes valeurs de N

N = 3	noeuds ζ_j	0.11270	0.50000	0.88729						
	poids w_j	0.27777	0.44444	0.27777						
N = 5	noeuds ζ_j	0.04691	0.23076	0.50000	0.76923	0.95308				
	poids w_j	0.11846	0.23931	0.28444	0.23931	0.11846				
N = 10	noeuds ζ_j	0.01304	0.06746	0.16029	0.28330	0.42556	0.57443	0.71669		
	poids w_j	0.03333	0.07472	0.10954	0.13463	0.14776	0.14776	0.13463		
	noeuds ζ_j	0.83970	0.93253	0.98695						
	poids w_j	0.10954	0.07472	0.03333						
N = 15	noeuds ζ_j	0.00600	0.03136	0.07589	0.13779	0.21451	0.30292	0.39940	0.50000	
	poids w_j	0.01537	0.03518	0.05357	0.06978	0.08313	0.09308	0.09921	0.10128	
	noeuds ζ_j	0.60059	0.69707	0.78548	0.86220	0.92410	0.96863	0.99399		
	poids w_j	0.09921	0.09308	0.08313	0.06978	0.05357	0.03518	0.01537		

3.3 Méthode de Legendre-Collocation régularisée pour une équation intégrale de Fredholm de première espèce

3.3.1 Position du problème

Le but de cette étude est de développer une méthode numérique d'ordre de précision très élevé, pour une classe d'équations intégrales de Fredholm de première espèce :

$$Kf(t) = \int_a^b k(t,s)f(s)ds = g(t) \quad a \leq t \leq b \quad (3.3.1)$$

On suppose que l'opérateur K est injectif et $g \in R(K)$, i.e., le problème (3.3.1) est résoluble dans la classe admissible $R(K)$.

3.3.2 Méthode de Legendre-Collocation régularisée

Dans cette partie, on considère le problème régularisé suivant :

$$\left[(\alpha I + K^* K) f_\alpha^\delta \right] (x) = K^* g^\delta(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.3.2)$$

En utilisant une approximation basée sur les polynômes de Legendre normalisés, on transforme le problème continu (3.3.2) en un problème discret en dimension finie. Cette étape fait intervenir les opérations suivantes :

On commence tout d'abord par une approximation de la solution régularisée $f_\alpha^\delta(t)$ comme suit :

$$f_\alpha^\delta(x) \approx \pi_N \left(f_\alpha^\delta \right) (x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \tilde{P}_n(x) \quad (3.3.3)$$

En substituant l'expression (3.3.3) dans l'équation (3.3.2), on obtient deux expressions

$$\left[(\alpha I + K^* K) \sum_{n=0}^{N-1} a_n \tilde{P}_n \right] (x) = K^* g^\delta(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.3.4)$$

et

$$R_\alpha^{N,\delta}(x) = \left[(\alpha I + K^* K) \sum_{n=0}^{N-1} a_n \tilde{P}_n(x) \right] - K^* g^\delta(x) \quad (3.3.5)$$

où $R_\alpha^{N,\delta}(\cdot)$ est la fonction résiduelle.

Pour résoudre l'équation intégrale (3.3.4), on emploie une méthode de collocation standard, comme dans le calcul des intégrales. On suppose donc la continuité du noyau, et on fixe un ensemble de points de collocations $\{x_i\} \subset [a, b]$, et puis on calcule les valeurs de la fonction recherchée aux points de collocation.

L'une des propriétés de cette méthode est que la fonction résiduelle s'annule sur les points de collocation :

$$R_\alpha^{N,\delta}(x_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.3.6)$$

où les points de collocations $\{x_i\}_{i=1}^N$ sont les zéros du polynôme de Legendre P_N .

