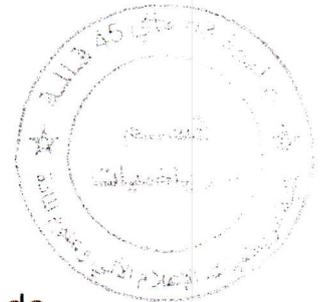


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

M/SA10.109

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**



Par : M^{elle}. BOUHALI Somia

Intitulé

Méthode de la moyenne pour les EDO

Dirigé par : M^r.BOUATTIA Yassine

Devant le jury

PRESIDENT

Dr.S.Badraoui

Prof

Univ-Guelma

RAPPORTEUR

Dr.Y.Bouattia

MCA

Univ-Guelma

EXAMINATEUR

Dr.A.Debbouche

MCA

Univ-Guelma

Session Juin 2014

Remerciements

En préambule à ce mémoire, j'adresse ces quelques mots pour remercier notre grand Dieu tout puissant pour exprimer ma reconnaissance envers sa grande générosité. Dieu m'a donné la volonté, la patience, la santé et la confiance durant toutes mes années d'études.

Je remercie mon encadreur **Dr. Y .BOUATTIA**, pour le sujet qu'il m'a proposé, pour son investissement et ses conseils précieux durant toute cette période.

Je suis très honoré que **Dr. S.BADRAOUI**, ait accepté de rapporter mon travail et de présider mon jury de Mémoire. Je le remercie pour ses conseils et ses précieuses remarques.

Je remercie **Dr. A.DEBBOUCHE**, d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Je suis très heureux de le voir participer à mon jury.

Je remercie également mes camarades de Master II et mes amis du département pour leurs conseils et leurs idées.

Enfin merci à tous et à toutes.

Table des matières

0.1	Introduction	6
1	Notions préliminaires	9
1.1	Théorème d'existence et d'unicité de la solution	10
1.2	Systèmes dynamiques, points critiques	11
1.2.1	Systèmes dynamiques	11
1.2.2	Points critiques	12
1.3	Portrait de phase et cycles limites	12
1.4	Types des points critiques et notions de stabilité	13
1.4.1	Types des points critiques	13
1.4.2	La stabilité	16
1.5	Linéarisation d'un système différentiel non linéaire	19
1.6	La fonction Gamma	20
1.7	La fonction Beta	21
1.8	Relation entre les fonctions Gamma et Beta	21
2	Méthode de la moyenne	22
2.1	Théorème	23
2.2	La forme générale	26
2.3	Exemples	27
2.4	Avantages et inconvénients de méthode de la moyenne	33

3	La méthode de perturbation des centres linéaires et non linéaires	35
3.1	Perturbation des centres linéaires et non linéaires	36
3.2	Réduction de quelques exemples à une couronne circulaire perturbée . . .	40

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié le nombre, l'amplitude et la stabilité des cycles limites de quelques systèmes différentiels ;

D'une part, en utilisant la méthode de la moyenne.

D'autre part, en utilisant la méthode de perturbation des centres linéaires et non linéaires.

0.1 Introduction

(a) Historique :

Allemand David Hilbert (né le 23 janvier 1862 à Königsberg, Allemagne, d'une famille bourgeoise). Il fait sa thèse à l'université de la même ville, sous la direction de Lindemann, le mathématicien auquel on doit la première preuve de la transcendance de π . C'est à cette époque qu'il se lie avec Minkowski.

Le 8 août 1900, à l'occasion du second Congrès International des mathématiciens (à Paris), David Hilbert énonça une liste de 23 problèmes qui devaient être pour lui un guide pour les recherches à venir. Leur résolution devait permettre aux mathématiciens de faire des progrès considérables dans leur science. Le seizième problème reste irrésolu. Ce problème comporte deux parties.

La première concerne le nombre de branches réelles (ovales) d'une courbe algébrique, et leur disposition.

La seconde partie du problème pose la question du nombre maximal et de la position mutuelle des cycles limites H_n d'un système planaire polynomial de degré n :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (0.1)$$

Où P et Q sont des polynômes en x et y de degré n .

(b) Résultats importants :

Soit l'équation de Liénard généralisé

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon f(x) \frac{dx}{dt} + G(x) = 0 \quad (0.2)$$

On ne considère par la suite que le cas où $F(x)$ et $G(x)$ sont des polynômes, avec $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. On note m le degré de $F(x)$; n celui de $G(x)$ et $H(m, n)$ le nombre maximal de cycles limites qui peuvent exister simultanément pour (0.2). Depuis le théorème de Liénard plusieurs résultats importants ont été publiés :

•Rychkov (1975) a prouvé que pour des polynômes $F(x)$ impairs et de degré 5 et si $G(x) = x$ alors (0.2) n'a au plus que 2 cycles limites.

•Lins, de Melo & Pugh (1977) ont prouvé que si $m = 3$ et $n = 1$ alors il n'y a au plus qu'un cycle limite. Ils ont de plus donné les conditions pour que ce cycle existe. Enfin ils ont conjecturé que si $G(x) = x$, il ne pouvait y avoir plus de $\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ cycles limites.

•Xianwu (1983) a prouvé la conjecture pour certains cas où $m = 4$ et $n = 1$.

•Coppel (1988) a prouvé que $H(2, 2) = 1$.

•Dumortier & Li(1996) ont prouvé que $H(2, 3) = 1$.

•Dumortier & Li(1997) ont prouvé que $H(3, 2) = 1$.

(c) Organisation du mémoire :

Ce mémoire est organisé en 3 chapitres qui se présentent comme suit :

Le premier chapitre est un rappel des notions préliminaires, nous commençons par le Théorème d'existence et d'unicité de la solution d'un système différentiel non linéaire, les systèmes dynamiques, points critiques, on suite nous introduisons la notion de portrait de phase et cycles limites d'un système planaire puis les types des points critiques et on donne des définitions et des théorèmes sur la stabilité des points d'équilibres, et on passe à la linéarisation d'un système différentiel linéaire, on fin on définit la fonction Gamma, Beta et la relation entre eux. Dans le deuxième chapitre nous introduisons l'étude des cycles limites de quelques systèmes différentiels en utilisant la méthode de la moyenne

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon p(x, y) \\ \dot{y} = x + \varepsilon q(x, y) \end{cases}, \quad 0 < |\varepsilon| \ll 1$$

où p et q sont des polynômes. Nous avons calculé l'amplitude et la période des cycles limites de quelques classes d'équations différentiels dans les cas où $(\varepsilon \rightarrow 0)$. Finalement dans le dernier chapitre nous considérons des exemples de centres linéaires et non linéaires perturbés. Dans chaque cas le nombre et l'amplitude de cycles limites émergent de couronnes périodique sont calculés en suivant la même méthode. Nous réduisons chacun

d'eux aux systèmes intégrables perturbés localement équivalents à la forme :

$$dH(x, y) + \varepsilon (f(x, y) dy - g(x, y) dx) = 0$$

Avec

$$H(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$$

Cette réduction nous permet de trouver la fonction de Melnikov,

$$M(h) = \int_{H=h} f dy - g dx$$

Chapitre 1

Notions préliminaires

Résumé :

Ce chapitre est un rappel des notions préliminaires, nous commençons par le Théorème d'existence et d'unicité de la solution d'un système différentiel non linéaire, les systèmes dynamiques, points critiques, on suite nous introduisons la notion de portrait de phase et cycles limites d'un système planaire puis les types des points critiques et on donne des définitions et des théorèmes sur la stabilité des points d'équilibres, et on passe à la linéarisation d'un système différentiel linéaire, on fin on définit la fonction Gamma ,Beta et la relation entre eux.

soit : $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ On note x_1, x_2, \dots, x_n les coordonnées de x . Dans tout ce mémoire, la variable est représentée par la lettre t , en particulier on dérive par rapport à t , $\left(\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt}\right)$.

1.1 Théorème d'existence et d'unicité de la solution

On suppose que E est un ouvert de \mathbb{R}^n .