Donc

$$\left[(\alpha I + K^* K) \sum_{n=0}^{N-1} a_n \tilde{P}_n \right] (x_i) = K^* g^\delta(x_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.3.7)$$

ceci se traduit par :

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n \left[\alpha \tilde{P}_n(x_i) + \int_a^b \int_a^b k(\tau, x_i) k(\tau, t) \tilde{P}_n(t) dt d\tau \right] = \int_a^b k(\tau, x_i) g^\delta(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.3.8)$$

Ainsi, l'équation (3.3.4) prend une nouvelle écriture matricielle :

$$A_N X_N = b_N \quad (3.3.9)$$

où

$$A_N = \left[\alpha \tilde{P}_n(x_i) + \int_a^b \int_a^b k(\tau, x_i) k(\tau, t) \tilde{P}_n(t) dt d\tau \right]_{\substack{i=1, \dots, N \\ n=0, \dots, N-1}} \quad (3.3.10)$$

$$X_N^T = [a_n]_{n=0}^{N-1} \quad (3.3.11)$$

et

$$b_N = [K^* g^\delta(x_i)], \quad i = 1, \dots, N \quad (3.3.12)$$

En utilisant la formule de quadrature (3.2.1), on peut évaluer les éléments de la matrice A_N comme suit :

On a

$$\int_a^b \int_a^b k(\tau, x_i) k(\tau, t) \tilde{P}_n(t) dt d\tau = \int_a^b k(\tau, x_i) \left[\int_a^b k(\tau, t) \tilde{P}_n(t) dt \right] d\tau \quad (3.3.13)$$

$$\approx \int_a^b k(\tau, x_i) \left[\sum_{j=1}^N k(\tau, t_j) \tilde{P}_n(t_j) w_j \right] d\tau$$

les noeuds $t_j, 1 \leq j \leq N$, sont les zéros du polynôme P_N , les $w_j, 1 \leq j \leq N$, sont les poids associés.

il vient

$$\int_a^b k(\tau, x_i) \left[\sum_{j=1}^N k(\tau, t_j) \tilde{P}_n(t_j) w_j \right] d\tau \approx \sum_{s=1}^N \sum_{j=1}^N k(\tau_s, x_i) k(\tau_s, t_j) \tilde{P}_n(t_j) w_j w_s \quad (3.3.14)$$

Les $\tau_s, 1 \leq s \leq N$, sont les zéros du polynôme L_N , et $w_s, 1 \leq s \leq N$, sont les poids associés.

On trouve donc

$$A_N \approx \left[a \tilde{L}_n(x_i) + \sum_{s=1}^N \sum_{j=1}^N k(\tau_s, x_i) k(\tau_s, t_j) \tilde{L}_n(t_j) w_j w_s \right]_{\substack{i=1, \dots, N \\ n=0, \dots, N-1}} \quad (3.3.15)$$

De même, pour le vecteur b_N , on trouve

$$K^* g^\delta(x_i) = \int_a^b k(\tau, x_i) g^\delta(\tau) d\tau \quad (3.3.16)$$