Soit le système autonome :

$$\dot{x} = f(x), x \in E \quad (1.1)$$

Où $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs sur E .

Une solution du système (1.1) est une fonction dérivable :

$$t \mapsto x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

définie d'un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ dans E , telle que pour tout $t \in I$ on ait

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

L'image d'une solution est appelée une orbite. Une orbite est tangente en chacun de ses points au champ de vecteurs f . Le domaine E est appelé l'espace des phases.

soit $x_0 \in E$. Le problème de Cauchy consiste en la détermination des solutions du système (1.1) satisfaisant la condition initiale $x(0) = x_0$.

Théorème (Existence et unicité de la solution) :

Soit E un ouvert \mathbb{R}^n de contenant et supposons que $f \in C^1(E)$. Alors il existe $a > 0$ telle que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

a une solution unique $x(t)$ sur l'intervalle $[-a, a]$

1.2 Systèmes dynamiques, points critiques

1.2.1 Systèmes dynamiques

Définition :1 : Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application :

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

définie sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, telle que :

- $U(\cdot, x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- $U(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- $U(0, x) = x$.
- $U(t + s, x) = U(t, U(s, x))$ pour $t, s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$.

Soit le système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}^+, x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (1.2)$$

où A est une matrice constante. La solution de (1.2) est :

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

Le système(1.2)engendre un système dynamique, car l'application :

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

qui à tout $t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$ associe :

$$U(t, x) = e^{tA}x \quad (1.3)$$

vérifie les quatre propriétés précédentes.

1.2.2 Points critiques

Définition :1 :Le point $a \in \mathbb{R}^n$ telle que $f(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ s'appelle point critique du

système (1.1)(point d'équilibre).Le point critique est une solution réduite à un point.

Définition :2 : soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.4)$$

on appelle point critique ou point d'équilibre du système(1.4), le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$f(x_0) = 0$$

Définition :3 :on appelle point critique hyperbolique de(1.4), le point x_0 telle que A n'a aucune valeur propre avec une partie réelle nulle.

1.3 Portrait de phase et cycles limites

On considère le système planaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases} \quad (1.5)$$

Ou f_1 et f_2 sont des polynômes en x et y .

Les solutions de (1.5)sont représentées dans le plan(x, y) par des courbes appelées orbites.

Les points critiques de système(1.5) sont des solutions constantes.

La figure complète des orbites du système(1.5) ainsi que les points critiques représentés dans le plan(x, y) s'appelle portrait de phase, et le plan (x, y) est appelé plan de phase.

Définition :1 : Une solution périodique du système(1.5) est une solution telle que :

$$(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t)) \text{ pour } T > 0$$

A toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace des phases.

Définition :2 : Un cycle limite du système (1.5)est une orbite fermée isolée, c'est-à-dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage.

Définition :3 : L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable x sur le cycle limite.

1.4 Types des pointes critiques et notions de stabilité

1.4.1 Types des pointes critiques

Soit donné le système différentiel linéaire homogène à coefficients constantes dans \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad (1.6)$$

Ou

$$\dot{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_A X, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ou $\det A \neq 0$

Le point(0, 0) est le point critique. Pour étudier le type du point critique(0, 0), il faut établir l'équation caractéristique

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

et chercher les racines λ_1, λ_2 .

les cas suivantes peuvent se présenter :

les valeurs propres de A sont réelles : #)si : $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

Dans ce cas la matrice A est diagonalisable après changement de base on peut supposer :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et le système(1.6) se réduit à :

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \end{cases}$$

la solution générale de ce système est :

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

les orbites sont les courbes $y = c|x|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$, $c \in \mathbb{R}$

si λ_1 et λ_2 sont de même signe : on dit que $(0, 0)$ est un nœud impropre

si $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ alors le point critique $(0, 0)$ est un nœud impropre asymptotiquement stable

si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ alors le point critique $(0, 0)$ est un nœud impropre instable.

si λ_1 et λ_2 sont de signe différent :

On dit que $(0, 0)$ est un point selle (col) qui est toujours instable

#)si : $\lambda_1 = \lambda_2$:

Deux cas sont possibles

A est diagonalisable :

Alors la solution générale de ce système est :

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Les orbites sont les courbes $y = cx, c \in \mathbb{R}$ on dit que $(0, 0)$ est un nœud propre si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ alors le point critique $(0, 0)$ est un nœud propre asymptotiquement stable

si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ alors le point critique $(0, 0)$ est un nœud propre instable.

A est non diagonalisable :

Alors il existe une base dans laquelle la matrice A et le système s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = x + \lambda_1 y \end{cases}$$

Alors on peut supposer :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

La solution générale de ce système est :

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = (c_2 + c_1 t) e^{\lambda_1 t} \end{cases}$$

-Si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ alors le point critique $(0, 0)$ est appelé nœud exceptionnel stable.

-Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ alors le point critique $(0, 0)$ est appelé nœud exceptionnel instable.

Les valeurs propres de A sont complexes : λ_1, λ_2 Deux valeurs propres complexes de A alors $\lambda_1 = p + iq$ et $\lambda_2 = p - iq$ telle que $p, q \in \mathbb{R}$

-Si $p < 0$ et $q \neq 0$: Alors le point critique $(0, 0)$ est un foyer asymptotiquement stable.

-Si $p > 0$ et $q \neq 0$: Alors le point critique $(0, 0)$ est un foyer instable .

-Si $p = 0$ et $q \neq 0$: Alors le point critique $(0, 0)$ est un center qui est toujours stable .

1.4.2 La stabilité

Soit le système des équations :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \quad (1.7)$$

On suppose que f satisfait les conditions du Théorème d'existence et d'unicité des solutions.

Définition :1 :une solution $\phi(t)$ du système (1.7) telle que : $\phi(t_0) = \phi_0$ est dite stable au sens de Lyapounov si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ telle que pour toute solution $x(t)$ de (1.7) dont la valeur initiale $x(t_0)$ vérifie :

$$\|x(t_0) - \phi(t_0)\| < \delta \implies \|x(t) - \phi(t)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0$$

Si en plus de cette définition on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \phi(t)\| = 0$$

alors la solution est dite asymptotiquement stable.

Définition :2 : la solution $\phi(t) = 0$ du système(1.7) et dite stable si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, telle que pour toute solution $x(t)$ de (1.7) on a :

$$\|x(t_0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \epsilon, \forall t > t_0$$

si en plus

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$$

alors $\phi(t) = 0$ est asymptotiquement stable.

L'étude de la stabilité de la solution $\phi(t)$ peut être ramenée à celle de la solution nulle

$y = 0$ d'un système (Analogue) au système (1.7). En effet : posons $y(t) = x(t) - \phi(t)$ ou $y(t)$ est la nouvelle fonction inconnue.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{dy}{dt} + \frac{d\phi(t)}{dt} = f(t, y + \phi) \\ \frac{dy}{dt} &= f(t, y + \phi) - f(t, \phi) \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, y)\end{aligned}$$

On voit bien que $y \equiv 0$ est une solution de ce système.

Exemple : ($n = 1$)

$$\frac{dx}{dt} = -x + 1; x(0) = 1$$

La solution telle que $x(0) = x_0$ est :

$$x(t) = (x_0 - 1)e^{-t} + 1$$

La solution $\phi(t)$ telle que $\phi(0) = 1$ est $\phi(t) = 1$

$$|x(t) - \phi(t)| = |(x_0 - 1)e^{-t}| < |x_0 - 1|, \forall t > 0$$

Il suffit de prendre $\delta \leq \varepsilon$; $\delta = \varepsilon \implies \phi(t)$ est stable.

Stabilité asymptotique :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \phi(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |(x_0 - 1)e^{-t}| = 0$$

D'où $\phi(t)$ est asymptotiquement stable.

Exemple :1 : ($n = 2$)

Soit le système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}; \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution qui vérifie $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ est :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix}; \phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0$ Telle que :

$$\left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < \delta \implies \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon; \forall t > 0$$

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| &= |x(t)| + |y(t)| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| + |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < 2(|x_0| + |y_0|) \\ &= \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon; \text{ Donc } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2} \text{ tq : } \left\| \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} \right\| < \delta \implies \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon, \forall t > 0 \end{aligned}$$

Donc la solution $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est stable au sens de Lyapunov.

Exemple :2 :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} x^2(t) + y^2(t) = x_0^2 + y_0^2 = c > 0 \rightarrow 0$$

donc la solution n'est pas asymptotiquement stable.

Remarque :

Il est possible que la solution $\phi(t)$ soit non bornée et stable et même asymptotique-

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.10}$$

Et

$$\dot{x} = g(x) \tag{1.11}$$

Définis sur deux ouverts U et V respectivement, sont typologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme $h : U \rightarrow V$ tel que h transforme les orbites de (1.8) en celles de (1.9) et préserve le sens du mouvement.

théorème(Hartman-Grobman) : Si x_0 est un point d'équilibre hyperbolique de (1.4), alors il existe un voisinage de ce point dans lequel le système $\dot{x} = f(x)$ est typologiquement équivalent à son linéarisé $\dot{x} = Ax$.

1.6 La fonction Gamma

On peut définir naturellement la fonction factorielle pour des nombres p positifs non-naturels. Il n'y a aucune objection pour la notation $p!$ qui est habituellement réservée pour les entiers naturels, mais on va appeler la fonction correspondante pour tout réel p strictement positif la fonction Gamma notée Γ définie alors :

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, p > 0$$

Proposition :

- 1) $\Gamma(n+1) = n!$
- 2) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
- 3) $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ ou $\Gamma(p) = \Gamma(p+1)/p$
- 4) $\Gamma(n + (1/2)) = ((2n)! \sqrt{\pi}) / (4^n n!)$
- 5) $\Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$
- 6) on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$

$$7) \Gamma'(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{y-1} \ln(x) dx$$

1.7 La fonction Beta

La fonction Beta est aussi définie par une intégrale :

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p > 0, q > 0$$

Proposition :

- 1) $\beta(p, q) = \beta(q, p)$
- 2) $\beta(p, 1) = \frac{1}{p}$

1.8 Relation entre les fonctions Gamma et Beta

On a la relation suivante :

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Chapitre 2

Méthode de la moyenne

Résumé :

Nous introduisons l'étude des cycles limites de quelques systèmes différentiels en utilisant la méthode de la moyenne

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon p(x) \\ \dot{y} = x + \varepsilon q(x) \end{cases}, 0 < |\varepsilon| \ll 1 \quad (2.1)$$

où p et q sont des polynômes. Nous avons calculé l'amplitude et la période des cycles limites de quelques classes d'équations différentiels dans les cas où $(\varepsilon \rightarrow 0)$.

Transformation des fonctions trigonométriques :

on pose :

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \implies \frac{1}{z} = \bar{z} = \cos \theta - i \sin \theta$$

alors :

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right); \sin \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

et

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta; \frac{1}{z^n} = \cos n\theta - i \sin n\theta$$

donc :

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta \quad \text{Et} \quad z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\theta$$

Exemplel :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \sin^2 \theta d\theta &= \frac{1}{2^4} \frac{1}{(2i)^2} \int_0^{2\pi} \left(z + \frac{1}{z} \right)^4 \left(z - \frac{1}{z} \right)^2 d\theta \\ &= -\frac{1}{64} \int_0^{2\pi} \left(z^4 + 4z^2 + 6 + \frac{4}{z^2} + \frac{1}{z^4} \right) \left(z^2 - 2 + \frac{1}{z^2} \right) d\theta \\ &= -\frac{1}{64} \int_0^{2\pi} \left[z^6 + \frac{1}{z^6} + 2 \left(z^4 + \frac{1}{z^4} \right) - \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) - 4 \right] d\theta \\ &= -\frac{1}{64} \int_0^{2\pi} [2 \cos 6\theta + 4 \cos 4\theta - 2 \cos 2\theta - 4] d\theta \\ &= \frac{2\pi}{16} \end{aligned}$$

2.1 Théorème

Considérons les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 G(t, x, \varepsilon) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

et

$$\begin{cases} \dot{y} = \varepsilon f^0(y) \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

où $x, y, x_0 \in D$ un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $t \in [0, \infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, F et G sont périodiques de période T par rapport à la variable t , et $f^0(y)$ est la fonction moyenne de $F(t, y)$ en ce qui concerne t c-à-d :

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t, y) dt$$

on suppose :

(i) $F, \partial F/\partial x, \partial^2 F/\partial x^2, G$ et $\partial G/\partial X$ sont définies, continues et bornées par une constante indépendante de ε dans

(ii) T est une constane indépendante de ε .

(iii) $y(t)$ appartient à D sur le temps échelle $1/\varepsilon$.

Alors les propriétés suivantes sont vérifiées.

(a) sur le temps échelle $1/\varepsilon$ on a :

$$x(t) - y(t) = O(\varepsilon), \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

(b) si p est un point d'équilibre du système moyenne (2.2), tel que :

$$\left[\frac{\partial f^0}{\partial y} \right]_{y=p} \neq 0 \quad (2.3)$$

Alors il existe une solution T périodique $\Phi(t, \varepsilon)$ de l'équation (2,1) proche de p tel que :

$$\Phi(t, \varepsilon) \rightarrow p, \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

(c) si (2,3) est négatif, alors la solution périodique correspondante de $\Phi(t, \varepsilon)$ de l'équation (2,2) dans l'espace (t, x) est asymptotiquement stable pour ε suffisamment petit. si (2,3) est positif, alors c'est instable.

Preuve :

Tout d'abord, nous allons imposer les conditions périodiques et nous pouvons appliquer le théorème de fonction implicite. Nous transformons $x \rightarrow z$

$$x(t) = z(t) + \varepsilon u(t, z(t))$$

L'équation devient pour z :

$$\dot{z} = \varepsilon f^0(z) + \varepsilon^2 R(t, z, \varepsilon) \quad (2.4)$$

En raison du choix de $u(t, z(t))$, une solution T -périodique de $z(t)$ produite a une solution T -périodique de $x(t)$ de \mathbb{R} , nous avons l'expression :

$$R(t, z, \varepsilon) = \frac{\partial F}{\partial z}(t, z) u(t, z) - \frac{\partial u}{\partial z} u(t, z) f^0(z) + G(t, z, 0) + o(\varepsilon)$$

Cette expression est T -périodique en t et continue de variable à l'égard de z l'équation (2.4) est équivalente à l'équation intégrale :

$$z(t) = z(0) + \varepsilon \int_0^t f^0(z(s)) ds + \varepsilon^2 \int_0^t R(s, z(s), \varepsilon) ds$$

La solution $z(t)$ est T -périodique si :

$$z(t+T) = z(t), \forall t \geq 0$$

Pour tout ce conduit à l'équation :

$$h(z(0), \varepsilon) = \int_0^T f^0(z(0)) ds + \varepsilon \int_0^T R(s, z(s), \varepsilon) ds = 0 \quad (2.5)$$

Il est clair que $h(p, 0) = 0$ avec ε , dans un voisinage de $\varepsilon = 0$ l'équation (2.5) admet une solution unique $z(0)$ en raison de l'hypothèse sur le jacobien déterminant de l'équation (2.4).

Si $\varepsilon \rightarrow 0$ alors $z(0) \rightarrow p$.

Si nous avons conclu avec le théorème la solution périodique de l'équation (2.4) existe dans un voisinage de $x = p$ on peut souvent établir sa stabilité dans un voisinage de on peut souvent établir sa stabilité dans un chemin simple.