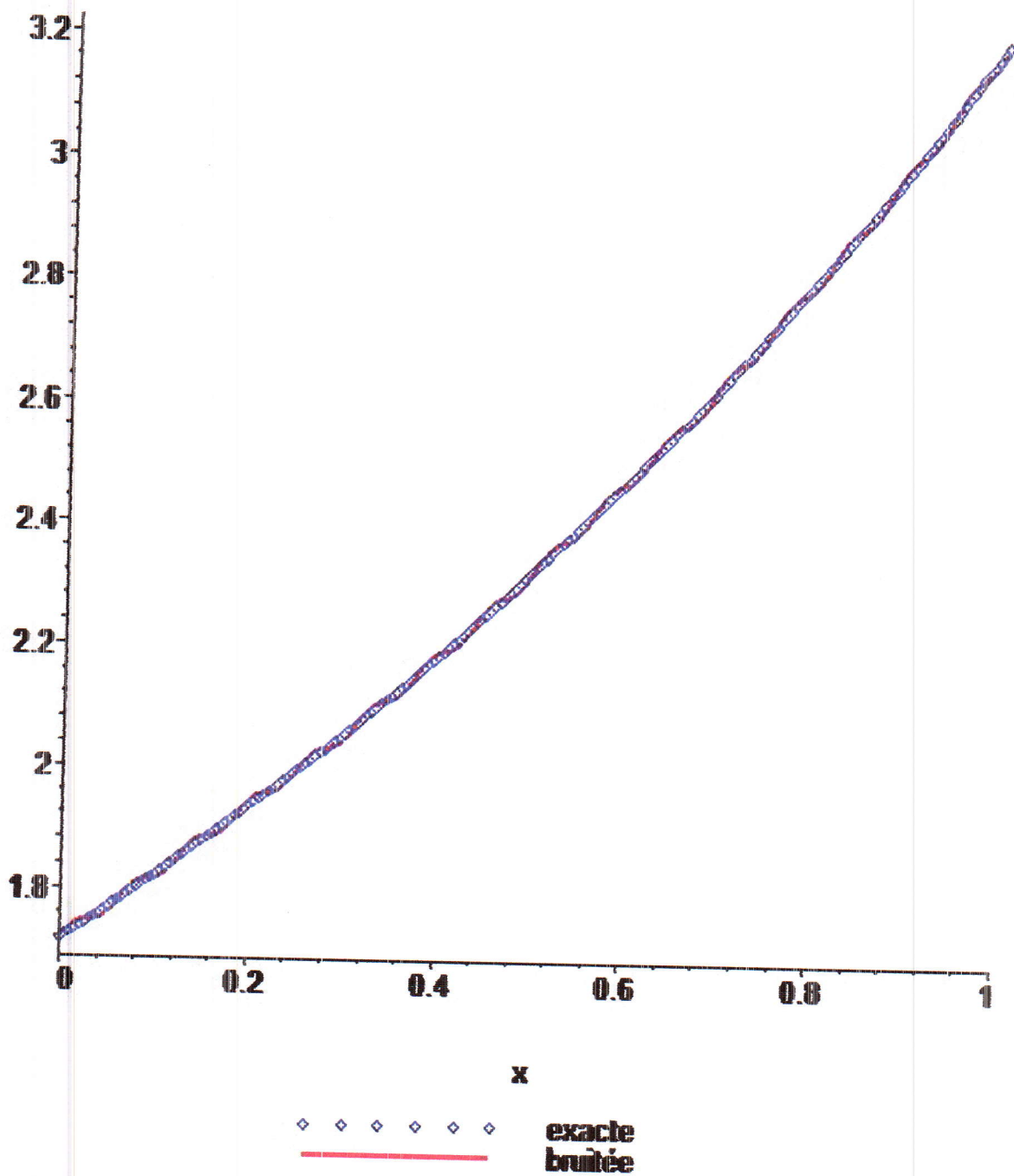
$$\approx \sum_{s=1}^N k(\tau_s, x_i) g^\delta(\tau_s) w_s, \quad i = 1, \dots, N$$

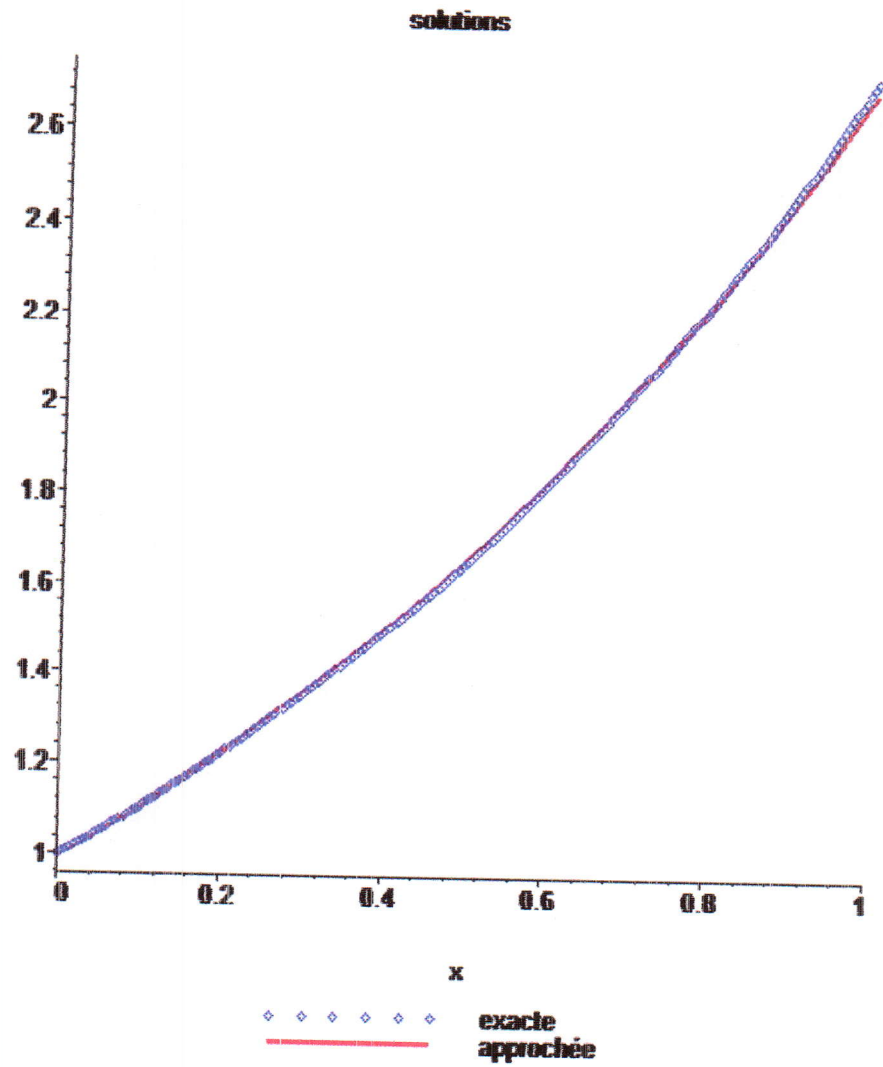
i.e.