2.2 La forme générale

Soit l'équation :

$$\ddot{x} + \varepsilon f(x) \dot{x} + x = 0 \quad (2.6)$$

qui équivaut au système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon f(x) y \end{cases} \quad (2.7)$$

qui équivaut aussi au système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon F(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (2.8)$$

où f est une fonction paire et :

$$F(x) = \int_0^x f(s) ds$$

En posant :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \cos \theta \dot{x} + \sin \theta \dot{y} \\ &= \cos \theta r \sin \theta - \sin \theta (r \cos \theta + \varepsilon r \sin \theta f(r \cos \theta)) = \\ &= -\varepsilon r \sin^2 \theta f(r \cos \theta)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \widehat{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{1}{r} (\cos \theta \dot{y} - \sin \theta \dot{x}) \\ &= \frac{1}{r} (-\cos \theta (r \cos \theta + \varepsilon r \sin \theta f(r \cos \theta)) - \sin \theta (r \sin \theta)) \\ &= -1 - \varepsilon \cos \theta \sin \theta f(r \cos \theta)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} &= \frac{\varepsilon r \sin^2 \theta f(r \cos \theta)}{-1 - \varepsilon \cos \theta \sin \theta f(r \cos \theta)} \\ &= \underbrace{\varepsilon r \sin^2 \theta f(r \cos \theta)}_{=F(\theta,r)} + \varepsilon^2 G(\theta, r, \varepsilon)\end{aligned}$$

2.3 Exemples

Exemple 2.1 :

Soit l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{-y}{1+x^2+y^2} + \varepsilon (x^3 + 3xy^2 - 2x) \\ \dot{y} = \frac{x}{1+x^2+y^2} + \varepsilon (-y^3 - 2yx^2 + y) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \cos \theta \dot{x} + \sin \theta \dot{y} \\ &= \cos \theta \left(\frac{-r \sin \theta}{1 + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} + \varepsilon (r^3 \cos^3 \theta + 3r^3 \cos \theta \sin^2 \theta - 2r \cos \theta) \right) \\ &\quad + \sin \theta \left(\frac{r \cos \theta}{1 + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} + \varepsilon (-r^3 \sin^3 \theta - 2r^3 \sin \theta \cos^2 \theta + r \sin \theta) \right) \\ &= \varepsilon (r^3 (\cos^4 \theta - \sin^4 \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \theta) + r (-2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta))\end{aligned}$$

$$\dot{r} = \varepsilon r [r^2 (\cos^2 \theta - \sin^4 \theta) + 1 - 3 \cos^2 \theta]$$

et

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \widehat{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{1}{r} (\cos \theta \dot{y} - \sin \theta \dot{x}) \\ &= \frac{1}{r} \cos \theta \left[\frac{r \cos \theta}{1 + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} + \varepsilon (-r^3 \sin^3 \theta - 2r^3 \sin \theta \cos^2 \theta + r \sin \theta) \right] \\ &\quad - \frac{1}{r} \sin \theta \left[\frac{-r \sin \theta}{1 + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} + \varepsilon (r^3 \cos \theta^3 + 3r^3 \cos \theta \sin^2 \theta - 2r \cos \theta) \right] \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{1 + r^2} + \varepsilon [-r^2 (4 \cos \theta \sin^3 \theta + 3 \sin \theta \cos^3 \theta) + 3 \cos \theta \sin \theta]\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} &= \frac{\varepsilon r (1 + r^2) [r^2 (\cos^2 \theta - \sin^4 \theta) + 1 - 3 \cos^2 \theta]}{1 - (1 + r^2) \varepsilon [r^2 (4 \cos \theta \sin^3 \theta + 3 \sin \theta \cos^3 \theta) - 3 \cos \theta \sin \theta]} \\ &= \underbrace{\varepsilon r (1 + r^2) [r^2 (\cos^2 \theta - \sin^4 \theta) + 1 - 3 \cos^2 \theta]}_{=F(\theta,r)} + \varepsilon^2 G(\varepsilon, \theta, r)\end{aligned}$$

D'ou

$$\begin{aligned}f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, r) d\theta \\ f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} r (1 + r^2) \int_0^{2\pi} [r^2 (\cos^2 \theta - \sin^4 \theta) + 1 - 3 \cos^2 \theta] d\theta \\ &= \frac{r^3(1+r^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta - \sin^4 \theta) d\theta + \frac{r(1+r^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{8} r (1 + r^2) (r^2 - 4)\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}f^0(r) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{8} r (1 + r^2) (r^2 - 4) = 0 \\ &\Rightarrow r_1 = 2\end{aligned}$$

Donc il existe une cycle limite d'amplitude 2.

et on a

$$\frac{\partial f^0}{\partial r}(r) = \frac{5}{8}r^4 - \frac{9}{8}r^2 - \frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{\partial f^0}{\partial r} \right]_{r=2} = \left[\frac{5}{8}r^4 - \frac{9}{8}r^2 - \frac{1}{2} \right]_{r=2} = 5 \text{ (positif)}$$

Donc le cycle limite d'amplitude 2 est instable.

Exemple 2.2 :

soit l'équation suivante :

$$\ddot{x} - 2\varepsilon \left(-8x^4 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{5} + 3\dot{x}^2 \right) \dot{x} + x = 0$$

qui équivale au système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + 2\varepsilon y \left[-8x^4 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{5} + 3y^2 \right] \end{cases}$$

$$\dot{r} = \cos \theta \dot{x} + \sin \theta \dot{y}$$

$$= r \cos \theta \sin \theta - r \sin \theta \cos \theta + 2\varepsilon r \sin^2 \theta \left[-8r^4 \cos^4 \theta - \frac{1}{5}r^2 \cos^2 \theta - \frac{2}{5} + 3r^2 \sin^2 \theta \right]$$

$$= -2\varepsilon r \left(8r^4 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + \frac{1}{5}r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \frac{2}{5} \sin^2 \theta - 3r^2 \sin^4 \theta \right)$$

$$\dot{r} = -2\varepsilon r \left[8r^4 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + r^2 \left(\frac{1}{5} \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 3 \sin^4 \theta \right) + \frac{2}{5} \sin^2 \theta \right]$$

et

$$\dot{\theta} = \widehat{\arctan \left(\frac{y}{x} \right)} = \frac{1}{r} (\cos \theta \dot{y} - \sin \theta \dot{x})$$

$$= \frac{1}{r} \cos \theta \left\{ -r \cos \theta + 2\varepsilon \left[r \sin \theta \left(-8r^4 \cos^4 \theta - \frac{1}{5}r^2 \cos^2 \theta - \frac{2}{5} \right) + 3r^3 \sin^3 \theta \right] \right\} \\ - \frac{1}{r} \sin \theta [r \sin \theta]$$

$$\dot{\theta} = -1 + 2\varepsilon \left[\cos \theta \sin \theta \left(-8r^4 \cos^4 \theta - \frac{1}{5}r^2 \cos^2 \theta - \frac{2}{5} \right) + 3r^2 \cos \theta \sin^3 \theta \right]$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} &= \frac{-2\varepsilon r \left[8r^4 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + r^2 \left(\frac{1}{5} \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 3 \sin^4 \theta \right) + \frac{2}{5} \sin^2 \theta \right]}{-1 + 2\varepsilon \left[\cos \theta \sin \theta \left(-8r^4 \cos^4 \theta - \frac{1}{5}r^2 \cos^2 \theta - \frac{2}{5} \right) + 3r^2 \cos \theta \sin^3 \theta \right]} \\ &= \varepsilon 2r \underbrace{\left[8r^4 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + r^2 \left(\frac{1}{5} \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 3 \sin^4 \theta \right) + \frac{2}{5} \sin^2 \theta \right]}_{=F(\theta,r)} + \varepsilon^2 G(\varepsilon, \theta, r) \end{aligned}$$

D'ou

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, r) d\theta \\ f^0(r) &= \frac{2r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[8r^4 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + r^2 \left(\frac{1}{5} \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 3 \sin^4 \theta \right) + \frac{2}{5} \sin^2 \theta \right] d\theta \\ &= \frac{16r^5}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \sin^2 \theta d\theta + \frac{2r^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{5} \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 3 \sin^4 \theta \right) d\theta + \frac{4r}{10\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ &= r \left(r^4 - \frac{11}{5}r^2 + \frac{2}{5} \right) \\ &= r \left(r^2 - \frac{1}{5} \right) (r^2 - 2) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} f^0(r) = 0 &\Rightarrow r \left(r^2 - \frac{1}{5} \right) (r^2 - 2) = 0 \\ &\Rightarrow r_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, r_2 = \sqrt{2} \quad \text{pour } (r > 0) \end{aligned}$$

Donc il existe deux cycles limites d'amplitudes $\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\sqrt{2}$.

et on a

$$\left[\frac{\partial f^0}{\partial r} \right]_{r=\frac{1}{\sqrt{5}}} = \left[5r^4 - \frac{33}{5}r^2 + \frac{2}{5} \right]_{r=\frac{1}{\sqrt{5}}} = -\frac{18}{25} \quad (\text{n\u00e9gatif})$$

Donc le cycle limite d'amplitude $\frac{1}{\sqrt{5}}$ est stable .

$$\left[\frac{\partial f^0}{\partial r} \right]_{r=\sqrt{2}} = \left[5r^4 - \frac{33}{5}r^2 + \frac{2}{5} \right]_{r=\sqrt{2}} = \frac{36}{5} \quad (\text{positif})$$

Donc le cycle limite d'amplitude $\sqrt{2}$ est instable .

Exemple 2.3 :

soit l'\u00e9quation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon x \left(-\frac{17}{5}x^6 + \frac{13}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{9} \right) \\ \dot{y} = -x + \varepsilon y \left(-\frac{9}{5}x^6 + \frac{1}{9}x^4 - \frac{10}{9}x^2 + \frac{1}{6} \right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \cos \theta \dot{x} + \sin \theta \dot{y} \\ &= r \cos \theta \sin \theta + \varepsilon r \cos^2 \theta \left(-\frac{17}{5}r^6 \cos^6 \theta + \frac{13}{3}r^4 \cos^4 \theta - \frac{2}{3}r^2 \cos^2 \theta - \frac{1}{9} \right) \\ &\quad - r \cos \theta \sin \theta + \varepsilon r \sin^2 \theta \left(-\frac{9}{5}r^6 \cos^6 \theta + \frac{1}{9}r^4 \cos^4 \theta - \frac{10}{9}r^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{6} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon r \left[\left(-\frac{17}{5} \cos^8 \theta - \frac{9}{5} \cos^6 \theta \sin^2 \theta \right) r^6 + \left(\frac{13}{3} \cos^6 \theta + \frac{1}{9} \cos^4 \theta \sin^2 \theta \right) r^4 \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{2}{3} \cos^4 \theta - \frac{10}{9} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right) r^2 + \left(-\frac{1}{9} \cos^2 \theta + \frac{1}{6} \sin^2 \theta \right) \right] \end{aligned}$$

et

$$\dot{\theta} = \widehat{\arctan \left(\frac{y}{x} \right)} = \frac{1}{r} (\cos \theta \dot{y} - \sin \theta \dot{x})$$

$$= \frac{1}{r} \left[-r \cos^2 \theta + \varepsilon r \cos \theta \sin \theta \left(-\frac{9}{5} r^6 \cos^6 \theta + \frac{1}{9} r^4 \cos^4 \theta - \frac{10}{9} r^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{6} \right) \right. \\ \left. - r \sin^2 \theta - \varepsilon r \cos \theta \sin \theta \left(-\frac{17}{5} r^6 \cos^6 \theta + \frac{13}{3} r^4 \cos^4 \theta - \frac{2}{3} r^2 \cos^2 \theta - \frac{1}{9} \right) \right]$$

$$\dot{\theta} = -1 + \varepsilon \cos \theta \sin \theta \left(\frac{8}{5} r^6 \cos^6 \theta - \frac{38}{9} r^4 \cos^4 \theta - \frac{4}{9} r^2 \cos^2 \theta + \frac{10}{36} \right)$$

Donc

$$\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \varepsilon r \left[\left(\frac{17}{5} \cos^8 \theta + \frac{9}{5} \cos^6 \theta \sin^2 \theta \right) r^6 - \left(\frac{13}{3} \cos^6 \theta + \frac{1}{9} \cos^4 \theta \sin^2 \theta \right) r^4 + \right. \\ \left. + \left(\frac{2}{3} \cos^4 \theta + \frac{10}{9} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right) r^2 + \left(\frac{1}{9} \cos^2 \theta - \frac{1}{6} \sin^2 \theta \right) \right] + \varepsilon^2 G(\varepsilon, \theta, r)$$

avec

$$F(\theta, r) = r \left[\left(\frac{17}{5} \cos^8 \theta + \frac{9}{5} \cos^6 \theta \sin^2 \theta \right) r^6 - \left(\frac{13}{3} \cos^6 \theta + \frac{1}{9} \cos^4 \theta \sin^2 \theta \right) r^4 + \right. \\ \left. + \left(\frac{2}{3} \cos^4 \theta + \frac{10}{9} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right) r^2 + \left(\frac{1}{9} \cos^2 \theta - \frac{1}{6} \sin^2 \theta \right) \right]$$

D'ou

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, r) d\theta$$

$$f^0(r) = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{17}{5} \cos^8 \theta + \frac{9}{5} \cos^6 \theta \sin^2 \theta \right) r^6 - \left(\frac{13}{3} \cos^6 \theta + \frac{1}{9} \cos^4 \theta \sin^2 \theta \right) r^4 + \right. \\ \left. + \left(\frac{2}{3} \cos^4 \theta + \frac{10}{9} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right) r^2 + \left(\frac{1}{9} \cos^2 \theta - \frac{1}{6} \sin^2 \theta \right) \right] d\theta$$

$$= \frac{r^7}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{17}{5} \cos^8 \theta + \frac{9}{5} \cos^6 \theta \sin^2 \theta \right) d\theta - \frac{r^5}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{13}{3} \cos^6 \theta + \frac{1}{9} \cos^4 \theta \sin^2 \theta \right) d\theta + \\ \frac{r^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3} \cos^4 \theta + \frac{10}{9} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right) d\theta + \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{9} \cos^2 \theta - \frac{1}{6} \sin^2 \theta \right) d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= r \left(r^6 - \frac{49}{36}r^4 + \frac{7}{18}r^2 - \frac{1}{36} \right) \\
&= r \left(r^2 - \frac{1}{9} \right) \left(r^2 - \frac{1}{4} \right) (r^2 - 1)
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
f^0(r) = 0 &\Rightarrow r \left(r^2 - \frac{1}{9} \right) \left(r^2 - \frac{1}{4} \right) (r^2 - 1) = 0 \\
&\Rightarrow r_1 = \frac{1}{3}, r_2 = \frac{1}{2}, r_3 = 1 \quad \text{pour } (r > 0)
\end{aligned}$$

Donc il existe trois cycles limites d'amplitudes $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ et 1.

et on a

$$\left[\frac{\partial f^0}{\partial r} \right]_{r=\frac{1}{3}} = \left[7r^6 - \frac{245}{36}r^4 + \frac{7}{6}r^2 - \frac{1}{36} \right]_{r=\frac{1}{3}} = \frac{20}{729} \quad (\text{positif})$$

Donc le cycle limite d'amplitude $\frac{1}{3}$ est instable .

et on a

$$\left[\frac{\partial f^0}{\partial r} \right]_{r=\frac{1}{2}} = \left[7r^6 - \frac{245}{36}r^4 + \frac{7}{6}r^2 - \frac{1}{36} \right]_{r=\frac{1}{2}} = -\frac{5}{96} \quad (\text{négatif})$$

Donc le cycle limite d'amplitude $\frac{1}{2}$ est stable .

et on a

$$\left[\frac{\partial f^0}{\partial r} \right]_{r=1} = \left[7r^6 - \frac{245}{36}r^4 + \frac{7}{6}r^2 - \frac{1}{36} \right]_{r=1} = \frac{4}{3} \quad (\text{positif})$$

Donc le cycle limite d'amplitude 1 est instable.