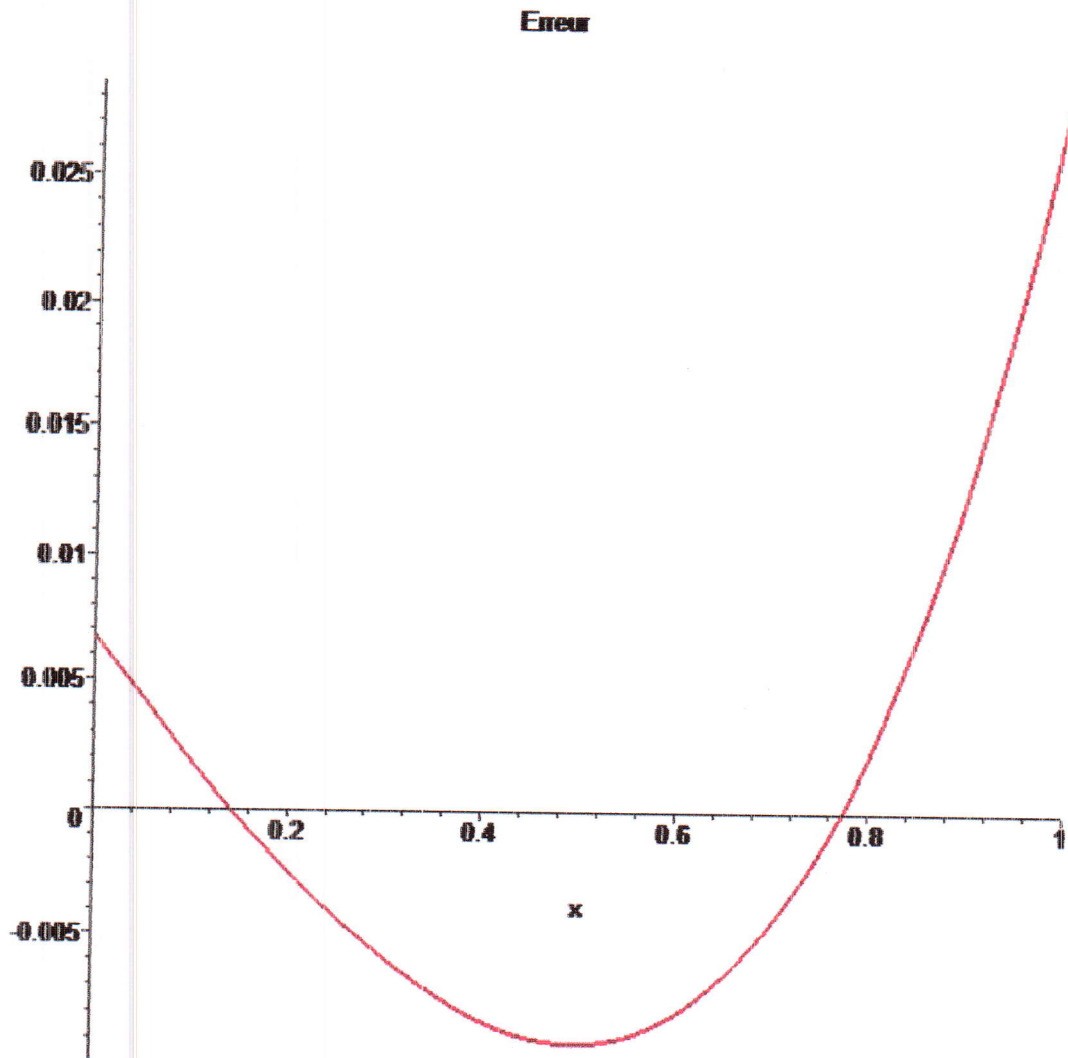
$$b_N = \left[\sum_{s=1}^N k(\tau_s, x_i) g^\delta(\tau_s) w_s \right], \quad i = 1, \dots, N \quad (3.3.17)$$

3.3.3 Tests numériques

Données







RÉFÉRENCES

- [1] C. Bernardi, *Introduction aux méthodes spectrales, Cours du DEA, Université Pierre et Marie (1996-2002).*
- [2] H.W. Engel, M. Hanke & A. Neubauer, *Regularization of inverse problems, Kluwer Academic (2000).*
- [3] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy problem in linear partial equations, Dover, New York (1953).*
- [4] W. Gautschi, *Orthogonal Polynomials and Special Functions : Computation and Applications, Oxford University Press (2004).*
- [5] A. Kirsch, *An introduction to the mathematical theory of inverse problems, Springer (2011).*
- [6] V.A. Morozov, *On the solution of functional equations by the method of regularization, Soviet Math. Doklady, 7 (1966), 414-417.*
- [7] M.T. Nair, *Linear operator equations : approximation and regularization, World Scientific (2009).*
- [8] V. Isakov, *Inverse problems for partial differential equations, Springer-Verlag (2006).*
- [9] A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky & I.A. Vasin, *Methods for solving inverse problems in mathematical physics, p. cm. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics 222, Marcel Dekker (2000).*
- [10] A.N. Tikhonov & V.Y. Arsenin, *Solution of ill-posed problems, Winston & Sons, Washington, DC, (1977).*
- [11] J. Shen, T. Tang & L. Wang, *textsfSpectral Methods : Algorithms, Analysis and Applications, Springer (2011).*