2.4 Avantages et inconvénients de méthode de la moyenne

La méthode de la moyenne présente trois avantages majeurs :

Le calcul en première approximation se réduit à l'intégration de deux intégrales définies pour les dérivés de l'amplitude et la phase.

L'amplitude et la phase peuvent être obtenus, en général, en utilisant des techniques d'intégration élémentaires du calcul.

Cette méthode peut être appliquée à des systèmes qui sont assortis de modalités d'amortissement ou des forces dissipatives (forces dissipatives sont des forces de la nature tels que l'énergie est perdue à partir d'un système de quand le mouvement a lieu.) et ne peut donc donner la dépendance temporelle de l'amplitude.

Si les cycles limites (cycle limite est une solution périodique isolée) et points limites existent pour une équation différentielle non linéaire donné, la méthode nous permet de les déterminer.

En outre, nous pouvons obtenir le comportement du système à mesure qu'elle s'approche de ces cycles limites et les points.

L'inconvénient majeur de cette méthode est que les calculs d'ordre supérieur sont longs et compliqués et, en général, la quantité d'effort nécessaire pour calculer des termes d'ordre supérieur ne se justifie pas par la petite quantité de renseignements supplémentaires obtenus.

Chapitre 3

La méthode de perturbation des centres linéaires et non linéaires

Résumé :

Nous considérons des exemples de centres linéaires non linéaires perturbés. Dans chaque cas le nombre et l'amplitude de cycles limites émergeant de couronnes périodique sont calculés en suivant la même méthode. Nous réduisons chacun d'eux aux systèmes intégrables perturbés localement équivalents à la forme :

$$dH(x, y) + \varepsilon (f(x, y) dy - g(x, y) dx) = 0$$

Avec :

$$H(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$$

Cette réduction nous permet de trouver la fonction de Melnikov,

$$M(h) = \int_{H=h} f dy - g dx$$

3.1 Perturbation des centres linéaires et non linéaires

Soit le système perturbé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon f(x, y) \\ \dot{y} = -x + \varepsilon g(x, y) \end{cases}, 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (3.1)$$

Où $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont deux fonctions continues.

En supprimant la variable du temps du système (3.1), on obtient la relation :

$$dH_c + \varepsilon (f dy - g dx) = 0$$

avec

$$dh_c = x dx + y dy$$

Nous avons besoin d'étudier cette relation différentielle pour trouver les cycles limites du système (3.1) .si ses courbes intégrales sont représentées par $y(x)$, nous définissons $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ et nous obtenons :

$$yy' + x + \varepsilon [f(x, y) y' - g(x, y)] = 0 \quad (3.2)$$

si on suppose que l'origine (0.0) est le seul point d'équilibre de l'équation (3.1), un cycle limite $C_l \equiv (x, y_{\pm}(x))$ de cette équation , avec une branche positive $y_+(x) > 0$ et une branche négative $y_-(x) < 0$, coup l'axe des abscisses en deux points $(-a_-, 0)$ et $(a_+, 0)$ avec $a_-, a_+ > 0$. chaque cycle limite C_l solution de l'équation (3.1) entoure l'origine et l'oscillation x est dans l'intervalle $[-a_-, a_+]$. Les amplitudes d'oscillation a_-, a_+ identifient le cycles limite. Le résultat pour $\varepsilon \neq 0$ est un ensemble des courbes fermées qui définissent la distribution qualitative des courbes intégrales dans le plant (x, y) . La stabilité des cycles limites est alternée. Pour un cycle limite stable donné, Les deux cycles limites voisins, à l'intérieur et à l'extérieur, sont instables, et inversement. si nous déterminons la stabilité de l'origine ,alors la stabilité de chaque cycle limite reste arrangée par la propriété de

l'alternance . la stabilité est déterminée par le signe de la partie réelle des valeurs propres du jacobien en ce point. D'où, son calcul montre que si $\varepsilon (f_x(0,0) + g_y(0,0)) < 0$ alors l'origine est stable et si $\varepsilon (f_x(0,0) + g_y(0,0)) > 0$ alors il est instable. Une autre propriété du cycle limite peut être dérivée du fait que l'énergie mécanique $E = H_c = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ est conservée dans l'oscillation :

$$\int_{C_l} dH_c = \int_{C_l} \frac{dE}{dx} dx = 0$$

Donc, on intègre l'équation (3.2) le long d'un cycle limite, entre les amplitudes d'oscillation, on obtient :

$$\int_{-a_-}^{a_+} [g(x, y_+(x)) - f(x, y_+(x)) y'_+(x)] dx + \int_{a_+}^{-a_-} [g(x, y_-(x)) - f(x, y_-(x)) y'_-(x)] dx = 0 \quad (3.3)$$

Chaque couple de solutions $\{y_+(x), y_-(x)\}$ de l'équation(3.3), s'annulant aux extrémités, $y_+(-a_-) = y_-(-a_-) = y_-(a_+) = 0$, et vérifiant l'équation (3.2), constituent l'ensemble fini de cycles limites de l'équation (3.1). Par suite de la continuité par rapport du paramètre ε , ces conditions sont aussi valables pour $\varepsilon = 0$. Pour cette valeur du paramètre, les cycles limites sont des cercles : $y_+(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ et $y_-(x) = -\sqrt{a^2 - x^2}$. Ici $a_+ = a_- = a > 0$ représentent les amplitudes des cycles limites. A cet ordre d'approximation, la condition (3.2) est vérifiée, et la condition (3.3) devient :

$$\int_{-a}^a \left[g(x, \sqrt{a^2 - x^2}) + \frac{xf(x, \sqrt{a^2 - x^2})}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right] dx + \int_a^{-a} \left[g(x, -\sqrt{a^2 - x^2}) - \frac{xf(x, -\sqrt{a^2 - x^2})}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right] dx = 0 \quad (3.4)$$

C'est à dire

$$\beta(a) \equiv \int_{-a}^a \left[\tilde{g}(x, -\sqrt{a^2 - x^2}) - \frac{x\tilde{f}(x, -\sqrt{a^2 - x^2})}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right] dx = 0 \quad (3.5)$$

Où

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x, y) &\equiv \frac{1}{2} [f(x, y) + f(x, -y) - f(-x, y) - f(-x, -y)] \\ \tilde{g}(x, y) &\equiv \frac{1}{2} [g(x, y) - g(x, -y) + g(-x, y) - g(-x, -y)]\end{aligned}\tag{3.6}$$

Si $\beta(a)$ n'est pas identiquement nulle, chaque solution $a > 0$ de l'équation $\beta(a) = 0$ est l'amplitude d'un cycle limite du système (3.1) dans le régime non-linéaire faible. Inversement, les amplitudes de tous les cycles limites émergés des couronnes périodiques à l'ordre zéro en ε , sont des solutions de l'équation (3.5). Ces résultats sont exacts pour $\varepsilon = 0$. Par conséquent, les équations (3.4) ou (3.5) déterminent les amplitudes des solutions périodiques qui survivent à une perturbation légère des couronnes périodiques formées par des cercles.

Nous remarquons que $\beta(a)$ est la première fonction de Melnikov du système (3.1). Ici il a été obtenu en suivant une approche différente à de celle basée sur le calcul de la fonction du déplacement de la première application du retour sur la couronne périodique. On observe aussi que $\tilde{f}(x, y)$ est une fonction impaire de x et paire de y , et alors $\tilde{g}(x, y)$ est une fonction paire de x et impaire de y . Par conséquent, si $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont des polynômes en x et y , seulement les termes impairs en x et pairs en y de $f(x, y)$ et les termes pairs en x et impairs en y de $g(x, y)$.

Survivez dans (3.6) et contribuent à $\beta(a)$ dans (3.6). Comme un exemple, on intègre l'équation (3.5) quand $f(x, y)$ est un polynôme de degré $2n_1$ ou $2n_1 + 1$ en x et degré $2m_1$ ou $2m_1 + 1$ en y et $g(x, y)$ est un polynôme de degré $2n_2$ ou $2n_2 + 1$ en x et degré $2m_2$ ou $2m_2 + 1$ en y . Alors,

$$\tilde{f}(x, y) = \sum_{j=0}^{n_1} \sum_{k=0}^{m_1} a_{jk} x^{2j+1} y^{2k}$$

$$\tilde{g}(x, y) = \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{m_2} b_{jk} x^{2j} y^{2k+1}$$

où a_{jk} et b_{jk} sont des coefficients réels. Le résultat est

$$\beta(a) = a^2 \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m \frac{\Gamma(j + \frac{1}{2}) \Gamma(k + \frac{1}{2})}{(k + j + 1)!} \left[\left(j + \frac{1}{2}\right) a_{jk} + \left(k + \frac{1}{2}\right) b_{jk} \right] a^{2(k+j)}$$

où $n \equiv \max \{n_1, n_2\}$ et $m \equiv \max \{m_1, m_2\}$. Ici, $a_{jk} = 0$ pour $j > n_1$ ou $k > m_1$ et $b_{jk} = 0$ pour $j > n_2$ ou $k > m_2$. La racine $a = 0$ de $\beta(a)$ correspond au point fixe $(0, 0)$ et le facteur a^2 peut être éliminé. Donc, les amplitudes possibles a sont les zéros de $\frac{\beta(a)}{a^2}$, un polynôme en a^2 de degré $\max \{n_1 + m_1, n_2 + m_2\}$. Il y a au plus $\max \{n_1 + m_1, n_2 + m_2\}$ solutions différentes positives a et par conséquent, le nombre maximal de cycles limites dans ce cas est $\max \{n_1 + m_1, n_2 + m_2\}$. Aussi ce résultat peut être écrit comme $\left[\frac{\max\{\deg f, \deg g\} - 1}{2} \right]$

où $[\alpha]$ signifie la partie entière de α et $\deg f$ (resp. $\deg g$) dénote le degré de f (resp. de g). Si nous restreignons au cas de l'équation de Liénard où $f(x, y) = 0$ et $g(x, y)$ est linéaire en y , nous retrouvons le résultat connu que le nombre de cycles limites est inférieur ou égal à n_2 dans le régime non-linéaire faible. On a aussi :

$$\beta(a) = \pi a^2 \sum_{j=0}^{n_2} b_j \frac{(2j)!}{4^j j! (j+1)} a^{2j}$$

La stabilité d'un cycle limite est définie par le signe de

$$\sigma = -\frac{\varepsilon}{a_0} \left[\frac{\partial \beta(a)}{\partial a} \right]_{a_0}$$

si $\sigma < 0$ le cycle est stable et si $\sigma > 0$ le cycle est instable.

3.2 Réduction de quelques exemples à une couronne circulaire perturbée

Exempel 3.1 :

Soit l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{-y}{1+x^2+y^2} + \varepsilon(x^3 + 3xy^2 - 2x) \\ \dot{y} = \frac{x}{1+x^2+y^2} + \varepsilon(-y^3 - 2yx^2 + y) \end{cases}$$

$$f(x, y) = (-x^3 - 3xy^2 + 2x)(1 + x^2 + y^2) = -x^5 - 4x^3y^2 + x^3 - 3xy^4 - xy^2 + 2x$$

$$g(x, y) = (y^3 + 2yx^2 - y)(1 + x^2 + y^2) = 2x^4y + 3x^2y^3 + x^2y + y^5 - y$$

et on a

$$\beta(a) = \int_{-a}^a \left[\tilde{g}(x, \sqrt{a^2 - x^2}) + \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \tilde{f}(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \right] dx$$

Nous obtenons : $\tilde{f}(x, y) = 2(-x^5 - 4x^3y^2 + x^3 - 3xy^4 - xy^2 + 2x)$,

$$\tilde{g}(x, y) = 2(2x^4y + 3x^2y^3 + x^2y + y^5 - y)$$

alors :

$$\beta(a) = 2 \int_{-a}^a \left[2x^4\sqrt{a^2 - x^2} + 3x^2\sqrt{a^2 - x^2}^3 + x^2\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}^5 - \sqrt{a^2 - x^2} \right] dx$$

$$+ 2 \int_{-a}^a \left[\frac{-x^6}{\sqrt{a^2 - x^2}} - 4 \frac{x^4\sqrt{a^2 - x^2}^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}} - 3 \frac{x^2\sqrt{a^2 - x^2}^4}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{x^2\sqrt{a^2 - x^2}^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + 2 \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right]$$

$$= 4 \int_0^a \left[2x^4\sqrt{a^2 - x^2} + 3x^2\sqrt{a^2 - x^2}^3 + x^2\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}^5 - \sqrt{a^2 - x^2} \right] dx$$

$$+ 2 \int_0^a \left[\frac{-x^6}{\sqrt{a^2 - x^2}} - 4 \frac{x^4\sqrt{a^2 - x^2}^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}} - 3 \frac{x^2\sqrt{a^2 - x^2}^4}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{x^2\sqrt{a^2 - x^2}^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + 2 \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right]$$

On pose le changement de variable suivant :

$$x^2 = a^2t \quad \text{alors : } dx = \frac{a}{2}t^{-1/2}dt \quad \text{et : } \begin{cases} x = 0 \implies t = 0 \\ x = a \implies t = 1 \end{cases}$$

alors :

$$\begin{aligned}
\beta(a) &= 2a^2 \left\{ a^4 \left[\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right) - 2\beta\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) - \beta\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) \right] + a^2 \left[\beta\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + 2\beta\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) - \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \right\} \\
&= 2a^2 \left[-2a^4 \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(4)} + a^2 \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} + \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} \right] \\
&= \pi a^2 \left(-\frac{1}{4}a^4 + \frac{3}{4}a^2 + 1 \right) \\
&= -\frac{1}{4}\pi a^2 (a+2)(a-2)(a^2+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta(a) = 0 &\implies \pi a^2 \left(-\frac{1}{4}a^4 + \frac{3}{4}a^2 + 1 \right) = 0 \\
&\implies -\frac{1}{4}\pi a^2 (a+2)(a-2)(a^2+1) = 0 \\
&\implies a = 2 \qquad (a > 0)
\end{aligned}$$

Donc il existe un cycle limite d'amplitude 2

$$\left[\frac{\partial \beta(a)}{\partial a} \right]_2 = \pi \left[-\frac{3}{2}a^5 + 3a^3 + 2a \right]_2 = -20\pi$$

$$\sigma = -\frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{\partial \beta(a)}{\partial a} \right]_2 = 10\pi\varepsilon$$

alors le cycle limite d'amplitude 2 est instable .

Exempel 3.2 :

Soit l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + 2\varepsilon y \left[-8x^4 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{5} + 3y^2 \right] \end{cases}$$

$$f(x, y) = 0$$

$$g(x, y) = -16x^4y - \frac{2}{5}x^2y + 6y^3 - \frac{4}{5}y$$

et on a

$$\beta(a) = \int_{-a}^a \left[\tilde{g}(x, \sqrt{a^2 - x^2}) + \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \tilde{f}(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \right] dx$$

Nous obtenons : $\tilde{f}(x, y) = 0$

$$\tilde{g}(x, y) = 2 \left(-16x^4y - \frac{2}{5}x^2y + 6y^3 - \frac{4}{5}y \right)$$

alors

$$\begin{aligned} \beta(a) &= 2 \int_{-a}^a \left[-16x^4\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{2}{5}x^2\sqrt{a^2 - x^2} + 6\sqrt{a^2 - x^2}^3 - \frac{4}{5}\sqrt{a^2 - x^2} \right] dx \\ &= 4 \int_0^a \left[-16x^4\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{2}{5}x^2\sqrt{a^2 - x^2} + 6\sqrt{a^2 - x^2}^3 - \frac{4}{5}\sqrt{a^2 - x^2} \right] dx \end{aligned}$$

On pose le changement de variable suivant :

$$x^2 = a^2t \quad \text{alors : } dx = \frac{a}{2}t^{-1/2}dt \quad \text{et : } \begin{cases} x = 0 \implies t = 0 \\ x = a \implies t = 1 \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \beta(a) &= -2a^2 \left\{ 16a^4\beta\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) + a^2 \left[\frac{2}{5}\beta\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) - 6\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \right] + \frac{4}{5}\beta\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\} \\ &= -2a^2 \left[16a^4 \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(4)} + a^2 \left(\frac{2}{5} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} - 6 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(3)} \right) + \frac{4}{5} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)} \right] \\ &= \pi a^2 \left(-2a^4 + \frac{22}{5}a^2 - \frac{4}{5} \right) \\ &= -\frac{2}{5}\pi a^2 (a^2 - 2)(5a^2 - 1) \end{aligned}$$

$$\beta(a) = 0 \implies \pi a^2 \left(-2a^4 + \frac{22}{5}a^2 - \frac{4}{5} \right) = 0$$

$$\beta(a) = \int_{-a}^a \left[\tilde{g}(x, \sqrt{a^2 - x^2}) + \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \tilde{f}(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \right] dx$$

Nous obtenons : $\tilde{f}(x, y) = 2 \left(-\frac{17}{5}x^7 + \frac{13}{3}x^5 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{9}x \right)$

$$\tilde{g}(x, y) = 2 \left(-\frac{9}{5}x^6y + \frac{1}{9}x^4y - \frac{10}{9}x^2y + \frac{1}{6}y \right)$$

alors

$$\begin{aligned} \beta(a) &= 2 \int_{-a}^a \left[-\frac{9}{5}x^6\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{9}x^4\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{10}{9}x^2\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{6}\sqrt{a^2 - x^2} \right. \\ &\quad \left. + -\frac{17}{5}\frac{x^8}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{13}{3}\frac{x^6}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{2}{3}\frac{x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{1}{9}\frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right] dx \\ &= 4 \int_0^a \left[-\frac{9}{5}x^6\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{9}x^4\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{10}{9}x^2\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{6}\sqrt{a^2 - x^2} \right. \\ &\quad \left. + -\frac{17}{5}\frac{x^8}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{13}{3}\frac{x^6}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{2}{3}\frac{x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{1}{9}\frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right] dx \end{aligned}$$

On pose le changement de variable suivant :

$$x^2 = a^2t \quad \text{alors : } dx = \frac{a}{2}t^{-1/2}dt \quad \text{et : } \begin{cases} x = 0 \implies t = 0 \\ x = a \implies t = 1 \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \beta(a) &= 2a^2 \left\{ a^6 \left[-\frac{9}{5}\beta\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right) - \frac{17}{5}\beta\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right) \right] + a^4 \left[\frac{1}{9}\beta\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) + \frac{13}{3}\beta\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + a^2 \left[-\frac{10}{9}\beta\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) - \frac{2}{3}\beta\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \right] + \frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{9}\beta\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\} \\ &= 2a^2 \left[a^6 \left(-\frac{9}{5} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(5)} - \frac{17}{5} \frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(5)} \right) + a^4 \left(\frac{1}{9} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(4)} + \frac{13}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(4)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + a^2 \left(-\frac{10}{9} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} - \frac{2}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} \right) + \frac{1}{6} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)} - \frac{1}{9} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} \right] \\ &= 2\pi a^2 \left(-a^6 + \frac{49}{36}a^4 - \frac{7}{18}a^2 + \frac{1}{36} \right) \end{aligned}$$

$$\beta(a) = -\frac{1}{18}\pi a^2 (a^2 - 1) (9a^2 - 1) (4a^2 - 1)$$

$$\beta(a) = 0 \implies 2\pi a^2 \left(-a^6 + \frac{49}{36}a^4 - \frac{7}{18}a^2 + \frac{1}{36}\right) = 0$$

$$\implies -\frac{1}{18}\pi a^2 (a^2 - 1) (9a^2 - 1) (4a^2 - 1) = 0$$

$$\implies a_1 = \frac{1}{3} \text{ et } a_2 = \frac{1}{2} \text{ et } a_3 = 1 \quad (a > 0)$$

Donc il existe trois cycles limites d'amplitudes $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ et 1.

$$\left[\frac{\partial\beta(a)}{\partial a}\right]_{\frac{1}{3}} = \pi \left[-16a^7 + \frac{49}{3}a^5 - \frac{28}{9}a^3 + \frac{a}{9}\right]_1 = -\frac{40}{729}\pi$$

$$\sigma = -\frac{\varepsilon}{3} \left[\frac{\partial\beta(a)}{\partial a}\right]_{\frac{1}{3}} = \frac{40}{729}\pi\varepsilon$$

alors le cycle limite d'amplitude $\frac{1}{3}$ est instable .

$$\left[\frac{\partial\beta(a)}{\partial a}\right]_{\frac{1}{2}} = \pi \left[-16a^7 + \frac{49}{3}a^5 - \frac{28}{9}a^3 + \frac{a}{9}\right]_{\frac{1}{2}} = \frac{5}{48}\pi$$

$$\sigma = -\frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{\partial\beta(a)}{\partial a}\right]_{\frac{1}{2}} = -\frac{5}{48}\pi\varepsilon$$

alors le cycle limite d'amplitude $\frac{1}{2}$ est stable .

$$\left[\frac{\partial\beta(a)}{\partial a}\right]_1 = \pi \left[-16a^7 + \frac{49}{3}a^5 - \frac{28}{9}a^3 + \frac{a}{9}\right]_1 = -\frac{8}{3}\pi$$

$$\sigma = -\frac{\varepsilon}{1} \left[\frac{\partial\beta(a)}{\partial a}\right]_1 = \frac{8}{3}\pi\varepsilon$$

alors le cycle limite d'amplitude 1 est instable .

Conclusion

En fin, on peut conclure que :

La méthode de la moyenne est similaire que la méthode de perturbation est donné même résultat à partir de nombres des solutions et leurs amplitudes.

Bon nombre des questions nous gardons pour nous même (pour la recherche).

Bibliographie

- [1] **Giacomini, H. & Neukirch, S.**[1997], Number of limit cycles of the Liénard equation, *Phys.Rev.E* 56,3809.
- [2] **J.L. Lopez and R. Lopez-Ruiz**, Number and amplitude of limit cycles emerging from topologically equivalent perturbed centers. arXiv :nlin.PS/0210024 v1 14 Oct 2002.
- [3] **J.L. Lopez and R. Lopez-Ruiz**, The limit cycles of Liénard equations in the strongly nonlinear regime, *Chaos, Solitons & Fractals* 11, 747-756 (2000).
- [4] **R. Lopez-Ruiz and J.L. Lopez**, Bifurcation curves of limit cycles in some Liénard systems, *Int. J. of Bifurcation and Chaos* 10, 971-980 (2000).
- [5] **A. Makhlouf and Y. Bouattia**. Limit cycles of Liénard systems. Proceeding of the conference on differential & difference equations and applications pp 743-755. Hindaoui Publishing Corporation.
- [6] **A. Makhlouf and Y. Bouattia**. Limit cycles of Liénard system in the weak and strong regimes. Proceeding of neural. Parallel and scientific computations 3[2006] 157-161. Dynamic publishers.Inc.
- [7] **R.E. Mickens**, A combined equivalent linearization and averaging perturbation method for nonlinear oscillator equation. *Journal of Sound and Vibration* 264 (2003) 1195-1200.
- [8] **L Perko** : "Differential equations and dynamical systems", Texts in Applied Mathematics, 7. Third edition. Springer-Verlag, New York, (2001).

- [9] **Sébastien. Neukirch**, Thèse de doctorat de l'université Paris 6, Les attracteurs des systèmes dynamiques dissipatifs de Lorenz et de Liénard, nombre, forme et localisation.